3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases};$

$f(1), f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 1; \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(4), f(6.2)$

5. Si la función f definida por partes es

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es número racional} \\ 0, & x \text{ es número irracional,} \end{cases}$$

halle cada uno de los valores siguientes.

a) $f(\frac{1}{3})$

b) $f(-1)$

c) $f(\sqrt{2})$

d) $f(1.\overline{12})$

e) $f(5.72)$

f) $f(\pi)$

6. ¿Cuál es la intersección con el eje y de la gráfica de la función f del problema 5?

7. Determine los valores de x para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 7

b) 0

c) -1

d) -2

e) 1

f) -7

8. Determine los valores de x para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 1

b) 0

c) 4

d) $\frac{1}{2}$

e) 2

f) -4

En los problemas 9 a 34, trace la gráfica de la función definida por partes que se indique. Halle todas las intersecciones con los ejes de la gráfica. Indique todos los números para los cuales la función es discontinua.

9. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} -3, & x < -3 \\ x, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3, & x > 3 \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

13. $y = [\![x + 2]\!]$

14. $y = 2 + [\![x]\!]$

15. $y = -[\![x]\!]$

16. $y = [\![-x]\!]$

17. $y = |x + 3|$

18. $y = -|x - 4|$

19. $y = 2 - |x|$

20. $y = -1 - |x|$

21. $y = -2 + |x + 1|$

22. $y = 1 - \frac{1}{2}|x - 2|$

23. $y = -|5 - 3x|$

24. $y = |2x - 5|$

25. $y = |x^2 - 1|$

26. $y = |4 - x^2|$

27. $y = |x^2 - 2x|$

28. $y = |-x^2 - 4x + 5|$

29. $y = ||x| - 2|$

30. $y = |\sqrt{x} - 2|$

31. $y = |x^3 - 1|$

32. $y = |[\![x]\!]|$

33. $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

34. $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1 - |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$

35. Sin trazar la gráfica, indique el rango de la función $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$.

36. Compare las gráficas de $y = 2[\![x]\!]$ y $y = [\![2x]\!]$.

En los problemas 37 a 40, halle la fórmula definida por partes de la función f cuya gráfica se muestra. Suponga que el dominio de f es $(-\infty, \infty)$.

37.

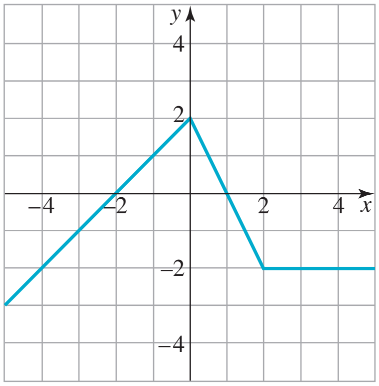


FIGURA 5.4.9 Gráfica para el problema 37

38.

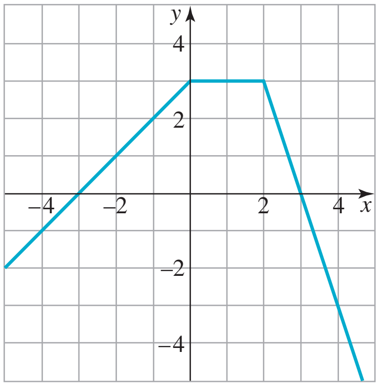


FIGURA 5.4.10 Gráfica para el problema 38

39.

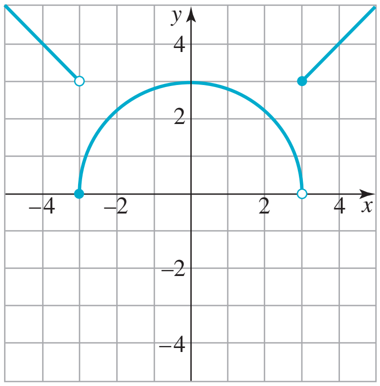


FIGURA 5.4.11 Gráfica para el problema 39

40.

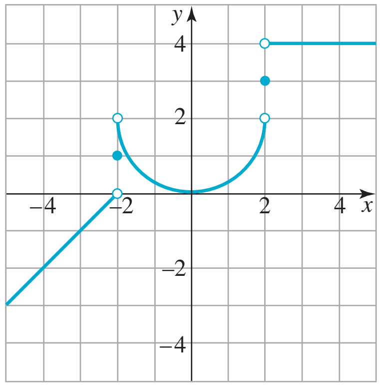


FIGURA 5.4.12 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica de $y = |f(x)|$.

41. f es la función cuya gráfica está en la **FIGURA 5.4.9**.

42. f es la función cuya gráfica se ve en la **FIGURA 5.4.10**.

En los problemas 43 y 44, use la definición de valor absoluto y exprese la función indicada f como función definida por partes.

43. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$

En los problemas 45 y 46, halle los valores de la constante k tal que la función f definida por partes indicada sea continua en $x = 2$. Esto es, que la gráfica de f no tenga agujeros, huecos ni saltos en $x = 2$.

45. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \le 2 \\ kx, & x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} kx + 2, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \ge 2 \end{cases}$

47. La **función mínimo entero** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el mínimo entero n que es mayor o igual a x. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots & \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -3 < x \le -2 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -2 < x \le -1 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -1 < x \le 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 0 < x \le 1 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 1 < x \le 2 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 2 < x \le 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

48. Grafique la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$, definida en el problema 47.

Para la discusión

En los problemas 49 a 52, describa con palabras en qué difieren las gráficas de las funciones dadas. [*Pista:* factorice y simplifique].

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

50. $f(x) = -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1},$

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 8, & x = 1 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

51. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

52. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

53. Usando la noción de reflexión de una gráfica en un eje, exprese la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 47 en términos de la función máximo o mayor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (vea la página 229).

54. Describa cómo graficar la función $y = |x| + |x - 3|$. Ponga en práctica sus ideas.

5.5 Combinación de funciones

Introducción Se pueden combinar dos funciones, f y g, de varias maneras para crear nuevas funciones. En esta sección examinaremos dos de esas maneras de combinar: mediante operaciones aritméticas y por medio de la operación de composición de funciones.

Combinaciones aritméticas Dos funciones se pueden combinar mediante las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

Definición 5.5.1 Combinaciones aritméticas

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{2}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{siempre que } g(x) \neq 0. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Se tienen las funciones $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$. De acuerdo con las ecuaciones (1) a (4) de la definición anterior se pueden producir cuatro nuevas funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2+4x) + (x^2-9) = 2x^2+4x-9,$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+4x) - (x^2-9) = 4x+9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2+4x)(x^2-9) = x^4+4x^3-9x^2-36x,$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+4x}{x^2-9}.$$

≡

Dominio de una combinación aritmética Al combinar aritméticamente dos funciones es necesario que f y g estén definidas en un mismo número x. Por consiguiente, el **dominio** de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg es el conjunto de los números reales que son *comunes* a ambos dominios; esto es, el dominio es la *intersección* del dominio de f y el dominio de g. En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también se deben excluir todos los valores de x que hagan que el denominador $g(x)$ sea cero. En el ejemplo 1, el dominio de f y el dominio de g es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, por lo que el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg también es $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, puesto que $g(-3)=0$ y $g(3)=0$, el dominio del cociente de $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$, excepto $x=-3$ y $x=3$; en otras palabras, es $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. En resumen, si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces:

- el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg es la intersección $X_1 \cap X_2$, y
- el dominio de f/g es el conjunto $\{x \,|\, x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 2 Dominio de $f+g$

Al resolver la desigualdad $1-x \geq 0$ se ve que el dominio de $f(x)=\sqrt{1-x}$ es el intervalo $(-\infty, 1]$. De igual modo, el dominio de la función $g(x)=\sqrt{x+2}$ es el intervalo $[-2, \infty)$. Por lo anterior, el dominio de la suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

es la intersección $(-\infty, 1] \cap [-2, \infty)$. El lector debe comprobar este resultado revisando estos intervalos en la recta numérica y mostrar que esta intersección o conjunto de números comunes a ambos dominios es el intervalo cerrado $[-2, 1]$.

≡

Composición de funciones Otro método para combinar las funciones f y g se llama **composición de funciones**. Para ilustrar el concepto supongamos que para una x dada en el dominio de g, el valor de la función $g(x)$ es un número en el dominio de la función f. Eso quiere decir que se puede evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, se puede evaluar $f(g(x))$. Supongamos que $f(x)=x^2$ y que $g(x)=x+2$. Entonces, cuando $x=1$, $g(1)=3$, y como 3 está en el dominio de f, podemos escribir que $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En realidad sucede que en el caso de estas dos funciones en particular podemos evaluar f en cualquier valor de la función $g(x)$, esto es,

$$f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2.$$

La función que resulta, llamada composición de f y g, se define a continuación.

Definición 5.5.2 Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la **composición** de f y g, representada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{5}$$

La **composición** de g y f, representada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{6}$$

Cuando se calcula una composición como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, no olvide sustituir $g(x)$ cada vez que aparezca x en $f(x)$. (Véase el inciso *a*) del ejemplo siguiente).

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, halle ***a***) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

Solución

a) Para hacer hincapié, sustituiremos x por el conjunto de paréntesis ( ) y escribiremos f en la forma

$$f(\quad) = (\qquad)^2 + 3(\qquad) - 1.$$

Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$ se llena cada conjunto de paréntesis con $g(x)$. Encuentre

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1 && \leftarrow \text{Use } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ y la ley distributiva}\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1 - 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3.\end{aligned}$$

b) En este caso, g se escribe en la forma

$$g(\quad) = 2(\qquad)^2 + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1)\\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1 && \leftarrow \text{Use } (a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1 && = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \text{ etc.}\\ &= 2 \cdot x^4 + 2 \cdot 6x^3 + 2 \cdot 7x^2 - 2 \cdot 6x + 2 \cdot 1 + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3.\end{aligned}$$

≡

Los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, que en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

En el ejemplo próximo se muestra que una función se puede componer consigo misma.

EJEMPLO 4 Composición de *f* con *f*

Si $f(x) = 5x - 1$, la composición $f \circ f$ es

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(5x - 1) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6.$$

≡

EJEMPLO 5 Expresar una función como composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones, f y g.

Solución Si definimos f y g como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

≡

Hay otras soluciones para el ejemplo 5. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, entonces, obsérvese que

$$(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

■ **Dominio de una composición** Como indicamos en el ejemplo de la introducción de este tema, para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f. Por citar un caso, el dominio $f(x) = \sqrt{x}$ es $x \geq 0$, y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. Tenga en cuenta que no se puede evaluar $f(g(1))$, porque $g(1) = -1$, y -1 no está en el dominio de f. La función $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define el dominio de f, que es $g(x) \geq 0$, para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$. Esta desigualdad es igual que $x - 2 \geq 0$, o sea $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una parte del dominio original, $(-\infty, \infty)$, de g. En general,

Lea varias veces este párrafo

- El dominio de la composición $f \circ g$ está formado por los números x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

EJEMPLO 6 Dominio de una composición

Examinemos la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$. De acuerdo con el requisito que $x - 3 \geq 0$, se ve que cualquier número x que se sustituya en f debe satisfacer $x \geq 3$. Ahora, supongamos que $g(x) = x^2 + 2$, y que se desea evaluar $f(g(x))$. Aunque el dominio de g es el conjunto de los números reales, para sustituir a $g(x)$ en $f(x)$ se requiere que x sea un número en ese dominio tal que $g(x) \geq 3$. En la **FIGURA 5.5.1** se observa que esta última desigualdad se satisface siempre que $x \leq -1$ o $x \geq 1$. En otras palabras, el dominio de la composición

$$f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. ≡

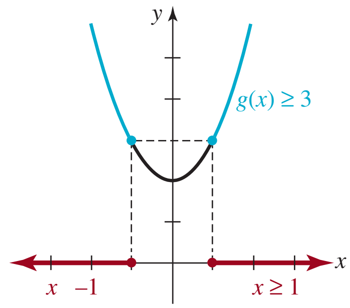


FIGURA 5.5.1 Dominio de $(f \circ g)(x)$ en el ejemplo 6

En ciertas aplicaciones, una cantidad y se expresa en función de una variable x, que a su vez es una función de otra variable t. Aplicando la composición de funciones podemos expresar y en función de t. El ejemplo siguiente ilustra esta idea; el símbolo V hace la parte de y, y r hace la parte de x.

EJEMPLO 7 Inflado de un globo

Un globo meteorológico se infla con un gas. Si el radio del globo aumenta con una velocidad de 5 cm/s, expresar el volumen del globo en función del tiempo t, en segundos.

Solución Suponga que cuando se infla el globo, su forma es la de una esfera. Si r representa el radio del globo, entonces $r(t) = 5t$. Como el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, la composición es $(V \circ r)(t) = V(r(t)) = V(5t)$, es decir

$$V = \frac{4}{3}\pi(5t)^3 = \frac{500}{3}\pi t^3.$$ ≡

Globo meteorológico

■ **Transformaciones** Las transformaciones rígidas y no rígidas que estudiamos en la sección 5.2 son ejemplos de las operaciones con funciones que acabamos de describir. En el caso de una constante $c > 0$, las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La transformación no rígida $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ por la función constante $g(x) = c$. Las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x + c)$ y $y = f(x - c)$ son *composiciones* de $f(x)$ con las funciones lineales $g(x) = x + c$ y $g(x) = x - c$, respectivamente.

■ **Cociente de diferencias** Suponga que los puntos P y Q son dos puntos en la gráfica de $y = f(x)$ con coordenadas $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$, respectivamente. Entonces, como se muestra en la **FIGURA 5.5.2**, la pendiente de la secante que pasa por P y Q es

$$m_{\text{sec}} = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

o

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{7}$$

La expresión (7) se llama **cociente de diferencias** y es muy importante en el estudio del cálculo. El símbolo h es un número real y, como se advierte en la figura 5.5.2, representa un incremento o cambio en x. El cálculo de (7) es, en esencia, un *proceso de tres pasos*, los cuales requieren sólo matemáticas de precálculo: álgebra y trigonometría. Su objetivo principal debe ser superar los obstáculos de las manipulaciones algebraicas o trigonométricas inherentes a dichos pasos. Si se está preparando para estudiar cálculo, recomendamos que sea capaz de resolver (7) para las funciones que implican:

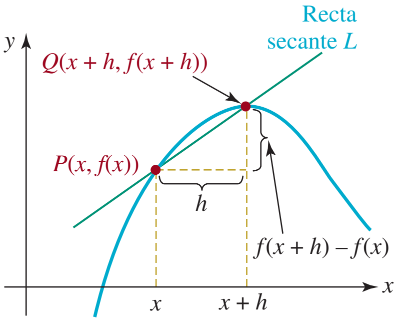


FIGURA 5.5.2 Recta secante que pasa por dos puntos en una gráfica

- potencias enteras positivas de x, como x^n, donde $n = 1, 2$ y 3
- división de funciones, como $\frac{1}{x}$ y $\frac{x}{x+1}$,
- radicales, como $\sqrt{x}$

(Véanse los problemas 47 a 60 de los ejercicios 5.5.)

Repase la sección 2.6 para $(a+b)^n$, donde $n = 2$ y 3.

Repase las expresiones racionales en la sección 2.8.

Repase la racionalización de numeradores y denominadores en la sección 2.4.

EJEMPLO 8 Cociente de diferencias

a) Calcule el cociente de diferencias (7) para la función $y = x^2 + 2$.
b) Halle la pendiente de la secante que pasa por los puntos $(2, f(2))$ y $(2.5, f(2.5))$.

Solución ***a***) El paso inicial es el cálculo de $f(x+h)$. En el caso de la función dada, escribimos $f(\ ) = (\ )^2 + 2$. La idea es sustituir $x + h$ en los paréntesis y llevar a cabo las operaciones algebraicas requeridas:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 + 2 \\ &= (x^2 + 2xh + h^2) + 2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 2. \end{aligned}$$

El segundo paso, el cálculo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$, es el más importante y debe simplificarse cuanto sea posible. En muchos de los problemas que tendrá que resolver en cálculo podrá factorizar h a partir de la diferencia $f(x+h) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 + 2) - (x^2 + 2) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2 \\ &= 2xh + h^2 \\ &= h(2x+h) \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

Ahora el cálculo del cociente de diferencias $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es sencillo. Usamos los resultados del paso anterior:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

Por tanto, la pendiente m_{sec} de la secante es

$$m_{\text{sec}} = 2x + h$$

b) Para los puntos dados, identificamos $x = 2$ y el cambio en x como $h = 2.5 - 2 = 0.5$. Por ende, la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(2.5, f(2.5))$ está dada por $m_{\text{sec}} = 2(2) + 0.5$ o $m_{\text{sec}} = 4.5$. ≡

5.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 8, halle las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g y describa sus dominios.

1. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x^2 - x$
2. $f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 3$
3. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$
4. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x + 8}$
5. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x, \quad g(x) = (1 - x)^2$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x - 6}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$
7. $f(x) = \sqrt{x + 2}, \quad g(x) = \sqrt{5 - 5x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}, \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4}}{x}$
9. Complete la tabla

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	3	0	1	4
$(f \circ g)(x)$					

10. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

En los problemas 11 a 14, halle las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y describa sus dominios.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$
12. $f(x) = x^2 - x + 5, \quad g(x) = -x + 4$
13. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 1$
14. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los problemas 15 a 20, determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

15. $f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$
16. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^3$
17. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
18. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad g(x) = x^2$
19. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x + \sqrt{x - 1}$
20. $f(x) = x^3 - 4, \quad g(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

En los problemas 21 a 24, determine las funciones $f \circ f$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x + 6$
22. $f(x) = x^2 + 1$
23. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
24. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x}$

En los problemas 25 y 26, determine $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

25. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x - 1$
26. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 3x, \quad h(x) = 2x$
27. En el caso de las funciones $f(x) = 2x + 7$, $g(x) = 3x^2$, determine $(f \circ g \circ g)(x)$.
28. En el caso de las funciones $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -4x^2 + x$, determine $(f \circ g \circ f)(x)$.

En los problemas 29 y 30, determine $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$.

29. $f(x) = 2x - 5$
30. $f(x) = x^2 - 1$

En los problemas 31 a 34, determine las funciones f y g tales que $F(x) = f \circ g$.

31. $F(x) = (x^2 - 4x)^5$
32. $F(x) = \sqrt{9x^2 + 16}$
33. $F(x) = (x - 3)^2 + 4\sqrt{x - 3}$
34. $F(x) = 1 + |2x + 9|$

En los problemas 35 y 36 trace las gráficas de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

35. $f(x) = |x| - 2, \quad g(x) = |x - 2|$
36. $f(x) = [\![x - 1]\!], \quad g(x) = |x|$
37. Se tiene la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = x$ y $g(x) = -[\![x]\!]$. Llene los espacios en blanco y a continua-

ción bosqueje la gráfica de la suma $f + g$ en los intervalos indicados.

$$y = \begin{cases} \vdots & \\ \underline{\qquad\quad}, & -3 \le x < -2 \\ \underline{\qquad\quad}, & -2 \le x < -1 \\ \underline{\qquad\quad}, & -1 \le x < 0 \\ \underline{\qquad\quad}, & 0 \le x < 1 \\ \underline{\qquad\quad}, & 1 \le x < 2 \\ \underline{\qquad\quad}, & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

38. En el caso de la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = |x|$ y $g(x) = [\![x]\!]$. Proceda como en el problema 37 y a continuación grafique la suma de $f + g$.

En los problemas 39 y 40, trace la gráfica de la suma $f + g$.

39. $f(x) = |x - 1|, \quad g(x) = |x|$

40. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica del producto fg.

41. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

42. $f(x) = x, \quad g(x) = [\![x]\!]$

En los problemas 43 y 44, trace la gráfica del recíproco $1/f$.

43. $f(x) = |x|$

44. $f(x) = x - 3$

En los problemas 45 y 46.

a) Determine los puntos de intersección de las gráficas de las funciones indicadas.
b) Calcule la distancia vertical d entre las gráficas en el intervalo I definido por las coordenadas x de sus puntos de intersección,
c) Use el concepto de vértice de una parábola para calcular el valor máximo de d en el intervalo I.

45.

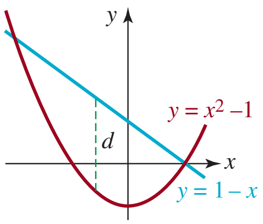


FIGURA 5.5.3 Gráfica para el problema 45

46.

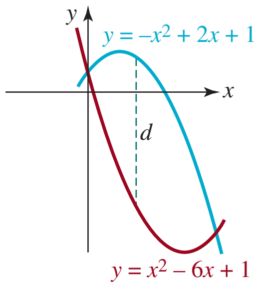


FIGURA 5.5.4 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 a 58,

a) Calcule el cociente de diferencias $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ para la función dada.
b) Halle la pendiente de la secante que pasa por los puntos $(3, f(3))$, $(3.1, f(3.1))$.

47. $f(x) = -4x^2$

48. $f(x) = x^2 - x$

49. $f(x) = 3x^2 - x + 7$

50. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

51. $f(x) = x^3 + 5x - 4$

52. $f(x) = 2x^3 + x^2$

53. $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$

54. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 4}$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

56. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 5}$

57. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

En los problemas 59 y 60, calcule el cociente de diferencias $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ para la función dada. Use las operaciones algebraicas correctas para cancelar la h del denominador.

59. $f(x) = 2\sqrt{x}$

60. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

≡ Aplicaciones diversas

61. De aves Un avistador de aves ve un pájaro a 100 pies hacia el este de su posición. Si el ave vuela hacia el sur a una velocidad de 500 pies/min, exprese la distancia d del avistador al ave en función del tiempo t. Calcule la distancia a los 5 minutos después del avistamiento (**FIGURA 5.5.5**).

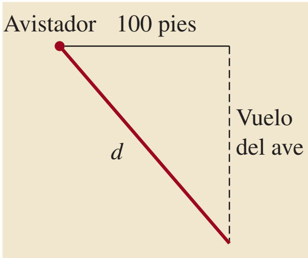


FIGURA 5.5.5 Avistador de aves para el problema 61

62. **Bacterias** Cuando se las cultiva, ciertas bacterias forman colonias circulares. El radio del círculo, en centímetros, se expresa con el modelo matemático

$$r(t) = 4 - \frac{4}{t^2 + 1},$$

donde el tiempo t se mide en horas. Exprese

a) El área de la colonia en función del tiempo t.

b) La circunferencia de la colonia en función del tiempo t.

Para la discusión

63. Suponga que $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Explique: ¿por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

no es $(-\infty, \infty)$?

64. Suponga que $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ y $g(x) = \dfrac{5}{x + 3}$. Explique: ¿por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{g(x) - 1}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{5}{x + 3} - 1} = \frac{2x + 6}{2 - x}$$

no es $\{x \mid x \neq 2\}$?

65. Encuentre el error en el razonamiento siguiente: si $f(x) = 1/(x - 2)$ y $g(x) = 1/\sqrt{x + 1}$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1/(x - 2)}{1/\sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x + 1}}{x - 2}$$

$$\text{y así} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{\sqrt{0}}{-3} = 0.$$

66. Suponga que $f_1(x) = \sqrt{x + 2}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x(x - 10)}}$ y $f_3(x) = \dfrac{x + 1}{x}$. ¿Cuál es el dominio de la función $y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$?

67. Suponga que $f(x) = x^3 + 4x$, $g(x) = x - 2$ y $h(x) = -x$. Explique: sin trazar la gráfica, ¿cómo se relacionan las gráficas de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$ y $h \circ f$ con la gráfica de f?

68. El dominio de cada función definida por partes,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ x - 2, & x > -1, \end{cases}$$

es $(-\infty, \infty)$. Indique cómo determinar $f + g$, $f - g$ y fg. Ponga en práctica sus ideas.

69. Indique cómo se relaciona la gráfica de $y = \frac{1}{2}\{f(x) + |f(x)|\}$ con la gráfica de $y = f(x)$. Ilustre sus ideas usando $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

70. Explique lo siguiente:

a) La suma de dos funciones pares f y g, ¿es par?

b) La suma de dos funciones impares f y g, ¿es impar?

c) El producto de una función f par, por una función g impar, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

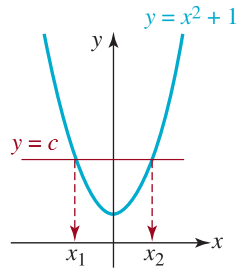
d) El producto de una función impar f por una función impar g, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

71. El producto fg de dos funciones lineales con coeficientes reales, $f(x) = ax + b$, por $g(x) = cx + d$, es una función cuadrática. Explique por qué la gráfica de esta función debe tener al menos una intersección con el eje x.

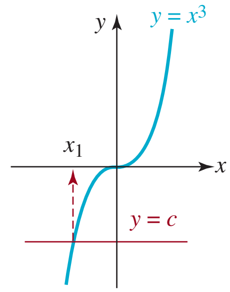
72. Forme dos funciones f y g diferentes, de tal modo que el dominio de $F(x) = f \circ g$ sea $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

5.6 Funciones inversas

Introducción Recordemos que una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada valor x en su dominio X, un solo valor, o valor único, y, en su rango. Esta regla no excluye que el mismo número y esté asociado con *varios valores* de x. Por citar un caso, para $f(x) = x^2 + 1$, el valor $y = 5$ se presenta con $x = -2$, o bien con $x = 2$. Por otra parte, para la función $g(x) = x^3$, el valor $y = 64$ sólo se presenta cuando $x = 4$. En realidad, para cada valor de y en el rango de $g(x) = x^3$, sólo corresponde un valor de x en el dominio. A las funciones de esta última clase se les asigna un nombre especial.



a) No uno a uno



b) Uno a uno

FIGURA 5.6.1 Dos tipos de funciones del ejemplo 1

Definición 5.6.1 Función uno a uno

Se dice que una función f es **uno a uno** o **biunívoca** si cada número en el rango de f está asociado con exactamente un número en su dominio X.

■ Prueba de la recta horizontal La interpretación geométrica de lo anterior es que una recta horizontal (y = constante) puede cortar la gráfica de una función uno a uno cuando mucho en un punto. Además, si *toda* recta horizontal que corta la gráfica de una función lo hace cuando mucho en un punto, necesariamente la función es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Prueba de la recta horizontal

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3$, así como una recta horizontal $y = c$ que interseca las gráficas de f y g, se muestran en la **FIGURA 5.6.1**. La figura 5.6.1*a*) indica que hay dos números, x_1 y x_2, en el dominio de f para los que $f(x_1) = f(x_2) = c$. Al inspeccionar la figura 5.6.1*b*) se ve que para toda recta horizontal $y = c$ que cruza la gráfica, sólo hay un número x_1 en el dominio de g, tal que $g(x_1) = c$. Por consiguiente, la función f no es uno a uno, mientras que la función g sí lo es. ≡

Una función uno a uno se puede definir de varias maneras. Con base en la descripción anterior, la afirmación siguiente tiene sentido:

*Una función f es **uno a uno** si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para toda x_1 y x_2 en el dominio de f.* (1)

Enunciada en forma negativa, (1) indica que una función f *no es* uno a uno si se pueden encontrar números x_1 y x_2 (con $x_1 \neq x_2$) en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$. El lector verá este enunciado del concepto de función uno a uno en el capítulo 7 cuando deba resolver ciertas clases de ecuaciones.

Considere que (1) es una forma de determinar si una función f es biunívoca cuando no se cuenta con una gráfica.

EJEMPLO 2 Comprobación de funciones uno a uno

a) La función es $f(x) = x^4 - 8x + 6$. Observe que $f(0) = f(2) = 6$, pero como $0 \neq 2$ concluimos que f no es uno a uno.

b) La función es $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$, y sean x_1 y x_2 números en el dominio de f. Si suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$, esto es, que $\dfrac{1}{2x_1 - 3} = \dfrac{1}{2x_2 - 3}$, entonces, al obtener el recíproco de ambos miembros se ve que

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \qquad \text{implica que} \qquad 2x_1 = 2x_2 \qquad \text{o} \qquad x_1 = x_2.$$

De acuerdo con (1) se llega a la conclusión que f es uno a uno. ≡

■ Inversa de una función uno a uno Supongamos que f es una función uno a uno cuyo dominio es X y rango Y. Como todo número y en Y corresponde precisamente a un número x

Advertencia: El símbolo f^{-1} *no* representa al recíproco $1/f$. El número -1 **no es** un exponente.

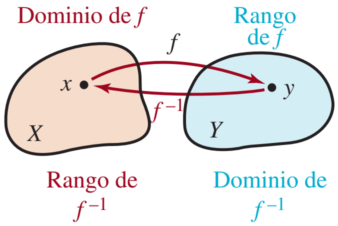


FIGURA 5.6.2 Funciones f y f^{-1}

en X, la función f en realidad debe determinar una función "inversa" f^{-1}, cuyo dominio es Y y rango es X. Como se ve en la **FIGURA 5.6.2**, f y f^{-1} deben satisfacer

$$f(x) = y \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(y) = x. \tag{2}$$

En realidad, las ecuaciones en (2) son las composiciones de las funciones f y f^{-1}:

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{3}$$

A la función f^{-1} se le llama **inversa** de f, o **función inversa** de f. De acuerdo con la convención que cada elemento del dominio se represente con el símbolo x, la primera ecuación de (3) se reacomoda en la forma $f(f^{-1}(x)) = x$. Resumiremos los resultados en (3).

Definición 5.6.2 Función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio X y rango Y. La **inversa** de f es la función f^{-1} cuyo dominio es Y y rango es X, para los cuales

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y \tag{4}$$

y

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X \tag{5}$$

Naturalmente, si una función f no es uno a uno, no tiene función inversa.

■ **Propiedades** Antes de examinar realmente los métodos para determinar la inversa de una función f uno a uno, primero mencionaremos algunas propiedades importantes de f y de su inversa f^{-1}.

Teorema 5.6.1 Propiedades de las funciones inversas

i) Dominio de f^{-1} = rango de f.
ii) Rango de f^{-1} = dominio de f.
iii) $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
iv) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
v) La inversa de f^{-1} es f, esto es, $(f^{-1})^{-1} = f$.
vi) La inversa de f es única.

■ **Primer método para determinar f^{-1}** Describiremos dos maneras de determinar la inversa de una función uno a uno f. Ambos métodos requieren resolver una ecuación; el primero comienza con (4).

EJEMPLO 3 Inversa de una función

a) Determine la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$.
b) Determine el dominio y el rango de f^{-1}. Determine el rango de f.

Solución

a) Ya demostramos en el inciso *b*) del ejemplo 2 que f es uno a uno. Para determinar la inversa de f usando (4), debemos sustituir $f^{-1}(x)$ siempre que x aparezca en f, y a continuación igualar a x la expresión $f(f^{-1}(x))$:

de esta ecuación, despejar $f^{-1}(x)$
↓
$$f(f^{-1}(x)) = \boxed{\frac{1}{2f^{-1}(x) - 3} = x}$$

Se calcula el recíproco de ambos miembros de la ecuación en el interior del cuadro:

$$2f^{-1}(x) - 3 = \frac{1}{x}$$

$$2f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{x} = \frac{3x+1}{x}. \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

Se dividen entre 2 ambos miembros de la última ecuación para llegar a la inversa de f:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2x}.$$

b) Al examinar f se ve que su dominio es el conjunto de números reales, excepto $\frac{3}{2}$, esto es, $\{x \mid x \neq \frac{3}{2}\}$. Además, en la inversa que acabamos de determinar se ve que el dominio de f^{-1} es $\{x \mid x \neq 0\}$. Como el rango de f^{-1} = dominio de f, entonces se ve que el rango de f^{-1} es $\{y \mid y \neq \frac{3}{2}\}$. De acuerdo con el dominio de f^{-1} = rango de f también descubrimos que el rango de f es $\{y \mid y \neq 0\}$. ≡

■ Segundo método para determinar f^{-1} La inversa de una función f se puede determinar de un modo distinto. Si f^{-1} es la inversa de f, entonces $x = f^{-1}(y)$. Por consiguiente, sólo se debe:

- Despejar el símbolo x de $y = f(x)$ en términos de y (si es posible). Con esto se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- Cambiar la definición de la variable x a y, y de la variable y a x. Con esto se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Inversa de una función

Determine la inversa de $f(x) = x^3$.

Solución En el ejemplo 1 vimos que esta función es uno a uno. Para comenzar, la ecuación se expresa en la forma $y = x^3$. Entonces, al despejar x se obtiene $x = y^{1/3}$. A continuación cambiamos la definición de las variables para obtener $y = x^{1/3}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, lo que es equivalente a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ≡

A veces se dificulta determinar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, y otras veces es imposible. Por ejemplo, se puede demostrar que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno y, por tanto, tiene inversa f^{-1}, pero despejar x de la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todos (incluso el profesor). Sin embargo, como f sólo implica potencias enteras positivas de x, su dominio es $(-\infty, \infty)$. Si el lector inspecciona f gráficamente, verá que su rango también es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el rango de f^{-1} son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando no conociéramos f^{-1} en forma explícita, tiene mucho sentido hablar de valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, nótese que $f(0) = 3$. Eso quiere decir que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Podrá el lector calcular el valor de $f^{-1}(5)$?

■ Gráficas de f y f^{-1} Suponga que (a, b) representa cualquier punto en la gráfica de una función uno a uno f. Entonces, $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) es un punto en la gráfica de f^{-1}. Como se ve en la **FIGURA 5.6.3*a***), los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones uno del otro, en la recta $y = x$. Eso quiere decir que la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento de recta que va de (a, b) a (b, a). Como cada punto en una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente en la otra, en la figura 5.6.3*b*) se ve que las gráficas de f^{-1} y f son **reflexiones** uno del otro en la recta $y = x$. También se dice que las gráficas de f^{-1} y f son **simétricas** respecto a la recta $y = x$.

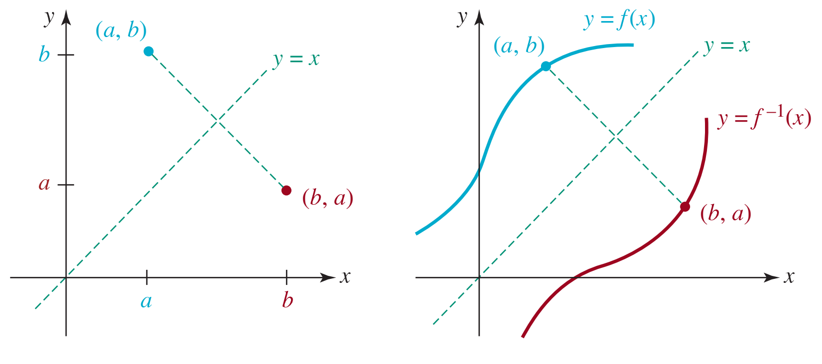


FIGURA 5.6.3 Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$.

EJEMPLO 5 Gráficas de f y f^{-1}

En el ejemplo 4 se vio que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las **FIGURAS 5.6.4*a*)** y 5.6.4*b*) se muestran las gráficas de esas funciones; en la figura 5.6.4*c*) las gráficas se superponen en el mismo sistema coordenado para ilustrar que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

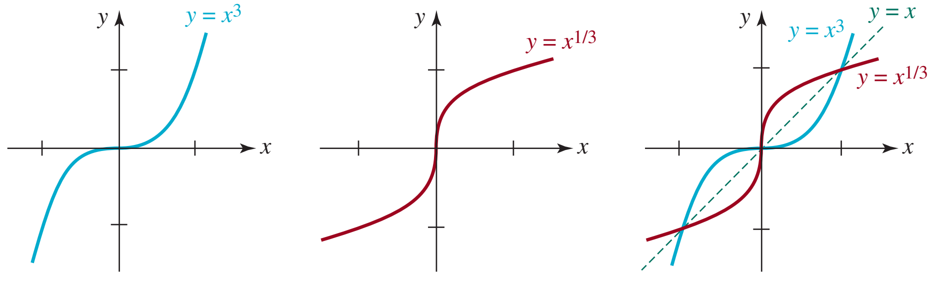


FIGURA 5.6.4 Gráficas de f y f^{-1} del ejemplo 5

≡

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, es uno a uno.

EJEMPLO 6 Inversa de una función

Determine la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

Solución Como la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, de acuerdo con la prueba de la recta horizontal se ve que f es una función uno a uno. Para determinar f^{-1} se resuelve $y = 5x - 7$ para x:

$$5x = y + 7 \qquad \text{implica que} \qquad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al intercambiar los nombres de las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la **FIGURA 5.6.5**.

≡

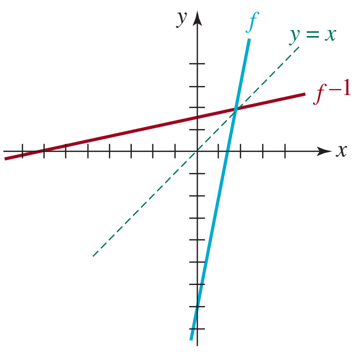


FIGURA 5.6.5 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 6

Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, no es uno a uno.

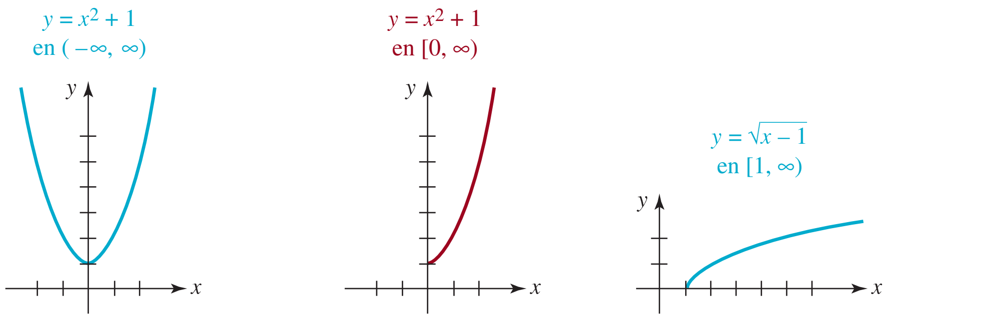
Dominios restringidos En el caso de una función f que no es uno a uno, se puede restringir su dominio de tal manera que la nueva función, que consista en f definida en este dominio restringido, sea uno a uno, y entonces tenga una inversa. En la mayor parte de los casos se quiere restringir el dominio para que la nueva función conserve su rango original. En el ejemplo siguiente se ilustra este concepto.

EJEMPLO 7 Dominio restringido

En el ejemplo 1 demostramos gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y como se observa en la **FIGURA 5.6.6*a*)**, el rango es $[1, \infty)$. Ahora bien, si $f(x) = x^2 + 1$ sólo se define en el intervalo $[0, \infty)$, se ven dos cosas en la figura 5.6.6*b*): el rango de f se conserva, y $f(x) = x^2 + 1$ se confina al dominio $[0, \infty)$ y pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene en la forma acostumbrada. Cuando se resuelve $y = x^2 + 1$ se ve que

$$x^2 = y - 1 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{y-1} \quad \text{y entonces} \quad y = \pm\sqrt{x-1}.$$

El signo algebraico adecuado en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y el rango de f^{-1} son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Eso lleva a seleccionar a $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ como inversa de f [figura 5.6.6*c*)].



a) No es una función uno a uno *b*) Función uno a uno *c*) Inversa de la función del inciso *b*)

FIGURA 5.6.6 Función inversa del ejemplo 7

≡

5.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 6 se muestra la gráfica de una función f. Aplique la prueba de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

1.

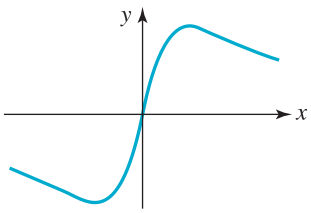


FIGURA 5.6.7 Gráfica para el problema 1

2.

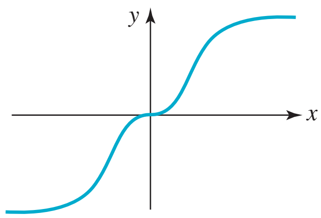


FIGURA 5.6.8 Gráfica para el problema 2

3.

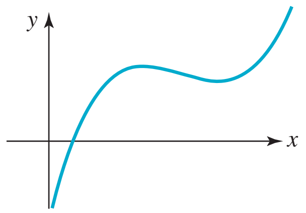


FIGURA 5.6.9 Gráfica para el problema 3

4.

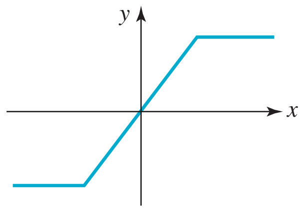


FIGURA 5.6.10 Gráfica para el problema 4

5.

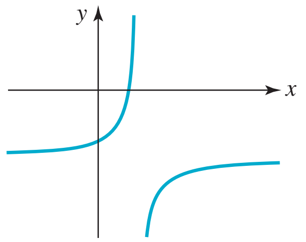


FIGURA 5.6.11 Gráfica para el problema 5

6.

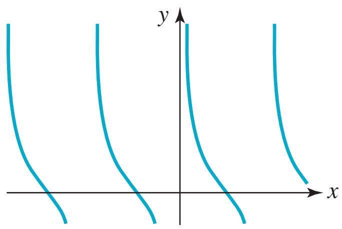


FIGURA 5.6.12 Gráfica para el problema 6

En los problemas 7 a 10 trace la gráfica de la función definida por partes f para determinar si es uno a uno.

7. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

En los problemas 11 a 14 proceda como en el ejemplo 2*a*) para demostrar que la función dada f *no es* uno a uno.

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2 + 1}$

14. $f(x) = |x + 10|$

En los problemas 15 a 18 proceda como en el ejemplo 2*b*) para demostrar que la función dada f *sí es* uno a uno.

15. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

16. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$

17. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

En los problemas 19 y 20, la función f es uno a uno. Sin calcular f^{-1}, halle su dominio y rango.

19. $f(x) = 4 + \sqrt{x}$

20. $f(x) = 5 - \sqrt{x + 8}$

En los problemas 21 y 22, la función f es uno a uno. Se indican el dominio y el rango de f. Determine f^{-1} y defina su dominio y su rango.

21. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 0$

22. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 2$

En los problemas 23 a 28, la función f es uno a uno. Determine f^{-1}. Trace la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

23. $f(x) = -2x + 6$

24. $f(x) = -2x + 1$

25. $f(x) = x^3 + 2$

26. $f(x) = 1 - x^3$

27. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

28. $f(x) = \sqrt{x - 7}$

En los problemas 29 a 32, la función f es uno a uno. Determine f^{-1}. Proceda como en el ejemplo 3*b*) y determine el dominio y el rango de f^{-1}. A continuación determine el rango de f.

29. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

30. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

31. $f(x) = \dfrac{7x}{2x - 3}$

32. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 2}$

En los problemas 33 a 36, la función f es uno a uno. Sin determinar f^{-1}, calcule el punto de la gráfica de f^{-1} que corresponde al valor indicado de x en el dominio de f.

33. $f(x) = 2x^3 + 2x; \quad x = 2$

34. $f(x) = 8x - 3; \quad x = 5$

35. $f(x) = x + \sqrt{x}; \quad x = 9$

36. $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}; \quad x = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

37.

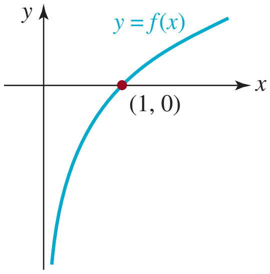


FIGURA 5.6.13 Gráfica para el problema 37

38.

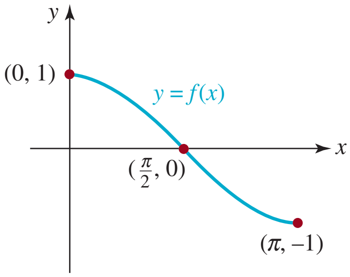


FIGURA 5.6.14 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39 y 40, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

39.

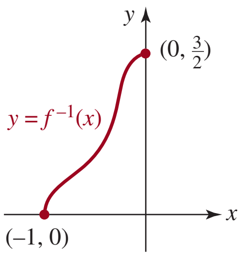


FIGURA 5.6.15 Gráfica para el problema 39

40.

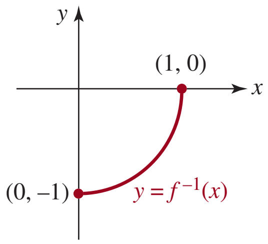


FIGURA 5.6.16 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 a 44, la función f no es uno a uno en el dominio indicado, pero es uno a uno en el dominio restringido (el segundo intervalo). Determine la inversa de la función uno a uno e indique su dominio. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

41. $f(x) = 4x^2 + 2, (-\infty, \infty); \quad [0, \infty)$

42. $f(x) = (3 - 2x)^2, (-\infty, \infty); \quad [\frac{3}{2}, \infty)$

43. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]; \quad [0, 2]$

44. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, [-1, 1]; \quad [0, 1]$

En los problemas 45 y 46 verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y que $f^{-1}(f(x)) = x$.

45. $f(x) = 5x - 10, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$

≡ Para la discusión

47. Suponga que f es una función continua creciente (o decreciente) para toda x de su dominio. Explique por qué f necesariamente es uno a uno.

48. Explique por qué la gráfica de una función uno a uno f puede tener cuando mucho una intersección con el eje x.

49. La función $f(x) = |2x - 4|$ no es uno a uno. ¿Cómo se debe restringir el dominio de f para que la nueva función tenga una inversa? Determine f^{-1} e indique cuáles son su dominio y su rango. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

50. La ecuación $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ define una función uno a uno $y = f(x)$. Calcule $f^{-1}(x)$.

51. ¿Qué propiedad tienen en común las funciones uno a uno $y = f(x)$ de las **FIGURAS 5.6.17*a*)** y 5.6.17*b*)? Determine dos funciones explícitas más que tengan esta misma propiedad. Sea muy claro acerca de qué tiene que ver esta propiedad con f^{-1}.

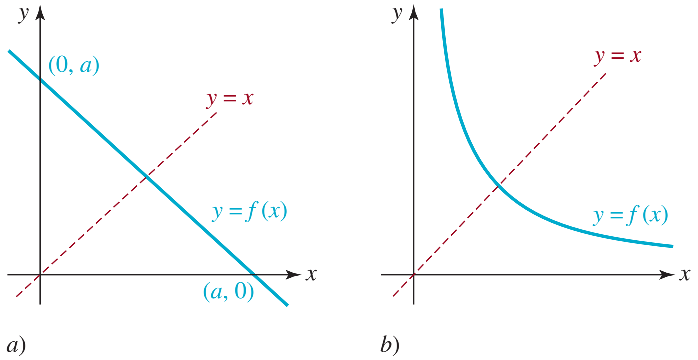


FIGURA 5.6.17 Gráficas del problema 51

5.7 Traducción de palabras a funciones

Introducción En cursos posteriores habrá casos en los que se espera que usted traduzca las palabras que describen un problema en símbolos matemáticos para desarrollar o deducir una *ecuación* o una *función*.

En esta sección nos centraremos en los problemas con funciones. Comenzaremos con una descripción verbal acerca del producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 15. Expresar el producto de uno con el cuadrado del otro como función de uno de los números.

Solución Primero, representaremos los dos números con los símbolos x y y, recordando que "no negativo" quiere decir que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. La primera frase dice que $x + y = 15$; ésta *no es* la función que buscamos. La segunda frase describe la función que deseamos; se llama "el producto". Representemos "el producto" por el símbolo P. Ahora bien, P es el producto de uno de los números, digamos x, por el cuadrado del otro, esto es, por y^2:

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, todavía no terminamos porque se supone que P es una "función de *uno* de los números". Ahora aprovecharemos que los números x y y se relacionan por $x + y = 15$. De esta última ecuación sustituimos $y = 15 - x$ en la ecuación (1) para obtener el resultado que deseamos:

$$P(x) = x(15 - x)^2. \tag{2}$$

A continuación se presenta un resumen simbólico del análisis del problema del ejemplo 1.

$$\text{La } \overbrace{\text{suma de } \overbrace{\text{dos números no negativos}}^{\text{sean los números } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0} \text{ es 15}}^{x + y = 15}\text{. Expresar el } \overbrace{\text{producto}}^{P} \text{ con} \tag{3}$$
$$\overbrace{\text{el}}^{x}\ \overbrace{\text{cuadrado del otro}}^{y^2} \text{ como función de } \overbrace{\text{uno de los números}}^{\text{usar } x}\text{.}$$

Observe que la segunda frase es vaga, pues no dice cuál número se eleva al cuadrado. Eso quiere decir que, en realidad, eso no importa; la ecuación (1) también podría escribirse como

$P = yx^2$. También, podríamos haber usado $x = 15 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (15 - y)y^2$. En un ambiente de cálculo no hubiera importado si trabajáramos con $P(x)$ o con $P(y)$, porque al determinar *uno* de los números se determina el otro automáticamente, por medio de la ecuación $x + y = 15$. Esta última ecuación se suele llamar **restricción**. Una restricción no sólo define la relación entre las variables x y y, sino con frecuencia establece un límite a la forma en que pueden variar x y y. Como verá en el ejemplo siguiente, la restricción ayuda a determinar el dominio de la función que acabamos de construir.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Sin conocer el contexto del planteo del problema en el ejemplo 1, habría que llegar a la conclusión que de acuerdo con la descripción de la página 201, en la sección 5.1, el dominio de la función polinomial cúbica

$$P(x) = x(15 - x)^2 = 225x - 30x^2 + x^3$$

es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números deberían ser no negativos. De acuerdo con los requisitos que $x \geq 0$ *y que* $y = 15 - x \geq 0$, se obtienen $x \geq 0$ y $x \leq 15$, lo que quiere decir que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 15$. Si empleamos la notación de intervalos, el dominio de la función producto P de (2) es el intervalo cerrado $[0, 15]$. ≡

Otra forma de ver la conclusión del ejemplo 2 es la siguiente: la restricción $x + y = 15$ establece que $y = 15 - x$. Así, *si* x pudiera ser mayor que 15 (digamos que $x = 17.5$), entonces $y = 15 - x$ sería un número negativo, lo cual contradice la hipótesis inicial de que $y \geq 0$.

Invariablemente, siempre que se analizan problemas planteados en palabras en una clase de matemáticas, los estudiantes reaccionan con quejidos, ambivalencia y desaliento. Aunque no garantizamos nada, las sugerencias siguientes podrían ayudarle a resolver los problemas de los ejercicios 5.7. Estos problemas son especialmente importantes si en sus planes futuros está tomar un curso de cálculo.

GUÍA PARA CREAR UNA FUNCIÓN

i) Por lo menos trate de tener una actitud positiva.

ii) Trate de ser limpio y organizado.

iii) Lea despacio el problema. Luego vuelva a leerlo varias veces más.

iv) Siempre que sea posible, trace una curva o imagen e identifique en él las cantidades dadas en el problema. No complique el dibujo.

v) Si la descripción de la función indica dos variables, por ejemplo, x y y, busque una restricción o relación entre ellas (como $x + y = 15$ en el ejemplo 1). Use la restricción para eliminar una de las variables y expresar la función requerida en términos de una variable.

EJEMPLO 3 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y dos vértices en el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$ [**FIGURA 5.7.1*a***)]. Determine las dimensiones del rectángulo máximo.

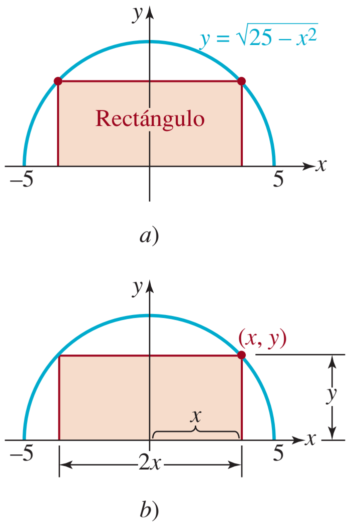


FIGURA 5.7.1 Rectángulo del ejemplo 3

Solución Si (x, y), $x > 0$, $y > 0$ representa el vértice del rectángulo que está en el círculo y en el primer cuadrante, entonces, como se ve en la figura 5.7.1*b*), el área A es largo × ancho, es decir

$$A = (2x) \times y = 2xy. \tag{4}$$

En este problema, la restricción es la ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ del semicírculo. Usaremos la ecuación de restricción para eliminar y en (4) y obtener el área del rectángulo,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, \tag{5}$$ ≡

Si tuviéramos que examinar la función $A(x)$ fuera del contexto del ejemplo 3, su dominio hubiera sido $[-5, 5]$. Como supusimos que $x > 0$, el dominio de $A(x)$ en la ecuación (4) en realidad es el intervalo abierto $(0, 5)$.

EJEMPLO 4 ¿Cuánta cerca?

Un ranchero pretende delimitar un terreno rectangular que tenga 1 000 m^2 de superficie. El terreno será cercado y dividido en dos partes iguales, con una cerca adicional, paralela a dos lados. Calcule las dimensiones del terreno que requieran la cantidad mínima de cerca.

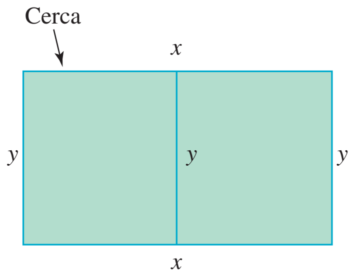


FIGURA 5.7.2 Terreno rectangular del ejemplo 4

Solución El esquema debe ser un rectángulo con una recta en su mitad, similar a lo que se ve en la **FIGURA 5.7.2**. Como muestra la figura, sea $x > 0$ el largo del terreno rectangular, y sea $y > 0$ su ancho. Si el símbolo F representa esta cantidad, la suma de las longitudes de las *cinco* partes (dos horizontales y tres verticales), de la cerca, es

$$F = 2x + 3y \tag{6}$$

Como queremos que F sea una función del largo de un lado del terreno, debemos eliminar x o y de (6). Sin embargo, el terreno cercado debe tener un área de 1 000 m^2, así que x y y deben relacionarse con la restricción $xy = 1\,000$. De acuerdo con esta última ecuación, se obtiene $y = 1\,000/x$, que se puede usar para eliminar y en (6). Por tanto, la cantidad de cerca F en función de x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, es decir,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \tag{7}$$

Como x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, la conclusión es que x es positivo. Pero además de ésa, x no tiene otra restricción. Tenga en cuenta que si el número positivo x se acerca a 0, entonces $y = 1\,000/x$ será muy grande, en tanto que si se considera que x es un número muy grande, entonces y se aproximará a 0. Por consiguiente, el dominio de $F(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

Si un problema se relaciona con triángulos, debe estudiarlo detenidamente y determinar si ha de aplicar el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría (véase la sección 10.2).

EJEMPLO 5 Escalera más corta

Una pared de 10 pies se halla a 5 pies de distancia de un edificio. Una escalera, apoyada en la pared, toca el edificio como se ilustra en la **FIGURA 5.7.3**. Exprese la longitud de la escalera como una función de x como se muestra en la figura.

Solución Sea L la longitud de la escalera. Con x y y definidos en la figura 5.7.3, se ve que hay dos triángulos rectángulos, que el triángulo mayor tiene tres lados cuyas longitudes son L, y y $x + 5$, y el triángulo menor tiene dos lados cuyas longitudes son x y 10. Ahora bien, la escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, así que de acuerdo con el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2 \tag{8}$$

Los triángulos rectángulos de la figura 5.7.3 son semejantes, porque ambos tienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo que forma la escalera con el piso. Entonces aprovecharemos que las relaciones de los lados correspondientes son iguales en triángulos correspondientes. Eso nos permite escribir

$$\frac{y}{x + 5} = \frac{10}{x}$$

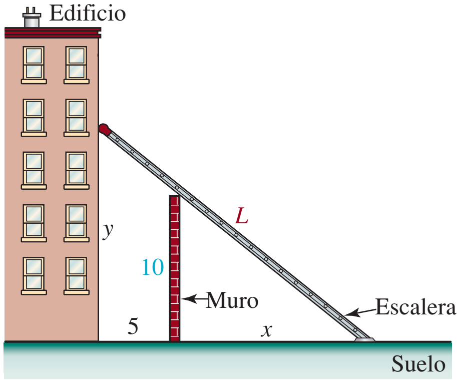


FIGURA 5.7.3 Escalera del ejemplo 5

Despejamos y en términos de x en la última ecuación y obtenemos $y = 10(x + 5)/x$; por tanto, (8) se convierte en

$$\begin{aligned} L^2 &= (x + 5)^2 + \left(\frac{10(x + 5)}{x}\right)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(1 + \frac{100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{se factoriza } (x+5)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(\frac{x^2 + 100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{denominador común} \end{aligned}$$

Se saca la raíz cuadrada para obtener L en función de x:

$$L(x) = \frac{x + 5}{x}\sqrt{x^2 + 100}. \quad \leftarrow \begin{array}{l}\text{la raíz cuadrada de un producto es} \\ \text{el producto de las raíces cuadradas de los factores}\end{array}$$

El dominio de la función $L(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

EJEMPLO 6 Distancia a un punto

Exprese la distancia desde un punto (x, y) en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$ al punto $(2, 4)$ como una función de x.

Solución Sea d la distancia de (x, y) a $(2, 4)$, como se muestra en la **FIGURA 5.7.4**. Entonces, con base en la fórmula de la distancia (2) de la sección 4.1,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{9}$$

En este problema, la restricción es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Con ella se puede sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (9), por el número 1. Además, usando la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ podemos eliminar y en (9). Así, la distancia d en función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \tag{10}$$

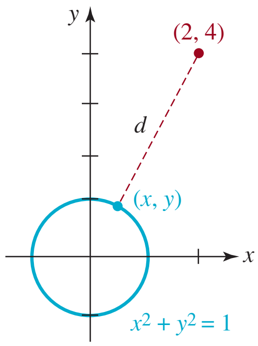


FIGURA 5.7.4 Distancia d en el ejemplo 6

Como (x, y) es un punto del círculo en el primer cuadrante, la variable x puede ir de 0 a 1, esto es, el dominio de la función en (10) es el intervalo cerrado $[0, 1]$. ≡

Notas del aula

No debe pensar que todo problema que requiera el planteamiento de una función a partir de una descripción verbal debe tener una restricción. En los problemas 11 a 16 de los ejercicios 5.7, la función requerida también se puede plantear usando sólo una variable.

5.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 40 traduzca las palabras en una función adecuada. Indique el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como función de uno de los números.
2. Exprese la suma de un número distinto de cero y de su recíproco en función del número.
3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno, más el doble del cuadrado del otro, en función de uno de los números.
4. Sean m y n dos enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno por la n-ésima potencia del otro en función de uno de los números.
5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
6. La superficie de un rectángulo es de 400 pulg^2. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
7. Expresse el área del rectángulo sombreada de la **FIGURA 5.7.5** en función de x.

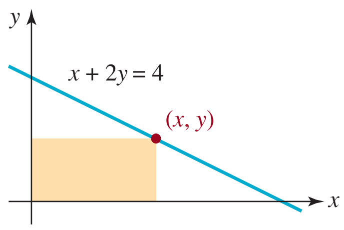


FIGURA 5.7.5 Rectángulo para el problema 7

8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto (2, 4), como se ve en la **FIGURA 5.7.6**, en función de x.

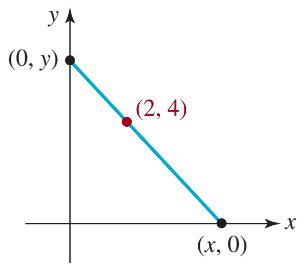


FIGURA 5.7.6 Segmento de recta para el problema 8

9. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $x + y = 1$, al punto (2, 3), como función de x.
10. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $y = 4 - x^2$, al punto (0, 1), en función de x.
11. Exprese el perímetro de un cuadrado en función de su área A.
12. Exprese el área de un círculo en función de su diámetro d.
13. Exprese el diámetro de un círculo en función de su circunferencia C.
14. Exprese el volumen de un cubo en función del área A de su base.
15. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de su altura h.
16. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.
17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x.
18. Un alambre de longitud L se corta a x unidades de un extremo. Un trozo del alambre se dobla formando un cuadrado, y la otra parte se dobla para formar un círculo. Exprese la suma de las áreas en función de x.
19. Se planta un árbol a 30 pies de la base de un poste de alumbrado, que tiene 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol en función de su altura (**FIGURA 5.7.7**).

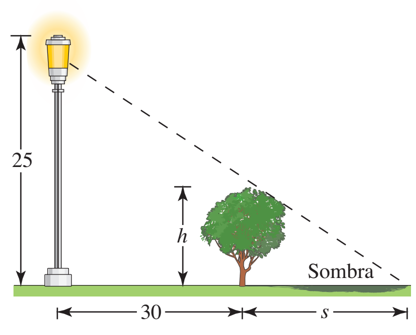


FIGURA 5.7.7 Árbol para el problema 19

20. El armazón de una cometa está formado por seis trozos de plástico ligero. El marco exterior consta de cuatro piezas ya cortadas; dos tienen 2 pies de longitud y dos tienen 3 pies de longitud. Exprese el área de la cometa en función de x, donde $2x$ es la longitud de la pieza transversal que se indica en la **FIGURA 5.7.8**.

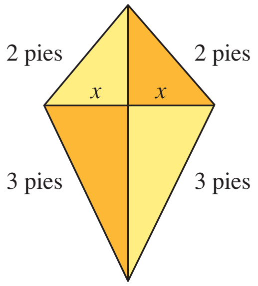


FIGURA 5.7.8 Cometa para el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta, con 450 pulg^3 de volumen, de tal modo que la longitud de su base sea el triple de su ancho. Exprese la superficie de la caja en función del ancho.

22. Un tanque cónico, con su vértice hacia abajo, tiene 5 pies de radio y 15 pies de altura. Al tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua en función de su profundidad. [*Pista:* el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Aunque el tanque es un objeto tridimensional, examine su corte transversal, como triángulo de dos dimensiones]. (**FIGURA 5.7.9**.)

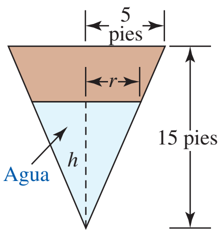


FIGURA 5.7.9 Tanque en forma de cono para el problema 22

23. El automóvil A pasa por el punto O dirigiéndose hacia el este a una velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto una hora después, con rumbo al norte a una velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los vehículos, en función del tiempo t, contando t a partir de cuando el automóvil B pasa por el punto O (**FIGURA 5.7.10**).

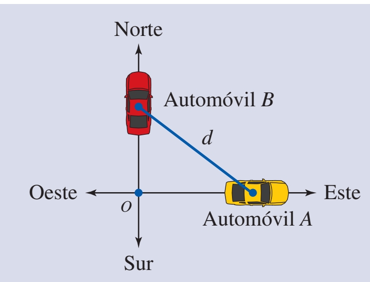


FIGURA 5.7.10 Autos para el problema 23

24. En el momento $t = 0$ (expresado en horas), dos aviones tienen una separación vertical de 1 milla, y se rebasan con direcciones opuestas. Si los aviones vuelan horizontalmente con velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h, exprese la distancia horizontal entre ellos en función de t. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

25. La alberca de la **FIGURA 5.7.11** tiene 3 pies de profundidad en el extremo bajo, y 8 pies de profundidad en el extremo hondo; tiene 40 pies de longitud y 30 pies de ancho (de los extremos); el fondo forma un plano inclinado. Se bombea agua a la alberca. Exprese el volumen del agua en la alberca en función de la altura h del agua sobre el fondo, en el lado hondo. [*Pista:* el volumen será una función definida en intervalo, y su dominio será $0 \le h \le 8$].

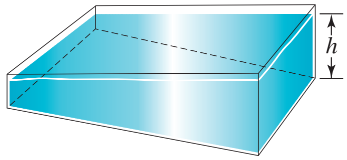


FIGURA 5.7.11 Alberca para el problema 25

26. El reglamento del servicio postal para paquetería estipula que la longitud más el perímetro del extremo de un paquete no debe ser mayor que 108 pulgadas. Exprese el volumen del paquete en función del ancho x, como se indica en la **FIGURA 5.7.12**. [*Pista:* suponga que el largo más el perímetro es igual a 108].

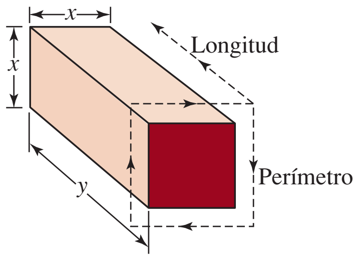


FIGURA 5.7.12 Paquete para el problema 26

27. Considere todos los rectángulos que tienen el mismo perímetro p (en este caso p representa una constante). Exprese el área de un rectángulo como una función de la longitud de un lado.

28. El largo de un rectángulo es x, su altura es y y su perímetro mide 20 pulg. Exprese la longitud de la diagonal del rectángulo como una función del largo x.

29. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si el área por encerrar es de 4 000 m^2, calcule las dimensiones del terreno que requieran la mínima cantidad de cerca.

30. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si la cerca total que se va a usar es de 8 000 m, calcule las dimensiones del terreno que tenga la máxima área.

31. Un ranchero desea construir un corral rectangular, de 128 000 pies^2 de área, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. El cercado a lo largo del río cuesta $1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados, cercar cuesta $2.50 por pie. Calcule las dimensiones del corral, para que el costo de la construcción sea mínimo. [*Pista:* a lo largo del río, el costo de x pies de cerca es de $1.50x$].

32. Exprese el área de la región coloreada del triángulo que se ilustra en la **FIGURA 5.7.13** como una función de x.

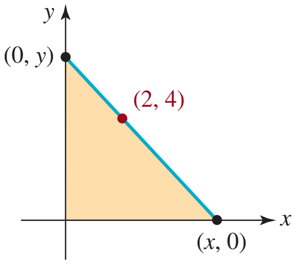


FIGURA 5.7.13 Segmento de recta para el problema 32

33. *a*) Se va a formar una caja rectangular abierta con base cuadrada, y 32 000 cm^3 de volumen. Calcule las dimensiones de la caja que requieran la cantidad mínima de material (**FIGURA 5.7.14**).

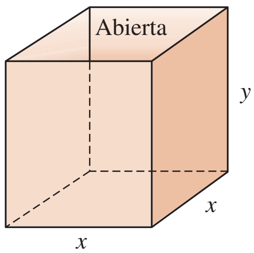


FIGURA 5.7.14 Caja para el problema 33

34. Se va a construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada. El material para la tapa cuesta $2 por pie cuadrado, mientras que el material para las caras restantes cuesta $1 por pie cuadrado. Si el costo total para construir cada caja es de $36, calcule las dimensiones de la caja con mayor volumen que pueda fabricarse.

35. Un canalón pluvial se fabrica con corte transversal rectangular con una pieza metálica de 1 pie × 20 pies, doblando hacia arriba cantidades iguales en el lado de 1 pie. Véase la **FIGURA 5.7.15**. Exprese la capacidad de la canaleta con una función de x. [*Pista:* capacidad = volumen].

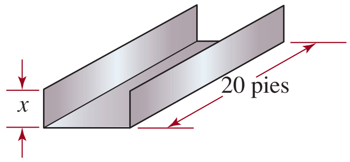
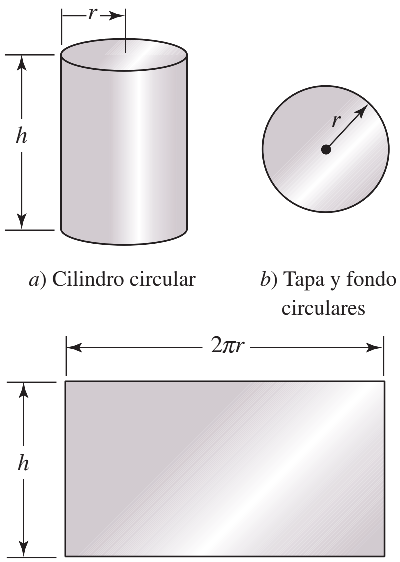


FIGURA 5.7.15 Canalón pluvial para el problema 35

36. Se va a fabricar una lata de jugo, con forma de cilindro circular recto, para contener un volumen de 32 pulg^3 (**FIGURA 5.7.16*a***). Calcule las dimensiones de la lata para que en su construcción se use la mínima cantidad de material. [*Pista:* material = superficie total de la lata = superficie de la tapa + superficie del fondo + superficie lateral. Si se quitan las tapas superior e inferior, y el cilindro se corta recto en su lado y se aplana, el resultado es el rectángulo que se ve en la figura 5.7.16*c*)].



a) Cilindro circular *b*) Tapa y fondo circulares

c) El lado es rectangular

FIGURA 5.7.16 Lata de jugo para el problema 36

37. Una página impresa tendrá márgenes de 2 pulgadas, en blanco, en los lados, y márgenes de 1 pulgada, en blanco, en las partes superior e inferior (**FIGURA 5.7.17**). El área de la parte impresa es de 32 pulg^2. Calcule las dimensiones de la página, para usar la cantidad mínima de papel.

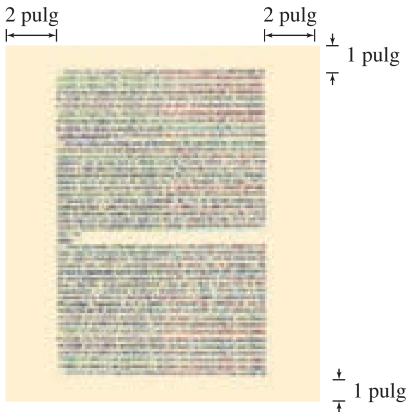


FIGURA 5.7.17 Página impresa para el problema 37

38. Muchas medicinas se encierran en cápsulas, como se ve en la foto adjunta. Suponga que se forma una cápsula pegando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto, como se ve en la **FIGURA 5.7.18**. Si el volumen total de la cápsula debe ser de 0.007 pulg^3, calcule las dimensiones de ella para que en su construcción se use la cantidad mínima de material. [*Pista:* el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y su superficie es $4\pi r^2$].

Cápsulas

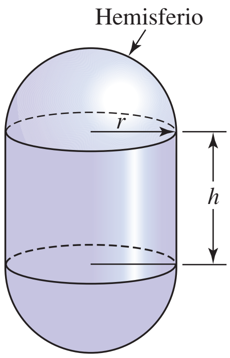


FIGURA 5.7.18 Modelo de la cápsula para el problema 38

39. Un canalón de agua de 20 pies de longitud tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud (**FIGURA 5.7.19**). Determine la dimensión del lado superior del triángulo para que el volumen del canalón sea máximo. [*Pista:* un *cilindro recto* no es necesariamente un *cilindro circular*, cuando la tapa y el fondo son circulares. La tapa y el fondo de un cilindro recto son iguales, pero podrían ser triángulos, pentágonos, trapezoides, etc. El volumen de un cilindro recto es el área de la base × altura].

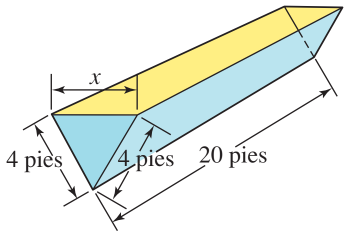


FIGURA 5.7.19 Canalón de agua para el problema 39

40. Algunas aves vuelan con más lentitud sobre agua que sobre tierra. Un pájaro vuela a 6 km/h constante sobre agua, y a 10 km/h sobre tierra. Con la información de la **FIGURA 5.7.20**, determine la trayectoria que debe seguir el ave para que su vuelo tenga un tiempo mínimo total, entre la orilla de una isla y su nido en la orilla de otra isla. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

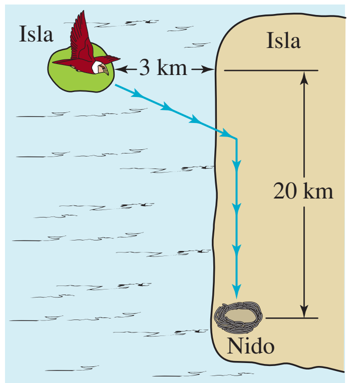


FIGURA 5.7.20 Ave del problema 40

Para la discusión

41. En el problema 19 ¿qué sucede con la longitud de la sombra del árbol, cuando su altura se acerca a 25 pies?

42. En un libro de ingeniería, se dice que el área del octágono de la **FIGURA 5.7.21** es $A = 3.31r^2$. Demuestre que en realidad esta fórmula es un cálculo aproximado del área. Calcule el área A exacta del octágono, en función de r.

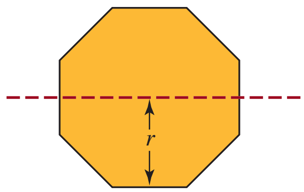


FIGURA 5.7.21 Octágono del problema 42

5.8 Recta de mínimos cuadrados

Introducción Cuando realizamos experimentos, casi siempre tabulamos los datos en forma de pares ordenados (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), donde cada x_i es distinta. Dados los datos, es deseable extrapolar y a partir de x; para ello, debemos encontrar un modelo matemático, esto es, una función que se aproxime o "se ajuste" a los datos. En otras palabras, necesitamos una función f tal que

$$f(x_1) \approx y_1, f(x_2) \approx y_2, \ldots, f(x_n) \approx y_n$$

Como es natural, no queremos una función cualquiera, sino una que se ajuste a los datos lo mejor posible. En la explicación que sigue centraremos la atención exclusivamente en el problema de obtener un polinomio lineal $y = mx + b$ o una línea recta que "se ajuste mejor" a los datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). El procedimiento para hallar esta función lineal se conoce como el **método de mínimos cuadrados**.

EJEMPLO 1 Ajuste de una recta a los datos

Considere los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la **FIGURA 5.8.1*a*)**. Cuando examinamos la figura 5.8.1*b*), notamos que la recta $y = x + 1$ pasa por dos de los puntos de datos y, en consecuencia, podríamos creer que es la que mejor se ajusta a los datos.

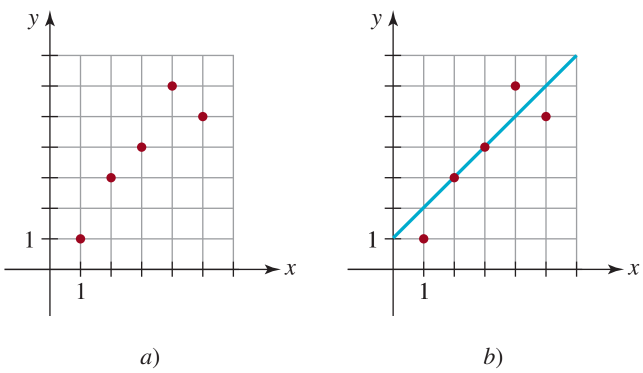


FIGURA 5.8.1 Datos en *a*); una recta que se ajusta a los datos en *b*) ≡

Evidentemente, necesitamos algo mejor que una conjetura visual para determinar la función lineal $y = f(x)$ como en el ejemplo 1. Precisamos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como se llama en ocasiones, la "bondad del ajuste".

Si tratamos de relacionar los puntos de datos con la recta $y = mx + b$, querremos obtener m y b de manera que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{1}$$

El sistema de ecuaciones (1) es un ejemplo de un **sistema sobredeterminado**; es decir, un sistema en el que hay más ecuaciones que incógnitas. No esperamos que ese sistema tenga solución a menos que, por supuesto, los puntos de datos se sitúen todos en la misma recta.

Recta de mínimos cuadrados Si los puntos de datos son (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), una forma de determinar cómo se ajusta la función lineal $f(x) = mx + b$ a los datos consiste en medir las distancias verticales entre los puntos y la gráfica de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se puede decir que cada e_i es el **error** en la aproximación del valor del dato y_i con el valor de la función $f(x_i)$ (**FIGURA 5.8.2**). Intuitivamente, la función f se ajusta a los datos si la suma de todos los valores de e_i es un mínimo. En realidad, un método más práctico para resolver el problema consiste en hallar una función lineal f tal que la *suma de los cuadrados* de todos los valores e_i sea un mínimo. Definimos la solución del sistema (1) como los coeficientes m y b que reducen al mínimo la expresión

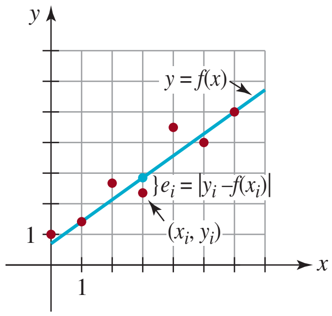


FIGURA 5.8.2 Error al aproximar y_i con $f(x_i)$

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2. \end{aligned} \tag{2}$$

La expresión E se conoce como **suma de errores cuadráticos**. La recta $y = mx + b$ que minimiza la suma de errores cuadráticos (2) se denomina **recta de mínimos cuadrados** o **recta del mejor ajuste** de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

■ **Notación de suma** Antes de proceder a encontrar la recta de mínimos cuadrados conviene introducir una notación abreviada para las sumas de números. Puede resultar muy tedioso escribir sumas como (1). Suponga que a_k representa un número real que depende de un entero k. La suma de n números reales a_k, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota con el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{3}$$

La notación de suma se explica con mayor detalle en la sección 15.2.

En virtud de que Σ es letra griega mayúscula sigma, (3) se conoce como **notación de suma** o **notación sigma**. El entero k se denomina **índice de la suma** y adopta valores enteros sucesivos a partir de $k = 1$ y hasta $k = n$. Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos elevados al cuadrado,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 98^2 + 99^2 + 100^2$$

se escribe de manera compacta así:

la suma termina con este número

$$\sum_{k=1}^{100} k^2.$$

la suma empieza con este número

En notación sigma, escribimos de manera compacta la suma de los errores cuadráticos (2) así:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2 \end{aligned} \tag{4}$$

El problema que queda por resolver ahora es: ¿es posible hallar una pendiente m y una coordenada y b tal que (4) sea un mínimo? La respuesta es sí. Aunque omitiremos los detalles (que requieren del cálculo), los valores de m y b que producen el valor mínimo de E están dados por

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{5}$$

No se deje llevar por el pánico. La evaluación de estas fórmulas sólo requiere aritmética. Además, casi todas las calculadoras graficadoras pueden calcular estas sumas o darle m y b después de ingresar los datos. Consulte el manual del usuario.

EJEMPLO 2 Recta de mínimos cuadrados

Obtenga la recta de mínimos cuadrados de los datos del ejemplo 1. Calcule la suma de errores cuadráticos E de esta recta y la recta $y = x + 1$.

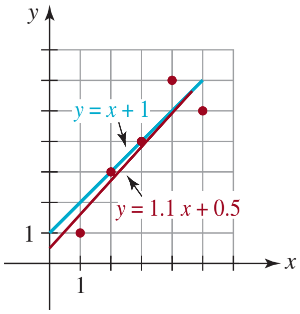


FIGURA 5.8.3 Recta de mínimos cuadrados (en rojo) del ejemplo 2

Solución Con los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) identificamos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$ y $y_5 = 5$. Con estos valores y $n = 5$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 68, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 19, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55.$$

Sustituimos estos valores en las fórmulas de (5) y obtenemos $m = 1.1$ y $b = 0.5$. Por tanto, la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para efectos de comparación, en la **FIGURA 5.8.3** se muestran los datos, la recta $y = x + 1$ en azul y la recta de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$ en rojo. ≡

Para la recta de mínimos cuadrados $f(x) = 1.1x + 0.5$ obtenida en el ejemplo 2, la suma de los errores cuadráticos (4) es

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2 \\ &= [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2 \\ &= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7. \end{aligned}$$

En cuanto a la recta $y = x + 1$ que supusimos en el ejemplo 1 y que también pasaba por dos de los puntos de datos, encontramos que la suma de los errores cuadráticos es $E = 3.0$.

Nota ▶ En la sección 14.6 examinaremos otro método para obtener la recta de mínimos cuadrados.

Es posible generalizar la técnica de mínimos cuadrados. Por ejemplo, podríamos ajustar los datos dados a una expresión polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en lugar de un polinomio lineal.

5.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 6, obtenga la recta de mínimos cuadrados de los datos proporcionados.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2).
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7).
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5).
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5).
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10).
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5).

≡ Aplicaciones diversas

7. En un experimento se obtuvo la correspondencia que se presenta en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática v (en centistokes) de un aceite con un cierto aditivo. Obtenga la recta de mínimos cuadrados $v = mT + b$ y úsela para estimar la viscosidad del aceite a $T = 140$ y $T = 160$.

T	20	40	60	80	100	120
v	220	200	180	170	150	135

8. En un experimento se obtuvo la correspondencia que se presenta en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en $M\Omega$). Obtenga la recta de mínimos cuadrados $R = mT + b$ y úsela para estimar la resistencia a $T = 700$.

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

Problemas para resolver con calculadora o sistema algebraico para computadora (SAC)

9. ***a***) Podemos aproximar un conjunto de puntos de datos con un *polinomio* de mínimos cuadrados de grado n. Aprenda la sintaxis del SAC que tenga a la mano para obtener una recta de mínimos cuadrados (polinomio lineal), un polinomio cuadrático de mínimos cuadrados y un polinomio cúbico de mínimos cuadrados para ajustar los datos

$$(-5.5, 0.8), (-3.3, 2.5), (-1.2, 3.8),$$
$$(0.7, 5.2), (2.5, 5.6), (3.8, 6.5).$$

b) Use un SAC para superponer las gráficas de los datos y la recta de mínimos cuadrados obtenida en el inciso *a*) en los mismos ejes de coordenadas. Repita el procedimiento con el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados y luego con los datos y el polinomio cúbico de mínimos cuadrados.

10. Use los datos del censo de Estados Unidos (en millones) del año 1900 al año 2000

1900	1920	1940
75.994575	105.710620	131.669275
1960	1980	2000
179.321750	226.545805	281.421906

y la recta de mínimos cuadrados para proyectar la población de Estados Unidos en el año 2020.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función:
- dominio de una
- rango de una
- cero de la

Variable independiente
Variable dependiente
Gráficas:
- intersección con el eje x
- intersección con el eje y

Prueba de la recta vertical
Función potencia
Función polinomial
Función lineal
Función cuadrática
Función impar
Función par
Transformación rígida:
- desplazamiento vertical
- desplazamiento horizontal

Reflexiones
Transformaciones no rígidas:
- estiramientos
- compresiones

Función definida por partes:
- función máximo entero

Función continua
Combinaciones aritméticas de funciones
Composición de funciones
Cociente de diferencias
Función uno a uno
Prueba de la recta horizontal
Función inversa
Dominio restringido
Recta de mínimos cuadrados:
- suma de errores cuadráticos

CAPÍTULO 5 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 22, responda verdadero o falso:

1. Si (4, 0) está en la gráfica de f, entonces (1, 0) debe estar en la gráfica de $y = \frac{1}{4}f(x)$. ______

2. La gráfica de una función sólo puede una intersección con y. ______

3. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. ______

4. Ninguna función f diferente de cero puede ser simétrica respecto al eje x. ______

5. El dominio de $f(x) = (x - 1)^{1/3}$ es $(-\infty, \infty)$. ______

6. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x + 2}$, entonces el dominio de g/f es $[-2, \infty)$.

7. f es una función uno a uno si nunca asume el mismo valor dos veces. ______

8. El dominio de la función $y = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$. ______

9. La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es una reflexión de la gráfica $f(x) = \sqrt{-x}$ en el eje y. ______

10. Un punto de intersección de las gráficas de f y f^{-1} debe estar en la recta $y = x$. ______

11. La función uno a uno $f(x) = 1/x$ tiene la propiedad que $f = f^{-1}$. _____

12. La función $f(x) = 2x^2 + 16x - 2$ disminuye en el intervalo $[-7, -5]$. _____

13. Ninguna función par definida en $(-a, a)$, con $a > 0$, puede ser uno a uno. _____

14. Todas las funciones impares son uno a uno. _____

15. Si una función f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. _____

16. Si f es una función creciente en un intervalo que contiene $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. _____

17. La función $f(x) = |x| - 1$ es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$. _____

18. Para la composición de funciones, $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. _____

19. Si la intersección con el eje y de la gráfica de una función f es $(0, 1)$, entonces la intersección con ese eje de la gráfica de $y = 5 - 3f(x)$ es $(0, 2)$. _____

20. Si f es una función lineal, entonces $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. _____

21. La función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es uno a uno en el dominio restringido $[-1, \infty)$. El rango de f^{-1} es también $[-1, \infty)$. _____

22. La función $f(x) = x^3 + 2x + 5$ es uno a uno. El punto $(8, 1)$ está en la gráfica de f^{-1}. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. Si $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 2}$, entonces $(\frac{1}{2},$ ____$)$ es un punto en la gráfica de f.

2. Si $f(x) = \dfrac{Ax}{10x - 2}$ y $f(2) = 3$, entonces $A =$ _______.

3. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ es _______.

4. El rango de la función $f(x) = |x| - 10$ es _______.

5. Los ceros de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ son _______.

6. Si la gráfica de f es simétrica respecto al eje y, $f(-x) =$ _______.

7. Si f es una función impar tal que $f(-2) = 2$, entonces $f(2) =$ _______.

8. La gráfica de una función lineal para la cual $f(-1) = 1$ y $f(1) = 5$ tiene pendiente $m =$ _______.

9. Una función lineal cuyas intersecciones con los ejes son $(-1, 0)$ y $(0, 4)$ es $f(x) =$ _______.

10. Si la gráfica de $y = |x - 2|$ se desplaza 4 unidades a la izquierda, entonces su ecuación es _______.

11. Las intersecciones con x y y de la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 1$ son _______.

12. El rango de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 21$ es _______.

13. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para la cual $f(0) = 7$ y cuya única intersección con x es $(-2, 0)$ es $f(x) =$ _______.

14. Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, entonces $(f \circ g)(-1) =$ _______.

15. El vértice de la gráfica $f(x) = x^2$ es $(0, 0)$. Por tanto, el vértice de la gráfica de $y = -5(x - 10)^2 + 2$ es _______.

16. Puesto que $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$ es el inverso de una función f uno a uno, sin hallar f, el dominio de f es _______ y el rango de f es _______.

17. La intersección con x de una función f uno a uno es $(5, 0)$ y, por tanto, la intersección con y de f^{-1} es _______.

18. El inverso de $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x + 1}$ es $f^{-1} =$ _______.

19. Para $f(x) = [\![x + 2]\!] - 4$, $f(-5.3) =$ _______.

20. Si f es una función uno a uno tal que $f(1) = 4$, entonces $f(f^{-1}(4)) =$ _______.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, identifique dos funciones f y g tales que $h = f \circ g$.

1. $h(x) = \dfrac{(3x - 5)^2}{x^2}$

2. $h(x) = 4(x + 1) - \sqrt{x + 1}$

3. Escriba la ecuación de cada nueva función si la gráfica de $f(x) = x^3 - 2$:
   - ***a)*** se desplaza a la izquierda 3 unidades.
   - ***b)*** se desplaza hacia abajo 5 unidades.
   - ***c)*** se desplaza a la derecha 1 unidad y hacia arriba 2 unidades.
   - ***d)*** se refleja en el eje x.
   - ***e)*** se refleja en el eje y.
   - ***f)*** se estira verticalmente por un factor de 3.

4. La gráfica de una función f con dominio $(-\infty, \infty)$ se ilustra en la **FIGURA 5.R.1**. Trace la gráfica de las funciones siguientes:
   - ***a)*** $y = f(x) - \pi$
   - ***b)*** $y = f(x - 2)$
   - ***c)*** $y = f(x + 3) + \pi/2$
   - ***d)*** $y = -f(x)$
   - ***e)*** $y = f(-x)$
   - ***f)*** $y = 2f(x)$

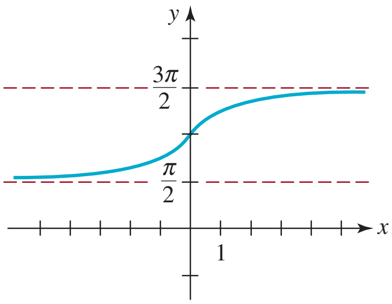


FIGURA 5.R.1 Gráfica para el problema 4

En los problemas 5 y 6, use la gráfica de función f uno a uno de la figura 5.R.1.

5. Proporcione el dominio y el rango de f^{-1}.

6. Trace la gráfica de f^{-1}.

7. Exprese $y = x - |x| + |x - 1|$ como una función definida por partes. Trace la gráfica de la función.

8. Dibuje la gráfica de la función $y = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$. Indique los números en los que la función es discontinua.

En los problemas 9 y 10 examine la gráfica de la función f y proporcione el dominio de la función g.

9. $f(x) = x^2 - 6x + 10,\ \ g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

10. $f(x) = -x^2 + 7x - 6,\ \ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}$

En los problemas 11 y 12, la función f es uno a uno. Obtenga f^{-1}.

11. $f(x) = (x + 1)^3$

12. $f(x) = x + \sqrt{x}$

En los problemas 13 al 16, calcule $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ para la función dada.

13. $f(x) = -3x^2 + 16x + 12$

14. $f(x) = x^3 - x^2$

15. $f(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$

16. $f(x) = x + 4\sqrt{x}$

17. Área Exprese el área de la región sombreada de la **FIGURA 5.R.2** como una función de h.

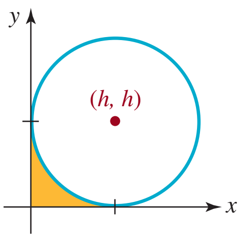


FIGURA 5.R.2 Círculo para el problema 17

18. Arco parabólico Determine la función cuadrática que describe el arco parabólico que se ilustra en la **FIGURA 5.R.3**.

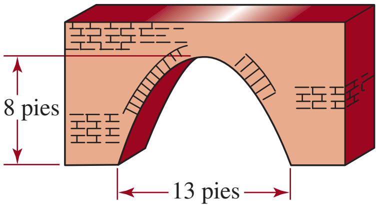


FIGURA 5.R.3 Arco para el problema 18

19. Diámetro de un cubo El diámetro d de un cubo es la distancia entre vértices opuestos como se muestra en la **FIGURA 5.R.4**. Exprese el diámetro d como función de la longitud s de un lado del cubo. [*Pista:* primero exprese la longitud y de la diagonal en términos de s].

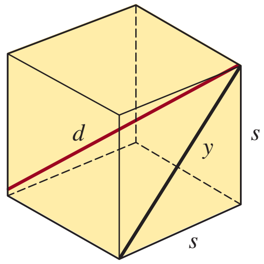


FIGURA 5.R.4 Cubo para el problema 19

20. Cilindro inscrito Un cilindro circular de altura h está inscrito en una esfera de radio 1 como se ilustra en la **FIGURA 5.R.5**. Exprese el volumen del cilindro como una función de h.

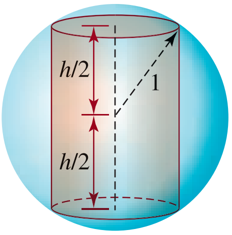


FIGURA 5.R.5 Cilindro inscrito para el problema 20

21. Distancia de *home* Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies de lado (**FIGURA 5.R.6**). Cuando un jugador batea un cuadrangular, recorre las bases a una velocidad de 6 pies/s.

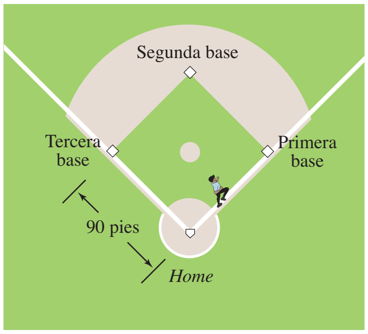


FIGURA 5.R.6 Jugador de beisbol para el problema 21

a) Cuando el jugador corre de la base de *home* a la primera base, exprese la distancia desde el *home* como función del tiempo t, donde $t = 0$ corresponde al tiempo en que el jugador salió de *home*, o sea, $0 \leq t \leq 15$.

b) Cuando el jugador corre entre el *home* y la primera base, exprese la distancia de la segunda base como una función del tiempo t, donde $0 \leq t \leq 15$.

22. Área de nuevo Considere los cuatro círculos que se ilustran en la **FIGURA 5.R.7**. Exprese el área de la región sombreada entre ellos como función de h.

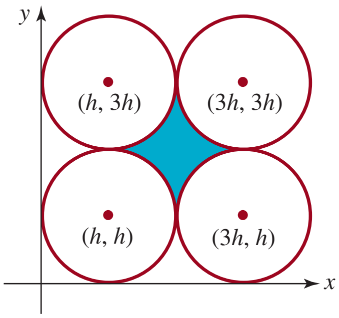


FIGURA 5.R.7 Círculos para el problema 22

23. Y más área La pista de atletismo que se ilustra como la curva negra en la **FIGURA 5.R.8** constará de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares congruentes. La longitud de la pista será de 2 km. Exprese el área del terreno rectangular (el rectángulo verde oscuro) rodeado por la pista de atletismo como función del radio de un extremo semicircular.

FIGURA 5.R.8 Pista de atletismo para el problema 23

24. Costo de construcción Se construirá un oleoducto que saldrá de una refinería, cruzará un pantano y llegará a los tanques de almacenamiento (**FIGURA 5.R.9**). El costo de construcción es de $25 000 por milla en el pantano y $20 000 por milla en tierra firme. Exprese el costo del oleoducto que se ilustra en la figura como función de x.

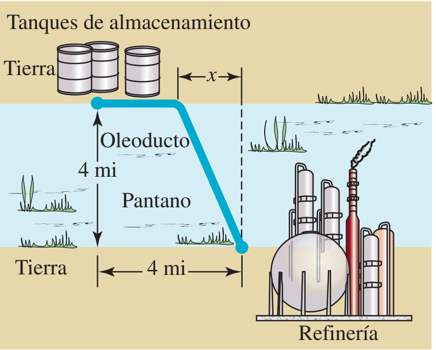


FIGURA 5.R.9 Oleoducto para el problema 24

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

6

En este capítulo

La curva formada por los cables que sostienen la vía de un puente colgante se describe mediante una función polinomial.

Un poco de historia Este problema desconcertó a los matemáticos por siglos: para una función polinomial general $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ de grado *n,* obtenga una fórmula, o un procedimiento, que exprese los ceros de *f* en términos de sus coeficientes. Como vimos en el capítulo 5, en el caso de una función polinomial de segundo grado ($n = 2$), o *cuadrática,* los ceros de *f* se expresan en términos de los coeficientes por medio de la fórmula cuadrática. Los problemas relacionados con polinomios de tercer grado ($n = 3$) se resolvieron en el siglo XVI gracias al trabajo precursor del matemático italiano **Niccolò Fontana** (1499-1557).

Alrededor de 1540, otro matemático italiano, **Lodovico Ferrari** (1522-1565) descubrió una fórmula algebraica para determinar los ceros de las funciones polinomiales de cuarto grado ($n = 4$). Sin embargo, en los siguientes 284 años nadie logró descubrir ninguna fórmula para obtener los ceros de los polinomios generales de grados $n \geq 5$. ¡Y con justificada razón! En 1824 el matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1820-1829) demostró que era imposible encontrar dichas fórmulas para los ceros de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes. Con el transcurso de los años se *supuso,* pero jamás se probó, que una función polinomial *f* de grado *n* tenía cuando mucho *n* ceros. Fue un logro verdaderamente extraordinario cuando el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) probó en 1799 que toda función polinomial *f* de grado *n* tiene *exactamente* *n* ceros. Como veremos en este capítulo, esos ceros pueden ser números reales o complejos.

6.1 Funciones polinomiales

Introducción En el capítulo 4 graficamos diversas funciones como $y = 3$, $y = 2x - 1$ y $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$. Esas funciones, en las que la variable x está elevada a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de un tipo más general de función, llamado **función polinomial**. En esta sección, nuestra meta es presentar algunas reglas generales para graficar esas funciones. Primero, presentaremos la definición formal de una función polinomial.

Definición 6.1.1 Función polinomial

Una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1$ y a_0 son constantes reales y n es un entero no negativo.

El **dominio** de toda función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

Las siguientes funciones *no* son polinomiales:

no es un entero no negativo ↓ ↓ no es un entero no negativo

$$y = 5x^2 - 3x^{-1} \quad \text{y} \quad y = 2x^{1/2} - 4.$$

La función

potencias enteras no negativas

$$y = 8x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 6x + 4$$

es polinomial, y en ella se interpreta que el número 4 es el coeficiente de x^0. Como 0 es un entero no negativo, una función constante como $y = 3$ es un polinomio, porque es lo mismo que $y = 3x^0$.

Terminología Las funciones polinomiales se clasifican por su grado. La mayor potencia de x de un polinomio se llama **grado**. Entonces, si $a_n \neq 0$, se dice que $f(x)$ en la ecuación (1) tiene el **grado n-ésimo**. El número a_n en (1) se llama **coeficiente principal** y a_0 se llama **término constante** de la función polinomial. Por ejemplo,

grado ↓

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x + 8,$$

↑ coeficiente principal ↑ término constante

es un polinomio de grado 5. Ya hemos estudiado polinomios especiales en la sección 5.3. Las funciones polinomiales de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

En la sección 5.3 estudiamos las funciones lineal y cuadrática.

$f(x) = a_0,$	**función constante**
$f(x) = a_1x + a_0,$	**función lineal**
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$	**función cuadrática**
$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$	**función cúbica.**

A su vez, los polinomios de grados $n = 4$ y $n = 5$ se llaman, respectivamente, **funciones de cuarto** y **de quinto orden**. La función constante $f(x) = 0$ se llama **polinomio nulo**.

■ **Gráficas** Recordemos que la gráfica de una función constante $f(x) = a_0$ es una **recta horizontal**; la gráfica de una función lineal $f(x) = a_1x + a_0$, con $a_1 \neq 0$ es una **recta con pendiente** $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}_1$, y la gráfica de una función cuadrática $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_2 \neq 0$ es una **parábola** (sección 5.3). Esas declaraciones descriptivas no existen para gráficas de funciones polinomiales de grado mayor. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Sucede que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas. En general, para graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ se necesita el cálculo, o bien usar una herramienta graficadora. Sin embargo, veremos en la descripción siguiente que al determinar

- desplazamiento,
- comportamiento en los extremos,
- simetría,
- intersecciones con los ejes
- comportamiento local

de la función, en algunos casos se puede bosquejar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de mayor grado, y al mismo tiempo reducir al mínimo el graficado de puntos. Antes de explicar cada uno de estos conceptos regresaremos a la noción de la función potencia que presentamos primero en la sección 5.2.

■ **Función potencia** Un caso especial de la función potencia es la **función polinomial de un solo término** o **monomial**,

En la sección 2.6 se presenta la definición de monomio.

$$f(x) = x^n, \qquad n \text{ entero positivo.} \tag{2}$$

Las gráficas de (2) de grados $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 se muestran en la **FIGURA 6.1.1**. Lo interesante acerca de (2) es que todas las gráficas con n impar son básicamente iguales. Las características notables son que las gráficas son simétricas respecto al origen, y se aplanan cada vez más cerca del origen a medida que aumenta el grado n [figuras 6.1.1*a*) a 6.1.1*c*)]. Una observación parecida es válida en el caso de las gráficas de (2), de n par, excepto, naturalmente, que las gráficas son simétricas respecto al eje y [figuras 6.3.1*d*) a 6.1.1*f*)].

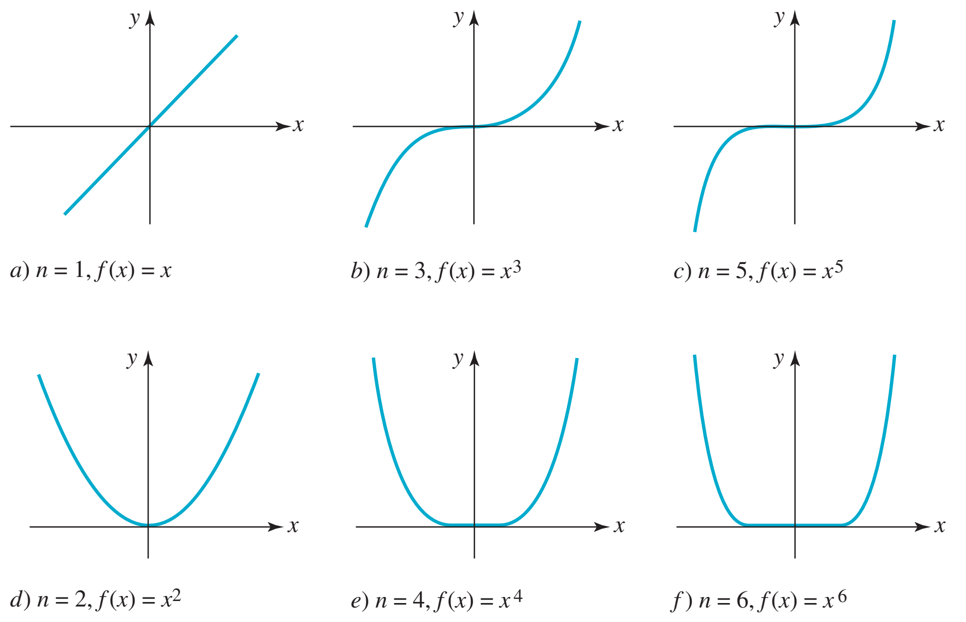


FIGURA 6.1.1 Breve catálogo de la función potencia $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 6$

Gráficas desplazadas

Gráficas desplazadas Recuerde, de la sección 5.2, que para $c > 0$, las gráficas de las funciones polinomiales de la forma

$$y = ax^n + c, \qquad y = ax^n - c$$

y

$$y = a(x + c)^n, \qquad y = a(x - c)^n$$

se pueden obtener con desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = ax^n$. También, si el coeficiente principal a es positivo, la gráfica de $y = ax^n$ es un estiramiento vertical de la gráfica del polinomio básico de un solo término $f(x) = x^n$, o bien una compresión vertical de ella. Cuando a es negativo, también se produce una reflexión en el eje x.

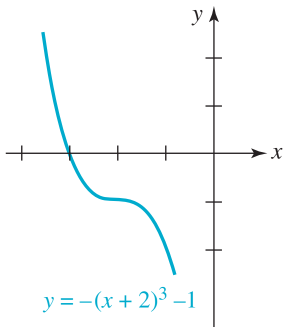


FIGURA 6.1.2 Gráfica reflejada y desplazada del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráficas de funciones polinomiales desplazadas

La gráfica de $y = -(x + 2)^3 - 1$ es la de $f(x) = x^3$ reflejada en el eje x, desplazada 2 unidades hacia la izquierda y después desplazada verticalmente 1 unidad hacia abajo. Primero repase la figura 6.1.1b), y después véase la **FIGURA 6.1.2**. ≡

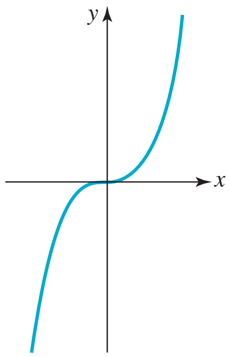


FIGURA 6.1.3 Gráfica misterio #1

Comportamiento en los extremos

Comportamiento en los extremos Es importante conocer la forma de una función polinomial con un solo término, $f(x) = x^n$, por otra razón. Primero, examine las gráficas generadas por computadora de las **FIGURAS 6.1.3** y **6.1.4**. Aunque la primera se parece a las gráficas de las figuras 6.1.1b) y 6.1.1c) y la segunda se asemeja a las de la figura 6.1.1d) a f), las funciones que se grafican en estas dos figuras *no son* alguna función potencia $f(x) = x^n$ impares, ni $f(x) = x^n$ pares. Por ahora no indicaremos qué funciones específicas son, pero baste decir que ambas fueron graficadas en el intervalo $[-1\,000, 1\,000]$. De lo que se trata es que la función cuya gráfica aparece en la figura 6.1.3 podría ser casi *cualquier* función polinomial

$$f(x) = a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \tag{3}$$

con $a_n > 0$, de grado n *impar*, $n = 3, 5, \ldots$ cuando se grafica en $[-1\,000, 1\,000]$. De igual modo, la gráfica de la figura 6.1.4 podría ser la de cualquier función polinomial (1) con $a_n > 0$, de grado n *par*, $n = 2, 4, \ldots$ cuando se grafica en un intervalo grande en torno al origen. Como indica el siguiente teorema, los términos encerrados en el rectángulo de color, en (3), son irrelevantes cuando se considera globalmente una gráfica de una función polinomial, esto es, cuando $|x|$ es grande. La forma en que se comporta una función polinomial f cuando $|x|$ es muy grande se llama **comportamiento en los extremos**

$$x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad x \to \infty,$$

para indicar que los valores de $|x|$ son muy grandes, o infinitos, en las direcciones negativa y positiva, respectivamente, en la recta numérica.

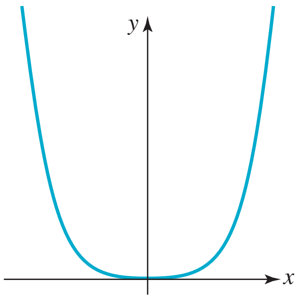


FIGURA 6.1.4 Gráfica misterio #2

Teorema 6.1.1 Comportamiento en los extremos

Cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, la gráfica de una función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y = a_n x^n$.

Para saber por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica del polinomio $y = -2x^3$, de un solo término, cuando $|x|$ es grande, se factoriza la mayor potencia de x, esto es, x^3:

los dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande

$$f(x) = x^3\left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right). \tag{4}$$

Si se deja que $|x|$ crezca sin límite, esto es $x \to -\infty$ o $x \to \infty$ tanto $4/x$ como $5/x^3$ se pueden hacer tan cercanos a 0 como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (4) se aproximan mucho a los valores de $y = -2x^3$.

Sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento en los extremos de una función polinomial f. Aunque dos de esos comportamientos ya se ilustraron en las figuras 6.1.3 y 6.1.4, los incluimos de nuevo en el resumen gráfico de la figura 6.1.5. Para interpretar las flechas de la **FIGURA 6.1.5**, examine la figura 6.1.5*a*). La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indican que cuando $x \to -\infty$, los valores de $f(x)$ son negativos y de gran magnitud. Dicho de otra manera, la gráfica se dirige hacia abajo cuando $x \to -\infty$. De igual modo, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indican que la gráfica se dirige hacia arriba cuando $x \to \infty$.

Resumen gráfico del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

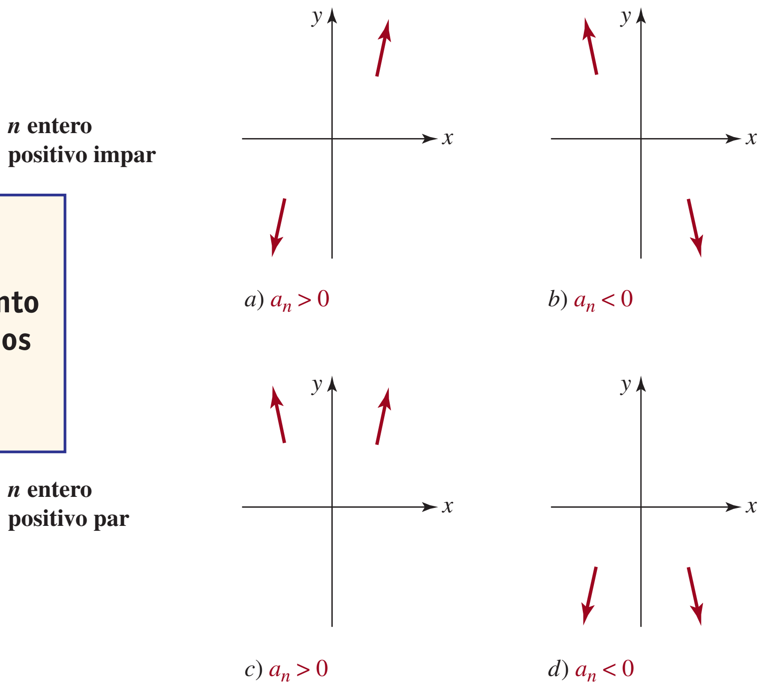


FIGURA 6.1.5 El comportamiento en los extremos de un polinomio f depende de su grado n y del signo de su primer coeficiente, a_n

Comportamiento local

Los huecos entre las flechas de la figura 6.1.5 corresponden a cierto intervalo en torno al origen. En esos huecos, la gráfica de f tiene **comportamiento local**, en otras palabras, muestra las características de una función polinomial de determinado grado. Este comportamiento local incluye las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica, el comportamiento de la gráfica en las intersecciones con el eje x, los puntos críticos de la gráfica y la simetría observable de ella (si es que la tiene). En una función polinomial f un **punto crítico** es un punto $(c, f(c))$ en el que f cambia de dirección; esto es, la función f cambia de creciente a decreciente, o viceversa. La gráfica de una función polinomial de grado n puede tener hasta $n - 1$ puntos críticos. En cálculo, un punto crítico se llama **extremo relativo** o **extremo local**. Un extremo local puede ser un **máximo** o un **mínimo**. Si $(c, f(c))$ es un punto crítico o un extremo local, entonces, en una cercanía de $x = c$, la función $f(c)$ tiene el valor *máximo* (máximo local) o *mínimo* (mínimo local). En un máximo local $(c, f(c))$, la gráfica de un polinomio f debe cambiar de creciente inmediatamente a la izquierda de $x = c$, a decreciente inmediatamente a la derecha de $x = c$, mientras que en un mínimo local $(c, f(c))$ la función f cambia de decreciente a creciente. Estos conceptos se ilustrarán en el ejemplo 2.

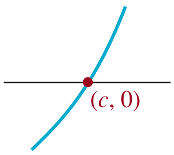
■ Simetría Es fácil indicar, por inspección, las funciones polinomiales cuyas gráficas tienen simetría con respecto al eje y o al origen. Las palabras *par* e *impar* en las funciones tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Recuerde que una función par es aquella en la cual $f(-x) = f(x)$, y que una función impar es una en la que $f(-x) = -f(x)$. Estas dos condiciones son válidas para las funciones polinomiales en las que todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

potencias pares — potencias impares — potencias diversas

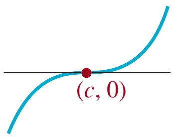
$$\underbrace{f(x) = 5x^4 - 7x^2}_{\text{función par}} \qquad \underbrace{f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x}_{\text{función impar}} \qquad \underbrace{f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2}_{\text{ni par ni impar}}$$

Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es par, porque las potencias obvias son enteros pares; el término constante 6 es, en realidad, $6x^0$, y 0 es entero par no negativo.

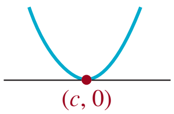
■ Intersecciones La gráfica de toda función polinomial f cruza el eje y, porque $x = 0$ está en el dominio de la función. El punto de cruce con el eje y es $(0, f(0))$. Recuerde que un número c es una **raíz** de una función f si $f(c) = 0$. En esta descripción supondremos que c es una raíz real. Si $x - c$ es un factor de una función polinomial f, es decir, si $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es otro polinomio, entonces es claro que $f(c) = 0$ y que el punto correspondiente de la gráfica es $(c, 0)$. Entonces, las raíces reales de una función polinomial son las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de su gráfica con el eje x. Si $(x - c)^m$ es un factor de f, donde $m > 1$ es un entero positivo, y si $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de f, se dice entonces que es una **raíz repetida**, o con mayor propiedad, una **raíz de multiplicidad** $\boldsymbol{m}$. Por ejemplo, $f(x) = x^2 - 10x + 25$ equivale a $f(x) = (x - 5)^2$. Por consiguiente, 5 es una raíz repetida, o una raíz de multiplicidad 2. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son raíces simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$, porque f se puede expresar como $f(x) = 6(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$. El comportamiento de la gráfica de f en un cruce con el eje x $(c, 0)$, depende de que c sea una raíz simple o una raíz de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero par o impar.



a) Raíz simple



b) Raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$



c) Raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$

FIGURA 6.1.6 Intersecciones de una función polinomial $f(x)$ con el eje x con un coeficiente principal positivo

- Si c es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente el eje x en $(c, 0)$. Véase la **FIGURA 6.1.6*a***).
- Si c es una raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, la gráfica de f atraviesa el eje x, pero está aplanada en $(c, 0)$. Véase la figura 6.1.6*b*).
- Si c es una raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, la gráfica de f es tangente al eje x, o lo toca, en $(c, 0)$. Véase la figura 6.1.6*c*).

En el caso en que c sea una raíz simple, o una raíz de multiplicidad impar, $m = 3, 5, \ldots$ $f(x)$ cambia de signo *en* $(c, 0)$, mientras que si c es una raíz de multiplicidad par, $m = 2, 4, \ldots$, $f(x)$ no cambia de signo de $(c, 0)$. Observe que, dependiendo del signo del primer coeficiente de la función polinomial, las gráficas de la figura 6.1.6 se podrían reflejar en el eje x. Por ejemplo, en una raíz de multiplicidad par la gráfica de f podría ser tangente al eje x, desde abajo de ese eje.

EJEMPLO 2 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = x^3 - 9x$.

Solución Veamos algo que se debe entender para bosquejar la gráfica de f:

Comportamiento en los extremos: Si no se tienen en cuenta todos los términos, salvo el primero, se ve que la gráfica de f se parece a la de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Esto es, la gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 6.1.5*a*).

Simetría: Como todas las potencias son enteros impares, f es una función impar. La gráfica de f es simétrica respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces el cruce con el eje y es $(0, 0)$. Al igualar $f(x) = 0$ se ve que se debe resolver $x^3 - 9x = 0$. Esto se factoriza

$$\overset{\text{diferencia de cuadrados}}{\overset{\downarrow}{x(x^2 - 9)}} = 0 \quad \text{o sea} \quad x(x-3)(x+3) = 0$$

se ve que las raíces de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Los cruces con el eje x están en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube (f es creciente) desde el tercer cuadrante y pasa por $(-3, 0)$, porque -3 es una raíz simple. Aunque la gráfica sube al pasar por esta intersección, debe regresar hacia abajo (f decreciente) en algún punto del segundo cuadrante, para poder atravesar $(0, 0)$. Como la gráfica es simétrica con respecto al origen, su comportamiento es exactamente el contrario en los cuadrantes primero y cuarto. Véase la **FIGURA 6.1.7**. ≡

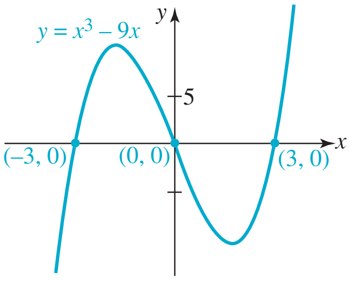


FIGURA 6.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 2

En el ejemplo 2, la gráfica de f tiene dos puntos críticos. En el intervalo $[-3, 0]$ hay un máximo local, y en el intervalo $[0, 3]$ hay un mínimo local. No tratamos de localizar con precisión esos puntos; eso es algo que, en general, necesitaría las técnicas del cálculo. Lo mejor que podemos hacer con las matemáticas de precálculo, para refinar la gráfica, es recurrir a graficar puntos adicionales en los intervalos de interés. Por cierto, $f(x) = x^3 - 9x$ es la función del intervalo $[-1\,000, 1\,000]$ cuya gráfica se ve en la figura 6.1.3.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$.

Solución Se hace la multiplicación y resulta $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.

Comportamiento en los extremos: Vemos, en el renglón anterior, que la gráfica de f se parece a la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo contrario del comportamiento en los extremos de la función del ejemplo 2. Véase la figura 6.1.5*b*).

Simetría: Como se ve de $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, hay potencias pares e impares de x. Por consiguiente, f ni es par ni impar; su gráfica no posee simetría respecto al eje y o al origen.

Intersecciones: $f(0) = 1$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 1)$. En la forma factorizada de $f(x)$ del enunciado se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja (f decreciente) desde el segundo cuadrante y luego, como -1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Entonces la gráfica sube (f es creciente) conforme pasa a través de la intersección con el eje y $(0, 1)$. En algún punto del intervalo $[-1, 1]$, la gráfica se va hacia abajo (f decreciente) y, como 1 es una raíz simple, atraviesa el eje x en $(1, 0)$, dirigiéndose hacia abajo, en el cuarto cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.8**. ≡

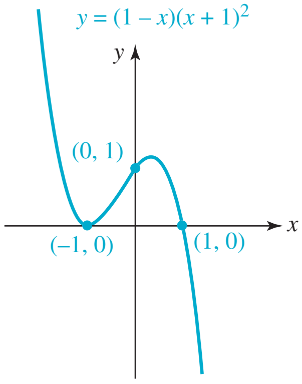


FIGURA 6.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 3

En el ejemplo 3 de nuevo hay dos puntos críticos. Debe quedar en claro que el punto $(-1, 0)$ es un punto crítico (f cambia de decreciente a creciente en este punto) y es un mínimo local de f. También hay un punto crítico (f cambia de creciente a decreciente en ese punto) en el intervalo $[-1, 1]$ y el valor de la función en este punto es un máximo relativo de f.

EJEMPLO 4 Raíces de multiplicidad dos

Graficar $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

Solución Antes de seguir, obsérvese que el lado derecho de f es un cuadrado perfecto. Esto es, $f(x) = (x^2 - 2)^2$. Como $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, de acuerdo con las leyes de los exponentes se puede escribir

$$f(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2. \tag{5}$$

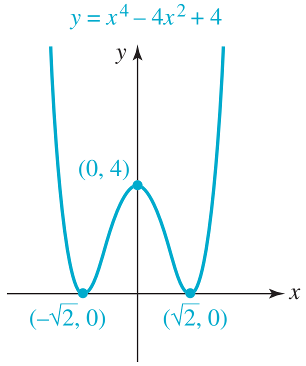


FIGURA 6.1.9 Gráfica de la función del ejemplo 4

Comportamiento en los extremos: Al inspeccionar $f(x)$ se ve que su gráfica se parece a la de $y = x^4$ ante $|x|$ grandes. Esto es, la gráfica sube hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$ y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 6.1.5*c*).

Simetría: Como $f(x)$ sólo contiene potencias pares de x, es una función par, y entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Intersecciones: $f(0) = 4$, por lo que la intersección con el eje y está en $(0, 4)$. Por inspección de (5) se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja desde el segundo cuadrante y entonces, como $-\sqrt{2}$ es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica toca al eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$. Después, la gráfica sube desde aquí hasta la intersección con el eje y en $(0, 4)$. Después, se aplica la simetría respecto al eje y para completar la gráfica en el primer cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.9**. ≡

En el ejemplo 4, la gráfica de f tiene tres puntos críticos. De acuerdo con la multiplicidad par de la raíz, y de la simetría respecto al eje y, se puede deducir que las intersecciones con el eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ son puntos críticos, y $f(-\sqrt{2}) = 0$ y $f(\sqrt{2}) = 0$ son mínimos locales, y que la intersección con el eje y en $(0, 4)$ es un punto crítico y $f(0) = 4$ es un máximo local.

EJEMPLO 5 Raíz de multiplicidad tres

Graficar $f(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

Solución

Comportamiento en los extremos: Por inspección de f se ve que su gráfica se parece a la gráfica de $y = -x^4$ para grandes valores de $|x|$. Este comportamiento de f en la frontera se ve en la figura 6.1.5*d*).

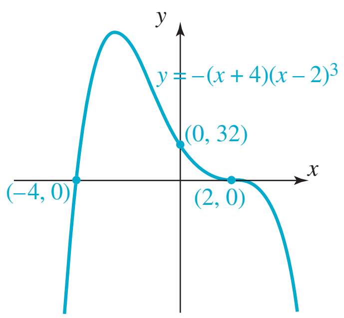


FIGURA 6.1.10 Gráfica de la función del ejemplo 5

Simetría: La función f no es par ni impar. Se demuestra, en forma directa, que $f(-x) \neq f(x)$, y que $f(-x) \neq -f(x)$.

Intersecciones: $f(0) = (-4)(-2)^3 = 32$, así que el cruce con el eje y está en $(0, 32)$. Se ve, en la forma factorizada de $f(x)$, que los cruces con el eje x están en $(-4, 0)$ y $(2, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube desde el tercer cuadrante y entonces, como -4 es una raíz simple, atraviesa directamente el eje x en $(-4, 0)$. En algún lugar del intervalo $[-4, 0]$, la función f debe cambiar de creciente a decreciente, para que su gráfica pase por la intersección con el eje y en $(0, 32)$. Después de que pasa por ese punto, la gráfica de esta función continúa decreciendo, pero como 2 es una raíz de orden tres, la gráfica se aplana al pasar por $(2, 0)$, y va hacia abajo en el cuarto cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.10**. ≡

Note que, en el ejemplo 5, como f es de grado 4, su gráfica podría tener hasta tres puntos críticos. Pero como se ve en la figura 6.1.10, esa gráfica sólo posee un punto crítico, y ese punto es un máximo local de f.

EJEMPLO 6 Raíces de multiplicidad dos y tres

Graficar $f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^2$.

Solución La función f es de grado 6, por lo que su comportamiento en los extremos se parece a la gráfica de $y = x^6$ para $|x|$ grande. Véase la figura 6.1.5*c*). También, la función f ni es par ni es impar; su gráfica no tiene simetría respecto al eje y ni al origen. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -24)$. De acuerdo con los factores de f se ve que las intersecciones con el eje x de la gráfica están en $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Como -2 es una raíz de multiplicidad 3, la gráfica de f se aplana al pasar por $(-2, 0)$. Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica de f es tangente al eje x en $(1, 0)$. Como 3 es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente al eje x en $(3, 0)$. Agrupando todas estas propiedades se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.1.11**. ≡

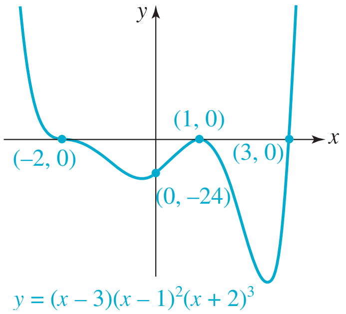


FIGURA 6.1.11 Gráfica de la función del ejemplo 6

En el ejemplo 6, en vista de que la función f es de grado 6, su gráfica podría tener hasta cinco puntos críticos. Pero como se ve en la figura 6.1.11, sólo hay tres puntos críticos. Dos de ellos son mínimos locales, y el restante, que es $(1, 0)$, el valor de la función $f(1) = 0$ es un máximo local.

6.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y use las transformaciones para bosquejar la gráfica de la función polinomial indicada.

1. $y = x^3 - 3$

2. $y = -(x + 2)^3$

3. $y = (x - 2)^3 + 2$

4. $y = 3 - (x + 2)^3$

5. $y = (x - 5)^4$

6. $y = x^4 - 1$

7. $y = 1 - (x - 1)^4$

8. $y = 4 + (x + 1)^4$

En los problemas 9 a 12 determine si la función polinomial indicada f es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

9. $f(x) = -2x^3 + 4x$

10. $f(x) = x^6 - 5x^2 + 7$

11. $f(x) = x^5 + 4x^3 + 9x + 1$

12. $f(x) = x^3(x + 2)(x - 2)$

En los problemas 13 a 18 indique a qué función polinomial de *a*) a *f*) corresponde cada gráfica.

a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$
b) $f(x) = -x^3(x - 1)$
c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$
d) $f(x) = -x(x - 1)^3$
e) $f(x) = -x^2(x - 1)$
f) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

13.

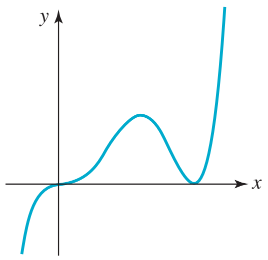


FIGURA 6.1.12 Gráfica del problema 13

14.

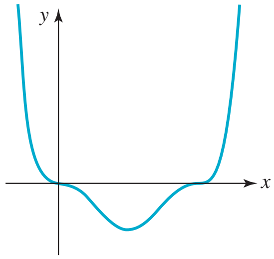


FIGURA 6.1.13 Gráfica del problema 14

15.

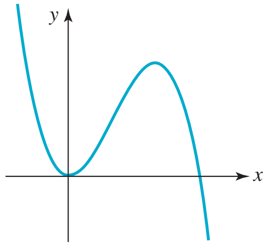


FIGURA 6.1.14 Gráfica del problema 15

16.

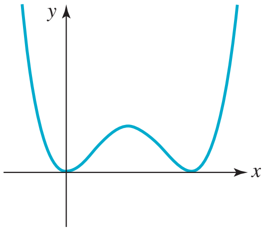


FIGURA 6.1.15 Gráfica del problema 16

17.

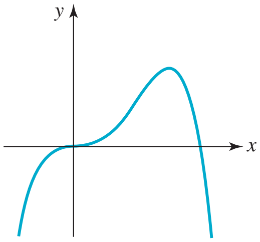


FIGURA 6.1.16 Gráfica del problema 17

18.

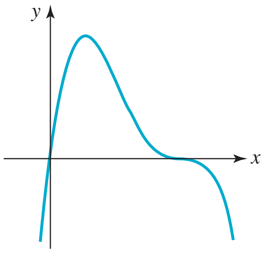


FIGURA 6.1.17 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 a 40 proceda como en el ejemplo 2 y trace la gráfica de la función polinomial f indicada.

19. $f(x) = x^3 - 4x$

20. $f(x) = 9x - x^3$

21. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$

22. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

23. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

24. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$

25. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

26. $f(x) = x^2(x - 2)^2$

27. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$

28. $f(x) = x^2(x^2 + 3x + 2)$

29. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$

30. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$

31. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

32. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

33. $f(x) = x^4 + 3x^3$

34. $f(x) = x(x - 2)^3$

35. $f(x) = x^5 - 4x^3$

36. $f(x) = (x - 2)^5 - (x - 2)^3$

37. $f(x) = 3x(x + 1)^2(x - 1)^2$

38. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3$

39. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x + 2)^3(x - 2)^2$

40. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

41. La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$ se ve en la **FIGURA 6.1.18**.

a) Use la figura para obtener la gráfica de $g(x) = f(x) + 2$.

b) Usando sólo la gráfica que obtuvo en el inciso *a*), escriba la ecuación, en forma *factorizada*, de $g(x)$. Entonces compruebe, multiplicando los factores, que su ecuación de $g(x)$ es igual que $f(x) + 2 = x^3 - 3x + 2$.

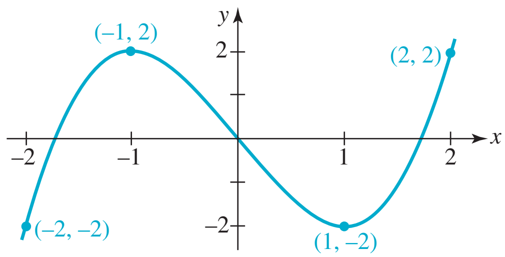


FIGURA 6.1.18 Gráfica del problema 41

42. Deduzca una función polinomial f del menor grado posible, cuya gráfica sea consistente con la de la **FIGURA 6.1.19**.

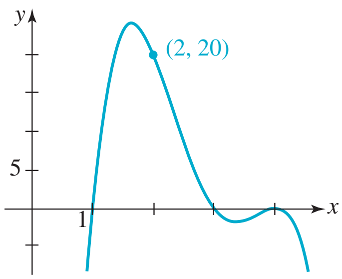


FIGURA 6.1.19 Gráfica del problema 42

43. Calcule el valor de k tal que (2, 0) sea un cruce de la gráfica con el eje de las x. La función es $f(x) = kx^5 - x^2 + 5x + 8$.

44. Calcule los valores de k_1 y k_2 tales que las intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = k_1x^4 - k_2x^3 + x - 4$ estén en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

45. Calcule el valor de k tal que el cruce con el eje y de la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 14x - 3k$ esté en (0, 10).

46. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 2)^{n+1}(x + 5)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f toca, pero no cruza, al eje x en (2, 0)?

47. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 1)^{n+2}(x + 1)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en (1, 0)?

48. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 5)^{2m}(x + 1)^{2n-1}$, donde m y n son enteros positivos.

a) ¿Para qué valores de m la gráfica de f cruza al eje x en (5, 0)?

b) ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en $(-1, 0)$?

Aplicaciones diversas

49. **Construcción de una caja** Se puede hacer una caja abierta con una pieza rectangular de cartón, quitando un cuadrado de longitud x de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Vea la **FIGURA 6.1.20**. Si el cartón mide 30 cm por 40 cm, demuestre que el volumen de la caja resultante se determina mediante

$$V(x) = x(30 - 2x)(40 - 2x).$$

Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$. ¿Cuál es el dominio de la función V?

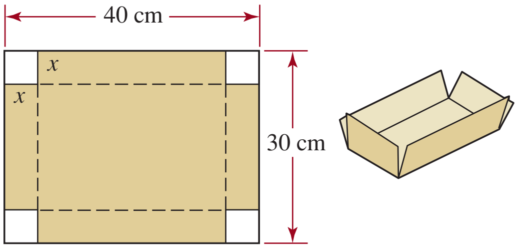


FIGURA 6.1.20 Caja del problema 49

50. **Otra caja** Para conservar su forma, la caja del problema 49 necesita cinta adhesiva, o algún sujetador para las esquinas. Una caja abierta que se mantiene firme puede hacerse sacando un cuadrado de longitud x de cada esquina de una pieza rectangular de cartón, cortando la línea llena y doblando en las líneas interrumpidas, que se ven en la **FIGURA 6.1.21**. Deduzca una función polinomial $V(x)$ que exprese el volumen de la caja resultante, si el cartón original mide 30 cm por 40 cm. Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$.

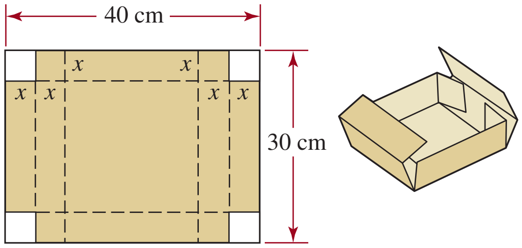


FIGURA 6.1.21 Caja del problema 50

Para la discusión

51. Examine la figura 6.1.5. A continuación, explique si pueden existir funciones polinomiales cúbicas que no tengan raíces reales.

52. Suponga que una función polinomial f tiene tres raíces, -3, 2 y 4, y que el comportamiento en los extremos de su gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y baja hacia la derecha cuando $x \to \infty$. Explique cuáles serían las ecuaciones posibles de f.

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 53 y 54, use una función graficadora para examinar la gráfica de la función polinomial indicada en los intervalos que se indican.

53. $f(x) = -(x - 8)(x + 10)^2$; $[-15, 15]$, $[-100, 100]$, $[-1\,000, 1\,000]$

54. $f(x) = (x - 5)^2(x + 5)^2$; $[-10, 10]$, $[-100, 100]$, $[-1\,000, 1\,000]$

6.2 División de funciones polinomiales

Introducción En esta sección veremos que el método para dividir dos funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$ es muy similar a la división de enteros positivos. Además, la división de una función polinómica $f(x)$ por un polinomio lineal $g(x) = x - c$ es especialmente útil, porque nos proporciona una forma de evaluar la función f en el número c sin tener que calcular las potencias de c.

Comenzamos con un repaso de la terminología de fracciones.

Terminología Si $p > 0$ y $s > 0$ son enteros tales que $p \geq s$, entonces p/s se llama **fracción impropia**. Si se divide p entre s se obtienen números únicos, q y r, que satisfacen

$$\frac{p}{s} = q + \frac{r}{s} \qquad \text{o} \qquad p = sq + r, \tag{1}$$

donde $0 \leq r < s$. El número p se llama **dividendo**, s es el **divisor**, q es el **cociente** y r es el **residuo**. Por ejemplo, se tiene la fracción impropia $\frac{1\,052}{23}$. Al hacer la división aritmética se obtiene

$$\begin{array}{rrl} & 45 & \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow \; 23 & \overline{)1\,052} & \leftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{92} & \leftarrow \text{se resta} \\ & 132 & \\ & \underline{115} & \\ & 17. & \leftarrow \text{residuo} \end{array} \tag{2}$$

El resultado de (2) se puede escribir en la forma $\frac{1\,052}{23} = 45 + \frac{17}{23}$, donde $\frac{17}{23}$ es una **fracción propia**, porque el numerador es menor que el denominador; en otras palabras, la fracción es menor que 1. Si multiplicamos este resultado por el divisor 23, obtendremos la forma especial de escritura del dividendo p, ilustrada en la segunda ecuación de (1):

$$1\,052 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{23} \cdot \overset{\substack{\text{cociente} \\ \downarrow}}{45} + \overset{\substack{\text{residuo} \\ \downarrow}}{17}. \tag{3}$$

División de polinomios El método para dividir dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$ se parece a la división de enteros positivos. Si el grado de un polinomio $f(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $g(x)$, entonces $f(x)/g(x)$ se llama también **fracción impropia**. Un resultado análogo a (1) se llama **algoritmo de división** de polinomios.

Teorema 6.2.1 Algoritmo de la división

Sean $f(x)$ y $g(x) \neq 0$ polinomios, donde el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$. Entonces, existen polinomios únicos, $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \text{o} \qquad f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{4}$$

en donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado de $g(x)$.

El polinomio $f(x)$ se llama **dividendo**, $g(x)$ es el **divisor**, $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**. Como $r(x)$ tiene grado menor que el de $g(x)$, la expresión racional $r(x)/g(x)$ se llama **fracción propia**.

Observe, en (4), que cuando $r(x) = 0$, entonces $f(x) = g(x)q(x)$, por lo que el divisor $g(x)$ es un factor de $f(x)$. En este caso se dice que $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$ o, en terminología antigua, que $g(x)$ **divide exactamente** a $f(x)$.

EJEMPLO 1 División de dos polinomios

Usar la división para calcular el cociente de $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ entre el polinomio $g(x) = x^2 + 1$.

Solución Por división,

$$
\begin{array}{rrl}
 & 3x \quad - 1 & \leftarrow \text{cociente} \\ \cline{2-2}
\text{divisor} \rightarrow \quad x^2 + 1 &)\,3x^3 - \quad x^2 - 2x + 6 & \leftarrow \text{dividendo} \\
 & 3x^3 + 0x^2 + 3x \qquad\quad & \leftarrow \text{se resta} \\ \cline{2-2}
 & -x^2 - 5x + 6 & \\
 & -x^2 + 0x - 1 & \\ \cline{2-2}
 & -5x + 7 & \leftarrow \text{residuo}
\end{array}
\tag{5}
$$

El resultado de la división (5) se puede escribir como sigue:

$$\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}.$$

Por lo tanto, el cociente es $3x - 1$ y el residuo es $-5x + 7$. Si se multiplican ambos lados de la última ecuación por el divisor $x^2 + 1$, se obtiene la segunda forma de (4):

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) + (-5x + 7). \tag{6}$$ ≡

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio lineal $x - c$, entonces, de acuerdo con el algoritmo de división, el grado del residuo r es 0; esto es, r es una constante. Así, (4) se transforma en

$$f(x) = (x - c)q(x) + r. \tag{7}$$

Cuando se sustituye el número $x = c$ en (7), se descubre una forma alternativa de evaluar una función polinomial:

$$f(c) = \overset{\overset{0}{\downarrow}}{(c - c)}q(c) + r = r.$$

Al resultado anterior se le llama **teorema del residuo**.

Teorema 6.2.2 Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre un polinomio lineal $x = c$, el residuo r es el valor de $f(x)$ en $x = c$; esto es, $f(c) = r$.

EJEMPLO 2 Cálculo del residuo

Aplicar el teorema del residuo para calcular r cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide entre $x - 2$.

Solución Según el teorema del residuo, el residuo r es el valor de la función f evaluada en $x = 2$.

$$r = f(2) = 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32. \tag{8}$$ ≡

El ejemplo 2, en donde se determina un residuo r calculando el valor de una función $f(c)$, es más interesante que importante. Lo que *sí es* importante es el problema inverso: determinar el valor de la función $f(c)$ calculando el residuo r por división de f entre $x - c$. Los dos ejemplos que siguen ilustran este concepto.

EJEMPLO 3 Evaluación por división

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(c)$ para $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$, cuando $c = -3$.

Solución El valor $f(-3)$ es el residuo cuando $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ se divide entre $x - (-3) = x + 3$. Para fines de la división, se deben tener en cuenta los términos faltantes en x^4 y x^2, escribiendo el dividendo como sigue:

$$f(x) = x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rl}
 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47 \\ \cline{2-2}
x+3 \big) & x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \underline{x^5 + 3x^4} \\
 & -3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \underline{-3x^4 - 9x^3} \\
 & 5x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \underline{5x^3 + 15x^2} \\
 & -15x^2 + 2x - 10 \\
 & \underline{-15x^2 - 45x} \\
 & 47x - 10 \\
 & \underline{47x + 141} \\
 & -151
\end{array} \tag{9}$$

El residuo r en la división es el valor de f en $x = -3$; esto es, $f(-3) = -151$. ≡

■ **División sintética** Después de resolver el ejemplo 3 es lógico preguntar por qué se querría calcular el valor de una función polinomial f por división. La respuesta es: no nos ocuparíamos de hacerlo, si no existiera la **división sintética**. La división sintética es un método abreviado para dividir un polinomio $f(x)$ entre un polinomio *lineal* $x - c$; no se requiere escribir las diversas potencias de la variable x, sino sólo los coeficientes de esas potencias en el dividendo $f(x)$ (que debe incluir todos los coeficientes 0). También es una forma muy eficiente y rápida de evaluar $f(c)$, porque en el proceso sólo se utilizan las operaciones aritméticas de multiplicación y suma. No intervienen elevaciones a potencia, como 2^3 ni 2^2 en la ecuación (8).

Por ejemplo, considere la división larga:

$$\begin{array}{rl}
 & 4x^2 - 3x + 7 \\ \cline{2-2}
x-2 \big) & \boxed{4}x^3 - 11x^2 + \boxed{13x} - \boxed{5} \\
(-) & \underline{\boxed{4x^3} - 8x^2} \\
 & \boxed{-3}x^2 + \boxed{13x} - \boxed{5} \\
(-) & \underline{\boxed{-3x^2} + 6x} \\
 & \boxed{7}x - \boxed{5} \\
(-) & \underline{\boxed{7x} - 14} \\
 & 9 \leftarrow \text{residuo}
\end{array} \tag{10}$$

Podemos hacer varias observaciones sobre (10):

- Debajo del signo de división larga, cada columna contiene términos del mismo grado.
- Cada rectángulo contiene términos idénticos.
- Los coeficientes del cociente y el residuo constante aparecen encerrados en círculos.
- Cada renglón marcado por $(-)$ se resta del renglón anterior.

Si suprimimos las variables y las repeticiones observadas en (10), tenemos

$$
\begin{array}{rrrrrr}
x-2\rightarrow & -2\,\big) & 4 & -11 & 13 & -5 \\
 & (-) & & -\ 8 & & \\
\hline
 & & & -3 & & \\
 & & (-) & & 6 & \\
\hline
 & & & & 7 & \\
 & & & (-) & & -14 \\
\hline
 & & & & & 9 \leftarrow \text{residuo}
\end{array}
\qquad (11)
$$

Como indican las flechas en (11), esto se puede escribir de manera más compacta así:

$$
\begin{array}{rrrrr}
-2\,\big) & 4 & -11 & 13 & -\ 5 \\
(-) & \downarrow & -8 & 6 & -14 \\
\hline
 & & -3 & 7 & \boxed{9} \leftarrow \text{residuo}
\end{array}
\qquad (12)
$$

Si bajamos el coeficiente principal 4 del dividendo, como indica la flecha roja en (12), los coeficientes del cociente y el residuo quedan en una sola fila.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-2\,\big) & 4 & -11 & 13 & -\ 5 & \leftarrow \text{primera fila} \\
(-) & & -8 & 6 & -14 & \leftarrow \text{segunda fila} \\
\hline
 & 4 & -3 & 7 & \boxed{9} = r & \leftarrow \text{tercera fila}
\end{array}
\qquad (13)
$$

Ahora observe que cada número de la segunda fila de (13) se puede obtener si se multiplica el número en la tercera fila de la columna precedente por -2, y que cada número de la tercera fila se obtiene restando cada número de la segunda fila del número correspondiente en la primera fila.

Por último, para evitar la resta en (13), multiplicamos por $+2$ (el inverso aditivo de -2) y sumamos la segunda fila a la primera. Esto se ilustra a continuación:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & \multicolumn{4}{c}{\text{coeficientes del dividendo } f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5} & & \\
\text{divisor: } x-2 & \underline{2}\,\rfloor & 4 & -11 & 13 & -5 & \leftarrow \text{primera fila} \\
 & (+) & & 8 & -6 & 14 & \leftarrow \text{segunda fila} \\
\hline
 & & 4 & -3 & 7 & \boxed{9} = r & \leftarrow \text{tercera fila} \\
 & \multicolumn{4}{c}{\text{coeficientes del cociente } q(x) = 4x^2 - 3x + 7} & &
\end{array}
\qquad (14)
$$

El procedimiento de división sintética para dividir $f(x)$, un polinomio de grado $n > 0$, por $x - c$ se resume como sigue:

GUÍA PARA LA DIVISIÓN SINTÉTICA

i) Escriba c seguido por los coeficientes de $f(x)$. Asegúrese de incluir los coeficientes que son 0 y el término constante.

ii) Baje el coeficiente principal de $f(x)$ a la tercera fila.

iii) Multiplique este número por c y escriba el producto directamente debajo del segundo coeficiente de $f(x)$. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.

iv) Multiplique esta suma por c y escriba el producto en la segunda fila de la siguiente columna. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.

v) Repita el paso anterior tantas veces como sea posible.

vi) El último número de la tercera fila es el residuo constante r; los números precedentes de la tercera fila son los coeficientes de $q(x)$, el polinomio cociente de grado $n - 1$.

EJEMPLO 4 Reconsideración del ejemplo 3

Use la división sintética para dividir $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ cuando $x + 3$.

Solución La división sintética de f por $x + 3 = x - (-3)$ es

$$\begin{array}{r|rrrrrl} -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & -10 \\ & & -3 & 9 & -15 & 45 & -141 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15 & 47 & \boxed{-151 = r} \end{array} \tag{15}$$

El cociente es el polinomio de cuarto grado $q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47$ y el residuo constante es $r = -151$. Además, el valor de f en -3 es el residuo $f(-3) = -151$. ≡

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética para evaluar una función

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(2)$, para

Mediante la división sintética se puede hallar $f(2)$ sin calcular las potencias de 2: 2^6, 2^5, 2^4, 2^3 y 2^2.

$$f(x) = -3x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 9$$

Solución Usaremos división sintética para determinar el residuo r en la división de f entre $x - 2$. Comenzaremos escribiendo todos los coeficientes en $f(x)$, incluido 0, el coeficiente de x. En

$$\begin{array}{r|rrrrrrl} 2 & -3 & 4 & 1 & -8 & -6 & 0 & 9 \\ & & -6 & -4 & -6 & -28 & -68 & -136 \\ \hline & -3 & -2 & -3 & -14 & -34 & -68 & \boxed{-127 = r} \end{array}$$

se ve que $f(2) = -127$. ≡

EJEMPLO 6 Uso de la división sintética para evaluar una función

Usar división sintética para evaluar $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ en $x = 5$.

Solución Según la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrl} 5 & 1 & -7 & 13 & -15 \\ & & 5 & -10 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que $f(5) = 0$. ≡

El resultado del ejemplo 5, $f(5) = 0$, muestra que 5 es una raíz de la función dada f. Es más, hemos hallado también que f es divisible entre el polinomio lineal $x - 5$. Visto de otra forma, $x - 5$ es un factor de f. La división sintética muestra que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ equivale a

$$f(x) = (x - 5)(x^2 - 2x + 3).$$

En la siguiente sección investigaremos más el uso del algoritmo de la división y del teorema del residuo, como ayuda para determinar raíces y factores de una función polinomial.

6.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 10 use la división larga para determinar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x)$ se divide entre el polinomio indicado $g(x)$. En cada caso, escriba la respuesta en la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = 8x^2 + 4x - 7;\quad g(x) = x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3;\quad g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1;\quad g(x) = x^2 + x - 1$

4. $f(x) = 14x^3 - 12x^2 + 6;\quad g(x) = x^2 - 1$

5. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5;\quad g(x) = (x + 2)^2$

6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1;\quad g(x) = (2x + 1)^2$

7. $f(x) = 27x^3 + x - 2;\quad g(x) = 3x^2 - x$

8. $f(x) = x^4 + 8;\quad g(x) = x^3 + 2x - 1$

9. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3;\quad g(x) = x^3 - 2$

10. $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4;$
$g(x) = x^2 + x - 1$

En los problemas 11 a 16 proceda como en el ejemplo 2 y aplique el teorema del residuo para determinar r cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal indicado.

11. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6;\quad x - 2$

12. $f(x) = 3x^2 + 7x - 1;\quad x + 3$

13. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2;\quad x - \frac{1}{2}$

14. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 4x - 6;\quad x + 1$

15. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5;\quad x - 3$

16. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + x - 1;\quad x + \frac{3}{2}$

En los problemas 17 a 22, proceda como en el ejemplo 3 y use el teorema del residuo para calcular $f(c)$ con el valor indicado de c.

17. $f(x) = 4x^2 - 10x + 6;\quad c = 2$

18. $f(x) = 6x^2 + 4x - 2;\quad c = \frac{1}{4}$

19. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6;\quad c = -5$

20. $f(x) = 15x^3 + 17x^2 - 30;\quad c = \frac{1}{5}$

21. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 20;\quad c = \frac{1}{2}$

22. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19;\quad c = 1$

En los problemas 23 a 32, use la división sintética para calcular el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando se divide $f(x)$ entre el polinomio lineal indicado.

23. $f(x) = 2x^2 - x + 5;\quad x - 2$

24. $f(x) = 4x^2 - 8x + 6;\quad x - \frac{1}{2}$

25. $f(x) = x^3 - x^2 + 2;\quad x + 3$

26. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 4;\quad x - 7$

27. $f(x) = x^4 + 16;\quad x - 2$

28. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6;\quad x + 3$

29. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4;\quad x + 4$

30. $f(x) = 2x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 1;\quad x + 1$

31. $f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x - 3;\quad x - \sqrt{3}$

32. $f(x) = x^8 - 3^8;\quad x - 3$

En los problemas 33 a 38 use la división sintética y el teorema del residuo para calcular $f(c)$ para el valor indicado de c.

33. $f(x) = 4x^2 - 2x + 9;\quad c = -3$

34. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 27;\quad c = \frac{1}{2}$

35. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19;\quad c = 1$

36. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 16;\quad c = -2$

37. $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1;\quad c = 4$

38. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 10;\quad c = 5$

En los problemas 39 y 40 use la división larga para determinar el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $g(x)$.

39. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4;\quad g(x) = x^2 - 1$

40. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5;$
$g(x) = x^2 - x + 1$

En los problemas 41 y 42 use la división sintética para calcular el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $g(x)$.

41. $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k;\quad g(x) = x - 1$

42. $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4;\quad g(x) = x + 2$

43. Determine el valor de k tal que el residuo de la división de $f(x) = 3x^2 - 4kx + 1$ entre $g(x) = x + 3$ sea $r = -20$.

44. Cuando $f(x) = x^2 - 3x - 1$ se divide entre $x - c$, el residuo es $r = 3$. Determine c.

6.3 Raíces y factores de funciones polinomiales

Introducción En la sección 5.1 vimos que una raíz (o cero) de una función f es un número c para el cual $f(c) = 0$. Una raíz de una función f puede ser un número *real* o uno *complejo*. Recuerde que un **número complejo** tiene la forma

$$z = a + bi, \qquad \text{en el que} \qquad i^2 = -1,$$

y a y b son números reales. Al número a se le llama **parte real** de z, y a b se le llama **parte imaginaria** de z. El símbolo i se llama **unidad imaginaria** y se acostumbra definirlo como $i = \sqrt{-1}$. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = a - bi$ se llama su **conjugado**. Así, la sencilla función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, porque las soluciones de $x^2 + 1 = 0$ son $\pm\sqrt{-1}$, esto es, son i y $-i$.

En esta sección exploraremos la relación entre las raíces de una función polinomial f, la operación de división y los factores de f.

EJEMPLO 1 Raíz real

Se tiene la función polinomial $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. El número real $\frac{1}{2}$ es una raíz de la función, ya que

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{9}{4} + 3 - 1 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} = 0. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 2 Raíz compleja

Véase (4) en la sección 2.6.

Para la función polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$, el número complejo $1 + i$ es una de sus raíces. Para comprobarlo usemos el desarrollo del binomio $(a + b)^3$, el hecho que $i^2 = -1$ y que $i^3 = -i$.

$$\begin{aligned} f(1 + i) &= (1 + i)^3 - 5(1 + i)^2 + 8(1 + i) - 6 \\ &= (1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3) - 5(1^2 + 2i + i^2) + 8(1 + i) - 6 \\ &= (-2 + 2i) - 5(2i) + (2 + 8i) \\ &= (-2 + 2) + (10 - 10)i = 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

≡

Teorema del factor Ahora ya podemos relacionar la noción de una raíz de una función polinomial f, con la división de polinomios. De acuerdo con el teorema del residuo, cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal $x - c$, el residuo es $r = f(c)$. Si c es una raíz de f, entonces $f(c) = 0$ implica que $r = 0$. Por la forma del algoritmo de la división que se presentó en (4), sección 6.2, se puede escribir f como

$$f(x) = (x - c)q(x). \tag{1}$$

Así, si c es una raíz de una función polinomial f, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Al revés, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces f tiene la forma de la ecuación (1). En este caso, de inmediato se ve que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$. Estos resultados se resumen en el siguiente **teorema del factor**.

Teorema 6.3.1 Teorema del factor

Un número c es una raíz de una función polinomial f si, y sólo si, $x - c$ es un factor de $f(x)$.

Si una función polinomial f es de grado n, y si $(x - c)^m$, $m \leq n$, es un factor de $f(x)$, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad *m***. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Lo que es lo mismo, se dice que el número c es una **raíz de multiplicidad *m*** de la ecuación $f(x) = 0$. Ya hemos examinado el significado gráfico de raíces reales repetidas de una función polinomial f, en la sección 6.1. Véase la figura 6.1.6.

EJEMPLO 3 Factores de un polinomio

Determinar si

a) $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$,

b) $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

Solución Usaremos división sintética para dividir $f(x)$ entre el término lineal indicado.

a) De la división

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\ & & -1 & 1 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 10 & \boxed{-11 = r = f(-1)} \end{array}$$

se advierte que $f(-1) = -11$, por lo que -1 no es una raíz de f. La conclusión es que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

b) De la división

$$\begin{array}{r|rrrl} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r = f(2)} \end{array}$$

se ve que $f(2) = 0$. Eso quiere decir que 2 es una raíz, y que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. En la división se observa también que el cociente es $q(x) = x^2 - x - 2$, y por consiguiente $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$. ≡

Cantidad de raíces En el ejemplo 6 de la sección 6.1 se graficó la función polinomial

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^3. \tag{2}$$

El número 3 es una raíz de multiplicidad uno, o una raíz simple de f; el número 1 es una raíz de multiplicidad dos, y -2 es una raíz de multiplicidad tres. Aunque la función f tiene tres raíces *distintas* (diferentes entre sí), es decir, que f tiene *seis raíces*, porque se cuentan las multiplicidades de cada raíz. Por consiguiente, para la función f en (2), la cantidad de raíces es $1 + 2 + 3 = 6$. La pregunta

cuántas raíces tiene una función polinomial f

se contesta a continuación.

Teorema 6.3.2 Teorema fundamental del álgebra

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.

El teorema anterior lo demostró por primera vez el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), en 1799, y se considera una de las grandes aportaciones en la historia de las matemáticas. En su primera lectura, este teorema no parece decir mucho, pero cuando se combina con el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra indica que:

Toda función polinomial f de grado n > 0 *tiene exactamente n raíces.* (3)