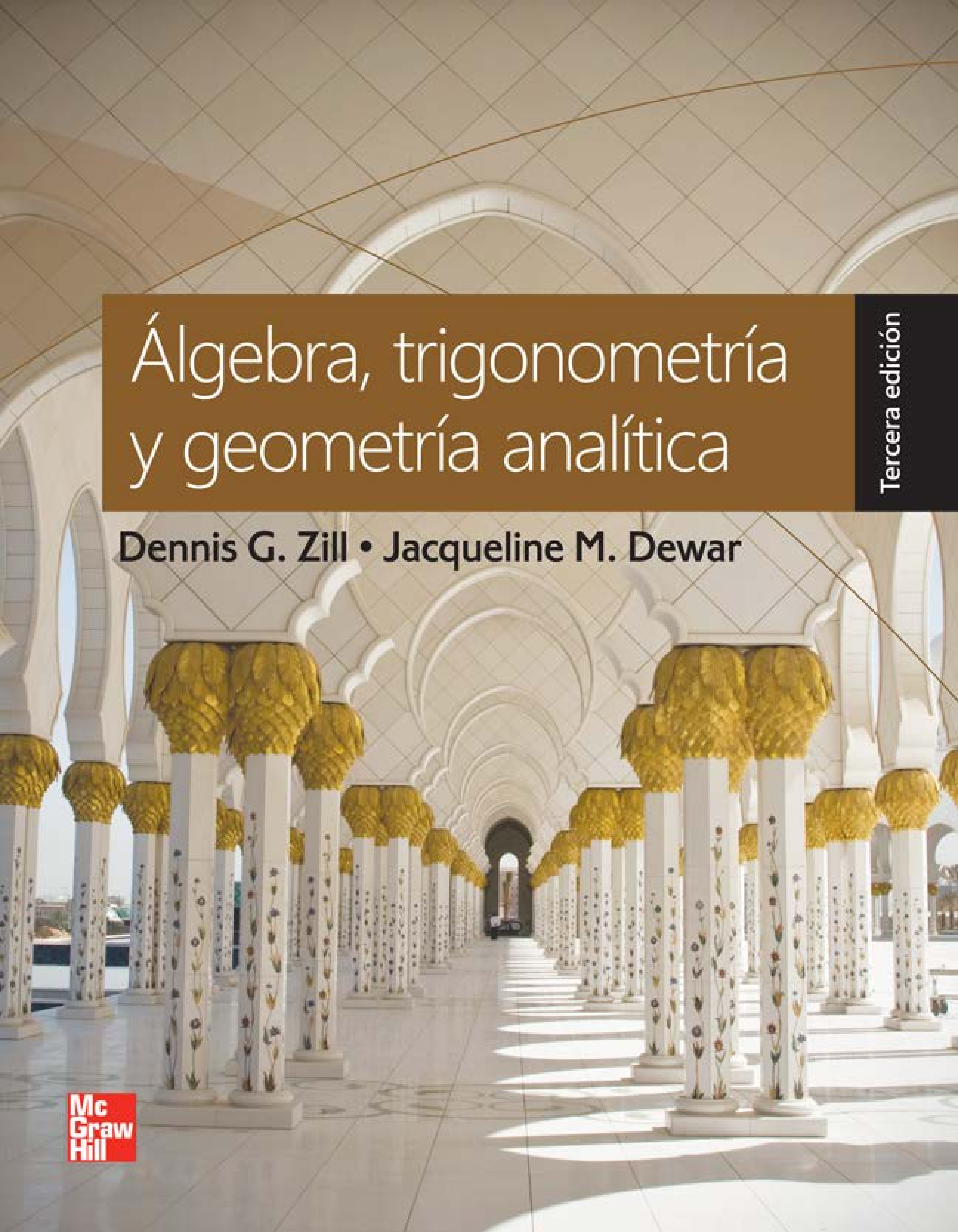


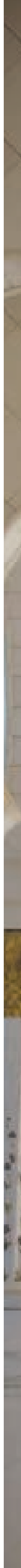
Álgebra, trigonometría y geometría analítica

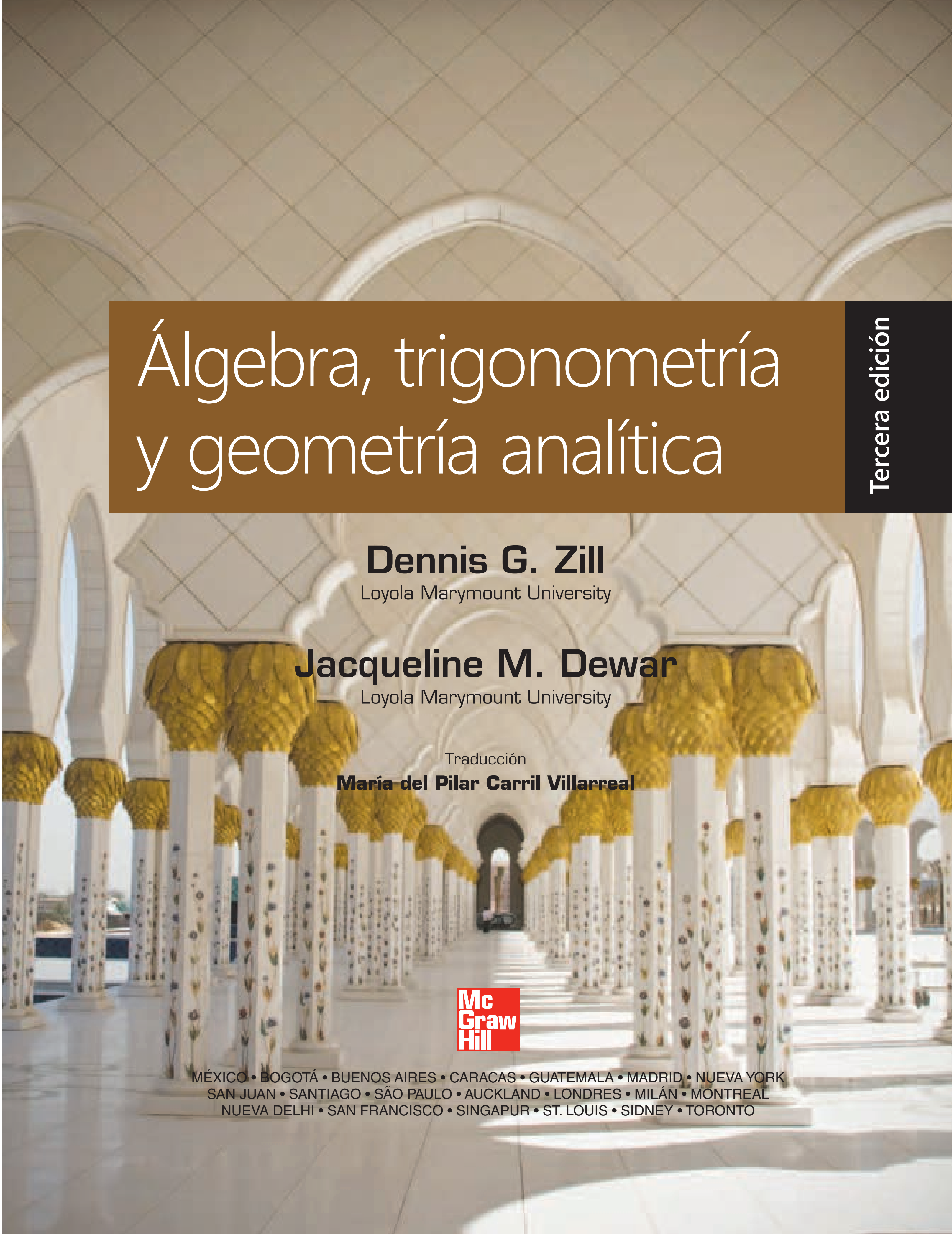
Tercera edición

Dennis G. Zill • Jacqueline M. Dewar

Mc Graw Hill

Álgebra, trigonometría y geometría analítica





Álgebra, trigonometría y geometría analítica

Tercera edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Jacqueline M. Dewar
Loyola Marymount University

Traducción

María del Pilar Carril Villarreal

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Coordinadora editorial: Alejandra Martínez Ávila
Editor sponsor: Sergio G. López Hernández
Supervisor de producción: Zeferino García García

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Tercera edición

Mc Graw Hill **Educación**

ISBN: 978-607-15-0714-3

Translated from the 2012 English edition fo
ALGEBRA AND TRIGONOMETRY, 3rd ed.

ISBN: 978-0-07637-5461-7

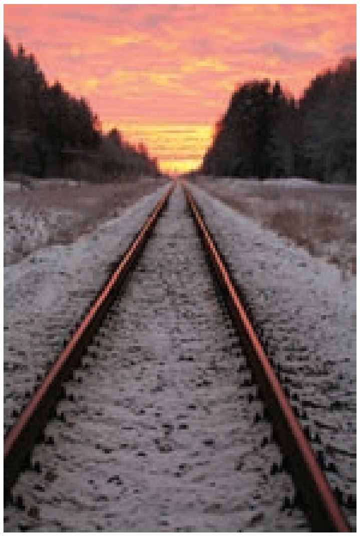
1234567890 1098765432

Impreso en México *Printed in Mexico*

The McGraw-Hill Companies

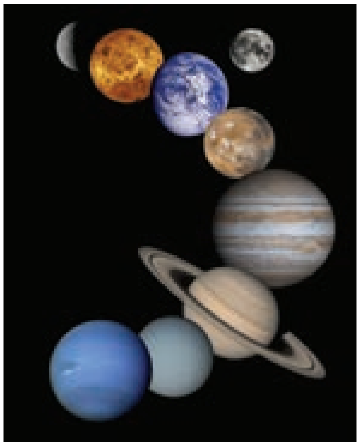
Contenido

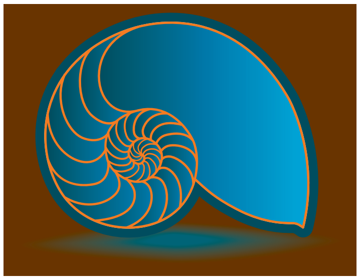
3 Ecuaciones y desigualdades 111

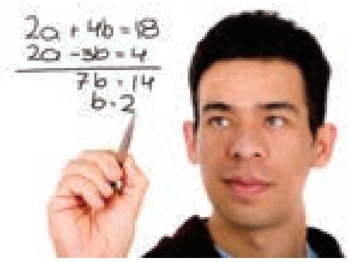


4 Sistema de coordenadas rectangulares y gráficas 167

5 Funciones y gráficas 199






2a + 4b = 18
2a − 3b = 4
7b = 14
b = 2


ABCDEF
GHIJKL
MNOPQR
STUVWX
YZ1234
567890

Prefacio

Para el profesor

Filosofía En esta obra reflejamos nuestra filosofía de que un libro de matemáticas para estudiantes de bachillerato debe ser legible, directo y muy motivador. Y aun así, los estudiantes sólo aprenden matemáticas haciendo matemáticas. Por tanto, a lo largo del texto hemos puesto énfasis en la resolución de problemas como medio de comprensión. Los ejemplos están diseñados para motivar, instruir y guiar los alumnos. A la vez, los ejercicios les brindan la oportunidad de probar su comprensión, desafiar su intelecto y aplicar sus conocimientos a situaciones del mundo real.

Público y flexibilidad Escribimos este libro para presentar temas de álgebra, gráficas, funciones, logaritmos, trigonometría, sistemas de ecuaciones y desigualdades, matrices, geometría analítica, coordenadas polares, sucesiones y probabilidad de modo que sea accesible a un estudiante de bachillerato con algunos conocimientos de matemáticas. Hemos incluido suficiente material para un curso normal de un semestre, de dos cuatrimestres e incluso para uno de un año. La cantidad de temas abordados permite que el profesor elija los que considere más apropiados para lograr el objetivo de su curso, sin soslayar los antecedentes y las habilidades de los estudiantes. La obra puede servir como preparación para las matemáticas finitas, la estadística o las matemáticas discretas. También puede ser un curso introductorio de matemáticas para quienes estudian artes liberales o negocios y planean no profundizar en las matemáticas, o bien, como un primer curso de varios que brinden los fundamentos para el cálculo.

Características

Ejemplos Nuestra experiencia nos ha demostrado que los ejemplos y los ejercicios son la principal fuente de aprendizaje en un libro de matemáticas. Hemos visto que los estudiantes se basan en los ejemplos, no en los teoremas ni en las demostraciones. Por consiguiente, hemos incluido gran cantidad de ejemplos que ilustran tanto los conceptos teóricos presentados en la obra como las técnicas usadas para realizar los cálculos correspondientes.

Ejercicios Como hemos dicho, creemos que los estudiantes sólo aprenden haciendo. En consecuencia, para promover la participación activa en la resolución de problemas los ejercicios son abundantes y variados. En cada grupo se incluyen numerosos problemas de ejercitación, preguntas de verdadero/falso, oraciones para añadir la o las palabras faltantes, aplicaciones, problemas de reto, problemas que implican la graficación o la interpretación de gráficas, así como problemas para analizar y comentar. Tal variedad brinda al estudiante la oportunidad de consolidar lo que ha aprendido acerca de los conceptos fundamentales, de notar los usos prácticos de las ideas matemáticas y de poner a prueba su ingenuidad. En esta tercera edición hemos reorganizado y ampliado casi todos los grupos de ejercicios.

■ **Motivación** Hemos incluido una buena cantidad de demostraciones, pero realmente la motivación se ofrece al presentar los conceptos ya sea intuitiva o geométricamente. Por añadidura, siempre que fue posible usamos figuras para ilustrar una idea o dar un apoyo para encontrar una solución.

■ **Énfasis en las funciones** Las funciones son un concepto esencial en este curso y en las matemáticas en general, de modo que en esta edición hemos puesto más énfasis en ellas y en su notación.

■ **Énfasis en la graficación** También se ha puesto énfasis en la graficación de ecuaciones y de funciones. A lo largo del texto hemos insistido en la simetría, en el uso de gráficas desplazadas, en la reflexión, en las intersecciones con los ejes coordenados y en la interpretación de las gráficas.

Novedades en la tercera edición

■ **Aplicaciones** En esta edición seguimos presentando aplicaciones seleccionadas de diarios, revistas y textos científicos. Estos problemas de la "vida real" muestran a los estudiantes el poder y la utilidad de las matemáticas que aprenden en este curso. Entre el amplio repertorio de disciplinas de donde proceden las aplicaciones se cuentan la astronomía, la biología, los negocios, la química, la ecología, la ingeniería, la geología, la medicina, la meteorología, la óptica y la física.

■ **Leyendas** En los ejemplos y en los márgenes hemos agregado una gran cantidad de leyendas impresas en color azul para guiar al estudiante por los pasos de la resolución de algún ejemplo y para mostrarle cómo se usan los conceptos y las propiedades expuestos en los teoremas y las definiciones. Las leyendas impresas en rojo que aparecen en los márgenes indican *precaución*, y se han colocado junto a las partes de la exposición que los estudiantes deben leer más despacio o incluso leer un par de veces para evitar dificultades o malas interpretaciones.

■ **Aperturas de capítulo** Cada capítulo empieza ahora mostrando su propio contenido. Además, hemos incluido un texto de motivación de los temas expuestos, así como una breve reseña histórica de una o más personas que influyeron en el desarrollo de las matemáticas.

■ **Notas del aula** Ciertas secciones del texto terminan con una sección de comentarios informales llamada "Notas del aula". Se dirige directamente al estudiante y en ella se aborda una gama amplia de aspectos relacionados con los alumnos, el libro o las clases, como terminología alternativa, errores comunes, refuerzo de conceptos importantes, materiales que se aconseja aprender de memoria, procedimientos de resolución, uso correcto e incorrecto de la calculadora, consejos sobre la relevancia de la pulcritud y la organización, interpretaciones equivocadas y, ocasionalmente, palabras de aliento.

■ **Conceptos clave** Cada capítulo termina con una lista de temas que consideramos los más importantes. El estudiante puede usarla para repasar el material antes de realizar pruebas y exámenes.

■ **Ejercicios de repaso del capítulo** Para ayudar al profesor a elegir los temas de repaso o énfasis, hemos reorganizado todos los ejercicios de repaso del capítulo en tres partes: en la *A* incluimos las preguntas de verdero/falso; en la *B*, oraciones que deben completarse con una o varias palabras, y en la *C* problemas tradicionales con los que se repasan los temas y conceptos más relevantes expuestos en el capítulo.

Figuras Cabe decir algo acerca de la numeración de las figuras, definiciones, teoremas y tablas. Debido a la enorme cantidad de figuras incluidas en el libro, en esta tercera edición usamos un sistema decimal para hacer referencia a ellas. Por ejemplo, "Figura 1.2.3" se interpreta así:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Capítulo} & \textit{Sección} & & & \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ 1 \cdot & 2 \cdot & 3 & \leftarrow & \textit{Tercer figura de la sección} \end{array}$$

Consideramos que este tipo de numeración facilita remitirse a las figuras, definiciones y teoremas cuando se hace referencia a ellas en secciones o capítulos posteriores. Asimismo, para relacionar mejor una figura con el texto, en la referencia que se hace a ella se usa el mismo tipo de letra y color que en el número de la figura; por ejemplo, **FIGURA 1.2.3**. Además, en esta edición todas las figuras tienen pies breves y explicativos.

Temas nuevos En seguida se indican algunos cambios hechos en cuanto a los temas abordados:

- Casi todos los grupos de ejercicios incluyen ahora algunos llamados "Para el análisis". Fundamentalmente, son de tipo conceptual. Esperamos que los profesores los usen y que, con su pericia, logren involucrar a los alumnos en un intercambio de ideas acerca de cómo resolverlos. Esos problemas podrían también ser la base para dejar tareas escritas. Para favorecer la originalidad, no incluimos respuestas a esos problemas.
- Mejoramos la explicación sobre la función inversa (sección 5.6) añadiendo figuras que resultaran más claras y motivadoras.
- La sección 5.7, "Traducción de palabras en funciones", es nueva en el capítulo.
- La sección 5.8, "Recta de mínimos cuadrados", también es nueva en el capítulo. En ella calculamos la recta de mínimos cuadrados en la forma algebraica normal. El mismo tema se presenta de nuevo en la sección 14.6 desde el punto de vista de las matrices, específicamente, de la matriz inversa.
- El capítulo sobre funciones logarítmica y exponencial se ha reescrito por completo. En la sección 7.4 se consideraron nuevos modelos matemáticos relacionados con dichas funciones. Las funciones hiperbólicas se explican ahora en la nueva sección 7.5.
- Se ha eliminado la comprobación de la inutilidad de las identidades trigonométricas incluida en ediciones anteriores. Nos pareció cuestionable el valor que tenía para el aprendizaje, sobre todo cuando hay temas mucho más importantes que podíamos presentar más profundamente. En esta edición, la sección 9.4 se dedica a las importantes identidades pitagóricas, a las fórmulas de suma y diferencia, a las de doble ángulo y a las de semiángulo.
- En el capítulo 10 se añadió una sección, la 10.5, "Movimiento armónico simple".
- Las coordenadas polares se explican ahora en su propio capítulo, el 12. La exposición sobre vectores en el plano se removió ahí.
- Debido a su sencillez hemos añadido explicaciones sobre la rotación de gráficas polares en el capítulo 12 (secciones 12.1 a 12.3).
- En el capítulo 12 se agregó una sección nueva, la 12.5, "El producto punto".
- En la sección 14.5, "Sistemas lineales: matrices aumentadas", mostramos cómo usar operaciones elementales entre renglones en una matriz aumentada para balancear ecuaciones químicas.
- En la sección 14.6, "Sistemas lineales: matrices inversas", volvemos a abordar el tema de la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$. En esta sección calculamos los coeficientes m y b mediante métodos matriciales.
- En el capítulo 14 añadimos una breve sección, la 14.8, "Criptografía". En ella se expone la idea de codificar y decodificar mensajes empleando matrices. Creemos que

al estudiante le interesará el tema y quizá incluso lo motive a buscar más información acerca de esta importante aplicación de las matrices.

- En el capítulo 15 se añadió una sección, la 15.3, “Convergencia de sucesiones y series”. La exposición sobre la convergencia de una sucesión o de una serie infinita se mantiene en el nivel intuitivo.
- La sección sobre permutaciones y combinaciones de la edición anterior se ha reescrito y ahora se llama “Principios de conteo” (sección 15.6).

Agradecimientos

La fortuna nos sonríe al contar con la ayuda de las personas siguientes, quienes leyeron todo o parte del texto, o participaron en un sondeo detallado. Sus críticas y muchas de sus valiosas sugerencias merecen un reconocimiento y nuestra gratitud:

Wayne Andrepont, *University of Southwestern Lousiana*
Nancy Angle, *Colorado School of Mines*
James E. Arnold, *University of Wisconsin, Milwaukee*
Judith Baxter, *University of Illinois, Chicago Circle*
Margaret Blumberg, *Southeastern Louisiana University*
Robert A. Chaffer, *Central Michigan University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Chris Ennis, *Carleton College*
Jeffrey M. Gervasi, *Porterville College*
E. John Hornsby, *University of New Orleans*
Don Johnson, *New Mexico State University*
Jimmie Lawson, *Lousiana State University*
Gerald Ludden, *Michigan State University*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Richard Marshall, *Eastern Michigan University*
Glenn Mattingly, *Sam Houston State University*
Michael Mays, *West Virginia University*
Phillip R. Montgomery, *University of Kansas*
Bruce Reed, *Virginia Polytechnic Institute* y *State University*
Jean Rubin, *Purdue University*
Helen Salzberg, *Rhode Island College*
George L. Szoke, *University of Akron*
Darrell Turnbridge, *Kent State University*
Carol Achs, *Mesa Community College*
Joseph Altinger, *Youngstown State University*
Phillip Barker, *University of Missouri, Kansas City*
Wayne Britt, *Lousiana State University*
Kwang Chul Ha, *Illinois State University*
Duane Deal, *Ball State University*
Richard Friedlander, *University of Missouri, St. Louis*
August Garver, *University of Missouri-Rolla*
Irving Katz, *George Washington University*
Janice Kilpatrick, *University of Toledo*
Barbara Meininger, *University of Oregon*
Eldon Miller, *University of Mississippi*
Judith Rollstin, *University of New Mexico*
Monty J. Strauss, *Texas Teach University*
Faye Thames, *Lamar University*
Waldemar Weber, *Bowling Green State University*

Aprovechamos la oportunidad para manifestar nuestro reconocimiento a Barry A. Cipra por proporcionar muchos de los problemas de aplicación incluidos en los grupos de ejercicios, así como a nuestro colega en la Loyola Marymount University, Warren S. Wright, por permitirnos usar su material de una edición anterior y por su meticulosa lectura de las primeras pruebas de la obra.

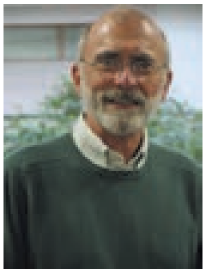
Nuestra cálida gratitud a todas las buenas personas de Jones & Bartlett Learning que trabajaron en el texto. Debido a su número, permanecerán irremediablemente anónimos. Sin embargo, queremos dar un agradecimiento especial a Timothy Anderson, editor de adquisiciones senior, y a Amy Rose, directora de producción, por su arduo trabajo, su cooperación y paciencia en la realización de esta tercera edición.

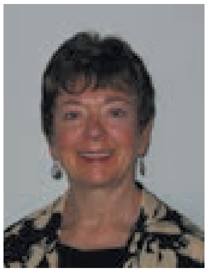
Todos los errores del texto son nuestros. Si se encuentra alguno, le agradeceríamos que nos llamara la atención por medio del editor en

tanderson@jblearning.com

Dennis G. Zill

Jacqueline M. Dewar





LÓGICA Y CONJUNTOS*

1

En este capítulo

Un conjunto es una colección de elementos que comparten una característica; por ejemplo, la afición por un deporte o por un equipo deportivo

* El autor de este capítulo sobre lógica y conjuntos es el profesor Amado Reyes, de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, y de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Conjuntos La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se usa en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo XVI fue **François Viète** (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió muchas obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales imprimió y distribuyó por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viéte era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3 etcétera. Viète, que sabía escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias: x, *x quadratum* (cuadrado), *x cubum* (cubo), etcétera. Además, extendió el uso de las letras del alfabeto para representar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que emplearon para construir una serie completa de términos.

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales sobre conjuntos que un plan de estudios de bachillerato suele incluir.

1.1 Enunciados y valor de verdad

Lógica La lógica es la rama del conocimiento que trata los métodos de razonamiento mediante reglas y técnicas, con el fin de determinar si un argumento es válido. El tema que nos ocupa es el de la lógica usada en matemática. Aquí trabajamos con elementos básicos llamados *proposiciones*.

Definición 1.1.1 Proposiciones

Una **proposición** es un enunciado u oración declarativa de la cual se puede afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

Definición 1.1.2 Valor de verdad

La veracidad o falsedad de una proposición es lo que se llama su **valor de verdad**.

EJEMPLO 1 Proposiciones

La expresión “la Tierra es redonda” es una proposición. Puede notarse que su valor de verdad es verdadero, ya que se conoce con certeza que la Tierra es redonda. ≡

EJEMPLO 2 Proposiciones y valor de verdad verdadero

La expresión “$2 + 3 = 5$”, que se lee “dos más tres es igual a cinco”, es una proposición con valor de verdad verdadero, ya que en el sistema numérico decimal (que usa el número 10 como referencia) se conoce con certeza que $2 + 3 = 5$. ≡

EJEMPLO 3 Proposiciones y valores de verdad

La expresión “$1 + 1 = 5$”, que se lee “uno más uno es igual a cinco”, es una proposición con valor de verdad falso, ya que se conoce con certeza que $1 + 1 \neq 5$ ($\neq$ se lee “diferente de”).

¿Por qué la expresión $3 - x = 5$ es una oración declarativa, pero no es una proposición? $3 - x = 5$ no es una proposición porque no sabemos su valor de verdad a menos que asignemos un valor a la variable x. Si asignamos a x el valor -2, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad verdadero, ya que $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$. Pero si le asignamos el valor 6, por ejemplo, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad falso, ya que $3 - 6 \neq 5$.

¿Por qué la expresión "¿Habla usted español?" no es una proposición? ≡

La expresión, "¿habla usted español?" no es una proposición porque no es un enunciado declarativo sino interrogativo.

¿Por qué la expresión "tome dos aspirinas" no es una proposición? Porque se trata de un enunciado imperativo, es una orden, no es un enunciado declarativo.

Postulados o axiomas y teoremas

Definición 1.1.3 Axioma

Un **axioma** o postulado es una proposición inicial que se presupone verdadera. El conjunto de postulados de los cuales se desprenden las demás proposiciones de un sistema se llama **conjunto de postulados del sistema**. En éste, uno de los axiomas no debe ser deducible de los otros.

EJEMPLO 4 Axiomas

Uno de los postulados de la geometría euclidiana es el de la recta: "Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene".

Este postulado o axioma forma parte de un conjunto de postulados del sistema que plantea la geometría de Euclides, estudiada desde la escuela elemental. ≡

EJEMPLO 5 Axioma

En nuestro estudio de geometría aceptamos cierta la proposición: "Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto".

Éste es otro ejemplo de los postulados o axiomas sobre los que se apoya el sistema geométrico euclidiano. ≡

La característica básica de un postulado o axioma es el hecho de ser independiente de otras proposiciones.

Definición 1.1.4 Teorema

Un **teorema** es cualquier proposición que se desprende de otra proposición o proposiciones dadas por supuestas o previamente demostradas dentro del sistema. Así, un teorema es una proposición cuya veracidad requiere ser demostrada a partir de otras.

EJEMPLO 6 Teorema

El teorema del triángulo isósceles establece que "si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes".

Este teorema se demuestra a partir de otras proposiciones, entre las cuales se cuenta uno de los postulados para congruencia de triángulos (lado-ángulo-lado, L $\lessdot$ L). ≡

En estas notas tratamos básicamente con el análisis de la veracidad de las proposiciones en forma general, es decir, con el cálculo proposicional.

1.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los enunciados 1 a 15 indique en cada caso si el enunciado es o no es una proposición. Justifique su respuesta. En caso de ser una proposición, establezca su valor de verdad.

1. Julio César fue presidente de la República Dominicana.

2. $2 + 2 = 4$

3. Si la Tierra es plana, entonces $2 + 2 = 4$

4. ¿En tu casa o en la mía?

5. ¡Ayúdeme, por favor!

6. La matemática es importante.

7. Existen dos soluciones para la ecuación $x^2 + 4 = 20$, y ambas soluciones son enteras.

8. Si x es cualquier número entero, entonces x^2 es un número entero positivo.

9. Vé en su busca.

10. x es mayor que y.

11. 15 es un número primo.

12. $a + b = 1.7$

13. La población de la República Dominicana es de siete millones.

14. Las mesas son cuadradas.

15. ¿Bello día?

1.2 Proposiciones simples y compuestas

Sin pretender dar una definición precisa de variable podemos afirmar que en matemática se usan las literales x, y, t, … para representar números reales, y estas literales se llaman **variables**. Las variables pueden combinarse mediante las operaciones corrientes para producir otras expresiones variables más complejas. En lógica, las literales p, q, r, … denotan variables que pueden sustituirse con proposiciones.

EJEMPLO 1 Variables

La variable proposicional p puede sustituirse con la proposición "El sol brilla todo el día"; en este caso:

p: El sol brilla todo el día

y la variable proposicional q puede reemplazarse con la proposición "Hace frío"; aquí:

q: Hace frío ≡

Definición 1.2.1 Conectivos lógicos

Los **conectivos lógicos** son símbolos usados para combinar proposiciones, con lo que se producen otras, llamadas **proposiciones compuestas**.

Las proposiciones p y q que se combinan mediante algún conectivo lógico para formar una proposición compuesta se llaman **proposiciones simples**.

CONECTIVOS FUNDAMENTALES

Los conectivos fundamentales usados en este capítulo son:

a) $\sim$ negación

b) $\wedge$ conjunción

c) $\vee$ disyunción inclusiva

d) $\underline{\vee}$ disyunción exclusiva

e) $\rightarrow$ condicionante

f) $\leftrightarrow$ bicondicionante

Negación La **negación** de una proposición es una nueva proposición que tiene un valor de verdad opuesto, es decir, si p es verdadera, la negación de p es falsa. Se denota con $\sim p$ y se lee **no *p***.

EJEMPLO 2 Negación

Si p: El río está sucio, entonces

$\sim p$: No es verdad que el río está sucio

o simplemente:

$\sim p$: El río no está sucio.

La característica fundamental de la negación es que es una proposición cuyo valor de verdad es contrario al valor de verdad de la proposición dada. Así, si la proposición p es verdadera, entonces $\sim p$ es falsa y viceversa.

Definición 1.2.2 Tabla de verdad

El arreglo que nos permite tener los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama una **tabla de verdad**.

La tabla de verdad para la negación de p está dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

donde V significa verdadera y F falsa.

EJEMPLO 3

La proposición

$$p: 2 + 3 > 1$$

es una proposición verdadera. Pero la proposición

$$\sim p: \text{no es verdad que } 2 + 3 > 1 \qquad \text{o} \qquad \sim p: 2 + 3 \leq 1$$

es una proposición falsa.

Conjunción La **conjunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la conjunción ($\wedge$). Esta proposición se denota con $p \wedge q$ y se lee "p y q".

EJEMPLO 4

Si p: "La silla es alta" y q: "El mantel es blanco", entonces la proposición "La silla es alta y el mantel es blanco" se expresa así: $p \wedge q$. ≡

Es natural que el valor de verdad de una proposición compuesta dependa de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

La característica fundamental de la conjunción es que su valor de verdad es verdadero sólo en el caso en que las proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad verdadero. La tabla de verdad de una conjunción es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Note que cada línea de la tabla registra el valor de verdad de la conjunción para valores particulares de las proposiciones simples que la forman.

EJEMPLO 5 Conjunción

Si sabemos que "El día está lluvioso" es una aseveración verdadera, pero que la aseveración "El carro es nuevo" es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de la aseveración "El día está lluvioso y el carro es nuevo"?

Solución Si p: "El día está lluvioso" y q: "El carro es nuevo", entonces la proposición "El día está lluvioso y el carro es nuevo" se escribe como $p \wedge q$.

Ahora sabemos que p es verdadero (V) y q es falso (F); basta leer la tabla de la conjunción en la línea donde p es V y q es F para tener el valor de $p \wedge q$, la cual es falsa. Así, procedemos del mismo modo para las demás posibilidades. ≡

Disyunción inclusiva La **disyunción inclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyunción inclusiva ($\vee$). Esta proposición se representa $p \vee q$ y se lee "p o q".

EJEMPLO 6 Disyunción inclusiva

Si p: "Está lloviendo" y q: "$3 < 5$", entonces la proposición "Está lloviendo o $3 < 5$" se expresa $p \vee q$. ≡

La característica fundamental de la disyunción inclusiva es que su valor de verdad es falso sólo en el caso en que las dos proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad falso. En todos los otros casos la disyunción inclusiva tiene valor de verdad verdadero. La siguiente es la tabla de verdad de una disyunción inclusiva.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 7 Disyunción inclusiva

Si p: "El libro es nuevo", es verdadera, en tanto que q: "El joven es inteligente", es falsa, determine el valor de verdad de la proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente".

Solución La proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente" puede expresarse como $p \vee q$. Puesto que p es V y q es F, la segunda fila de la tabla de la disyunción inclusiva muestra que el valor de verdad para $p \vee q$ es V. ≡

Disyuncion exclusiva La **disyunción exclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyuntiva exclusiva ($\veebar$). Esta proposición se denota por $p \veebar q$ y se lee "o p o q".

EJEMPLO 8 Disyunción exclusiva

Si p: "El vaso es bonito" y q: "La leche está adulterada", entonces la proposición "O el vaso es bonito o la leche está adulterada", se expresa $p \veebar q$. ≡

La característica fundamental de la disyunción exclusiva es que su valor de verdad es verdadero sólo cuando las proposiciones que la componen tienen valores de verdad contrarios. En los otros casos la disyunción exclusiva tiene valor de verdad falso. La tabla de verdad de una disyunción exclusiva es la siguiente:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 9 Disyunción exclusiva

Si p: "Antonio va a la fiesta", es falsa y q: "Luisa va al cine", es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine".

Solución La proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine" se puede expresar como $p \veebar q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de la disyunción exclusiva muestra que el valor de verdad para $p \veebar q$ es V. ≡

Condicional La **condicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la condicionante ($\rightarrow$). Esta proposición se denota por $p \rightarrow q$ y se lee "si p entonces q".

EJEMPLO 10 Condicional

Si p: "$2 + 3 = 5$" y q: "La universidad es bonita", la proposición "si $2 + 3 = 5$, entonces la universidad es bonita", se expresa con $p \to q$. ≡

En la estructuras $p \to q$, la proposición que está antes de la flecha se llama el **antecedente** y la que está después de la flecha se llama el **consecuente**.

La característica fundamental de la condicional es que su valor de verdad es falso sólo cuando el consecuente es falso y el antecedente es verdadero. En los demás casos la condicional es verdadera. La siguiente es la tabla de verdad de una condicional:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 11 Condicional

Si p: "$3^2 = 9$", es verdadera y q: "2 es par", es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "Si $3^2 = 9$, entonces 2 es par".

Solución Esta proposición se puede expresar como $p \to q$. Puesto que p es V y q es V, la primera fila en la tabla de verdad de la condicional muestra que $p \to q$ es verdadera (V). ≡

Existen varias formas de leer la condicional $p \to q$; enumeramos a continuación algunas de ellas:

Si $p \to q$ es una condicional dada, entonces la recíproca de $p \to q$ es la condicional $q \to p$. Asimismo, la contrapositiva de $p \to q$ es la condicional $\sim q \to \sim p$ y la inversa es $\sim p \to \sim q$.

***a*)** Si p entonces q

***b*)** p implica q

***c*)** q si p

***d*)** p sólo si q

***e*)** p es condición suficiente para q

***f*)** q es condición necesaria para p

Si construimos las tablas de verdad para $p \to q$ y la contrapositiva $\sim q \to \sim p$, vemos que las dos tablas coinciden en las columnas finales.

Bicondicional La **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la bicondicionante ($\leftrightarrow$). La proposición resultante se representa con $p \leftrightarrow q$ y se lee "p si y sólo si q".

EJEMPLO 12 Bicondicional

Si p: "El triángulo es equilátero", y q: "El triángulo es equiángulo", entonces la proposición "El triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo", se expresa $p \leftrightarrow q$. ≡

La característica fundamental de la bicondicional es que su valor de verdad es verdadero sólo en los casos en que p y q tengan valores de verdad iguales (ambos V o ambos F). En los demás casos la bicondicional es falsa. La tabla de verdad de una bicondicional es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otra forma de leer $p \leftrightarrow q$ es diciendo que p es equivalente a q o que p es una condición necesaria y suficiente para q, y q es una condición necesaria y suficiente para p.

EJEMPLO 13 Bicondicional

Si p: "$15 - 8 < 4$" es falsa y q: "3 es un número primo" es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo".

Solución La proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo" se puede expresar como $p \leftrightarrow q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de verdad de la bicondicional muestra que $p \leftrightarrow q$ es falsa (F). ≡

Las proposiciones compuestas pueden combinarse o conectarse con otras para formar proposiciones aún más complejas. Es claro que el valor de verdad de una proposición, por compleja que sea, depende de los valores de verdad de las proposiciones que las componen en sus formas más simples.

Para hacer la tabla de verdad de una proposición asignamos una columna a cada proposición que interviene, sea ésta simple o compuesta, normalmente comenzando con las más simples y progresando en el orden de complejidad de las proposiciones componentes.

El número de filas de la tabla queda dado por la potencia 2^n, donde n es el número de proposiciones en la forma más simple que entran a formar la proposición dada. Para asignar los valores de verdad a dichas proposiciones se procede de esta forma: la primera columna se llena asignando valores V a la mitad de las filas y valores F a la segunda mitad. La segunda columna se llena asignando valores V a un cuarto de las filas, valores F al segundo cuarto, valores V al tercer cuarto y valores F al último cuarto. La tercera columna se llena asignando valores V a un octavo de las filas, valores F al segundo octavo, valores V al tercer octavo, etcétera. Así, se continúa hasta que terminen las columnas de las proposiciones más simples. Las columnas de las otras proposiciones se llenan a partir de las columnas de las proposiciones más simples que éstas.

EJEMPLO 14 Formación de una tabla de verdad

Determine la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$.

Solución Tomemos las proposiciones p, q, r, $(p \wedge q)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ interviniendo en este caso; así, la tabla tendrá cinco columnas, una para cada proposición, incluida la proposición dada.

Por otro lado, tenemos tres proposiciones en sus formas más simples: p, q y r, así que el número de filas de la tabla es $2^3 = 8$. Procedemos a llenar la tabla:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

≡

EJEMPLO 15 Valor de verdad

Si sabemos que la proposición p es verdadera, la proposición q falsa y la proposición r verdadera, ¿cuál será el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$?

Solución La solución a este problema es muy fácil de obtener, ya que podemos leer en la tercera fila y en la última columna para determinar que cuando p es V, q es F y r es V, la proposición $(p \wedge q) \wedge r$ es F. ≡

EJEMPLO 16 Tabla de verdad

Determine la tabla de verdad para la proposición $\sim p \vee q$.

Solución Las proposiciones representadas son p, q, $\sim p$, $\sim p \vee q$. Así, la tabla tendrá cuatro columnas. Las proposiciones en sus formas más simples, representadas en la proposición dada, son dos: p y q; por tanto, el número de filas de la tabla es $2^2 = 4$ filas. La tabla es la siguiente:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

≡

1.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 5, escriba cada una de las proposiciones dadas en forma simbólica.

1. "Luis es estudiante y Juan es zapatero".
2. "El domingo es un día feriado o José ha sido expulsado".
3. "Si $2 + 2 = 4$, entonces $3 + 3 = 8$".
4. "O $3 + 4 = 7$ o la Tierra es plana".
5. "Antonio es hijo de Luis si y sólo si Luis es el padre de Antonio".

En los problemas 6 a 10, escriba la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

6. $p \to (q \wedge r)$
7. "Si $2 + 2 = 5$, entonces $2 + 4 = 8$".
8. "Si la Tierra es plana, entonces Julio César fue el primer presidente de Estados Unidos".
9. "Si los cuadrados tienen tres lados, entonces los triángulos tienen cuatro lados".
10. "Si un hexágono tiene seis lados, entonces la Luna es de queso".

En los problemas 11 a 20, suponga que p: $7 < 9$, q: El Sol es un astro frío y r: La temperatura está por debajo de cero. Escriba las proposiciones indicadas.

11. $p \vee q$
12. $p \wedge q$
13. $\sim p \to q$
14. $p \to \sim q$
15. $(r \wedge p) \to q$
16. $[(p \vee q) \wedge (q \wedge r)] \to r$
17. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
18. $\sim(p \vee r) \veebar q$
19. $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$
20. $\sim q \leftrightarrow r$

En los problemas 21 a 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

21. $\sim(p \wedge q)$
22. $\sim p \vee \sim q$
23. $(p \to q) \to [(p \vee \sim q) \to (p \wedge q)]$
24. $[(p \vee q) \wedge r] \to (p \wedge \sim q)$
25. Escriba en forma simbólica el enunciado: "Un número p es real y no racional siempre que p sea un irracional" y construya su tabla de verdad.

En los problemas 26 a 30, considere la proposición:

$$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee r) \to [(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim r)]$$

e indique cuál es el valor de verdad de esta proposición para cada uno de los casos dados.

26. p es falso, q es falso, r es falso.
27. p es falso, q es falso, r es verdadero.
28. p es verdadero, q es falso, r es verdadero.
29. p es verdadero, q es verdadero, r es falso.
30. p es verdadero, q es verdadero, r es verdadero.

En los problemas 31 a 35, considere las proposiciones p: un byte tiene 7 bits, q: una palabra consta de 2 bytes, r: un bit es un 0 o un 1. Si se sabe que p es falso y q y r son verdaderos, escriba enunciados para las proposiciones dadas en cada caso, y determine si el enunciado es verdadero o falso.

31. $p \wedge q$
32. $p \vee r$
33. $\sim(p \wedge q)$
34. $\sim p \vee \sim q$
35. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \vee r)]$

En los problemas 36 a 40, considere:

p: Panamá está en América Central.

q: Colombia está al sur de Venezuela.

r: Quito es la capital de Ecuador.

Observe que p y r son verdaderas, pero q es falsa. Escriba las proposiciones dadas en forma simbólica y determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa.

36. "Panamá está en América Central y Colombia está al sur de Venezuela."
37. "Colombia no está al sur de Venezuela."
38. "Colombia está al sur de Venezuela y Quito es la capital de Ecuador, o Panamá no está en América Central."
39. "Quito no es la capital de Ecuador ni Panamá está en América Central."
40. "Si Panamá está en América Central y Colombia no está al sur de Venezuela, entonces ni Panamá está en América Central ni Quito es la capital de Ecuador."

1.3 Proposiciones lógicamente equivalentes

Considere las tablas de verdad de las proposiciones:

***a*)** $q \vee (r \wedge s)$

q	r	s	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

***b*)** $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

***c*)** $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Definición 1.3.1 Tautología

Una **tautología** es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero (V), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. En la tabla *c*) se muestra que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología.

Definición 1.3.2 Contradicción

Una **contradicción** es una proposición cuyo valor de verdad es falso (F), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla *b*) se muestra que $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim p)$ es una contradicción.

Definición 1.3.3 Contingencia

Una **contingencia** es una proposición que toma valores de verdad verdaderos en unos casos y falsos en otros, según los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla *a*) se muestra que $q \vee (r \wedge s)$ es una contingencia.

Definición 1.3.4 Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante la bicondicionante se obtiene una proposición que es una tautología. Para indicar que dos proposiciones $P(p, q,\ldots)$ y $Q(p, q,\ldots)$ son lógicamente equivalentes escribimos: $P(p, q,\ldots) \equiv Q(p, q,\ldots)$ o $P \Leftrightarrow Q$.

En la tabla *c*) se muestra que las proposiciones $p \wedge q$ y $q \wedge p$ son lógicamente equivalentes, ya que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología. Podemos escribir $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$.

A continuación enumeramos algunas tautologías e implicaciones lógicas (este concepto se define en la próxima sección) de interés en las aplicaciones. Cabe señalar que la contradicción se representa con C.

1. $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ Doble negación

2. ***a***) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ Leyes conmutativas
c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

3. ***a***) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ leyes asociativas
b) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

4. ***a***) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ leyes distributivas
b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5. ***a***) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ leyes de la idempotencia
b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

6. ***a***) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
b) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ leyes de De morgan
c) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
d) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

7. ***a***) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ Implicación
b) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

8. ***a***) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

9. ***a***) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$
b) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$

10. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ Equivalencia

11. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ Ley de exportación

12. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow c]$ Reducción al absurdo

13. $p \Rightarrow (p \vee q)$ Adición

14. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ Simplificación

15. $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$ Modus ponens

16. $[(p \to q) \wedge {\sim}q] \Rightarrow {\sim}p$ Modus tollens

17. $[(p \vee q) \wedge {\sim}p] \Rightarrow q$ Silogismo disyuntivo

18. $p \Rightarrow [q \to (p \wedge q)]$

19. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$ Transitividad de $\leftrightarrow$

20. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$ Transitividad de $\to$ o silogismo hipotético

21. ***a***) $(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee r)]$
b) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$
c) $(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$

22. ***a***) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$
b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$
Dilemas constructivos

23. ***a***) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [({\sim}q \vee {\sim}s) \to ({\sim}p \vee {\sim}r)]$
b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [({\sim}q \wedge {\sim}s) \to ({\sim}p \wedge {\sim}r)]$
Dilemas destructivos

1.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 9, clasifique cada una de las proposiciones dadas como una contingencia, como una tautología o como una contradicción, según corresponda.

1. $p \vee {\sim}(p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \wedge {\sim}(p \vee q)$
3. $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
4. $[p \wedge (q \vee r)] \wedge [q \wedge (p \vee r)]$
5. $(p \to q) \leftrightarrow ({\sim}q \to {\sim}p)$
6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$
7. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $(p \wedge q) \wedge {\sim}\, (p \vee q)$
9. $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \to r)] \to (q \wedge p)$

En los problemas 10 a 14, indique si el par de proposiciones dadas en cada caso es un par de proposiciones lógicamente equivalentes.

10. $[(p \to q) \wedge (r \to s)]$, $[(p \vee r) \to (q \vee s)]$
11. $p \to q$, ${\sim}\, (p \wedge {\sim}q) \to r$
12. $p \wedge q$, ${\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$
13. $(p \to q) \vee (p \to r)$, $p \to (q \vee r)$
14. $(p \to q) \wedge (r \to s)$, $({\sim}q \vee {\sim}s) \to ({\sim}p \vee {\sim}r)$

1.4 Argumentos

Un **argumento** es una relación entre un conjunto de proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ llamadas **premisas** y otra proposición q llamada la **conclusión**. Un argumento se denota por:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q \ (\therefore \text{ se lee } \textit{por tanto})$$

Se dice que un argumento es válido si las premisas dan como consecuencia la conclusión; más formalmente tenemos la definición siguiente.

Definición 1.4.1 Argumento

Un argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$ es válido si q es verdadero cada vez que las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean verdaderas.

Definición 1.4.2 Falacia

Un argumento que no es válido se llama **falacia**.

EJEMPLO 1 Argumento

El argumento $p, p \to q \therefore q$ es válido. Este argumento se llama **modus ponendo ponens** o, más corto, **modus ponens**. La demostración de esta regla se obtiene directamente de la tabla:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que en la primera fila de la tabla q es verdadero cuando p y $p \to q$ lo son; el argumento es válido. ≡

EJEMPLO 2 Falacia

El argumento $p \to q, q \therefore p$ es una falacia, ya que en la tercera línea de la tabla anterior se tiene que p es falso cuando $p \to q$ y q son verdaderos.

Observemos que las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n$ es verdadera. De esta manera, el argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$ es válido si y sólo si q es verdadera siempre que $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n$ sea verdadera o de forma equivalente, si y sólo si la proposición

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n) \to q$$

es una tautología. ≡

EJEMPLO 3 Argumento

Un principio fundamental del razonamiento lógico dice: "Si p implica q y q implica r, entonces p implica r". En otras palabras, el argumento $p \to q, q \to r \therefore p \to r$ (ley del silogismo) es válido.

Para comprobarlo sólo debemos mostrar por medio de una tabla de verdad que la proposición $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ es una tautología.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observe que en los casos donde $p \to q$ y $q \to r$ son verdaderas, entonces $p \to r$ es verdadera; el argumento es válido. ≡

Es importante señalar que la validez del argumento no depende de los valores de verdad o del contenido de los enunciados que aparecen en el argumento, sino solamente de la estructura formal del argumento.

EJEMPLO 4 Argumento

Considere el argumento

a) $p \to q$: Si un hombre es soltero, es infeliz
b) $q \to r$: Si un hombre es infeliz, muere joven
c) $\therefore\ p \to r$: Los solteros mueren jóvenes

Éste es un argumento de la forma

$$p \to q,\ q \to r\ \therefore\ p \to r \text{ (silogismo)}$$

el cual ya sabemos que es válido. Observe que en este ejemplo, p: Él es soltero q: Él es infeliz y r: Él muere joven. ≡

Decimos que una proposición $P(p, q, \ldots)$ implica lógicamente una proposición $Q(p, q, \ldots)$, denotada por:

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots),$$

si $Q(p, q, \ldots)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, \ldots)$ sea verdadera.

EJEMPLO 5 Implicación de proposiciones

La proposición p implica lógicamente la proposición $p \vee q$. Para ver esto consideremos la tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Note que $p \vee q$ es verdadera cada vez que p es verdadera. ≡

Ahora sabemos que si $Q(p, q, \ldots)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, \ldots)$ sea verdadera, entonces el argumento

$$P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$$

es válido y, recíprocamente, el argumento $P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$ es válido si y sólo si el enunciado $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ es siempre verdadero, es decir, si es una tautología. Estas ideas se pueden resumir de la manera siguiente:

Para proposiciones cualesquiera $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ los tres enunciados siguientes son equivalentes:

a) $P(p, q, \ldots)$ implica lógicamente a $Q(p, q, \ldots)$

b) El argumento $P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$ es válido.

c) La proposición $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ es una tautología.

Note que si $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots) \rightarrow P(p, q, \ldots)$, entonces $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ deben tener la misma tabla de verdad y, por tanto, $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$.

Es importante notar que prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos de condicionales del tipo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

A los $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se les llama **hipótesis** y a q se le llama **conclusión**. Demostrar un teorema significa probar que el condicional es verdadero. Observe que no se pretende demostrar que q (la conclusión) es verdadero, sino que q será verdadero siempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean verdaderos. De aquí que las demostraciones matemáticas comienzan frecuentemente con el enunciado "suponga que $p_1, p_2, \ldots p_n$ son verdaderos" y concluye con el enunciado "por tanto, q es verdadero".

Cuando una condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ es una tautología, entonces siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados que componen q o de los p_i. En este caso, el argumento

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$$

o

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

es universalmente válido, sin importar qué enunciados reales se sustituyan por las variables en q y en los p_i. La validez depende de la forma de los enunciados y no de sus valores de verdad. Por ello, estos argumentos universalmente válidos están representados por métodos generales de razonamiento correcto, llamados *reglas de inferencia*. Los pasos de la demostración matemática de un teorema deberán seguirse de la aplicación de reglas de inferencia y una demostración matemática debe iniciarse con la hipótesis, seguir a través de varios pasos, cada uno justificado por alguna regla de inferencia, y llegar a la conclusión. Ya vimos que el argumento $p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$ es universalmente válido y, por tanto, es una regla de inferencia.

Damos a continuación algunas reglas de inferencia de gran utilidad:

1. P
$\therefore P \vee Q$ adición

2. $P \wedge Q$
$\therefore P$ simplificación

3. P
$P \rightarrow Q$
$\therefore Q$ modus ponens

4. $P \rightarrow Q$
$\sim Q$
$\therefore \sim P$ modus tollens

5. $P \vee Q$
$\sim P$
$\therefore Q$ silogismo disyuntivo

6. $P \rightarrow Q$
$Q \rightarrow R$
$\therefore P \rightarrow R$ silogismo hipotético

7. P
Q
$\therefore P \wedge Q$ conjunción

1.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 10, muestre en cada caso si el argumento es válido.

1. $p \leftrightarrow q,\ q\ \therefore\ p$

2. $\sim p \rightarrow q,\ p\ \therefore\ \sim q$

3. $\sim p \rightarrow q,\ q\ \therefore\ p$

4. $p \rightarrow q,\ r \rightarrow \sim q\ \therefore\ r \rightarrow \sim p$

5. $p \rightarrow \sim q,\ \sim r \rightarrow \sim q\ \therefore\ p \rightarrow \sim r$

6. Si estudio, no reprobaré matemática. Si no juego basquetbol, entonces estudio. Pero reprobaré la matemática. Por tanto, jugué basquetbol.

7. Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7. O 5 no es primo, o 2 divide a 7. Pero 5 es primo.

8. Las rosas son rojas.
Las rosas son azules.
Por tanto, las rosas son rojas si y sólo si son azules.

9. Si trabajo, no puedo estudiar.
O trabajo, o paso matemática.
Pasé la matemática.
Por tanto, estudié.

10. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\ \therefore\ p \leftrightarrow q$

En los problemas 11 a 18, efectúe la demostración requerida.

11. Demuestre que $p \leftrightarrow q$ implica lógicamente $p \rightarrow q$.

12. Demuestre que $p \leftrightarrow \sim q$ no implica lógicamente a $p \rightarrow q$.

13. Demuestre que $p \wedge q$ implica lógicamente a p.

14. Demuestre que $\sim p$ implica lógicamente a $p \rightarrow q$.

15. Demuestre que $p \vee q$ no implica lógicamente a p.

16. Dado p, $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, pruebe r.

17. Dado $p \wedge \sim q$, $p \rightarrow r$ y $r \rightarrow (s \vee q)$, pruebe s.

18. Dado $p \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$, pruebe $p \leftrightarrow r$.

1.5 Cuantificadores

A diferencia de las proposiciones que hemos estudiado hasta ahora, el enunciado $x \geq 3$ no es verdadero ni falso. Cuando la variable x se sustituye por ciertos valores, por ejemplo 7, la proposición resultante es verdadera, en tanto que para otros valores de x, por ejemplo 2, la proposición es falsa. Éste es un ejemplo de un enunciado abierto, el cual viene a ser una proposición sólo cuando las variables son sustituidas por los nombres particulares de los objetos. Si un enunciado abierto se llama P y las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, escribimos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y en el caso de una sola variable, escribimos $P(x)$.

El enunciado "x_1, es igual a $x_1 + x_3$" es un enunciado abierto con tres variables. Si lo representamos con $P(x_1, x_2, x_3)$, entonces $P(7, 3, 4)$ es verdadero, ya que $7 = 3 + 4$, pero $P(\mathrm{l}, 2, 3)$ es falso.

Definición 1.5.1 Conjunto de verdad

La colección de objetos que al emplearlos en lugar de las variables en un enunciado abierto lo convierten en una proposición verdadera se llama el **conjunto de verdad** del enunciado.

Antes de determinar el conjunto de verdad es necesario saber cuáles objetos están disponibles para que se les tenga en cuenta. Es decir, debemos haber especificado un universo de discurso. Simbolizamos con A el conjunto universo.

EJEMPLO 1 Conjunto universo

Sea $Q(x)$ el enunciado "$x^2 = 4$". Si tomamos el conjunto de los números reales (R) como el universo de discurso, el conjunto de verdad de $Q(x)$ es $\{2, -2\}$. Si el universo fuera el conjunto de los números naturales, entonces el conjunto de verdad sería $\{2\}$. ≡

Recordemos que un enunciado abierto $P(x)$ no es una proposición, pero $P(a)$ sí lo es para cualquier a en el universo de discurso. Otra forma de construir una proposición a partir de $P(x)$ es modificándola mediante un cuantificador.

Definición 1.5.2 Cuantificador universal

Dado un enunciado abierto $P(x)$ con variables x, el enunciado $\forall x, P(x)$ se lee "para todo x, $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ es el universo completo. El símbolo $\forall$ se llama **cuantificador universal**.

Definición 1.5.3 Cuantificador existencial

El enunciado $\exists x, P(x)$ se lee "existe x tal que $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ no es vacío. El símbolo $\exists$ se llama el **cuantificador existencial**.

EJEMPLO 2 Cuantificador existencial

Suponga que el universo es el conjunto de los números reales; entonces

a) $\exists x, x \geq 3$ es verdadero, pero $\forall x, x \geq 3$ es falso
b) $\exists x, |x| > 0$ es verdadero, pero $\forall x, |x| > 0$ es falso
c) $\exists x, x^2 = -1$ es falso, pero $\forall x, x + 2 > x$ es verdadero. ≡

EJEMPLO 3 Cuantificador existencial

Halle una negación de "cada número real positivo tiene un inverso multiplicativo".

Solución Sea el universo el conjunto de todos los números reales; el enunciado puede representarse por

$$\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1$$

La negación es $\sim(\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$. Esto puede escribirse de las maneras siguientes:

Dado un enunciado abierto $P(x)$, la proposición $\exists! x, P(x)$ se lee "existe un único x tal que $P(x)$". El enunciado $\exists! x, P(x)$ es verdadero cuando el conjunto de verdad consta exactamente de un elemento del universo.

a) $\exists x, \sim(x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$
b) $\exists x, (x > 0 \wedge \sim(\exists y)\, xy = 1)$
c) $\exists x, (x > 0 \wedge \forall y, xy \neq 1)$

Esta última se lee: "Existe un número positivo x para el que no hay inverso multiplicativo". ≡

EJEMPLO 4 Cuantificador existencial

En el universo de los números naturales, la proposición $\exists! x$, x es un número par positivo y primo; es verdadero, ya que el único elemento del conjunto de verdad es el 2. ≡

EJEMPLO 5 Cuantificador existencial

El enunciado $\exists! x, x^2 = 4$ es verdadero si el conjunto universo es el de los números naturales, pero es falso cuando el universo es el conjunto de los números enteros, pues este universo tiene dos números, el 2 y el -2, que cumplen con la condición $x^2 = 4$. ≡

El lector habrá podido notar que un enunciado abierto o predicado se convierte en una proposición cuando intervienen tantos cuantificadores como variables posee dicho enunciado abierto.

Notas del aula

Las dos equivalencias siguientes son de gran utilidad en las aplicaciones:

a) $\sim\forall x, P(x)$ equivale a $\exists x, \sim P(x)$
b) $\sim\exists x, P(x)$ equivale a $\forall x, \sim P(x)$

1.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, considere los enunciados abiertos o predicados dados.

$P(x, y)$: x es más rápido que y
$Q(x, y)$: y es más alto que x
$R(x)$: x pesa más de 200 libras

Escriba las expresiones siguientes:

1. $P(x, \text{José})$
2. $Q(\text{Miguel}, \text{Luis}) \wedge R(\text{Juan})$
3. $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$
4. $Q(x, y) \rightarrow R(x)$

5. $P(\text{Miguel, José}) \vee [Q(\text{Miguel, José}) \wedge R(\text{José})]$
6. $\forall x, \forall y\ Q(x, y) \rightarrow P(x, y)$
7. $\forall x, P(x, \text{José}) \leftrightarrow R(x)$
8. $\exists x, R(x) \wedge \forall y\ P(x, y)$
9. $\exists y, \forall x, P(x, y) \rightarrow R(x)$
10. $\forall y, R(\text{Miguel}) \veebar Q(\text{Miguel}, y)$

En los problemas 11 a 15, escriba los predicados siguientes en forma simbólica:

11. "No todas las piedras preciosas son bonitas".
12. "Existe un número positivo que es el menor".
13. "Nadie ama a todo el mundo".
14. "Existe un único presidente de Colombia".
15. "Existe un número que es más grande que cualquier solución conocida para el problema o no hay solución".
16. En forma simbólica, escriba la negación de los predicados dados en el ejercicio anterior.

En los problemas 17 a 21, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

17. $\forall m, \exists n, 2n = m$ (A = enteros positivos).
18. $\forall x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
19. $\exists x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
20. $\exists x, \forall y, (x + y)^2 = x^2 + y^2$ (A = números reales).
21. $\exists! x, \forall y, x + y = y$ (A = números reales).

1.6 Conjuntos y elementos

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien desarrolló la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas. La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión a la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, la teoría de los grupos, etcétera.

Supóngase que el proceso mental que une objetos según una característica particular brinda un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al **conjunto**.

En general representamos los elementos con letras minúsculas $a, b, c, \ldots, x, y, z$ y los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, \ldots$ Cuando un elemento a pertenece al conjunto A se denota por:

$$a \in A \text{ (“}a\text{ pertenece a }A\text{”)}$$

El símbolo $\in$ representa la relación fundamental de la teoría de conjuntos, la relación de pertenencia. Ésta es la relación entre un elemento y un conjunto. Para expresar que el elemento a no pertenece al conjunto A se representa con:

$$a \notin A \text{ (“}a\text{ no pertenece a }A\text{”)}$$

Definición 1.6.1 Conjuntos y elementos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas $A, B, \ldots$ Los objetos que componen el conjunto se denominan **elementos** o miembros y se denotan con letras minúsculas $a, b, \ldots$

Si la característica particular que observamos en una colectividad es la de estar en el mismo curso de matemática, entonces esa colectividad constituye un conjunto y cada uno de los compañeros de clase de matemática es un elemento del conjunto.

Hay dos formas de escribir los conjuntos; la primera de ellas sigue el principio de **extensión**, por el cual podemos determinar el conjunto enumerando todos sus elementos. La segunda sigue el principio de **comprensión** o **abstracción**, por el cual es posible determinar un conjunto identificando sus elementos mediante una propiedad común a ellos.

Definición 1.6.2 Descripción de conjuntos por extensión y por comprensión

Para escribir un conjunto **por extensión**, se enumeran todos sus elementos separándolos con comas y luego se encierran entre llaves {...}.

Para escribir un conjunto **por comprensión** se elige un elemento arbitrario x y se señala que cumple la propiedad $P(x)$. Finalmente, se encierra toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x \mid x\ P(x)\}$$

que se lee "A es el conjunto de todos los elementos x tales que los x cumplen la propiedad $P(x)$" ($|$ se lee "tal que").

EJEMPLO 1 Conjuntos

El conjunto de los primeros cinco números enteros positivos puede escribirse por extensión:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pero también se puede escribir por comprensión:

$$A = \{x \mid x \text{ es uno de los primeros cinco enteros positivos}\}$$ ≡

Escribimos un conjunto **por extensión** cuando tiene un número reducido de elementos, y lo escribimos **por comprensión** cuando tiene un número grande de elementos.

EJEMPLO 2 Notación de conjuntos por extensión

Escriba por extensión el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal del español}\}$$

Solución $A = \{a, e, i, o, u\}$ ≡

EJEMPLO 3

Escriba por comprensión el conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Solución $A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo par menor que } 12\}$. ≡

Definición 1.6.3 Conjuntos iguales

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar A y B son iguales se escribe:

$$A = B$$

EJEMPLO 4 Conjuntos iguales

Los conjuntos

$$A = \{x \mid x^2 = 4\}$$

y

$$B = \{x \mid x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$$

son iguales, ya que tienen los mismos elementos: $A = \{-2, 2\}$, $B = \{-2, 2\}$; $A = B$. ≡

1.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, escriba los conjuntos dados por extensión, cuando sea posible.

1. $A = \{x \mid x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$
2. $B = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra agricultor}\}$
3. $C = \{x \mid x \text{ es un número entero comprendido entre } -1 \text{ y } 1\}$
4. $D = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$
5. $E = \{x \mid x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x = 3\}$
6. $F = \{x \mid x \text{ es un número positivo par}\}$
7. $G = \{x \mid x \text{ es un múltiplo entero de } 5\}$
8. $H = \{x \mid x \text{ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con } P\}$.
9. $I = \{x \mid x \text{ es el rector de su universidad}\}$
10. $J = \{x \mid x \text{ es uno de sus profesores}\}$

En los problemas 11 a 20, escriba por comprensión los conjuntos dados.

11. $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$
12. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
13. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$
14. $D = \{\text{a, b, c, d, e}, \ldots, \text{x, y, z}\}$
15. $E = \{4, 9, 16, \ldots\}$
16. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
17. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
18. $H = \{-2, 2\}$
19. $I = \{\text{Santo Domingo}\}$
20. $J = \{\ \}$

1.7 Cardinalidad y tipos de conjuntos

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

EJEMPLO 1 Conjunto finito

El conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es un conjunto finito, pues tiene un número finito de elementos, seis. ≡

EJEMPLO 2 Conjunto infinito

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo}\}$$

es un conjunto infinito, ya que dado cualquier número entero positivo podemos obtener el próximo añadiendo la unidad. Este proceso puede repetirse un número arbitrariamente grande de veces; el proceso nunca termina, por tanto, el número de elementos no es finito. ≡

El concepto de número de elementos de un conjunto finito es de mucha importancia en las aplicaciones de la teoría de conjuntos.

Definición 1.7.1 Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito es lo que se llama la **cardinalidad** de dicho conjunto. La **cardinalidad** de un conjunto finito A se denota por:

$$\text{Card}\ (A) \text{ o } |A|$$

Muchos autores usan la expresión $\#A$ para indicar dicha cardinalidad.

Definición 1.7.2 Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos finitos X y Y se dicen ser **equipotentes** si tienen exactamente el mismo número de elementos.

La cardinalidad de un conjunto finito A es el número entero que representa el número de elementos del conjunto A. Como hemos dicho, para cualquier conjunto finito A, su cardinalidad se representa con Card (A) o $|A|$.

EJEMPLO 3 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto $A = \{\text{h, i, j, k, l, n}\}$ es 6, ya que A tiene seis elementos; por tanto, Card $(A) = 6$. ≡

EJEMPLO 4 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$B = \{x \mid x \text{ es un número primo y par}\}$$

es 1, ya que hay un solo número primo que es par, el 2; por ende, Card $(B) = 1$. ≡

EJEMPLO 5 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$C = \{\text{a, b, a, a, b}\}$$

es 2, ya que C sólo tiene dos elementos distintos; así, Card $(C) = 2$. ≡

Los conjuntos $A = \{\text{a, a, b}\}$, $B = \{\text{a, b}\}$ y $C = \{\text{b, a}\}$ son iguales. Observe que cambiar el orden de los elementos del conjunto no hace que el conjunto varíe; además, cuando algún elemento aparece repetido se cuenta una sola vez.

Por razones técnicas de las aplicaciones se hace necesario considerar el conjunto que carece de elementos. Este conjunto se llama el conjunto **vacío** y se denota por $\{\ \}$ o $\varnothing$.

EJEMPLO 6 Conjunto vacío

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad}\}$$

carece evidentemente de elementos. Por tanto, A es un conjunto vacío, es decir,

$$A = \{\ \} \text{ o } A = \varnothing$$ ≡

Definición 1.7.3 Conjunto vacío

El **conjunto vacío** es el que carece de elementos. Se denota por { } o $\varnothing$.

El lector puede notar que si $\varnothing = \{x \mid P(x)\}$, la propiedad $P(x)$ es tal que ningún objeto la satisface.

Definición 1.7.4 Conjunto unitario

Un conjunto A es un **conjunto unitario** si tiene un solo elemento.

EJEMPLO 7 Conjunto unitario

El conjunto A dado por $A = \{x \mid x \text{ es una capital de Perú}\}$ es evidentemente un conjunto unitario, ya que hay una sola capital en Perú. Por tanto, A es un conjunto unitario. ≡

Note que si $A = \{x \mid P(x)\}$ es un conjunto unitario, entonces la propiedad $P(x)$ que define el conjunto es satisfecha por un solo objeto.

Definición 1.7.5 Conjunto universal

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**. Éste se denota por U.

EJEMPLO 8 Conjunto universal

Si trabajamos con conjuntos de comunidades humanas, entonces en Colombia un buen conjunto universal es el de los colombianos que viven en el país. ≡

Definición 1.7.6 Subconjunto

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Se dice también que A está contenido en B o que B contiene a A. La relación de subconjunto viene dada por:

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad B \supset A$$

Si $A = B$, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$ son verdaderos.

Si A es un subconjunto de B, pero A y B no son iguales, entonces decimos que A es un subconjunto propio de B.

Si A no es un subconjunto de B, es decir, si al menos un elemento de A no pertenece a B, escribimos $A \not\subset B$.

EJEMPLO 9 Subconjuntos

Considere los conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $C = \{1, 5\}$.

Observe que todos los elementos del conjunto C están en el conjunto A; por tanto $C \subset A$. Asimismo, podemos observar que $C \subset B$. Sin embargo, no todos los elementos de B están en A, por lo que podemos decir que $B \not\subset A$. Además, $A \not\subset B$, $A \not\subset C$ y $B \not\subset C$. ≡

En los conjuntos dados del ejemplo anterior se advierte que $C \subset B$, pero $B \not\subset C$. Sin embargo tenemos que:

$$B \not\subset A \quad \text{y} \quad A \not\subset B$$

es decir, B no es un subconjunto de A ni A es subconjunto de B. En este caso decimos que los conjuntos A y B son **no comparables**.

Advertencia

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, si $A \subset B$, entonces es posible que $A = B$. Si $A \subset B$, pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un subconjunto propio de B.

En muchos casos se usa $A \subseteq B$ para indicar simplemente que A es un subconjunto de B y $A \subset B$ para denotar que A es un subconjunto propio de B.

Si $A \subset B$, se dice simplemente que A es un subconjunto de B y que B es un superconjunto para A. Si lo que interesa es señalar que A es un subconjunto propio de B, se expresa de manera categórica.

Para conjuntos A y B cualesquiera se tiene:

a) $\varnothing \subset A \subset U$

b) $A \subset A$

c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

d) $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

El inciso *d*) indica que para comprobar que $A = B$ debemos verificar dos cosas: primero, que $A \subset B$ y segundo que $B \subset A$.

Si A y B no tienen elementos en común, entonces se dice que A y B son **disjuntos**.

Para conjuntos A y B no vacíos se tiene que:

a) $A = B$ significa que $\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$

b) $A \subset B$ significa que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$

c) A y B disjuntos significa que $\forall x, \sim(x \in A \wedge x \in B)$

Advertencia

Puesto que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in A$, se tiene que $A \subset A$. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos se lleva a cabo con los llamados **diagramas de Venn** (figuras 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3). Estos diagramas son figuras planas cerradas; normalmente, el conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos mediante discos incluidos en el rectángulo.

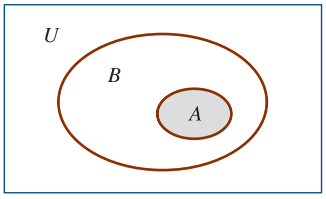


FIGURA 1.7.1 A es un subconjunto de B, $A \subset B$.

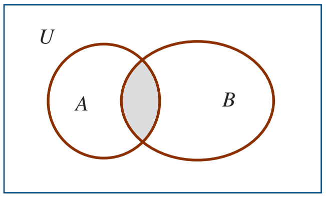


FIGURA 1.7.2 A y B tienen unos elementos en común, otros no.

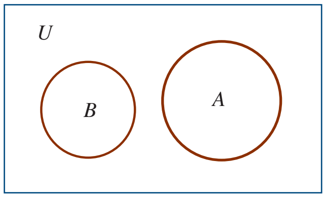


FIGURA 1.7.3 A y B son conjuntos disjuntos.

Familia de conjuntos y conjunto potencia Considere el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$. El objeto 3 es un elemento del conjunto A, pero 3 no se visualiza como un conjunto; sin embargo $\{3\}$ no es un elemento de A, pero es un subconjunto de A. En símbolos podemos decir que:

$$3 \in A \qquad \text{y que} \qquad \{3\} \subset A$$

Supóngase que deseamos formar un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos; estaríamos en presencia de una colección de conjuntos o **familia de conjuntos**. Así, si A_1, A_2, A_3 son conjuntos, el conjunto que los tiene como sus elementos es la familia de conjuntos

$$F = \{A_1, A_2, A_3\}$$

Aquí $A_1 \in F$, pero $\{A_1\} \subset F$. A_1 es un elemento de F, pero $\{A_1\}$ es el subconjunto de F que consta de un elemento, A_1.

EJEMPLO 10 Familia de conjuntos

El conjunto $A = \{1, 2, 4, 8\}$ no es una familia de conjuntos, ya que sus elementos no son conjuntos.

El conjunto $F = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos.

Asimismo, el conjunto $F = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos. ≡

Cuando debemos utilizar una sucesión de conjuntos los distinguimos mediante subíndices, de esta forma:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

Los subíndices son elementos de un conjunto fijado de antemano; para el desarrollo de estas ideas usaremos el conjunto de los números enteros positivos N como conjunto de índices. Por ejemplo, el conjunto de A_3 es el conjunto que ocupa el tercer lugar en la sucesión, asimismo para el resto de elementos de la sucesión. Estos conjuntos de la sucesión determinan una familia de conjuntos dada por:

$$F = \{A_i \mid i \in I \subset N\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

donde i toma los valores 1, 2, 3,… hasta un número natural n si la familia es finita.

EJEMPLO 11 Familia de conjuntos

Si $A_1 = \{1, 3, 5\}$, $A_2 = \{3, 7\}$, $A_3 = \{1, 5, 9\}$, $A_4 = \{3, 9\}$, entonces podemos formar varias familias de conjuntos, una de las cuales es:

$$F = \{A_1, A_2, A_4\}$$

o

$$F = \{\{1, 3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}\}$$ ≡

Dado un conjunto A cualquiera podemos elegir algunos subconjuntos de A para formar una familia de conjuntos. Así, los elementos de dicha familia serán subconjuntos de A.

EJEMPLO 12

Dado $A = \{3, 8, 9\}$, tomemos algunos subconjuntos de A; digamos $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{9\}$, $A_3 = \{3, 9\}$, $A_4 = \{8, 9\}$. El conjunto

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

o

$$F = \{\{3\}, \{9\}, \{3, 9\}, \{8, 9\}\}$$

es una familia de subconjuntos del conjunto A dado. ≡

Definición 1.7.7 Conjunto potencia

Dado un conjunto A cualquiera, la familia de conjuntos cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de A se llama **conjunto potencia** de A. El conjunto potencia de A se denota por $\wp(A)$.

La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto finito A es 2^n, donde n es la cardinalidad de A (número de elementos de A).

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto dado A, procedemos de esta manera:

a) $\varnothing$ y A son subconjuntos de A.

b) Formamos todos los subconjuntos de A con un elemento.

c) Formamos todos los subconjuntos de A con dos elementos.

.
.
.

Así sucesivamente hasta tener 2^n subconjuntos de A, incluido $\varnothing$ y A.

EJEMPLO 13 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia de $A = \{a, b, c\}$.

Solución El número de elementos de $\wp(A) = 2^3 = 8$. Ahora,

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$ ≡

En el ejemplo anterior podemos notar que, por citar un caso, $\{a, b\} \in \wp(A)$, no obstante, $\{a, b\} \subset A$. Asimismo, podemos decir que $\{\{a, b\}\} \subset \wp(A)$.

Note que los elementos de una familia de conjuntos son conjuntos, pero los subconjuntos de una familia de conjuntos son familias de conjuntos.

EJEMPLO 14 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia del conjunto $A = \{0, 1\}$.

Solución El número de elementos de $\wp(A)$ es $2^2 = 4$:

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Observe que $\{1\} \in \wp(A)$, pero $\{\{1\}\} \subset \wp(A)$. ≡

1.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

1. En los problemas 1 a 20 de los ejercicios 1.6, determine el número de elementos de los conjuntos finitos. Si el conjunto es infinito escriba ∞.
2. Enumere los conjuntos unitarios del ejercicio 1.
3. Enumere los conjuntos vacíos del ejercicio 1.

En los problemas 4 a 8, escriba lo que se indica.

4. Un conjunto cuya cardinalidad sea 3.
5. Un conjunto cuya cardinalidad sea 1.
6. Un conjunto cuya cardinalidad sea 0.
7. Un conjunto cuya cardinalidad sea 10.
8. Un conjunto infinito.

En los problemas 9 a 11, considere $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$; $A = \{1, 4, 9,\}$, $B = \{x \mid x \in U$ y x es un cuadrado$\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$ y determine lo que se pide.

9. Cuáles conjuntos son subconjuntos de los otros.
10. Cuáles conjuntos son subconjuntos propios de otros.
11. Los pares de conjuntos que son disjuntos.

En los problemas 12 y 13 compruebe:

12. Que si $A \subset B$, pero A y B son disjuntos, entonces $A = \varnothing$.
13. Que si $A \subset B$ y $C = \{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$, entonces $C = A$.

En los problemas 14 a 23, complete en cada caso el espacio en blanco con el símbolo apropiado ($\in, \notin, \subset, \not\subset$) para que la proposición sea verdadera.

14. 2 ____________ $\{x \mid x$ es un número primo$\}$.
15. 2 ____________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
16. $\{\{2\}\}$ ____________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
17. $\{2, 3\}$ ____________ $\{1,\{2\}, \{2, 3\}\}$.
18. $\{\{1, 2\}\}$ ____________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
19. $\{p\}$ ____________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{p\}\}$.
20. $\{1\}$ ____________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
21. $\{q)$ ____________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{\{p\}\}\}$.
22. $\{1, 2\}$ ____________ $\{1, 2, 3\}$.
23. $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ____________ $\{1, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, 5\}$.

En los problemas 24 a 35, suponga $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{x \mid x$ es un entero positivo par menor que $10\}$, $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, y dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes.

24. $A \subset B$
25. $A \subset C$
26. $B \subset A$
27. $B \subset C$
28. $C \subset A$
29. $C \subset B$
30. $A = B$
31. $A = C$
32. $B = C$
33. B y C comparables
34. A y B comparables
35. A y B comparables

En los problemas 36 a 45, dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

36. $\varnothing \in A, \forall A$
37. $\varnothing \subset A, \forall A$
38. $A \subset U, \forall A$
39. $A \in U, \forall A$
40. $U \not\subset A, \forall A$
41. $U \in A, \forall A$
42. $\varnothing = \{\varnothing\}$
43. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
44. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
45. $\varnothing \in U$

En los problemas 46 a 50, determine el conjunto potencia de los conjuntos dados.

46. $\varnothing$
47. $\{\varnothing\}$
48. $\{1, 2, 3\}$
49. $\{a, b, c, d, e\}$
50. $\{0, 1\}$

En los problemas 51 a 55, señale cuáles de las familias dadas son conjunto potencia de algún conjunto y determine dicho conjunto.

51. $\{\varnothing, \{a\}\}$
52. $\{\{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$
53. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
54. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
55. $\{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{O\}, \{-1, 0, 1\}\}$

En los problemas 56 a 65, suponga $A = \{1, 3, 5\}$ y dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

56. $\varnothing \subset \wp(A)$
57. $\varnothing \in \wp(A)$
58. $\{1, 3\} \subset \wp(A)$
59. $\{1, 2\} \in \wp(A)$
60. $\{3, 5\} \subset A$
61. $\{3, 5\} \subset \wp(A)$
62. $3 \in A$
63. $2 \in A$
64. $\{1\} \subset \wp(A)$
65. $\{5\} \in \wp(A)$

1.8 Operaciones con conjuntos

Uno de los hechos más interesantes acerca de la teoría de conjuntos es que las operaciones básicas de esta teoría se corresponden de forma muy estrecha con las estructuras lógicas que obtenemos al utilizar conectivos.

Intersección de conjuntos La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. La intersección de A y B se denota por $A \cap B$, y en lenguaje lógico el conjunto puede escribirse como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

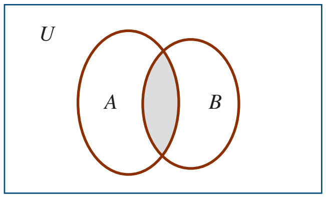


FIGURA 1.8.1 Intersección de los conjuntos A y B.

La operación de intersección de conjuntos comparte muchas propiedades con el conectivo $\wedge$.

En los diagramas de Venn, la intersección de A y B se representa por la región sombreada en la **FIGURA 1.8.1**.

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para la intersección de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

a) $A \cap B = B \cap A$, propiedad conmutativa.

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, propiedad asociativa.

c) $A \cap U = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

d) $\varnothing \cap A = \varnothing$, propiedad de la existencia de un elemento absorbente.

EJEMPLO 1 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ determine el conjunto intersección de A y B.

Solución Los elementos que están o pertenecen tanto a A como a B son 2, 3, 5; por tanto

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

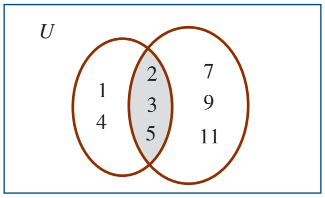


FIGURA 1.8.2

En la **FIGURA 1.8.2** se muestra la intersección de estos conjuntos. Observe que la parte sombreada contiene precisamente los elementos que pertenecen a $A \cap B$. ≡

Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$, como puede notarse en la **FIGURA 1.8.3**.

Muchas veces es necesario calcular la intersección de tres conjuntos A, B, C. Sin embargo, es bueno que se destaque que la operación de intersección siempre se lleva a cabo entre dos conjuntos; para realizar la intersección de tres conjuntos, es decir, para determinar el conjunto formado por los elementos comunes de A, B y C, primero se busca la intersección de A y B; el resultado buscado es la intersección de $A \cap B$ con C. Si $D = A \cap B$, entonces,

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = D \cap C$$

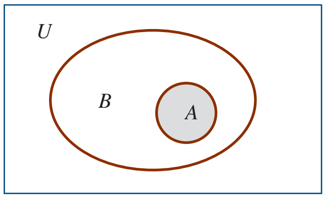


FIGURA 1.8.3 $A \cap B = A$

EJEMPLO 2 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{b, c, d, e\}$, $B = \{c, e, h, f, k\}$ y $C = \{a, b, e, h\}$, determine $A \cap B \cap C$

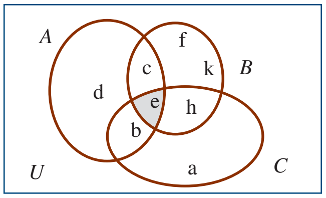
Solución Primero se busca $A \cap B$:

$$D = A \cap B = \{c, e\}$$

Luego se calcula $A \cap B \cap C = D \cap C = \{e\}$. Por tanto,

$$A \cap B \cap C = \{e\}$$

Gráficamente la solución es:



$A \cap B \cap C$

FIGURA 1.8.4

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ es una sucesión de conjuntos, podemos calcular su intersección (el conjunto de los elementos comunes a todos los conjuntos) tomándolos dos a dos en la expresión:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

o más breve $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

EJEMPLO 3 Intersección de conjuntos

Dada la sucesión de conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{3, 5, 7, 9\}, A_3 = \{1, 3, 5, 11, 13\}$$

determine $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Solución Si ponemos $D_{12} = A_1 \cap A_2$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3$$

Ahora, $D_{12} = A_1 \cap A_2 = \{3\}$. Por tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3 = \{3\} \cap \{1, 3, 5, 11, 13\} = \{3\}$$ ≡

Unión de conjuntos La unión de dos conjuntos A y B consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B. La unión de A y B se denota por $A \cup B$. En lenguaje lógico podemos escribir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Note que si extraemos un elemento de $A \cup B$, éste puede estar sólo en A, o sólo en B, o ser un elemento común a A y a B.

La representación gráfica de $A \cup B$ se expresa por una de las situaciones descritas en las **FIGURAS 1.8.5** a **1.8.7**, en las que la región sombreada en cada caso corresponde al conjunto $A \cup B$.

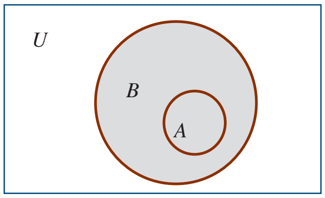


FIGURA 1.8.5

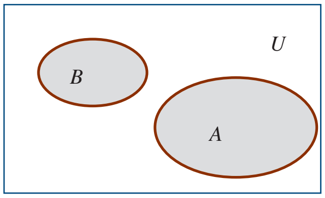


FIGURA 1.8.6

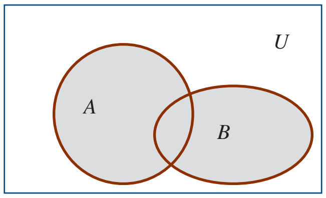


FIGURA 1.8.7

EJEMPLO 4 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, c, f, g, h\}$, determine el conjunto $A \cup B$.

Solución Puesto que en $A \cup B$ deben estar representados tanto los elementos de A como los de B, tenemos que $A \cup B$ es la unificación de A con B, es decir, ponemos juntos los elementos de A con los de B:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

La situación gráfica del ejemplo anterior es la siguiente:

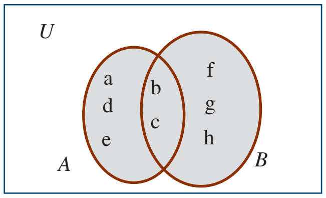


FIGURA 1.8.8

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

Las siguientes propiedades se cumplen para la unión de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

a) $A \cup B = B \cup A$, propiedad conmutativa.

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, propiedad asociativa.

c) $A \cup \varnothing = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

d) $A \cup U = U$, propiedad de la existencia del conjunto absorbente.

En muchas circunstancias necesitamos obtener la unión de más de dos conjuntos; pero la unión es una operación entre dos conjuntos, de ahí que necesitemos recurrir a la propiedad asociativa para poder obtener un conjunto $A \cup B \cup C$, cuando A, B y C son conjuntos dados.

Para calcular $A \cup B \cup C$, primero obtenemos $A \cup B$ y luego unimos este resultado con el conjunto C. Si

$$D = A \cup B$$

entonces $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C$.

EJEMPLO 5 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 6, 8\}$, determine $A \cup B \cup C$.

Solución Primero calculamos $D = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ y luego calculamos $D \cup C$ para obtener $A \cup B \cup C$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

En la figura se muestra la representación gráfica correspondiente. ≡

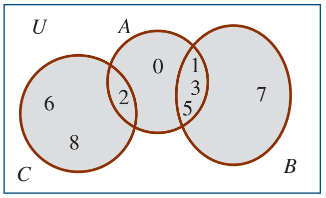


FIGURA 1.8.9

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ es una sucesión de conjuntos, entonces la unión de ellos se define por:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \text{ o bien, } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde las uniones de conjuntos se realizan dos a dos.

EJEMPLO 6 Unión de conjuntos

Dados $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 3, 5, 7\}$, $A_3 = \{2, 4, 6, 8\}$, determine $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$.

Solución $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ se obtiene calculando en primer lugar el conjunto $D_{12} = A_1 \cup A_2$, y luego el resultado se une con A_3:

$$D_{12} = A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Ahora,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = D_{12} \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

En la **FIGURA 1.8.10** se muestra la representación gráfica respectiva.

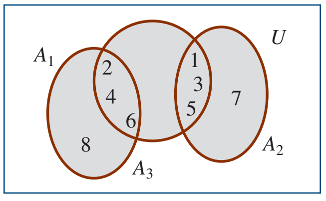


FIGURA 1.8.10

PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.