

■ **Una forma alternativa** Los coeficientes binomiales pueden escribirse de una forma más compacta usando notación factorial. Si  $r$  es cualquier número entero tal que  $0 \leq r \leq n$ , entonces

$$\begin{aligned} n(n-1) \cdots (n-r+1) &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{1} \cdot \overbrace{\frac{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{\text{esta fracción es 1}} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

Así, los coeficientes binomiales de  $a^{n-r}b^r$  para  $r = 0, 1, \dots, n$  dados en (7) son los mismos que  $n!/r!(n-r)!$ . Este último cociente se denota generalmente con el símbolo  $\binom{n}{r}$ . Es decir, los **coeficientes binomiales** son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (8)$$

Por tanto, el teorema del binomio (5) se puede escribir en la forma alternativa

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \quad (9)$$

Usaremos esta forma para demostrar (5).

■ **Notación sigma** El teorema del binomio puede expresarse de manera compacta con la notación sigma. Usando (6) y (8), las sumas en (5) y (9) se pueden escribir así:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

respectivamente. En estas formas es evidente que como el índice de suma empieza en 0 y termina en  $n$ , el desarrollo del binomio contiene  $n+1$  términos.

La siguiente propiedad del coeficiente binomial  $\binom{n}{r}$  tiene una función central en la demostración del teorema del binomio. Para cualquier número entero  $r$ ,  $0 < r \leq n$ , tenemos

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}. \quad (10)$$

Dejamos la comprobación de (10) como un ejercicio (véase problema 63 de los ejercicios 15.5).

■ **Demostración del teorema 15.5.1** Ahora demostraremos el teorema del binomio mediante inducción matemática. Sustituyendo  $n = 1$  en (9) obtenemos una expresión verdadera,

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a+b,$$

puesto que  $\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!1!} = 1$  y  $\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!0!} = 1$ .

Con esto se completa la comprobación de la primera condición del principio de inducción matemática.

Para la segunda condición, suponemos que (9) es verdadera para algún entero positivo  $n = k$ :

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k. \quad (11)$$

A partir de esta suposición debemos demostrar, entonces, que (9) es verdadera para  $n = k + 1$ . Para ello, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $(a + b)$  y obtenemos:

$$\begin{aligned} (a + b)(a + b)^k &= (a + b) \left[ \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k \right] \\ &= \binom{k}{0}(a^{k+1} + a^k b) + \binom{k}{1}(a^k b + a^{k-1}b^2) + \cdots + \binom{k}{r}(a^{k-r+1}b^r + a^{k-r}b^{r+1}) + \cdots + \binom{k}{k}(ab^k + b^{k+1}) \\ &= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \left[ \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] a^{k-1} b^2 + \cdots + \left[ \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} \right] a^{k-r+1} b^r + \cdots + \binom{k}{k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

Usando (10) para reescribir el coeficiente del  $(r + 1)$ -ésimo término en (12) como

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

y los hechos de que  $(a + b)(a + b)^k = (a + b)^{k+1}$ ,

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}, \quad \text{y} \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k},$$

la última línea en (12) se convierte en

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}.$$

Como se trata de (9) con  $n$  sustituido por  $k + 1$ , la demostración está completa por el principio de inducción matemática. ≡

## 15.5 Ejercicios

 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

En los problemas 1 a 12, calcule la expresión dada.

1.  $3!$

2.  $5!$

3.  $\frac{2!}{5!}$

4.  $\frac{6!}{3!}$

5.  $3!4!$

6.  $0!5!$

7.  $\binom{5}{3}$

8.  $\binom{6}{3}$

9.  $\binom{7}{6}$

10.  $\binom{9}{9}$

11.  $\binom{4}{1}$

12.  $\binom{4}{0}$

En los problemas 13 a 16, simplifique la ecuación dada.

13.  $\frac{n!}{(n-1)!}$
14.  $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$
15.  $\frac{n!(n+1)!}{(n+2)!(n+3)!}$
16.  $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}$

En los problemas 17 a 26, use la notación factorial para reescribir la expresión dada.

17.  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
18.  $7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
19.  $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
20.  $t(t-1)(t-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
21.  $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$
22.  $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(3 \cdot 2 \cdot 1)$
23.  $4 \cdot 3$
24.  $10 \cdot 9 \cdot 8$
25.  $n(n-1), n \geq 2$
26.  $n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1), n \geq r$

En los problemas 27 a 32, conteste verdadero o falso.

27.  $5! = 5 \cdot 4!$  \_\_\_\_\_
28.  $3! + 3! = 6!$  \_\_\_\_\_
29.  $\frac{8!}{4!} = 2!$  \_\_\_\_\_
30.  $\frac{8!}{4} = 2$  \_\_\_\_\_
31.  $n!(n+1) = (n+1)!$  \_\_\_\_\_
32.  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$  \_\_\_\_\_

En los problemas 33 a 42, use el teorema del binomio para desarrollar la expresión dada.

33.  $(x^2 - 5y^4)^2$
34.  $(x^{-1} + y^{-1})^3$
35.  $(x^2 - y^2)^3$
36.  $(x^{-2} + 1)^4$
37.  $(x^{1/2} + y^{1/2})^4$
38.  $(3 - y^2)^4$
39.  $(x^2 + y^2)^5$

$$40. \left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$41. (a - b - c)^3$$

$$42. (x + y + z)^4$$

43. Remítase al triángulo de Pascal y determine los coeficientes en el desarrollo de  $(a + b)^n$  para  $n = 6$  y  $n = 7$ .

44. Si  $f(x) = x^n$ , donde  $n$  es un entero positivo, use el teorema del binomio para simplificar el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En los problemas 45 a 54, halle el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

45. Sexto término de  $(a + b)^6$

46. Segundo término de  $(x - y)^5$

47. Cuarto término de  $(x^2 - y^2)^6$

48. Tercer término de  $(x - 5)^5$

49. Quinto término de  $(4 + x)^7$

50. Séptimo término de  $(a - b)^7$

51. Décimo término de  $(x + y)^{14}$

52. Quinto término de  $(t + 1)^4$

53. Octavo término de  $(2 - y)^9$

54. Noveno término de  $(3 - z)^{10}$

55. Obtenga el coeficiente del término constante  $(x + 1/x)^{10}$ .

56. Obtenga los primeros cinco términos del desarrollo de  $(x^2 - y)^{11}$ .

57. Utilice los primeros cuatro términos del desarrollo de  $(1 - 0.01)^5$  para obtener una aproximación de  $(0.99)^5$ . Compare con la respuesta obtenida con una calculadora.

58. Utilice los primeros cuatro términos del desarrollo de  $(1 + 0.01)^{10}$  para obtener una aproximación de  $(1.01)^{10}$ . Compare con la respuesta obtenida con una calculadora.

### ≡ Para la discusión

59. Sin sumar los términos, determine el valor de  $\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 4^k$ .

60. Si  $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{5-k} = 0$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

61. Use el teorema del binomio para demostrar que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

62. Use el teorema del binomio para demostrar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

63. Demuestre que

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}, \quad 0 < r \leq n.$$

64. Demuestre que

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}, \quad 0 \leq r < n.$$

## 15.6 Principios de conteo

■ **Introducción** Una gran variedad de problemas prácticos requiere contar el número de maneras en las que puede ocurrir algo. Por ejemplo, el prefijo del teléfono de cierta universidad es 642. Si al prefijo lo siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo? Seremos capaces de resolver este y otros (ejemplo 2) problemas usando las técnicas de conteo que se presentan en esta sección.

■ **Diagramas de árbol** Comencemos por considerar un problema más abstracto. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer con tres letras  $a$ ,  $b$  y  $c$ , usando dos letras al mismo tiempo? Una manera de resolver este problema es enumerar todos los posibles arreglos. Como se muestra en la FIGURA 15.6.1 se puede usar un **diagrama de árbol** para ilustrar todas las posibilidades. Desde el punto llamado “comienzo”, segmentos de recta salen hacia cada una de las tres posibles elecciones para la primera letra. Desde cada uno de éstos, un segmento de recta sale hacia cada una de las posibles opciones para una segunda letra. Cada posible combinación corresponde a un camino o **rama del árbol**, que empieza en el punto “comienzo” y va a la derecha a través del árbol. Vemos que hay seis arreglos:

$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$

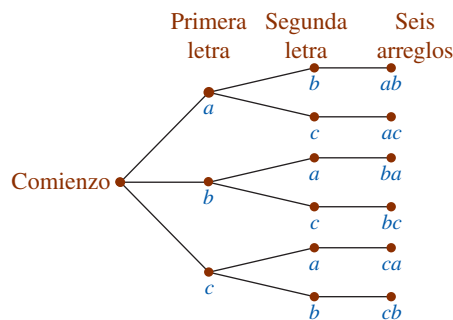


FIGURA 15.6.1 Diagrama de árbol para el número de arreglos de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tomando dos letras a la vez

Otra forma de resolver este problema es reconocer que cada arreglo consta de una selección de letras para llenar los dos espacios en blanco indicados

$\frac{\quad}{\text{Primera letra}} \quad \frac{\quad}{\text{Segunda letra}}$

Cualquiera de las *tres* letras  $a$ ,  $b$  o  $c$  puede escogerse para la primera posición. Una vez que se haya hecho esta elección, cualquiera de las dos letras restantes puede elegirse para la segunda posición. Puesto que cada una de las tres letras de la primera posición se puede asociar con cualquiera de las dos restantes, el número total de arreglos está dado por el producto

$$\frac{3}{\text{Primera letra}} \cdot \frac{2}{\text{Segunda letra}} = 6.$$

Este ejemplo sencillo ilustra el **principio fundamental de conteo**.

### Teorema 15.6.1 Principio fundamental de conteo

Si un suceso puede ocurrir de  $m$  maneras y, después de que ha ocurrido, un segundo suceso puede presentarse de  $n$  maneras, entonces el número total de las maneras en las que ambos sucesos pueden suceder es el producto  $mn$ .

Este principio fundamental de conteo puede extenderse a tres o más sucesos de manera obvia:

*Simplemente multiplique el número de maneras en que cada suceso puede ocurrir.*

### EJEMPLO 1 Número de atuendos

Un estudiante universitario tiene cinco camisas, tres pantalones y dos pares de zapatos. ¿Cuántos conjuntos de una camisa, un pantalón y un par de zapatos puede usar?

**Solución** Tres selecciones o sucesos pueden ocurrir, con cinco opciones para el primero (elegir una camisa), tres para el segundo (escoger un pantalón) y dos para el tercero (seleccionar un par de zapatos). Según el principio fundamental de conteo, el número de conjuntos es el producto  $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ .  $\equiv$

Ahora regresamos al problema planteado en la introducción.

### EJEMPLO 2 Números telefónicos

El prefijo telefónico de cierta universidad es 642. Si al prefijo le siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo?

**Solución** Pueden ocurrir cuatro sucesos: seleccionar el primer dígito después del prefijo, elegir el segundo dígito después del prefijo y así sucesivamente. Puesto que los dígitos repetidos se permiten en los números telefónicos, cualquiera de los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 pueden escogerse para cada posición. Entonces hay  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$  números telefónicos posibles con el prefijo 642.  $\equiv$

### EJEMPLO 3 Arreglos de letras

¿Cuántas formas hay de ordenar las letras de la palabra CARTÓN?

**Solución** Puesto que CARTÓN tiene seis letras diferentes, hay seis sucesos: escoger la primera letra, escoger la segunda, etcétera. Se puede elegir cualquiera de las seis letras para la primera posición; entonces, cualquiera de las cinco letras restantes se puede escoger para la segunda posición; luego, cualquiera de las cuatro letras restantes se puede escoger para la tercera posición y así sucesivamente. El número total de ordenaciones es  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ .  $\equiv$

■ **Permutaciones** Una **permutación** es un arreglo que se hace usando algunos o todos los elementos de un conjunto, *sin repetirlos*. Esto significa que ningún elemento del conjunto aparece más de una vez en el arreglo. Por ejemplo, 312 es una permutación de los dígitos del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , pero 112 no lo es. En el ejemplo 3, cada uno de los nuevos arreglos de las letras de la palabra CARTÓN (por ejemplo, CONTRA) es una permutación. De forma más general, tenemos la definición siguiente.

### Definición 15.6.1 Permutación

Un arreglo ordenado de  $r$  elementos seleccionados de un conjunto de  $n$  distintos elementos se llama **permutación** de  $n$  elementos tomados  $r$  a la vez (con  $n \geq r$ ).

■ **Notación** Usaremos el símbolo  $P(n, r)$  para representar el número de permutaciones de  $n$  objetos diferentes, tomando  $r$  a la vez (otras notaciones usadas comúnmente son  ${}_n P_r$ ,  $P_r^n$  y  $P_{n,r}$ ). Usando la notación  $P(n, r)$  escribimos el número de permutaciones de cinco objetos, tomados tres a la vez como  $P(5, 3)$ .

Es posible hallar una fórmula explícita para  $P(n, r)$ , es decir, el número de permutaciones de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez para  $0 \leq r \leq n$ . Para  $r \geq 1$ , podemos pensar en el proceso de formar una permutación de  $n$  objetos tomando a  $r$  cada vez como  $r$  sucesos: escogemos el primer objeto, escogemos el segundo objeto, etcétera. Cuando hacemos la primera elección, hay  $n$  objetos disponibles; cuando hacemos la segunda elección hay  $n - 1$  objetos; para la tercera elección, hay  $n - 2$  objetos, y así sucesivamente. Cuando elegimos el objeto  $r$ -ésimo hay  $n - (r - 1)$  objetos para elegir. Así, del teorema 15.6.1

$$P(n, r) = \overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(r-1))}^{r \text{ factores}}$$

o

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1). \quad (1)$$

Una expresión alterna para  $P(n, r)$ , que supone notación factorial, se puede hallar multiplicando el miembro derecho de (1) por

$$\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = 1.$$

El resultado es

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \overbrace{(n-r)(n-r-1) \cdots 2 \cdot 1}^{(n-r)!}}{(n-r)!},$$

o

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}. \quad (2)$$

Cuando  $r = n$ , la fórmula (2) se convierte en

$$P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!,$$

puesto que  $0!$  se define como 1. Este resultado es el mismo que el obtenido usando el principio enunciado en el teorema 13.6.1

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!, \quad (3)$$

puesto que cualquiera de los  $n$  objetos puede escogerse primero, cualquiera del resto de los objetos puede elegirse segundo, etcétera. En el ejemplo 3, el número de arreglos de seis letras de la palabra CARTÓN es el número de permutaciones de las seis letras usando las seis a la vez, es decir,  $P(6, 6) = 6! = 720$ .

Si  $r = 0$ , definimos  $P(n, 0) = 1$ , lo cual es consistente con (2).

#### EJEMPLO 4 Aplicación de (2) y (3)

Calcule **a)**  $P(5, 3)$ ; **b)**  $P(5, 1)$ , y **c)**  $P(5, 5)$ .

**Solución** Usando la fórmula (2) encontramos que

$$\text{a) } P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \overbrace{2 \cdot 1}^{2!}}{2!} = 60,$$

$$\text{b) } P(5, 1) = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{4!}}{4!} = 5.$$

c) Por la fórmula (3) obtenemos

$$P(5, 5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120. \quad \equiv$$

### EJEMPLO 5 Otorgamiento de medallas

En una pista se encuentran seis atletas y entran en el carril de los 100 metros. ¿De cuántas maneras se pueden organizar para ganar medallas de oro, de plata y de bronce?

**Solución** Deseamos contar el número de maneras de organizar a tres de los seis atletas en las posiciones ganadoras. La solución está dada por el número de permutaciones de seis elementos (los atletas) tomando tres a la vez:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Este problema también se puede resolver usando el principio fundamental de conteo. Puesto que se deben hacer tres elecciones, con seis atletas disponibles para la medalla de oro, cinco para la de plata y cuatro para la de bronce, obtenemos  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ .  $\equiv$

### EJEMPLO 6 Arreglos de libros

¿Cuántos arreglos son posibles para colocar 10 libros en un estante?

**Solución** Deseamos hallar el número de permutaciones de 10 objetos que se toman 10 a la vez, o  $P(10, 10) = 10! = 3\,628\,800$ .  $\equiv$



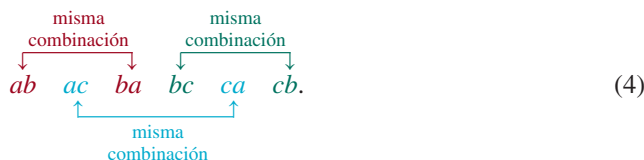
Diez libros en un estante

■ **Combinaciones** En el análisis anterior estábamos interesados en el número de maneras de arreglar o de escoger  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos, donde se consideraba el orden en el que se debían arreglar o escoger. Sin embargo, en ciertas aplicaciones el orden de los elementos no es importante. Por ejemplo, si se debe escoger un comité de dos entre cuatro estudiantes: Angie, Brandon, Cecilia y David, el comité formado al escoger a Angie y a Brandon es el mismo que el formado al elegir a Brandon y a Angie. Una selección de objetos en los que el orden no establece ninguna diferencia se llama **combinación**.

#### Definición 15.6.2 Combinación

Un subconjunto de  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos se llama **combinación** de  $n$  elementos tomando  $r$  a la vez (con  $n \geq r$ ).

■ **Notación** Usamos el símbolo  $C(n, r)$  para representar el número de combinaciones de  $n$  objetos distintos tomando  $r$  a la vez. Usando (2) es posible derivar una fórmula para  $C(n, r)$ . Al comienzo de esta sección vimos que hay seis arreglos (permutaciones) de las tres letras  $a, b$  y  $c$  tomando dos a la vez:



En (4) vemos que si descartamos el orden en el que las letras están enumeradas tenemos tres combinaciones:  $ab, ac, bc$ . Así,  $C(3, 2) = 3$ . Vemos que cada una de estas combinaciones se puede arreglar de  $2!$  modos, para dar la lista de permutaciones (4). Por el principio fundamental de conteo,

$$P(3, 2) = 6 = 2!C(3, 2).$$

En general, para  $0 < r \leq n$ , cada una de las combinaciones  $C(n, r)$  se puede arreglar nuevamente en  $r!$  maneras diferentes, así que

$$P(n, r) = r! C(n, r),$$

o

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!}.$$

Así,

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}.$$

Para  $r = 0$ , definimos  $C(n, 0) = 1$ , lo cual es consistente con la fórmula (5).

Nótese que  $C(n, r)$  es idéntica al coeficiente binomial  $\binom{n}{r}$  del desarrollo de  $(a + b)^n$ , donde  $n$  es un entero no negativo [véanse (7) y (8) en la sección 15.5].

### EJEMPLO 7 Aplicación de la fórmula (5)

Calcule **a)**  $C(5, 3)$ , **b)**  $C(5, 1)$  y **c)**  $C(5, 5)$ .

**Solución** Usando la fórmula (5), tenemos lo siguiente.

$$\text{a) } C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \overbrace{3!}^{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2!3!} = 10,$$

$$\text{b) } C(5, 1) = \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5 \cdot \overbrace{4!}^{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{4!1!} = 5,$$

$$\text{c) } C(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!5!} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{1}{\underbrace{0!}_1} = 1. \quad \equiv$$

### EJEMPLO 8 Número de rondas de cartas

¿Cuántas rondas diferentes de cinco cartas pueden distribuirse de una baraja de 52 cartas?

**Solución** Puesto que una ronda es la misma, no importa el orden de las cartas, usamos combinaciones para resolver este problema. La solución es

$$\begin{aligned} C(52, 5) &= \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \overbrace{47!}^{47!}}{47!5!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960. \end{aligned}$$

Nótese que cancelamos el mayor de los dos factores  $47!$  y  $5!$  para simplificar el cálculo de  $C(52, 5)$ . ≡

### EJEMPLO 9 Organización de un club

Un club de cartas tiene ocho miembros.

**a)** ¿De cuántas maneras se puede escoger a tres miembros para que sean presidente, secretario y tesorero?

**b)** ¿De cuántas maneras se puede escoger un comité de tres miembros?



**Solución** Para elegir los funcionarios *sí* importa el orden, en tanto que para escoger a un comité el orden de la selección no afecta al comité resultante. Así, en a) contamos permutaciones y en b) contamos combinaciones. Obtenemos

$$a) P(8, 3) = \frac{8!}{5!} = 336,$$

$$b) C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = 56. \quad \equiv$$

Al decidir si usamos la fórmula para  $P(n, r)$  o  $C(n, r)$ , consideramos lo siguiente.

◀ Advertencia

- Se trabaja con permutaciones si se están considerando arreglos en los que los diferentes órdenes de los mismos objetos *se deben contar*.
- Se trabaja con combinaciones si se están considerando maneras de escoger objetos en los que el orden de los objetos escogidos *no establece ninguna diferencia*.

### EJEMPLO 10 Elección de reporteros

La junta directiva de un periódico universitario tiene seis reporteros del penúltimo año y ocho del último. ¿De cuántas maneras se pueden escoger a dos reporteros de penúltimo año y a tres del último año para una tarea especial?

**Solución** Pueden ocurrir dos sucesos: la selección de dos reporteros de penúltimo año y la selección de tres de último año. Puesto que el orden en el que se escoge a los dos reporteros de penúltimo año no establece ninguna diferencia, contamos combinaciones. Por tanto, el número de maneras de seleccionar a los dos reporteros de penúltimo año es

$$C(6, 2) = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Asimismo, al seleccionar a los tres reporteros del último año el orden no importa, por lo que de nuevo contamos las combinaciones:

$$C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Así, escogemos a los reporteros de penúltimo año de 15 maneras, y por cada una de estas selecciones, hay 56 formas de elegir a los reporteros del último año. Aplicando el principio fundamental de conteo obtenemos

$$C(6, 2) \cdot C(8, 3) = 15 \cdot 56 = 840$$

maneras de hacer las elecciones para la tarea especial. ≡

### EJEMPLO 11 Selección para una vitrina

Un almacén de quesos tiene 10 variedades de queso nacional y ocho variedades de queso importado. ¿De cuántas maneras se puede colocar en una vitrina una selección de seis quesos, que tenga dos variedades de queso nacional y cuatro de queso importado?

**Solución** Las variedades nacionales se pueden escoger de  $C(10, 2)$  maneras y las variedades importadas de  $C(8, 4)$  maneras. Así, por el principio fundamental de conteo, los seis quesos se pueden seleccionar de  $C(10, 2) \cdot C(8, 4)$  formas. Hasta este momento de la solución, el orden no ha sido importante para hacer la *selección* de los quesos. Ahora observamos que *cada* selección de seis quesos se puede colocar o arreglar en la vitrina de  $P(6, 6)$  maneras. Así, el número total de maneras en que se pueden exhibir los quesos es

$$\begin{aligned} C(10, 2) \cdot C(8, 4) \cdot P(6, 6) &= \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{6!}{(6-6)!} \\ &= 2\,268\,000. \end{aligned} \quad \equiv$$

## 15.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

Use un diagrama de árbol para resolver los problemas 1 a 4.

1. Enumere todos los arreglos posibles de las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
2. Si una moneda se arroja cuatro veces, enumere todas las posibles sucesiones de caras ( $C$ ) y sellos ( $S$ ).
3. Si se lanza un dado rojo y otro negro, enumere todos los resultados posibles.
4. Si se lanza al aire una moneda y luego se lanza un dado, enumere todos los resultados posibles.

Use el principio fundamental de conteo para resolver los problemas 5 a 8.

5. **Número de comidas** Una cafetería ofrece ocho ensaladas, seis entradas, cuatro platos fuertes y tres postres. ¿Cuántas comidas pueden formarse eligiendo una porción de cada categoría?
6. **Número de sistemas** ¿Cuántos sistemas estereofónicos formados por altavoces, receptor y reproductor de CD pueden comprarse si una tienda vende seis modelos de altavoces, cuatro de receptores y dos de reproductores de discos compactos?
7. **Número de prefijos** ¿Cuántos prefijos de tres dígitos de teléfono son posibles si ni 0 ni 1 pueden ocupar el primer lugar?
8. **Número de placas de automóvil** Si una placa tiene tres letras seguidas de tres números, ¿cuántas placas son posibles si la primera letra no puede ser O ni I?

En los problemas 9 a 16, calcule  $P(n, r)$ .

9.  $P(6, 3)$
10.  $P(6, 4)$
11.  $P(6, 1)$
12.  $P(4, 0)$
13.  $P(100, 2)$
14.  $P(4, 4)$
15.  $P(8, 6)$
16.  $P(7, 6)$

En los problemas 17 a 24 evalúe  $C(n, r)$ .

17.  $C(4, 2)$
18.  $C(4, 1)$
19.  $C(50, 2)$
20.  $C(2, 2)$

21.  $C(13, 11)$

22.  $C(8, 2)$

23.  $C(2, 0)$

24.  $C(7, 4)$

### ≡ Aplicaciones diversas

En los problemas 25 a 28, use permutaciones.

25. **Retrato familiar** ¿De cuántas maneras se puede formar una familia de cuatro en una fila para que le tomen un retrato familiar?



Una familia de cuatro personas

26. **Trabajo voluntario** Como parte de una campaña para recaudar fondos, se proporcionan a un voluntario cinco nombres para que se comuniquen con esas personas. ¿En cuántos órdenes puede realizar la tarea el voluntario?
27. **Scrabble** Un jugador de *Scrabble* tiene las siete letras siguientes: A, T, E, L, M, Q, F.
  - a) ¿Cuántas “palabras” diferentes de siete letras puede considerar?
  - b) ¿Cuántas “palabras” diferentes de cinco letras?



El juego *Scrabble*®

28. **Política** En una clase de 24 se celebran elecciones para presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar los cargos?

En los problemas 29 a 32, use combinaciones.

29. **¡Buena suerte!** Un estudiante debe responder a 10 preguntas cualesquiera de un examen de 12 preguntas. ¿De cuántas maneras puede el estudiante seleccionar las preguntas?
30. **Laboratorio de química** Para una clase de laboratorio de química, un estudiante debe identificar correctamente tres muestras “desconocidas”. ¿De cuántas maneras puede elegir las tres muestras entre 10 sustancias químicas?
31. **Voluntarios** ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cinco sujetos de un grupo de 10 voluntarios para un experimento psicológico?
32. **Popurrí** ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro hierbas de ocho disponibles para hacer un popurrí?

En los problemas 33 a 44, use una o más de las técnicas estudiadas en esta sección para resolver el problema de conteo dado.

33. **Concurso de ortografía** Si 10 estudiantes participan en un concurso de ortografía, ¿de cuántas maneras pueden otorgarse el primero y segundo premios?
34. **Farándula** Una compañía de teatro tiene un repertorio que consta de ocho obras dramáticas, seis comedias y cuatro números musicales. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un programa que conste de una obra dramática seguida por una comedia o por un número musical?
35. **¿Cuáles quieres?** Un pediatra permite que un niño muy bien portado escoja dos juguetes cualesquiera de 5 juguetes de plástico pequeños para llevar a casa. ¿Cuántas selecciones de juguetes son posibles?
36. **Clasificaciones de un torneo** Si ocho equipos participan en un torneo de fútbol, ¿de cuántas maneras diferentes pueden decidirse el primero, segundo y tercer lugares, suponiendo que no se permiten empates?
37. **Otro Jackson Pollock** Si ocho colores están disponibles para hacer una pintura abstracta con salpicaduras, ¿cuántas combinaciones de colores son posibles si sólo se eligen tres colores?
38. **Distribución de asientos** Tres parejas reservaron asientos en una fila de un teatro. Indique de cuántas maneras pueden sentarse si
- No hay restricciones.
  - Cada pareja desea sentarse junta.
  - Las tres mujeres y los tres hombres desean sentarse en dos grupos.
39. **Mastermind** En un popular juego de mesa llamado *Mastermind* que se inventó en Inglaterra, un jugador crea un “código” secreto cuando llena cuatro ranuras con un

color cualquiera de seis posible. Indique cuántos códigos son posibles si

- No se permiten repeticiones.
- Se permiten repeticiones.
- Se permiten repeticiones y ranuras vacías.

40. **Super Mastermind** Algunos anuncios comerciales del juego *Super Mastermind* (una versión más difícil del juego *Mastermind* descrito en el problema 39) aseguran que son posibles hasta 59 000 códigos. Si *Super Mastermind* requiere llenar cinco ranuras con un color cualquiera de ocho y si se permiten espacios vacíos y repeticiones, ¿es correcto lo que dicen los anuncios?



El juego *Mastermind*

41. **Juego de letras** Con cinco consonantes y tres vocales, ¿cuántas “palabras” de cinco letras pueden formarse que tengan tres consonantes y dos vocales?
42. **Luces defectuosas** Una caja contiene 24 luces para árbol de navidad, cuatro de las cuales salen defectuosas. Indique de cuántas maneras se pueden elegir cuatro focos para que
- Los cuatro en su totalidad salgan defectuosos.
  - Los cuatro en su totalidad salgan buenos.
  - Dos salgan buenos y dos defectuosos.
  - Tres salgan buenos y uno defectuoso.
43. **Más juegos de letras** Indique cuántas “palabras” de tres letras pueden formarse con cuatro consonantes y dos vocales si
- La letra de en medio ha de ser una vocal.
  - La primera letra no puede ser una vocal. Suponga que no se permiten letras repetidas.
44. **Escaparate de una tienda** Un almacén de vinos tiene 12 vinos de California diferentes y ocho vinos franceses distintos. Indique de cuántas maneras un grupo de seis vinos consistente en cuatro vinos californianos y dos franceses
- Se puede seleccionar para exhibición en el escaparate.
  - Se puede colocar en fila en una repisa del escaparate.

## 15.7 Introducción a la probabilidad

■ **Introducción** Como mencionamos en el capítulo introductorio, el desarrollo de la teoría matemática de la **probabilidad** fue motivado inicialmente por preguntas que se plantearon en el siglo XVII acerca de los juegos de azar. Hoy, las aplicaciones de la probabilidad se encuentran en medicina, deportes, leyes, negocios y en muchas otras áreas. En esta sección presentamos solamente una breve introducción a este tema fascinante.

■ **Terminología** Consideremos un experimento que tiene un número finito de posibles **resultados** o consecuencias. El conjunto  $S$  de todos los posibles resultados de un experimento en particular se llama **espacio muestral** del experimento. Para los efectos de este curso, supondremos que cada resultado tiene *la misma probabilidad* de ocurrir. Así, si el experimento consiste en lanzar al aire una moneda, hay dos resultados igualmente posibles: que caiga cara o que caiga sello. Si representamos el resultado de obtener cara o sello con H o T, respectivamente, entonces el espacio muestral puede escribirse en notación de conjuntos como

$$S = \{H, T\} \quad (1)$$

Todo subconjunto  $E$  de un espacio muestral  $S$  se llama **evento**. En general, un evento  $E$  se compone de uno o más resultados de un experimento. Por ejemplo,

$$E = \{H\} \quad (2)$$

es el evento de obtener una cara cuando se lanza la moneda.



Hay dos resultados de lanzar al aire una moneda

### EJEMPLO 1 Espacio muestral y dos eventos

En un solo lanzamiento de un dado justo existen iguales probabilidades de obtener un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Por tanto, el espacio muestral del experimento de lanzar un dado es el conjunto

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (3)$$

- a)* El evento  $E_1$  de obtener un 4 en un lanzamiento del dado es el subconjunto  $E_1 = \{4\}$  de  $S$ .  
*b)* El evento  $E_2$ , consistente en obtener un número impar en un lanzamiento del dado, es el subconjunto  $E_2 = \{1, 3, 5\}$  de  $S$ . ≡

Usaremos la notación  $n(S)$  para simbolizar el número de resultados en un espacio muestral  $S$  y  $n(E)$  para denotar el número de resultados asociados con el evento  $E$ . Por tanto, en el ejemplo 1, tenemos que  $n(S) = 6$ ; en los incisos *a)* y *b)* del ejemplo, tenemos que  $n(E_1) = 1$  y  $n(E_2) = 3$ , respectivamente.

La definición de la probabilidad  $P(E)$  de un evento  $E$  se expresa en términos de  $n(S)$  y  $n(E)$ .

#### Definición 15.7.1 Probabilidad de un evento

Sea  $S$  el espacio muestral de un experimento y  $E$  un evento. Si cada resultado del experimento es igualmente probable, entonces la **probabilidad** del evento  $E$  está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}, \quad (4)$$

donde  $n(E)$  y  $n(S)$  denotan el número de resultados de  $E$  y  $S$ , respectivamente.



Un dado que muestra 4 es uno de seis posibles resultados

### EJEMPLO 2 Probabilidad de lanzar una cara

Halle la probabilidad de obtener una cara si lanza una moneda al aire.

**Solución** De (1) y (2),  $E = \{H\}$ ,  $S = \{H, T\}$  y, por tanto,  $n(E) = 1$  y  $n(S) = 2$ . Por (4) de la definición 15.7.1, la probabilidad de obtener una cara es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}. \quad \equiv$$

### EJEMPLO 3 Tres probabilidades

En un solo lanzamiento de un dado, obtenga la probabilidad

**a)** de obtener un 4, **b)** de obtener un número impar, **c)** de obtener un número que no sea un 4.

**Solución** Los símbolos  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  denotan, respectivamente, los eventos de los incisos **a)**, **b)** y **c)** de este ejemplo. Además, en cada inciso tenemos  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**a)** Del inciso **a)** del ejemplo 1,  $E_1 = \{4\}$  y, por tanto,  $n(E_1) = 1$  y  $n(S) = 6$ . Por (4), la probabilidad de obtener un 4 al lanzar un dado es entonces

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

**b)** Del inciso **b)** del ejemplo 1,  $E_2 = \{1, 3, 5\}$  y, por tanto,  $n(E_2) = 3$  y  $n(S) = 6$ . De nuevo, por (4), la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado es

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

**c)** El evento de obtener un número que no sea un 4 al lanzar el dado es el subconjunto  $E_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  de  $S$ . Usando  $n(E_3) = 5$  y  $n(S) = 6$ , la probabilidad de obtener un número que no sea 4 es

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{6}. \quad \equiv$$

### EJEMPLO 4 Probabilidad de 7

Encuentre la probabilidad de obtener un total de 7 cuando se lanzan dos dados.

**Solución** Puesto que hay seis números en cada dado, concluimos del principio fundamental de conteo de la sección 15.6 que hay  $6 \cdot 6 = 36$  posibles resultados en el espacio muestral  $S$ ; es decir,  $n(S) = 36$ . En la tabla siguiente hemos enumerado las posibles maneras de obtener un total de 7

$E = \text{total de 7 en dos dados}$						
Primer dado	1	2	3	4	5	6
Segundo dado	6	5	4	3	2	1

En la tabla vemos que  $n(E) = 6$ . De ahí que, por (4), la probabilidad de obtener un total de 7 al lanzar dos dados es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \quad \equiv$$



Una de seis posibles maneras de obtener 7 al lanzar un par de dados

### EJEMPLO 5 Aplicación de combinaciones

Una bolsa contiene cinco canicas blancas y tres negras. Si se sacan tres canicas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todas sean blancas?

**Solución** El espacio muestral  $S$  del experimento es el conjunto de todas las combinaciones posibles de tres canicas que se han sacado de las ocho que había en la bolsa. El número de maneras de escoger tres canicas de una bolsa de ocho es el número de *combinaciones* de ocho objetos tomando tres a la vez; es decir,  $n(S) = C(8, 3)$ . De igual forma, el número de maneras de escoger tres canicas blancas de cinco blancas es el número de combinaciones  $n(E) = C(5, 3)$ . Puesto que el evento  $E$  es “todas las canicas son blancas”, tenemos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(5, 3)}{C(8, 3)} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{5}{28}. \quad \equiv$$

■ **Límites de la probabilidad de un evento** Puesto que cualquier evento  $E$  es un subconjunto del espacio muestral  $S$ , se deduce que  $0 \leq n(E) \leq n(S)$ . Si dividimos la última desigualdad entre  $n(S)$ , vemos que

$$0 \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

o

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Si  $E = S$ , entonces  $n(E) = n(S)$  y  $P(E) = n(S)/n(S) = 1$ ; en tanto que si  $E$  no tiene elementos, tomamos  $E = \emptyset$ ,  $n(\emptyset) = 0$  y  $P(E) = n(\emptyset)/n(S) = 0/n(S) = 0$ . Si  $P(E) = 1$ , entonces  $E$  siempre sucede y  $E$  se llama **evento cierto**. Por otra parte, si  $P(E) = 0$ , entonces  $E$  es un **evento imposible**, es decir,  $E$  nunca sucede.

### EJEMPLO 6 Lanzamiento de un dado

Suponga que lanzamos un dado justo una vez.

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener 7?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número menor que 7?

**Solución** a) Como el número 7 no está incluido en el conjunto  $S$  de todos los posibles resultados (3), el evento  $E$  de “obtener un 7” es un evento imposible; es decir,  $E = \emptyset$ ,  $n(\emptyset) = 0$ . Por tanto,

$$P(E) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0.$$

b) Puesto que los resultados de lanzar un dado son todos enteros positivos menores que 7, tenemos  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ . Por consiguiente,  $E$  es un evento cierto y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1. \quad \equiv$$

■ **Complemento de un evento** El conjunto de todos los elementos del espacio muestral que no pertenece a  $E$  se llama **complemento de  $E$**  y se representa con  $E'$ . Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si  $E$  es el evento de “obtener un 4”, entonces,  $E'$  es el evento de “obtener cualquier número *excepto* 4”. En virtud de que los eventos son conjuntos, podemos

describir la relación entre un evento  $E$  y su complemento  $E'$  por medio de operaciones de unión e intersección:

$$E \cup E' = S \quad \text{y} \quad E \cap E' = \emptyset.$$

◀ Para repasar los temas de unión e intersección de conjuntos, véase la sección 1.8.

En vista de las propiedades anteriores, escribimos  $n(E) + n(E') = n(S)$ . Dividiendo ambos miembros de esta última igualdad entre  $n(S)$  vemos que las probabilidades de  $E$  y  $E'$  se relacionan por

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

o 
$$P(E) + P(E') = 1. \quad (5)$$

Por ejemplo, el complemento del evento  $E_1 = \{4\}$  en el inciso *a*) del ejemplo 3 es el conjunto  $E'_1 = E_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  en el inciso *c*). Obsérvese que, de acuerdo con (5), tenemos que  $P(E_1) + P(E_3) = P(E_1) + P(E'_1) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ .

La relación (5) es útil en cualquiera de las dos formas:

$$P(E) = 1 - P(E') \quad \text{o} \quad P(E') = 1 - P(E). \quad (6)$$

La segunda de las dos fórmulas en (6) nos permite encontrar la probabilidad de un evento, si conocemos la probabilidad de su complemento. A veces es más fácil calcular  $P(E')$  que  $P(E)$ . También es interesante notar que la ecuación  $P(E) + P(E') = 1$  puede interpretarse diciendo que *algo* debe suceder.

### EJEMPLO 7 Probabilidad de un as

Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 y no se remplazan, ¿cuál es la probabilidad de obtener por lo menos un as?

**Solución** Sea  $E$  el evento de obtener por lo menos un as. Puesto que  $E$  consta de todas las manos de cinco cartas que contienen 1, 2, 3 o 4 ases, es realmente más fácil considerar  $E'$ ; es decir, todas las manos de cinco cartas que no contienen ases. El espacio muestral  $S$  consta de todas las posibles manos de cinco cartas. Con base en la sección 15.6 tenemos que  $n(S) = C(52, 5)$ . Puesto que 48 de las 52 cartas *no* son ases, obtenemos  $n(E') = C(48, 5)$ . Por (4), la probabilidad de obtener cinco cartas, ninguna de las cuales es un as, está dada por

$$P(E') = \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} = \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960}.$$

Por la primera fórmula en (5), la probabilidad de obtener cinco cartas de las cuales por lo menos una es un as es

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960} \approx 0.3412. \quad \equiv$$

Hasta este punto hemos considerado la probabilidad de un solo evento. En el siguiente análisis examinaremos la probabilidad de dos o más eventos.

■ **Unión de dos eventos** Se dice que dos eventos  $E_1$  y  $E_2$  son **mutuamente excluyentes** si no tienen resultados, o elementos comunes. En otras palabras, los eventos  $E_1$  y  $E_2$  no pueden ocurrir al mismo tiempo. En términos de conjuntos,  $E_1$  y  $E_2$  son conjuntos **disjuntos** o **ajenos**; es decir,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Recuerde que el conjunto  $E_1 \cup E_2$  consta de los elementos incluidos en  $E_1$  o en  $E_2$ . En este caso de eventos mutuamente excluyentes, el número de resultados del conjunto  $E_1 \cup E_2$  está dado por

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) \quad (7)$$

◀ También puede repasar la unión y la intersección de dos conjuntos en la sección 2.1.

Si dividimos (7) entre  $n(S)$  obtenemos

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)}.$$

En vista de (4), la expresión anterior es la misma que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2). \quad (8)$$

En el ejemplo que sigue volvemos a los resultados del ejemplo 3.

### EJEMPLO 8 Eventos mutuamente excluyentes

En un solo lanzamiento de un dado justo, calcule la probabilidad de obtener un 4 o un número impar.

**Solución** Por el ejemplo 3, los dos eventos son  $E_1 = \{4\}$ ,  $E_2 = \{1, 3, 5\}$  y el espacio muestral es de nuevo  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Los eventos de obtener un 4 y obtener un número impar son mutuamente excluyentes:  $E_1 \cap E_2 = \{4\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$ . Así, por (8), la probabilidad  $P(E_1 \cup E_2)$  de obtener un 4 o un número impar está dada por

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

**Solución alternativa** Por  $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $n(E_1 \cup E_2) = 4$  y, por tanto, (4) de la definición 15.7.1 da por resultado

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \quad \equiv$$

La propiedad aditiva en (8) se extiende a la probabilidad de tres o más eventos mutuamente excluyentes (véanse los problemas 31 y 32 de los ejercicios 15.7.)

■ **Regla de la adición** La fórmula (8) es sólo un caso especial de una regla más general. En (8) no hay resultados en común en los eventos  $E_1$  y  $E_2$ . Desde luego, no siempre sucede así. Por citar un caso, en el experimento de lanzar un solo dado, los eventos  $E_1 = \{1\}$  y  $E_2 = \{1, 3, 5\}$  no son mutuamente excluyentes porque el número 1 es un elemento de ambos conjuntos. Cuando dos conjuntos  $E_1$  y  $E_2$  tienen una intersección que no está vacía, el número de resultados en  $n(E_1 \cup E_2)$  no está dado por (7) sino, más bien, por la fórmula

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2). \quad (9)$$

Dividiendo (9) entre  $n(S)$  se obtiene

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$\text{o} \quad P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \quad (10)$$

El resultado de (10) se llama **regla de la adición** de la probabilidad.

### EJEMPLO 9 Probabilidad de una unión de dos eventos

En un solo lanzamiento de un dado, calcule la probabilidad de obtener un 1 o un número impar.

Véase el problema 76 de los ejercicios 2.1. ▶



**Solución** Los conjuntos son  $E_1 = \{1\}$ ,  $E_2 = \{1, 3, 5\}$  y  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ahora bien,  $\{1\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1\}$  para que  $n(E_1 \cap E_2) = 1$ . Así, por (10), la probabilidad de lanzar un 1 o un número impar está dada por

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

**Solución alternativa** Puesto que  $E_1$  es un subconjunto de  $E_2$ ,  $E_1 \cup E_2 = E_2 = \{1, 3, 5\}$  y  $n(E_1 \cup E_2) = 3$ . Por (4) de la definición 15.7.1,

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \equiv$$

Es útil pensar en los símbolos  $P(E_1 \cup E_2)$  y  $P(E_1 \cap E_2)$  de (10) como  $P(E_1 \text{ o } E_2)$  y  $P(E_1 \text{ y } E_2)$ , respectivamente.

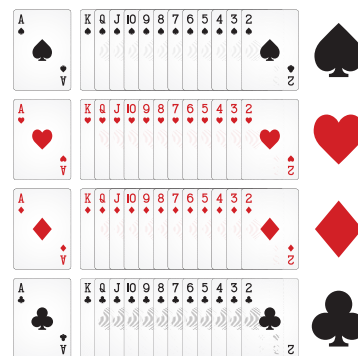
◀ Nota

### EJEMPLO 10 Probabilidad de una unión de dos eventos

Se saca una sola carta de una baraja. Calcule la probabilidad de obtener un as o un corazón.

**Solución** Como se muestra en la fotografía de la derecha, una baraja contiene 52 cartas divididas entre cuatro palos con 13 cartas de cada palo. Así, el espacio muestral  $S$  de este experimento consta de las 52 cartas. El evento  $E_1$  de sacar un as está formado por los 4 ases y, por tanto, la probabilidad de sacar un as es  $P(E_1) = \frac{4}{52}$ . El evento  $E_2$  de sacar una carta que sea un corazón se compone de los 13 corazones de ese palo y, por tanto, la probabilidad de sacar un corazón es  $P(E_2) = \frac{13}{52}$ . Puesto que uno de los corazones es un as,  $n(E_1 \cap E_2) = 1$  y, en consecuencia,  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$ . Por tanto, por (10)

$$\begin{aligned} P(\overbrace{E_1 \cup E_2}^{\text{as o un corazón}}) &= P(\overbrace{E_1}^{\text{as}}) + P(\overbrace{E_2}^{\text{corazón}}) - P(\overbrace{E_1 \cap E_2}^{\text{as y un corazón}}) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}. \quad \equiv \end{aligned}$$



Baraja de 52 cartas del ejemplo 10

## 15.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

En los problemas 1 a 4, use la notación de conjuntos para escribir el espacio muestral del experimento dado.

1. Se lanzan dos monedas.
2. Se lanzan tres monedas.
3. Se lanza una moneda y después un dado.
4. Se lanzan dos dados.

En los problemas 5 a 12, encuentre la probabilidad en el evento dado.

5. Sacar un as en una baraja de 52 cartas.
6. Sacar un diamante en una baraja de 52 cartas.
7. Sacar un 2 al lanzar un solo dado.

8. Sacar un número menor que 3 al lanzar un solo dado.
9. Sacar dos unos (un total de 2) al lanzar dos dados.
10. Sacar un total de 7 u 11 al lanzar dos dados.
11. Obtener sólo caras cuando se lanzan al aire tres monedas.
12. Obtener exactamente una cara cuando se lanzan al aire tres monedas.

En los problemas 13 a 16, halle la probabilidad de obtener la mano indicada, sacando 5 cartas sin reemplazarlas, en una baraja de 52 cartas.

13. Cuatro de la misma clase (por ejemplo, cuatro reyes).

14. Una escalera (cinco cartas en sucesión, como 4, 5, 6, 7, 8, donde un as puede contar como 1 o como as).
15. Una flor (cinco cartas, todas del mismo palo).
16. Una flor imperial (10, joto, reina, rey y un as, todos del mismo palo).

En los problemas 17 a 20, use la primera fórmula en (5) para calcular la probabilidad del evento dado.

17. Obtener por lo menos un corazón si se sacan cinco cartas, sin remplazo, de una baraja de 52 cartas.
18. Obtener por lo menos una figura si se sacan cinco cartas, sin remplazo, de una baraja de 52 cartas.
19. Obtener por lo menos una cara en 10 lanzamientos de una moneda.
20. Obtener por lo menos un 6 cuando se lanzan tres dados.

### ≡ Aplicaciones diversas

21. **Planeación familiar** Suponga que la probabilidad de tener un niño es la misma que de tener una niña. Encuentre la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga al menos una niña.
22. **¡Gracias! ¡Uy!** Después de que Joshua escribe notas de agradecimiento personalizadas a cada una de sus tres tías por los regalos que le enviaron en su cumpleaños, su hermana las mete aleatoriamente en sobres previamente rotulados. Calcule la probabilidad de que **a)** cada tía reciba la nota de agradecimiento correcta, **b)** por lo menos una de las tías reciba la nota de agradecimiento correcta.
23. **Se solicita personal** Se considera que cinco solicitantes hombres y ocho solicitantes mujeres reúnen los requisitos para ocupar tres puestos idénticos como cajeros de banco. Si tres de los solicitantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que
  - a) Sólo contraten mujeres.
  - b) Contraten por lo menos a una mujer.
24. **Formación de un comité** Un comité de seis personas será elegido al azar de un grupo de cuatro administradores, siete profesores y ocho miembros del personal. Calcule la probabilidad de que los cuatro administradores y ningún profesor formen parte del comité.
25. **Adivinanza** En un examen de 10 preguntas de verdadero o falso, calcule la posibilidad de obtener 100% de aciertos si un estudiante adivina la respuesta a cada pregunta.
26. **Caramelo** En una caja de 20 chocolates de la misma forma y apariencia, se sabe que 10 están rellenos de caramelo. Cuatro chocolates se seleccionan al azar de la caja. Calcule la probabilidad de que los cuatro estén rellenos de caramelo.

En los problemas 27 a 30, proceda como en el ejemplo 8 para calcular la probabilidad indicada.

27. **Talento nato** En juego de dados llamado *craps*, el jugador lanza dos dados y gana en la primera oportunidad si obtiene una total de 7 u 11. Calcule la probabilidad de ganar en el primer lanzamiento.
28. **Negro o rojo** Un cajón contiene ocho pares de calcetines negros, cuatro blancos y dos rojos. Si saca un par de calcetines al azar, calcule la probabilidad de que sea negro o rojo.
29. **¿Quieres apostar?** Al principio de la temporada de béisbol, un corredor de apuestas estima que la probabilidad de que los Dodgers ganen la Serie Mundial es de  $\frac{1}{10}$  y la probabilidad de que los Mets ganen es de  $\frac{1}{20}$ . Con base en estas probabilidades, determine la probabilidad de que los Dodgers o los Mets ganen la Serie Mundial.
30. **Buenas calificaciones** Un estudiante estima que la probabilidad de obtener una A en cierto curso de matemáticas es de  $\frac{3}{10}$ , una B,  $\frac{2}{5}$ ; una C,  $\frac{1}{5}$ , y una D,  $\frac{1}{10}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una A o una B?
31. **Lanzamiento de dados** Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de que el total que muestren los dados sea cuando mucho 4.
32. **Lanzamiento de una moneda** Se lanza al aire una moneda cinco veces.  $E_1$  es el evento de obtener tres sellos,  $E_2$  es el evento de obtener cuatro sellos y  $E_3$  es el evento de obtener cinco sellos. Intuitivamente, indique cuál de las siguientes probabilidades **a)**  $P(E_1 \text{ o } E_2)$ ; **b)**  $P(E_2 \text{ o } E_3)$ ; **c)**  $P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3)$  representa el menor número. Ahora calcule cada probabilidad en los incisos **a)** a **c)**.
33. **Lluvia pertinaz** De acuerdo con el periódico, hay una probabilidad de 40% de que mañana llueva. ¿Qué probabilidad hay de que mañana no llueva?
34. **¿Perderá?** Una jugadora de tenis cree que tiene 75% de probabilidad de ganar un torneo. Suponiendo que se jueguen desempates, ¿cuál cree que sea la probabilidad de que pierda?

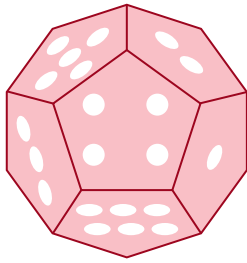
En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 para calcular la probabilidad indicada.

35. **Más lanzamientos de dados** Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de que el total que muestren sea un número par o un múltiplo de 3.
36. **Selección al azar** En ABC Plumbing and Heating Company, 30% de los trabajadores son mujeres, 70% son plomeros y 40% de los trabajadores son plomeras. Si se elige un trabajador al azar, calcule la probabilidad de que sea mujer o plomero.

### ≡ Para la discusión

37. Se puede crear un dado de 12 caras en la forma de un dodecaedro regular; cada cara del dado es un pentágono regular (**FIGURA 15.7.1**). Cuando se lanza, una de las caras pentagonales quedará en posición horizontal respecto a la

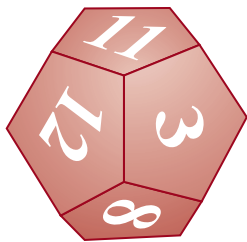
superficie de la mesa. Si cada uno de los números de 1 a 6 aparece dos veces en el dado, demuestre que la probabilidad de cada resultado es igual que para un dado de 6 caras común y corriente.



**FIGURA 15.7.1** Dado de 12 caras para el problema 37

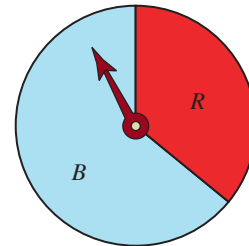
38. Suponga que un dado es un dodecaedro regular de 12 caras como en el problema 37, donde cada cara del dado es un pentágono regular. Pero en este caso, suponga que cada cara tiene inscrito uno de los números 1, 2, ..., 12, como se muestra en la **FIGURA 15.7.2**.

- Si se lanzan dos de estos dados, ¿qué probabilidades hay de obtener un total de 13?
- ¿Un total de 8?
- ¿Un total de 23?
- ¿Qué número total es el menos probable que aparezca?



**FIGURA 15.7.2** Dado de 12 caras para el problema 38

39. Para la rueda giratoria que se ilustra en la **FIGURA 15.7.3**, sea  $S$  el espacio muestral de una sola vuelta de la rueda giratoria. Sean  $B$  y  $R$  los eventos de que la aguja marque azul o rojo, respectivamente, para que  $S = \{B, R\}$ . ¿Qué error hay, si acaso, en el cálculo  $P(B) = n(B)/n(S) = \frac{1}{2}$  para la probabilidad de que la aguja marque azul?



**FIGURA 15.7.3** Rueda giratoria para el problema 39

### ≡ Proyecto

40. **Problema de cumpleaños** Calcule la probabilidad de que en un grupo de  $n$  personas, por lo menos dos tengan el mismo cumpleaños. Suponga que el año tiene 365 días. Considere tres casos:

- $n = 10$ ; b)  $n = 25$ ; c)  $n = 90$ .



Mismo cumpleaños

## Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sucesión  
término general  
Sucesión definida recursivamente  
fórmula recursiva  
Sucesión aritmética  
diferencia común  
Sucesión geométrica  
razón común  
Serie  
Notación sigma  
índice de la suma  
Serie aritmética  
Serie geométrica

Convergencia:  
sucesión  
serie infinita  
Divergencia  
sucesión  
serie infinita  
Serie geométrica infinita  
Suma de una serie geométrica  
Decimal periódico como serie geométrica  
Teorema del binomio  
notación factorial  
coeficiente binomial

Diagrama de árbol  
Principio fundamental de conteo  
Permutación  
Combinación  
Resultados  
Eventos  
Espacio muestral  
Probabilidad de un evento  
Complemento de un evento  
Eventos mutuamente excluyentes  
Regla de la adición de la probabilidad

**≡ A. Verdadero o falso**

En los problemas 1 a 12, conteste verdadero o falso.

- $2(8!) = 16!$  \_\_\_\_\_
- $\frac{10!}{9!} = 10$  \_\_\_\_\_
- $(n - 1)!n = n!$  \_\_\_\_\_
- $2^{10} < 10!$  \_\_\_\_\_
- No hay término constante en el desarrollo de  $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{20}$ . \_\_\_\_\_
- Hay exactamente 100 términos en el desarrollo de  $(a + b)^{100}$ . \_\_\_\_\_
- Una sucesión definida recursivamente por  $a_{n+1} = (-1)a_n$  es una sucesión geométrica. \_\_\_\_\_
- $\{\ln 5^n\}$  es una sucesión aritmética. \_\_\_\_\_
- $\sum_{k=1}^5 \ln k = \ln 120$  \_\_\_\_\_
- $1 = 0.999\dots$  \_\_\_\_\_
- $0! = 1$  \_\_\_\_\_
- $P(n, n) = n!$  \_\_\_\_\_

**≡ B. Llene los espacios en blanco**

En los problemas 1 a 12, llene los espacios en blanco.

- Los tres términos de siguientes la sucesión aritmética  $2x + 1, 2x + 4, \dots$  son \_\_\_\_\_.
- $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{10}}{20} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  \_\_\_\_\_
- El quinto término de la sucesión  $\left\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right\}$  es \_\_\_\_\_.
- El vigésimo término de la sucesión aritmética  $-2, 3, 8, \dots$  es \_\_\_\_\_.
- La razón común  $r$  de la sucesión geométrica  $\left\{\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}\right\}$  es \_\_\_\_\_.
- $\binom{100}{100} =$  \_\_\_\_\_
- $\sum_{k=1}^{50} (3 + 2k) =$  \_\_\_\_\_
- $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k =$  \_\_\_\_\_
- $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots =$  \_\_\_\_\_
- Para  $|x| > 1$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} =$  \_\_\_\_\_

- Si  $E_1$  y  $E_2$  son eventos mutuamente excluyentes tales que  $P(E_1) = \frac{1}{5}$  y  $P(E_2) = \frac{1}{3}$ , entonces  $P(E_1 \cup E_2) =$  \_\_\_\_\_.
- Si  $P(E_1) = 0.3$ ,  $P(E_2) = 0.8$  y  $P(E_1 \cap E_2) = 0.7$ , entonces  $P(E_1 \cup E_2) =$  \_\_\_\_\_.

**≡ C. Ejercicios de repaso**

En los problemas 1 a 4, enumere los primeros cinco términos de la sucesión dada.

- $\{6 - 3(n - 1)\}$
- $\{-5 + 4n\}$
- $\{(-1)^n n\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n 2^n}{n + 3}\right\}$
- Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$  y  $a_n = (n + 1)a_{n-1} + 2$ .
- Obtenga el decimoséptimo término de la sucesión aritmética cuyo primer término es 3 y tercer término es 11.
- Obtenga el primer término de la sucesión geométrica cuyo tercer término es  $-\frac{1}{2}$  y cuarto término es 1.
- Obtenga la suma de los primeros 30 términos de la sucesión definida por  $a_1 = 4$  y  $a_{n+1} = a_n + 3$ .
- Obtenga la suma de los primeros 10 términos de la serie geométrica cuyo primer término es 2 y razón común es  $-\frac{1}{2}$ .
- Escriba  $2.515151\dots$  como una serie geométrica infinita y exprese la suma como un cociente de enteros.
- El mejor regalo** Determine cuál es el mejor regalo de las opciones siguientes:
  - \$10 cada mes durante 10 años.
  - 10¢ el primer mes, 20¢ el segundo mes, 30¢ el tercer mes, y así sucesivamente, recibiendo un incremento de 10¢ cada mes durante 10 años.
  - 1¢ el primer mes, 2¢ el segundo mes, 4¢ el tercer mes, y así sucesivamente, duplicando la cantidad recibida cada mes durante 2 años.
- Distancia recorrida** El astrónomo y físico italiano **Galileo Galilei** (1564-1642) descubrió que la distancia que una masa se mueve por un plano inclinado en intervalos de tiempo consecutivos es proporcional a un número entero impar. Por tanto, la distancia total  $D$  que una masa se moverá por el plano inclinado en  $n$  segundos es proporcional a  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ . Demuestre que  $D$  es proporcional a  $n^2$ .
- Anualidad** Si una tasa anual de interés  $r$  se compone continuamente, entonces la cantidad  $S$  acumulada en una

anualidad inmediatamente posterior al  $n$ -ésimo depósito de  $P$  dólares está dado por

$$S = P + Pe^r + Pe^{2r} + \cdots + Pe^{(n-1)r}.$$

Demuestre que

$$S = P \frac{1 - e^{rn}}{1 - e^r}.$$

- 14. Cifra de ventas** En 2009 una nueva empresa de alta tecnología proyectó que sus ventas se duplicarían cada año en los siguientes cinco años. Si las ventas en 2009 fueron de \$1 000 000, ¿a cuánto se espera que asciendan las ventas en 2014?

En los problemas 15 a 20, use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición siguiente es verdadera para todo entero positivo  $n$ .

- 15.**  $n^2(n + 1)^2$  es divisible entre 4.  
**16.**  $\sum_{k=1}^n (2k + 6) = n(n + 7)$   
**17.**  $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$   
**18.** 9 es factor de  $10^{n+1} - 9n - 10$   
**19.**  $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$   
**20.**  $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ , donde  $i^2 = -1$

En los problemas 21 a 26, evalúe la expresión dada.

- 21.**  $\frac{6!}{4! - 3!}$   
**22.**  $\frac{6!4!}{10!}$   
**23.**  $C(7, 2)$   
**24.**  $P(9, 6)$   
**25.**  $\frac{(n + 3)!}{n!}$   
**26.**  $\frac{(2n + 1)!}{(2n - 1)!}$

En los problemas 27 a 30, use el teorema del binomio para desarrollar la expresión dada.

- 27.**  $(a + 4b)^4$   
**28.**  $(2y - 1)^6$   
**29.**  $(x^2 - y)^5$   
**30.**  $(4 - (a + b))^3$

En los problemas 31 a 34, obtenga el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

- 31.** Cuarto término de  $(5a - b^3)^8$   
**32.** Décimo término de  $(8y^2 - 2x)^{11}$   
**33.** Quinto término de  $(xy^2 + z^3)^{10}$

**34.** Tercer término de  $\left(\frac{10}{a} - 3bc\right)^7$

- 35.** Un múltiplo de  $x^2$  ocurre como ¿cuál término del desarrollo de  $(x^{1/2} + 1)^{40}$ ?

- 36.** Resuelva  $x$  en:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2n-2k} (-4)^k = 0.$$

- 37.** Si el primer término de una serie geométrica infinita es 10 y la suma de la serie es  $25/2$ , ¿cuál es el valor de la razón común  $r$ ?

- 38.** Considere la sucesión  $\{a_n\}$  cuyos primeros cuatro términos son

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

- a)** Con  $a_1 = 1$ , obtenga la fórmula recursiva que define la sucesión.  
**b)** ¿Cuáles son los términos quinto y sexto de la sucesión?

En los problemas 39 y 40, conjeture si la sucesión dada converge.

- 39.**  $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$   
**40.**  $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \dots$

- 41.** Si una moneda se lanza al aire tres veces, use un diagrama de árbol para encontrar todas las posibles sucesiones de cara (H) y sello (T).  
**42.** Enumere todos los números posibles de tres dígitos usando sólo los guarismos 2, 4, 6 y 8.  
**43. Helado** Si hay 32 sabores de helado, indique de cuántas maneras se puede ordenar un cono doble si ambas bolas de helado  
**a)** Deben ser de diferentes sabores.  
**b)** Han de ser del mismo sabor.

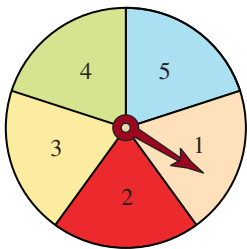
[Pista: suponga que el orden en el que se colocan las bolas de helado en el cono no importa].

- 44. Más helado** En una barra de postres hay tres sabores de helado, seis aderezos, dos tipos de nueces y crema batida. Indique cuántos helados diferentes se pueden preparar que consistan en un sabor de helado con un aderezo si  
**a)** Se requieren nueces y crema batida.  
**b)** Las nueces son optativas, pero se requiere crema batida.  
**c)** Tanto las nueces como la crema batida son optativas.  
**45. Cree su propia pizza** Domingo's Pizza ofrece 10 ingredientes adicionales. ¿Cuántas pizzas diferentes se pueden hacer usando sólo tres de los ingredientes?

46. **Ordenaciones** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar ocho libros en un estante?
47. **Reorganizaciones** Al armar un acertijo de palabras revueltas, ¿cuántas reorganizaciones de las letras de la palabra *shower* son posibles?
48. **Tiempo de sembrar** El catálogo de semillas de Burtee ofrece nueve variedades de tomates. ¿De cuántas maneras puede un jardinero seleccionar tres para sembrar?
49. **Modelado** Hay 10 atuendos informales y 12 formales que se modelarán en un desfile de modas. Indique en cuántos órdenes diferentes se pueden exhibir si
- Todos los atuendos informales se agrupan por un lado y todos los formales por otro.
  - No hay restricciones para el orden.
50. **En las carreras** ¿De cuántas maneras se pueden decidir el primero, segundo y tercer lugares si 10 caballos participan en una carrera? Suponga que no hay empates.

En los problemas 51 y 52, use la notación de conjuntos para escribir el espacio muestral del experimento dado.

51. La rueda giratoria de la **FIGURA 15.R.1** gira dos veces.
52. La rueda giratoria de la figura 15.R.1 gira una vez y luego se lanza al aire una moneda.



**FIGURA 15.R.1** Rueda giratoria para los problemas 51 y 52

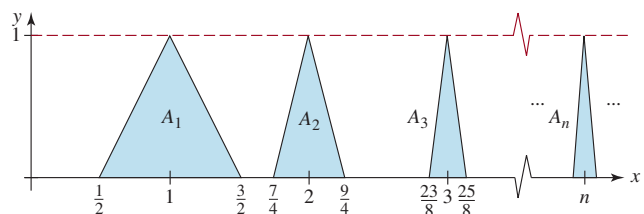
53. **Cartas** Si se sacan dos cartas de una baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean negras?
54. **Selección de un bolígrafo** Se seleccionan cinco bolígrafos al azar de un lote de 100 bolígrafos Pic. Si 90% de este lote de bolígrafos Pic escriben la primera vez, indique qué probabilidad hay de que
- Los cinco bolígrafos seleccionados escriban la primera vez.
  - Ninguno de ellos escriba la primera vez.
  - Por lo menos uno de ellos escriba la primera vez.
55. **Planeación familiar** Suponga que la probabilidad de dar a luz a una niña es igual a la probabilidad de dar a luz a un niño. En una familia de cuatro hijos, ¿qué es más probable: *i*) que todos los hijos sean del mismo sexo; *ii*) que haya dos de cada sexo; *iii*) que haya tres de un sexo y uno del otro?
56. **Joven típica** Las estadísticas indican que la probabilidad de morir en el año siguiente de una joven de 20 años es de 0.0006. ¿Qué probabilidad hay de que una joven “típica” de 20 años sobreviva al año próximo?

57. **¿Está de suerte?** Un cajón contiene ocho calcetines negros y cuatro blancos. Si se sacan dos calcetines al azar, indique la probabilidad de que se obtenga un par
- Negro.
  - Blanco.
  - Coordinado.
58. **Bingo** Una carta de bingo tiene cinco filas y cinco columnas (**FIGURA 15.R.2**). Cinco números cualesquiera del 1 al 15 aparecen en la primera columna (designada como B); cinco números cualesquiera del 16 al 30 aparecen en la segunda columna (I); cuatro números cualesquiera del 31 al 45 aparecen en la tercera columna (N), donde se encuentra un cuadrado en el medio que está marcado como “LIBRE”; cinco números cualesquiera del 46 al 60 aparecen en la cuarta columna (G); y cinco números cualesquiera del 61 al 75 aparecen en la última columna (O). ¿Cuántas cartas diferentes de Bingo son posibles? (Considere que dos cartas son diferentes si dos entradas correspondientes son diferentes.)

B	I	N	G	O
1	16	33	52	72
12	20	41	47	65
2	22	LIBRE	55	68
7	30	36	60	74
8	28	45	49	61

**FIGURA 15.R.2** Carta de Bingo para el problema 58

59. **Más bingo** Una versión de bingo requiere que un jugador cubra todos los números de la carta conforme se van anunciando los números al azar (véase el problema 58).
- ¿Cuál es la cantidad mínima de números que deben anunciarse para que pueda haber un ganador en esta versión?
  - Suponga que hay un ganador con la cantidad mínima de números anunciados que obtuvo en el inciso *a*). ¿Qué probabilidad hay de que la carta jugada sea la ganadora en ese punto?
60. **Áreas** Sea  $\{A_n\}$  la sucesión de áreas de los triángulos isósceles que se ilustran en la figura 15.R.3. Obtenga la suma de la serie infinita  $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$



**FIGURA 15.R.3** Triángulos isósceles para el problema 60

# Examen final

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

1. Completar el cuadrado en  $x$  para  $2x^2 + 6x + 5$  resulta en \_\_\_\_\_.
2. En el desarrollo del binomio  $(1 - 2x)^3$ , el coeficiente de  $x^2$  es \_\_\_\_\_.
3. En notación de intervalos, el conjunto solución de  $\frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 25} \geq 0$  es \_\_\_\_\_.
4. Si  $a - 3$  es un número negativo, entonces  $|a - 3| =$  \_\_\_\_\_.
5. Si  $|5x| = 80$ , entonces  $x =$  \_\_\_\_\_.
6. Si  $(a, b)$  es un punto en el tercer cuadrante, entonces  $(-a, b)$  es un punto situado en el \_\_\_\_\_ cuadrante.
7. Si el punto  $(1, 7)$  está en una gráfica, dé las coordenadas de otro punto en la misma gráfica si es simétrico respecto al:
  - a) Eje  $x$ . \_\_\_\_\_
  - b) Eje  $y$ . \_\_\_\_\_
  - c) Origen. \_\_\_\_\_
8. Las rectas  $6x + 2y = 1$  y  $kx - 9y = 5$  son paralelas si  $k =$  \_\_\_\_\_. Las rectas son perpendiculares si  $k =$  \_\_\_\_\_.
9. La factorización completa de la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$  es \_\_\_\_\_.
10. Los únicos ceros racionales posibles de  $f(x) = x^3 + 4x + 2$  son \_\_\_\_\_.
11. El desplazamiento de fase de la gráfica de  $y = 5 \sin(4x + \pi)$  es \_\_\_\_\_.
12. Si  $f(x) = x^4 \arctan(x/2)$ , entonces el valor exacto de  $f(-2)$  es \_\_\_\_\_.
13.  $5 \ln 2 - \ln \frac{2}{3} = \ln$  \_\_\_\_\_.
14. La gráfica de  $y = \ln(2x + 5)$  tiene la asíntota vertical  $x =$  \_\_\_\_\_.

En los problemas 15 a 32, responda verdadero o falso.

15. El valor absoluto de cualquier número real  $x$  es positivo. \_\_\_\_\_
16. La desigualdad  $|x| > -1$  no tiene soluciones. \_\_\_\_\_
17. Para cualquier función  $f$ , si  $f(a) = f(b)$ , entonces  $a = b$ . \_\_\_\_\_
18. La gráfica de  $y = f(x + c)$ ,  $c > 0$ , es la gráfica de  $y = f(x)$  desplazada  $c$  unidades a la derecha. \_\_\_\_\_

19. Los puntos  $(1, 3)$ ,  $(3, 11)$ , y  $(5, 19)$  son colineales. \_\_\_\_\_
20. La función  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$  es una función impar. \_\_\_\_\_
21.  $x + \frac{1}{4}$  es un factor de la función  $f(x) = 64x^4 + 16x^3 + 48x^2 - 36x - 12$ . \_\_\_\_\_
22. Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la gráfica de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ , no interseca el eje  $x$ . \_\_\_\_\_
23.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x + 1}$  es una función racional. \_\_\_\_\_
24. Si  $f(x) = x^5 + 3x - 1$ , entonces existe un número  $c$  en  $[-1, 1]$  tal que  $f(c) = 0$ . \_\_\_\_\_
25. La gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$  no tiene intersecciones con el eje  $x$ . \_\_\_\_\_
26.  $x = 0$  es una asíntota vertical en la gráfica de la función racional  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ . \_\_\_\_\_
27. La gráfica de  $y = \cos(x/6)$  es la gráfica de  $y = \cos x$  extendida horizontalmente. \_\_\_\_\_
28.  $f(x) = \csc x$  no está definida en  $x = \pi/2$ . \_\_\_\_\_
29. La función  $f(x) = e^{-4x^2}$  no es de uno a uno. \_\_\_\_\_
30. La función exponencial  $f(x) = (\frac{3}{2})^x$  aumenta en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . \_\_\_\_\_
31. El dominio de la función  $f(x) = \ln x + \ln(x - 4)$  es  $(4, \infty)$ . \_\_\_\_\_
32. Las soluciones de la ecuación  $\ln x^2 = \ln 3x$  son  $x = 0$  y  $x = 3$ . \_\_\_\_\_
33. Relacione el intervalo dado con la desigualdad correspondiente.
  - i)  $[2, 4]$
  - ii)  $[2, 4)$
  - iii)  $(2, 4)$
  - iv)  $(2, 4]$
  - a)  $|x - 3| \leq 1$
  - b)  $1 < x - 1 \leq 3$
  - c)  $-2 < 2 - x \leq 0$
  - d)  $|x - 3| < 1$
34. Escriba la solución de la desigualdad en valor absoluto  $|3x - 1| > 7$  usando notación de intervalos.
35. La respuesta a un problema dado al final de un texto de matemáticas es  $1 + \sqrt{3}$ , pero su respuesta es  $2/(\sqrt{3} - 1)$ . ¿Está usted en lo correcto?
36. ¿En qué cuadrantes de un plano cartesiano se sitúa el cociente  $x/y$  negativo?

37. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes describe mejor una circunferencia que pasa por el origen? Los símbolos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  representan diferentes constantes reales que no son cero.

- a)  $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
- b)  $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
- c)  $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
- d)  $ax^2 + by^2 + cx + dy = 0$
- e)  $ax^2 + ay^2 + e = 0$
- f)  $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

38. Relacione la función racional  $f$  que se indica con la frase más apropiada.

i)  $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 2}$

ii)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$

iii)  $f(x) = \frac{x^5}{x^2 + 2}$

iv)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$

- a) asíntota oblicua
- b) sin asíntotas
- c) asíntota horizontal
- d) asíntota vertical

39. ¿Cuál es el rango de la función racional  $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$ ?

40. ¿Cuál es el dominio de la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$ ?

41. Obtenga una ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de  $x + y = 1$  y  $2x - y = 7$ .

42. Obtenga una función cuadrática  $f$  cuya gráfica tiene la intersección con  $y$   $(0, -6)$  y el vértice de la gráfica es  $(1, 4)$ .

Para quienes tomarán un curso de cálculo próximamente, a menudo se les pedirá que reescriban una función ya sea en una forma más sencilla o en una forma que sea más útil para resolver el problema. En los problemas 43 a 48, reescriba cada función siguiendo la instrucción dada. En cálculo, se esperaría que el alumno supiera qué hacer dado el contexto del problema.

43.  $f(x) = \sqrt{x^6 + 4} - x^3$ . Exprese  $f$  como cociente usando racionalización y simplificación.

44.  $f(x) = \frac{5x^3 - 4x^2\sqrt{x} + 8}{\sqrt[3]{x}}$ . Realice la división indicada y exprese cada término como potencia de  $x$ .

45.  $f(x) = \frac{7x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2}$ . Descomponga  $f$  en fracciones parciales.

46.  $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$ . Exprese  $f$  en términos de  $\sec x$  y  $\tan x$ .

47.  $f(x) = e^{3 \ln x}$ . Exprese  $f$  como potencia de  $x$ .

48.  $f(x) = |x^2 - 3x|$ . Exprese  $f$  sin signos de valor absoluto.

En los problemas 49 y 50, resuelva la ecuación  $f(x) = 0$  siguiendo la instrucción dada.

49.  $f(x) = x^2 \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) + 2x\sqrt{4 - x^2}$ . Reescriba  $f$  como una sola expresión sin exponentes negativos.

50.  $f(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x$ . Obtenga los ceros de  $f$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

En los problemas 51 y 52, calcule y simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para la función dada.

51.  $f(x) = \frac{3x}{2x + 5}$

52.  $f(x) = -x^3 + 10x^2$

53. Considere la función trigonométrica  $y = -8 \sin(\pi x/3)$ . ¿Cuál es la amplitud de la función? Dé un intervalo en el cual se complete un ciclo de la gráfica.

54. Si  $\tan \theta = \sqrt{5}$  y  $\pi < \theta < 3\pi/2$ , entonces, ¿cuál es el valor de  $\cos \theta$ ?

55. Suponga que  $f(x) = \sin x$  y  $f(c) = 0.7$ . Indique cuál es el valor de

$$2f(-c) + f(c + 2\pi) + f(c - 6\pi)?$$

56. Suponga que  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \ln x$ . Resuelva  $(f \circ g)(x) = 0$ .

57. Obtenga las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$  de la parábola cuya ecuación es  $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$ .

58. Encuentre el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor de la elipse cuya ecuación es

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 49 = 0$$

59. Las asíntotas oblicuas de una hipérbola son  $y = -5x + 2$  y  $y = 5x - 8$ . ¿Cuál es el centro de la hipérbola?

60. Desde un punto a 220 pies de distancia de la base una antena de telefonía móvil una persona mide un ángulo de inclinación de  $30^\circ$  desde el suelo hasta la parte más alta de la antena. ¿Cuál es el ángulo de inclinación hasta la parte más alta de ésta si la persona se traslada a un punto 100 pies más cerca de la base?

61. El yodo 131 es radiactivo y se usa en ciertos procedimientos médicos. Suponga que el yodo 131 se descompone



exponencialmente. Si la vida media del yodo 131 es de 8 días, ¿cuánto queda de una muestra de 5 gramos al cabo de 15 días?

62. La ecuación de coordenadas polares  $r = 3 \cos 4\theta$  es una rosa con ocho pétalos. Obtenga todos los ángulos medidos en radianes que satisfagan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , para la que  $|r| = 3$ .
63. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 5 \\ 4x - 5y + 8z = 8 \end{cases}$$

e interprete la solución en términos geométricos.

64. Resuelva la ecuación  $\begin{vmatrix} x & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$  para  $x$ .

65. A continuación se presenta un sistema no lineal de ecuaciones tomado de un libro de cálculo:

$$\begin{cases} 2x\lambda = -4 \\ 2y\lambda = 2y \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Resuelva  $x$ ,  $y$  y  $\lambda$ .

66. Represente gráficamente el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y \leq 2^x \\ 6y - 7x \geq 10 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

En los problemas 67 a 70, responda la pregunta sobre la sucesión

$$128, 64, 32, 16, \dots$$

67. ¿Cuál es el octavo término de la sucesión?
68. ¿Cuál es la suma  $S_8$  de los primeros ocho términos de la sucesión?
69. ¿La sucesión es convergente o divergente?
70. Diga si la serie infinita

$$128 + 64 + 32 + 16 + \dots$$

tiene una suma  $S$ .

En los problemas 71 a 74, obtenga el  $n$ -ésimo término  $a_n$  de la sucesión dada.

71.  $-2, -1, 0, 1, \dots$
72.  $0, 3, 8, 15, \dots$
73.  $1\,000, -100, 10, -1, \dots$
74.  $1, \frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{1}{19}, \dots$
75. Si  $d$  es un dígito (cualquier número de 0 a 9), obtenga un número racional cuya representación decimal sea  $0.ddd\dots$

76. Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , explique por qué  $\det A = 0$ , con base en las propiedades de los determinantes.

77. Obtenga los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  en números reales de modo que los puntos  $(-1, -3)$ ,  $(1, -5)$  y  $(2, 0)$  queden situados en la gráfica de la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .
78. Si los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son colineales, como se ilustra en la FIGURA EXF.1, entonces obtenga una ecuación que relacione las distancias  $d(P_1, P_2)$ ,  $d(P_2, P_3)$  y  $d(P_1, P_3)$ .

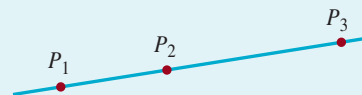


FIGURA EXF.1 Gráfica para el problema 78

79. Obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo  $\theta$  que se ilustra en la FIGURA EXF.2.

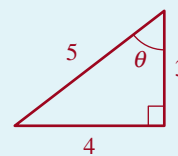


FIGURA EXF.2 Triángulo para el problema 79

80. Si  $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , obtenga **a)**  $\sin 2\theta$ , **b)**  $\cos 2\theta$ , **c)**  $\tan 2\theta$ .



# RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

## SELECCIONADOS DE NÚMERO IMPAR

### Ejercicios 1.1, página 4

1. Sí, F
3. Sí, V
5. No
7. Sí, V
9. No
11. Sí, F
13. Sí, V
15. No

9.  $P \rightarrow Q$

11.  $7 > 9$  o el Sol es un astro frío.
13. Si 7 no es menor que 9 entonces el Sol es un astro frío.
15. Si la temperatura está por debajo de cero y  $7 < 9$  entonces el Sol es un astro frío.
17.  $7 < 9$  y el Sol es un astro frío si y sólo si la temperatura está por debajo de cero.
19.  $7 < 9$  y el Sol es un astro frío, y el Sol es un astro frío y la temperatura está por debajo de cero.

### Ejercicios 1.2, página 10

1.  $P \wedge Q$
3.  $P \rightarrow Q$
5.  $P \leftrightarrow Q$
7.  $P \rightarrow Q$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

23.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25.  $P$ : Un número  $p$  es real  $Q$ :  $p$  es no racional  $Q \rightarrow (P \wedge Q)$

27. F

29. F

31. Un byte tiene 7 bits y una palabra consta de 2 bytes. F

33. No ocurre a la vez que un byte tiene 7 bits y una palabra 2 bytes. V

35. Un byte tiene 7 bits y una palabra tiene 2 bytes, o un bit es un 0 o un 1, y un byte tiene 7 bits o un byte es un 0 o un 1. V

37.  $\sim q$

39.  $\sim r \wedge \sim p$ . F

### Ejercicios 1.3, página 14

1. Tautología
3. Contingencia
5. Tautología
7. Tautología
9. Contingencia
11. No

### Ejercicios 1.4, página 18

1. Sí
3. No
5. No
7. Sí
9. No

11.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Tautología

13.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautología

15.  $v(p) = F \quad v(q) = F$

17. Por silogismo hipotético se tiene  $p \rightarrow (s \vee q)$ . Por simplificación  $p$  y por modus ponens  $s \vee q$  y por simplificación  $\sim q$  y por silogismo disyuntivo  $S$ .

**Ejercicios 1.5, página 20**

- $x$  es más rápido que José.
- Si  $x$  es más rápido que y entonces y es más alto que  $x$ .
- Miguel es más rápido que José, o Miguel es más alto que José y José pesa más de 200 libras.
- Cualquiera sea  $x$ ,  $x$  es más rápido que José si y sólo si José pesa más de 200 libras.
- Existe y tal que para todo  $x$ , si  $x$  es más rápido que y entonces  $x$  pesa más de 200 libras.
- $\sim(\forall x, P(x)) P(x)$ ;  $x$  es bonita.
- $\sim(\exists x, P(x)) P(x)$ ;  $x$  ama a todo el mundo.
- $(\exists x, P(x)) \vee (\sim R) P(x)$ ;  $x$  es más grande que cualquier solución conocida.  $R$ : hay solución.
- F
- V
- V

**Ejercicios 1.6, página 23**

- $\{0\}$
- $\{0\}$
- $\{\}$
- $\{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$  no es posible.
- $\{x|x \text{ es una vocal del alfabeto}\}$
- $\{x|x \text{ es un impar}\}$
- $\{x|x \text{ es un cuadrado perfecto diferente de } 1\}$

17.  $\{x|x \text{ es entero y } 0 \leq x \leq 9\}$

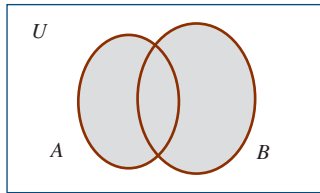
19.  $\{x|x \text{ es la capital de la República Dominicana}\}$

**Ejercicios 1.7, página 29**

- 1) 1 2) 9 3) 3 4) 7 5) 0 6)  $\infty$  7)  $\infty$  8) 2 9) 1 11) 5 12)  $\infty$  13)  $\infty$  14) 28 15)  $\infty$  16) 9 17) 10 18) 2 19) 1 20) 0
- $E = \{x|x \text{ es un número entero para tal que } 4 + 3 = 3\} j = \{ \}$   
 $E = J$
- $\{1\}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9\}$
- $A, B, C, D$  son subconjuntos de  $A$  y  $B$  son subconjuntos uno del otro,  $D \subset C$ .
- $A$  y  $D, B$  y  $D$ .
- $C = A \cap B \subset A$  siempre  
Si  $A \subset B$  entonces  $A \subset A \cap B \therefore A = A \cap B = C$
- $\in$
- $\in$
- $\in \text{ o } \subset$
- $\in \text{ o } \subset$
- $\subset$
- V
- F
- V
- V
- V
- V
- F
- F
- F
- F
- $\{\emptyset, \{\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$
- $\{a\}$
- No
- No
- Sí
- No
- No
- Sí

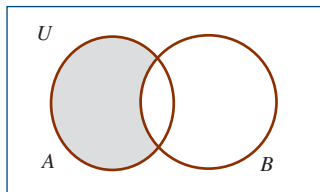
**Ejercicios 1.8, página 37**

1. {a, b, c, d, e, f, g}
3. {e, g, i}
5. {e}
7. {e, f, g, h, i, a, c}
9. {f, g, h, i}
11. {f, g}
13. {a, b, c}
15. {d, e}
17. {a, c}
19. {a, c, g, i}
21. {1, 3, 5, 7, 9, 10}
23. {2}
25. {1, 2, 6, 7, 8, 9, 10}
27.  $\emptyset$
29.  $U$
31.  $A$
33.  $A$
35.  $A$
37.  $U$
39.  $B$
- 41.



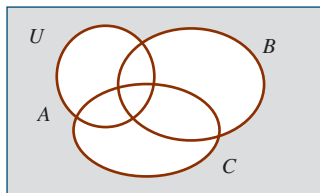
$$A \cup B$$

43.



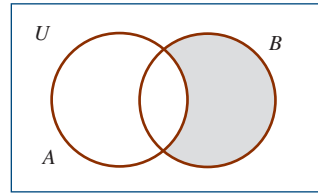
$$A - B$$

45.



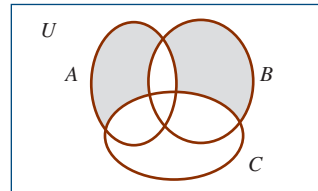
$$(A' \cap B') \cap C' = (A \cup B \cup C)'$$

47.



$$A' \cap B = B - A$$

49.



$$\begin{aligned} &(A' \Delta B') \cap C' \\ &= [(A' \cup B') - (A' \cap B')] \cap C' \\ &= [(A \cap B)' - (A \cup B)'] \cap C' \\ &= [(A \cap B)' \cap (A \cup B)] \cap C' \end{aligned}$$

51. V

53. F

55. F

57. {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}

59.  $\emptyset$

61. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$$\begin{aligned} 63. \quad x \in (A \cup B) &\leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\leftrightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 65. \quad A \cap B' = A &\leftrightarrow B' \supset A \\ &\leftrightarrow A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 67. \quad x \in (A \cap B) \cap C &\leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \\ &\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

**Ejercicios 1.9, página 42**

1. 3
3. 16
5. 9
7. 5
9. 10
11. (a) 3, (b) 30
13. 175, 115

15. 19  
17. 20  
19. 100

**Ejercicios de repaso, página 44**

1. Recíproca: si no soy el rey de Inglaterra, entonces  $2 + 2 = 4$ .  
Inversa: si  $2 + 2 = 4$ , entonces yo soy el rey de Inglaterra.

- Contrapositiva: si yo soy el rey de Inglaterra, entonces  $2 + 2 = 4$ .  
3.  $r \rightarrow q$   
5. Contradicción  
7. Contingencia  
9. Sí  
11. F,  $\exists x, x$  dividido por 2 no es entero, V

13.

$p$	$q$	$r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim r$	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F

15. Sí  
17. Falacia

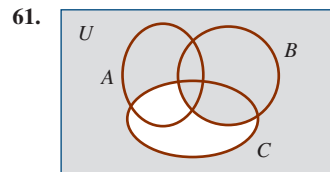
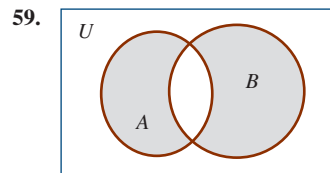
19.  $\exists x, \exists y, x < y \wedge (\forall z, z \leq x \vee z \geq y)$   
21. F

23.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25. Si no seré feliz, no me ascenderán por contrapositiva, por modus ponens no me ascendieron y por contrapositiva se obtiene la conclusión, es válido.  
27. Si  $v(p)$  es  $v$  entonces por modus ponens  $v(q \vee r) = v$  y por silogismo disyuntivo  $v(s \vee t) = v$ , luego  $p \rightarrow s \vee t$ .  
29. Si existe un miembro  $x$  del club tal que cualquiera sea la línea aérea  $y$ ,  $x$  ha sido pasajero de  $y$ , entonces, cualquiera sea la línea aérea  $y$ , existe un miembro  $x$  del club tal que  $x$  ha sido pasajero de  $y$ .  
31. Cualquiera sea el miembro  $x$  del club y cualquiera sea la línea aérea  $y$ ,  $x$  ha sido pasajero de  $y$  si y sólo si cualquiera sea la línea aérea  $y$ , y cualquiera sea el miembro  $x$  del club,  $x$  ha sido pasajero de  $y$ .  
33. Si  $t - 8$  es racional, entonces  $t - 8 + 8 = t$  también es racional, lo que contradice la hipótesis; por tanto,  $t - 8$  es irracional.  
35.  $A - B = A \quad A \cap B = \emptyset \quad B - A = B$   
37.  $\infty$   
39.  $\infty$   
41. V  
45. F  
45. F  
47.  $\emptyset$

49.  $\{0, 7, 8, 9\}$   
51.  $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$   
53.  $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$   
55.  $\{0, 1, 2, 3\}$   
57.  $P(\{0, 1, 2, 3\}) - \{\emptyset\}$




63. V  
65. V  
67. (a) 180 (b) 60 (c) 70 (d) 120 (e) 190  
69. (a) 225 (b) 25 (c) 100 (d) 125 (e) 105

**Ejercicios 2.1, página 56**

1. {1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15}
3. {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14}
5. {1, 8}
9. {-1, -2, 1, 2}
13. {-2, -1}
17. propiedad 3(i)
21. propiedad 3(ii)
25. propiedad 5(ii)
29. propiedad 2(ii)
33. propiedad 10(iv)
37. propiedad 9(i)
41. propiedad 16(i)
45.  $-a$
49. 0
7. {3, 9, 11, 12, 14}
11.  $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$
15.  $\{x | x = 2n, n \in Z\}$
19. propiedad 2(i)
23. propiedad 4(ii)
27. propiedad 4(i)
31. propiedad 5(i)
35. propiedad 7(i)
39. propiedad 8(ii)
43. propiedad 13
47.  $\frac{3+c}{c}$
51. (a) mayor que

**Ejercicios 2.2, página 62**

1. 
5.  $x + y \geq 0$
9.  $|t - 1| < 15$
13.  $1.33 < \frac{4}{3}$
17.  $-2 \geq -7$
19.  $2.5 \geq \frac{5}{2} y \frac{5}{2} \geq 2.5$  ambas son correctas
21.  $\frac{423}{157} \geq 2.6$
25. 22
29.  $\sqrt{5}$
33. 4
37.  $3 - \sqrt{5}$
41.  $2.3 - \sqrt{5}$
45.  $-h$
49.  $x - 2$
53. 0
57. (a) 4 (b) 5
61. (a) 3 (b) -6.5
65.  $a = 2, b = 8$
69.  $m = 4 + \pi, b = 4 + 2\pi$
71.  $a = -3 - \sqrt{2}, b = -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
73.  $(10)(10) = 100$
77.  $\frac{7}{11} = 0.\overline{63}$
81. Natalie vive a  $\frac{5}{4}$  de milla o a  $\frac{3}{4}$  de milla de Greg.
3.  $x > 0$
7.  $b \geq 100$
11.  $-3 < 15$
15.  $3.14 < \pi$
23. 7
27.  $\frac{22}{7}$
31.  $4 - \pi$
35. 4
39.  $8 - \sqrt{7}$
43.  $2\pi - 6.28$
47.  $2 - x$
51. 0
55. -1
59. (a) 0.2 (b) 0.7
63. (a) 3 (b) 0
67.  $a = -1.5, b = 5.5$

**Ejercicios 2.3, página 68**

1.  $\frac{1}{8^3}$
3.  $(2y)^4$
5.  $4^{-5}$
7.  $x^{-3}$
9. (a) 81 (b)  $\frac{1}{81}$  (c) -81
11. (a) 49 (b)  $\frac{1}{49}$  (c)  $-\frac{1}{49}$
13. (a) 1 (b) 1 (c) -1
15.  $-\frac{3}{2}$
17.  $\frac{1}{5}$
19. 0
21. 13
23. 11
25.  $-\frac{7}{6}$
27.  $x^4$
29.  $-21x^6$
31.  $2^5$
33.  $\frac{1}{10^{11}}$
35.  $25x^2$
37.  $5^6$
39.  $\frac{64x^6}{y^3}$
41.  $x$
43.  $49ab$
45.  $\frac{9y^9}{x}$
47.  $a^6b^{10}$
49.  $-x^2y^4z^6$
51. negativo
53. positivo
55. positivo
57.  $A = s^2$
59.  $A = \pi r^2$
61.  $V = \pi r^2 h$
63. (a)  $1.05 \times 10^6$  (b)  $1.05 \times 10^{-5}$
65. (a)  $1.2 \times 10^9$  (b)  $1.2 \times 10^{-10}$
67. (a) 32 500 000 (b) 0.0000325
69. (a) 0.00000000000000000987 (b) 9 870 000 000 000
71.  $4.9064 \times 10^{-4}$
73.  $9.533 \times 10^{-6}$
75.  $8.2500 \times 10^{13}$
77. (a) 7 200 000 000 000 (b)  $7.2 \times 10^{12}$
79. (a) 32 000 000 000 000 000 000 (b)  $3.2 \times 10^{19}$
81.  $1.335 \times 10^9$
83. (a) \$14 261 000 000 000 (b)  $\$1.4261 \times 10^{13}$
85. aproximadamente  $1.5 \times 10^{19}$  mi

**Ejercicios 2.4, página 76**

1. -5
3. 10
5. 0.1
7.  $-\frac{4}{3}$
9.  $\frac{1}{xy^2}$
11.  $\frac{xy^2}{z^3}$
13.  $0.5x^2z^2$
15.  $4ab$
17.  $\frac{1}{3}$
19.  $\frac{1}{7b}$
21. 0.2
23.  $ab^2$
25.  $xyz^5$
27.  $abc$
29.  $2rs^3$
31.  $\sqrt{2x^2}$
33.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$
35.  $\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$
37.  $\frac{-7 + 2\sqrt{10}}{3}$
39.  $\frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$
41.  $\sqrt[3]{2}$
43.  $4\sqrt[3]{(x-1)^2}$
45.  $\frac{2}{\sqrt{2(x+h)} + \sqrt{2x}}$
47.  $\frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}$

49.  $5\sqrt{x}$

53.  $(6x - 3y + 4x^2)\sqrt{2x}$

57.  $s = \sqrt{A}$

61.  $7.74 \times 10^3 \text{ m/s}$

**Ejercicios 2.5, página 81**

- 1.  $(ab)^{1/3}$       3.  $x^{-4/3}$       5.  $(x + y)^{1/7}$     7.  $(x + x^{1/2})^{1/2}$
- 9.  $\sqrt[3]{a^2}$       11.  $\sqrt[3]{9a^2}$       13.  $3 + \sqrt[3]{a^2}$     15.  $\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$
- 17. (a) 7      (b)  $\frac{1}{7}$
- 19. (a) 0.0000128      (b)  $\frac{1}{0.0000128} = 78\,125$
- 21. (a) 2 187      (b)  $-\frac{1}{2\,187}$
- 23.  $12x^{5/6}$       25.  $4a^{13/6}$       27.  $x^{7/8}$       29.  $a^{1/2}b$
- 31.  $125x^{1/2}y^{3/2}$     33.  $\frac{c^{2/3}}{d^{2/3}}$       35.  $\frac{64x^3z}{y^4}$       37.  $\frac{9a^2}{b^4}$
- 39. 1      41.  $125x^3$       43.  $\frac{b^6c^{3/2}}{a^4}$       45.  $p^{1/6}q^{1/2}$
- 47.  $\frac{r}{s}$       49.  $\sqrt[6]{500}$       51.  $\sqrt[6]{64} = 2$     53.  $\sqrt[3]{x^3}$
- 55.  $\sqrt[8]{a^3}$       57. 8 000      59.  $0.00001x^5y^{10}$
- 61. aproximadamente 1.0139s    63. 1 126.30 ft/s

**Ejercicios 2.6, página 90**

- 1. (a) 30      (b)  $\frac{15}{4}$       (c) 6
- 3. (a) -192      (b)  $\frac{1}{2}$       (c) 0
- 5. (a)  $-\frac{5}{2}$       (b)  $-\frac{3}{4}$       (c) -1
- 7. (a) 2.6      (b) -0.025      (c) 0.2
- 9. polinomio; grado 1; coeficiente principal 8
- 11. no es un polinomio
- 13. polinomio; grado 101; coeficiente principal 26
- 15. no es un polinomio
- 17.  $3x^5 + x^3 - 8x^2 + 6x - 6$
- 19.  $6y^3 + y^2 - 2y - 7$
- 21.  $-3x^4 + 5x^2 - 1$
- 23.  $3x^7 - 7x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 - 8x - 14$
- 25.  $-2t^3 - 2t^2 - 27t + 46$
- 27.  $2v^2 - 8v^2 - 24v$
- 29.  $y^4 + y^3 - y^2 + 14y - 20$
- 31.  $15a^4 - a^3b + 8a^2b^2 - 8ab^3 + 11b^4$
- 33.  $6a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - b^3$       35.  $5 - 20s$
- 37.  $1 - x^2 + 2x^6y$       39.  $x^2 + x - 2$
- 41.  $2r^6 - 13r^3 - 7$       43.  $10t^2 + 26t - 56$
- 45.  $24x - 2\sqrt{x} - 2$       47.  $3x^2 + 7.63x + 1.47$
- 49.  $x^2 - \frac{13}{24}x - \frac{1}{12}$       51.  $1 + 10b + 25b^2$
- 53.  $50x^2 + 40x + 8$       55.  $4 - 3x$
- 57.  $y^{-2} - 4x^2$       59.  $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
- 61.  $x^6y^9 + 6x^4y^6 + 12x^2y^3 + 8$     63.  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- 65.  $a^3 - 27$       67.  $729 + y^3$
- 69.  $625x^4 - y^4$       71.  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1$
- 73.  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 3x + 3y + 1$
- 75.  $x^{4/3} - x^{2/3}$       77.  $\frac{1}{y^6} - \frac{1}{x^6}$
- 79.  $x^6 - x^5 - x^3 + x^2$
- 81. (a)  $-4x^3 - 8x^2 + 100x + 200$
- (b)  $-8x^2 + 40x + 280$

**Ejercicios 2.7, página 97**

- 1.  $2x(6x^2 + x + 3)$       3.  $(2y - z)(y + 3)$
- 5.  $(3t + s)(5a + b)$       7.  $xyz(x^2 - y^2 + x^2)$
- 9.  $(p^2 + 1)(2p - 1)$       11.  $(6x - 5)(6x + 5)$
- 13.  $(2xy - 1)(2xy + 1)$     15.  $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
- 17.  $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$
- 19.  $(2xy + 3)(4x^2y^2 - 6xy + 9)$
- 21.  $(y - 1)(y + 1)(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)$
- 23.  $(x - 3)(x - 2)$       25.  $(y + 5)(y + 2)$
- 27.  $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$     29.  $(r + 1)^2$
- 31.  $(x - 2y)(x + y)$       33.  $(x + 5)^2$
- 35.  $(s - 4t)^2$       37.  $(2p + 5)(p + 1)$
- 39.  $(6a^2 - 5)(a^2 + 3)$       41.  $(2x - y)(x - 3y)$
- 43.  $(x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3)$
- 45.  $(x - y)^2$
- 47.  $(y - x)(y + x)(x^4 + y^4 + x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 3)$
- 49.  $(1 - 2v)(1 + 2v)(1 + 4v^2)(1 + 16v^4)$
- 51.  $(x + 2)(x - 1)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + x + 1)$
- 53.  $(rs - 2t)(r^2s^2 + 2rst + 4t^2)$
- 55.  $(a - b)(a + b)^2$       57.  $(4z - y)(z + 2y)$
- 59.  $(4a - 3b)^2$       61.  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
- 63.  $(\sqrt{5}y - 1)(\sqrt{5}y + 1)$     65.  $(a + \frac{1}{2})^2$
- 67.  $(a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b)$     69.  $(2\sqrt{6} - x)(2\sqrt{6} + x)$

**Ejercicios 2.8, página 104**

- 1.  $\frac{x + 1}{x + 4}$       3.  $\frac{z - 3}{z^2 - 3z + 9}$
- 5.  $\frac{3x + 5}{2x + 3}$       7.  $\frac{w + 3}{w - 3}$
- 9.  $(x + 2)(x - 1)$       11.  $b^2(b - 2)(b + 3)(b - 6)$
- 13.  $c(c - 1)(c + 1)^2$       15.  $x^2(x - 1)(x + 1)^2$
- 17. 1      19.  $\frac{7z + 1}{7z - 1}$
- 21.  $\frac{2x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1}$       23.  $\frac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$
- 25.  $\frac{r^2 - 4r + 2}{r^2 - r - 12}$       27.  $\frac{-8x + 2}{2x^2 + 3x - 2}$
- 29.  $\frac{t^2 + t - 20}{t^2 + t - 6}$       31.  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$
- 33.  $\frac{1}{3x - 6}$       35.  $\frac{u + 7}{u + 2}$
- 37.  $\frac{x^2}{x^2 + 9x + 20}$       39.  $\frac{q + 1}{q - 4}$
- 41.  $\frac{-s + 3}{s + 5}$       43.  $\frac{1 - x^3}{1 + x^3}$
- 45.  $\frac{z}{2}$       47.  $\frac{xy}{x - y}$
- 49.  $\frac{-2x - h}{x^2(x + h)^2}$       51.  $\frac{ab}{b - a}$
- 53.  $\frac{v^2 - u^2}{u^4v^4}$       55.  $\frac{w\sqrt{u} + u\sqrt{w}}{uw}$
- 57.  $\frac{\sqrt{xy} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}$       59.  $\frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x + h)^3}$
- 61.  $\frac{-10}{(2x - 1)(2x + 2h - 1)}$     63.  $\frac{1 - 3x^2}{2x^{1/2}(x^2 + 1)^2}$
- 65.  $\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$



**Capítulo 2. Ejercicios de repaso, página 107**

- A.** 1. falso      3. falso      5. falso      7. falso  
 9. verdadero    11. falso      13. falso      15. falso  
 17. falso      19. verdadero    21. verdadero    23. falso  
 25. verdadero
- B.** 1. 0, 1, 2  
 5. izquierda      3. irracional  
 7. recíproco o inverso multiplicativo  
 9.  $x^{3/4}$       11. polinomio; 4, 3, 0  
 13.  $|b - a|$       15. notación científica  
 17. disjunto  
 19.  $x$  es la base, 3 es el exponente o potencia  
 21. conmutativa
- C.** 1. {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}      3. {2, 4}  
 5. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}      7.  $x - y \geq 10$   
 9.  $-1.4 > -\sqrt{2}$       11.  $\frac{2}{3} < 0.67$   
 13.  $3 - \sqrt{8}$       15.  $x^2 + 5$   
 17.  $-(t + 5)$   
 19. (a) 9.3      (b) 1.15  
 21.  $108u^5v^8$       23.  $\frac{x^4}{2y}$   
 25.  $\frac{4c^8}{d^6}$       27.  $\frac{y^{1/9}}{x}$   
 29. 25      31.  $xy^3$   
 33.  $\frac{-q^3}{p^2}$       35.  $(3 + \sqrt{2})\sqrt{xy}$   
 37.  $x^{1/2}$       39.  $7.023 \times 10^{-7}$   
 41.  $5 \times 10^{21}$   
 43. (a) \$52 670 000 000      (b)  $\$5.267 \times 10^{10}$   
 45.  $4x^3 - 4x^2 + 9x - 6$       47.  $a^3 - 2a^2 - 5a - 6$   
 49.  $9z^8 - 12z^5 + 4z^2$       51.  $9x^4 - 25y^2$   
 53.  $(3x + 2)(4x - 9)$       55.  $(y - 3)(2x + 3)$   
 57.  $(2x + 5y^2)(4x^2 - 10xy^2 + 25y^4)$   
 59.  $(2t^2 - s)^2$       61.  $\frac{3x - 3}{x^2 - 4}$   
 63.  $\frac{1}{xy}$       65.  $\frac{1}{x}$   
 67.  $\frac{r^2 + 2rs}{s^2 + 2rs}$       69.  $\frac{-4(3x^2 + 3xh + h^2)}{x^3(x + h)^3}$   
 71.  $\frac{20x + 8}{(2x + 1)^{3/4}}$       73.  $\frac{2\sqrt{s} - 2\sqrt{t}}{s - t}$   
 75.  $\frac{2}{\sqrt{2x + 2h + 3} + \sqrt{2x + 3}}$

**Ejercicios 3.1, página 116**

1. equivalente      3. equivalente  
 5. no equivalente      7.  $\{-7\}$   
 9.  $\{-\frac{1}{5}\}$       11.  $\{1\}$       13.  $\{-\frac{5}{2}\}$       15.  $\{\frac{1}{2}\}$   
 17.  $\{3\}$       19.  $\{0\}$       21.  $\{-3.5\}$       23.  $\{0.5\}$   
 25.  $\{-\frac{1}{2}\}$       27.  $\{1\}$       29.  $\{0\}$       31.  $\{\frac{1}{2}\}$   
 33.  $\{-1\}$       35.  $\{3\}$       37.  $\{1\}$       39.  $\{x | x \neq 2\}$   
 41.  $\{9\}$       43.  $\{1\}$       45.  $\emptyset$       47.  $\{4\}$   
 49.  $a = 3$       51.  $c = -\frac{7}{3}$       53.  $a = -1$       55.  $r = C/2\pi$   
 57.  $t = I/Pr$       59.  $P = A/(1 + rt)$   
 61.  $n = (a_n - a + d)/d$       63.  $m_1 = Fr^2/(gm_2)$   
 65.  $R_2 = RR_1/(R_1 - R)$   
 67. (a)  $T_F = \frac{5}{9}T_C + 32$       (b)  $23^\circ\text{F}, 32^\circ\text{F}, 60.8^\circ\text{F}, 95^\circ\text{F}, 212^\circ\text{F}$   
 69. 84 años      71.  $-68.2875^\circ\text{C}$

**Ejercicios 3.2, página 124**

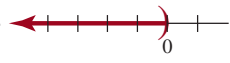

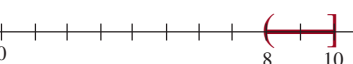
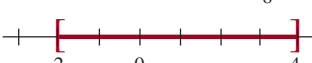


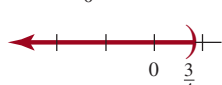
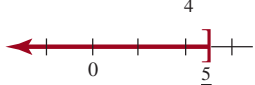


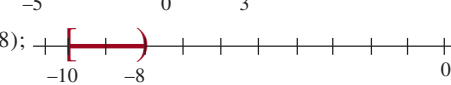
1. 12, 38      3. 15, 16, 17      5. 13 años      7. 9.6%  
 9. \$4 000      11.  $183\frac{1}{3}$  mi      13.  $\frac{4}{3}$  h  
 15. Auto: 40 km/h      bicicleta: 10 km/h  
 17. 3.75 qt  
 19.  $0.5 \text{ ft}^3$  de 10% de turba; 1.5 de 30% de turba  
 21. 20% de \$3.95 por libra; 80% de 4.20 por libra  
 23.  $\frac{24}{7}$  h  $\approx$  3.43 h      25. 75 min  
 27. 10 cm por 15 cm      29. 6 cm, 7 cm, 8 cm  
 31. 8 cm      33. 47  
 35. 110      37. 13 monedas de 5 centavos;  
 39. 27      17 monedas de 10 centavos  
 41. 20      43. 10 meses  
 45. (a) No hay diferencia.  
 (b) Sea  $x$  el costo original de un artículo. Si se obtiene primero un  $d\%$  de descuento y luego se añade  $f\%$  de impuesto por venta queda expresado mediante  $(x - \frac{d}{100}x)(1 + \frac{t}{100})$ . Si se suma primero  $f\%$  del impuesto por venta y luego se obtiene el  $d\%$  queda expresado mediante:  $(x + \frac{t}{100}x)(1 - \frac{d}{100})$ . Factorizando, cada una de estas expresiones es igual a  $(1 + \frac{t}{100})(1 - \frac{d}{100})x$ .


**Ejercicios 3.3, página 135**

1.  $\{-4, 4\}$       3.  $\{-1, \frac{1}{2}\}$   
 5.  $\{-\frac{1}{2}\}$       7.  $\{3, 4\}$   
 9.  $\{-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\}$       11.  $\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$   
 13.  $\{-3, 0, 3\}$       15.  $\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{2}\}$   
 17.  $\{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$       19.  $\{-5 - \sqrt{5}, -5 + \sqrt{5}\}$   
 21.  $\{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$       23.  $\{-b, b\}$   
 25.  $\{a - b, a + b\}$       27.  $\{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$   
 29.  $\{-\frac{3}{2}, -1\}$       31.  $\{1 - \frac{3\sqrt{10}}{10}, 1 + \frac{3\sqrt{10}}{10}\}$   
 33.  $\{2 - \frac{\sqrt{35}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{35}}{3}\}$       35.  $\{\frac{1}{3}, 2\}$   
 37.  $\{-\frac{5}{3}\}$       39.  $\{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{105}}{20}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{105}}{20}\}$   
 41. sin soluciones reales      43.  $\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\}$   
 45.  $\{\pm\sqrt{3} - \sqrt{2}, \pm\sqrt{3} + \sqrt{2}\}$       47.  $\{\frac{1}{3}, 4\}$   
 49.  $\{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}$       51. sin soluciones reales  
 53.  $\{-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\}$       55.  $\{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$   
 57.  $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$       59.  $r = \frac{1}{2}(-h + \sqrt{h^2 + \frac{2A}{\pi}})$   
 61.  $t = (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs})/g$       63. 2, 18  
 65. 4      67. 7, 15  
 69. Base: 17 cm; altura: 14 cm      71. 18 m por 20 m  
 73. 5 000 ft<sup>2</sup>      75. 30 cm, 40 cm, 50 cm  
 77. 90 mi  
 79. John condujo a 53 mi/h; James, a 48 mi/h  
 81. 12      83. 3 m  
 85. 9 in. por 18 in.      87. 14.7 m
- Ejercicios 3.4, página 143**
1.  $-i$       3.  $i$   
 5.  $-i$       7.  $-i$   
 9.  $i$       11.  $10i$   
 13.  $-3 - \sqrt{3}i$       15.  $-1 + 4i$

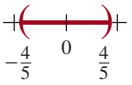
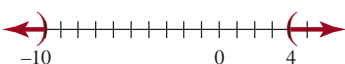

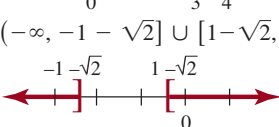
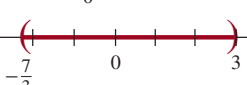
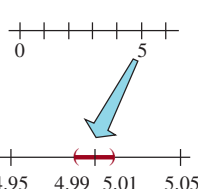
17.  $2 - 13i$   
 21.  $-11 + 7i$   
 25.  $35i$   
 29.  $-1 + 12i$   
 33.  $-18 - 16i$   
 37.  $4$   
 41.  $\frac{20}{41} - \frac{16}{41}i$   
 45.  $6 - 4i$   
 49.  $-\frac{6}{33} + \frac{32}{33}i$   
 53.  $-\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$   
 57.  $x = 2, y = \frac{3}{2}$   
 61.  $x = -4, y = -5$   
 65.  $\pm 3i$   
 69.  $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$   
 73.  $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{31}}{8}i, \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{31}}{8}i$   
 77.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
19.  $-9 - 15i$   
 23.  $1 - 5i$   
 27.  $1 + 4i$   
 31.  $-10$   
 35.  $15 + 8i$   
 39.  $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$   
 43.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$   
 47.  $i$   
 51.  $\frac{11}{2} + \frac{9}{2}i$   
 55.  $9 + i$   
 59.  $x = -9, y = -20$   
 63.  $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}$   
 67.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{2}i$   
 71.  $-4 - 6i, -4 + 6i$   
 75.  $\pm i, \pm \sqrt{2}i$

**Ejercicios 3.5, página 149**

1.  $(-\infty, 0)$ ; 
3.  $[5, \infty)$ ; 
5.  $(8, 10]$ ; 
7.  $[-2, 4]$ ; 
9.  $-7 \leq x \leq 9$   
 11.  $x < 2$
13.  $4 < x \leq 20$
15.  $4x + 4 \geq x$   
 $4x + 4 - x \leq x - x$  ← por i)  
 $3x + 4 - 4 \leq 0 - 4$  ← por i)  
 $\frac{1}{3}(3x) \leq \frac{1}{3}(-4)$  ← por ii)  
 $x \leq -\frac{4}{3}$
17.  $0 < 2(4 - x) < 6$   
 $0 < 8 - 2x < 6$   
 $-8 + 0 < -8 + 8 - 2x < -8 + 6$  ← por i)  
 $-8 < -2x < -2$   
 $-\frac{1}{2}(-8) > -\frac{1}{2}(-2x) > -\frac{1}{2}(-2)$  ← por iii)  
 $4 > x > 1$  o  $1 < x < 4$
19.  $(-5, \infty)$ ; 
21.  $(-\infty, 4]$ ; 
23.  $(-\infty, \frac{3}{4})$ ; 
25.  $(-\infty, \frac{5}{2}]$ ; 
27.  $(-10, 6)$ ; 
29.  $(-5, 3)$ ; 
31.  $[-10, -8)$ ; 

33.  $[0, 6)$ ; 
35.  $-2x + 7$   
 37.  $3$   
 39.  $2x - 2$   
 41.  $4$   
 43. El número es menor que  $\frac{52}{7}$ .  
 45. Con el descuento, el frasco grande es más barato si cuesta menos de \$5.30.  
 47. Una persona puede recorrer 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 o 16 cuartos de milla.

**Ejercicios 3.6, página 153**

1.  $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$   
 3.  $\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$   
 5.  $\{\frac{2}{3}, 2\}$   
 7.  $\{-3, 3\}$   
 9.  $\{1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$   
 11.  $(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ ; 
13.  $(-\infty, -10) \cup (4, \infty)$ ; 
15.  $[3, 4]$ ; 
17.  $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup [1 - \sqrt{2}, \infty)$ ;  

19.  $(-\frac{7}{3}, 3)$ ; 
21.  $(4.99, 5.01)$ ; 
23.  $|x - 4| < 7$   
 25.  $|x - 5| > 4$   
 27.  $|x + 3| \geq 2$ ;  $(-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$   
 29.  $|A_B - A_M| \leq 3$   
 31.  $(11.95, 12.05)$   
 33.  $|x - 0.623| \leq 0.005$ ;  $[0.618, 0.628]$

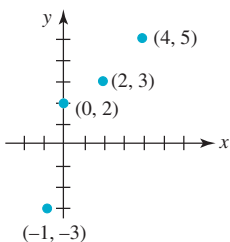
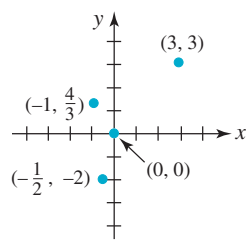
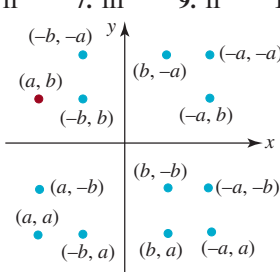
**Ejercicios 3.7, página 159**

1.  $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$   
 3.  $(2, 6)$   
 5.  $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$   
 7.  $(-3, 3)$   
 9.  $\emptyset$   
 11.  $(-4, 4)$   
 13.  $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$   
 15.  $\{-3\}$   
 17.  $(-2, 3)$   
 19.  $[-3, 3)$   
 21.  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$   
 23.  $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{12}, \infty)$   
 25.  $(-\infty, -8)$   
 27.  $\emptyset$   
 29.  $(-5, 0] \cup [1, \infty)$   
 31.  $(-\infty, -1) \cup [1, 2]$   
 33.  $(-3, -2) \cup (-1, \infty)$   
 35.  $[-2, -1] \cup [1, 2]$   
 37.  $(-\infty, -5)$   
 39.  $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, 5) \cup (5, \infty)$   
 41.  $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$   
 43.  $(-\infty, \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) \cup [\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \infty)$   
 45. (a)  $(0, 1)$  (b)  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$   
 47. Sí, porque el conjunto solución de  $x^2 - 1 \leq 0$  es  $[-1, 1]$   
 49. Si el número es  $x > 0$ , entonces  $x > 3$ .  
 51.  $n > 10$   
 53. Si  $x$  representa el ancho, entonces  $x > 7$ .  
 55.  $R > \frac{10}{3}$

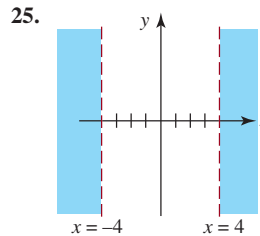
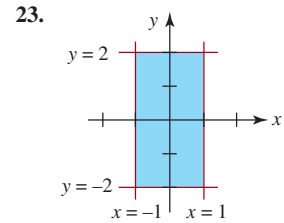
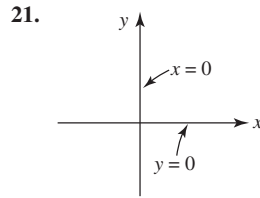
### Capítulo 3. Ejercicios de repaso, página 161

- A. 1. falso 3. verdadero 5. falso 7. verdadero 9. verdadero  
 B. 1.  $x \leq 9$  3.  $-6$   
 5.  $x = 5, x = 15$  7.  $|x - \sqrt{2}| > 3$   
 9.  $-a$   
 C. 1.  $\{-5\}$  3.  $\{2\}$   
 5.  $\{\frac{4}{3}\}$  7.  $\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}$   
 9.  $\{-4, \frac{3}{2}\}$  11.  $\{\frac{3}{4}\}$   
 13.  $\{\frac{3 - \sqrt{15}}{2}, \frac{3 + \sqrt{15}}{2}\}$  15.  $\{\pm 5\sqrt{2}i\}$   
 17.  $\{2, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$   
 19.  $\{\pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}, \pm\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}i\}$   
 21.  $\{1\}$  23.  $\{\pm 9\}$   
 25.  $\{7\}$  27.  $(-\infty, -3]$   
 29.  $(4, 12)$  31.  $(-\infty, -10) \cup (10, \infty)$   
 33.  $(-\frac{1}{3}, 3)$  35.  $[-1, \frac{5}{2}]$   
 37.  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$  39.  $(0, 1) \cup (1, \infty)$   
 41. (a)  $-6 < x \leq 2$  (b)  $(-6, 2]$   
 43. (a)  $x \geq -4$  (b)  $[-4, \infty)$   
 45.  $b = \frac{A-2ac}{2(a+c)}$  47.  $f = \frac{pq}{p+q}$   
 49.  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$  51.  $10 - 2i$   
 53.  $22 - 7i$  55.  $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$   
 57.  $-\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$  59.  $x = \frac{16}{3}, y = 4$   
 61.  $x = -2, y = 2$  63. 15, 18  
 65. 88 67. 59.1 mi/h  
 69. 2 m 71. 4 mi/h  
 73. 5 in. 75.  $(2, 2.5)$   
 77. \$10 000 a 6%; \$20 000 a 8% 79. 25  
 81. aproximadamente 0.34 cm  
 83. (a)  $t < 34.5^\circ\text{C}$   
 (b) No. Si  $P_y = t = 37^\circ\text{C}$ , entonces  
 $37 = 30.1 + 0.2(37) - (4.12 - 0.13(37))v$ . Se deduce que  
 $v = -\frac{30}{69}$ , pero no tiene sentido obtener una velocidad de  
 viento negativa en esta aplicación.  
 (c)  $t > 4.12/0.13 \approx 31.7^\circ\text{C}$   
 85. (a)  $T = \sqrt{D^3/216}$   
 (b) aproximadamente 0.19245 h u 11.55 min.

### Ejercicios 4.1, página 172

1.  3.   
 5. II 7. III 9. II 11. I 13. III 15. IV  
 17. 

19.  $(3, 6)$



27.  $2\sqrt{5}$

29. 10

31. 5

33. no es un triángulo rectángulo 35. es un triángulo rectángulo

37. es un triángulo isósceles

39. (a)  $2x + y - 5 = 0$

(b) Los puntos  $(x, y)$  se encuentra en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une A y B.

41.  $(6, 8)$  y  $(6, -4)$

43.  $(1, \frac{5}{2})$

45.  $(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$

47.  $(3a, -\frac{3}{2}b)$

49.  $(5, -1)$

51.  $(-7, -10)$

53. 6

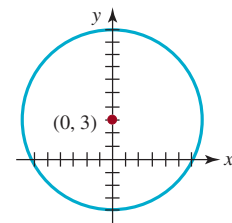
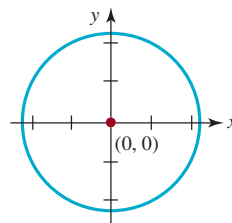
55.  $(2, -5)$

57.  $(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}), (4, 7), (\frac{9}{2}, \frac{15}{2})$

### Ejercicios 4.2, página 180

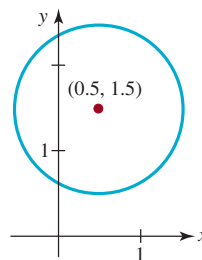
1. centro  $(0, 0)$ ; radio  $\sqrt{5}$

3. centro  $(0, 3)$ ; radio 7



5. centro  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ; radio 1

7. centro  $(0, -4)$ ; radio 4



9. centro  $(-1, 2)$ ; radio 3

11. centro  $(10, -8)$ ; radio 6

13. centro  $(-1, -4)$ ; radio  $\sqrt{\frac{33}{2}}$

15.  $x^2 + y^2 = 1$

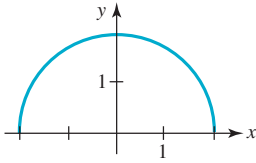
17.  $x^2 + (y - 2)^2 = 2$

19.  $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 8$

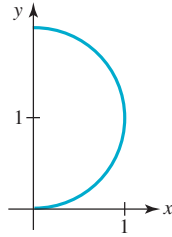
21.  $x^2 + y^2 = 5$

23.  $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 36$

25.

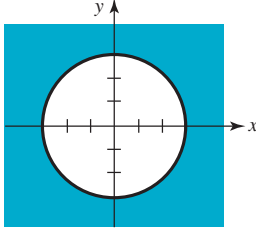


27.

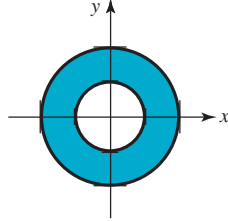


29.  $y = 3 + \sqrt{4 - x^2}; x = \sqrt{4 - (y - 3)^2}$

31.



33.



35.  $(3 - \sqrt{13}, 0), (3 + \sqrt{13}, 0), (0, -6 - 2\sqrt{10}), (0, -6 + 2\sqrt{10})$

37.  $(0, 0)$ ; origen

39.  $(-1, 0), (0, \frac{1}{2})$ ; no hay simetría

41.  $(0, 0)$ ; eje  $x$

43.  $(-2, 0), (2, 0), (0, 4)$ ; eje  $y$

45.  $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0), (0, -2)$ ; no hay simetría

47.  $(0, 0), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ ; origen

49.  $(0, -4), (0, 4)$ ; eje  $x$

51.  $(0, -3), (0, 3)$ ; ejes  $x$  y  $y$  y el origen

53.  $(-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$ ; origen

55.  $(-4, 0), (5, 0), (0, -\frac{10}{3})$ ; no hay simetría

57.  $(9, 0), (0, -3)$ ; no hay simetría

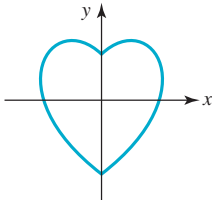
59.  $(9, 0), (0, 9)$ ; no hay simetría

61.  $(-4, 0), (4, 0), (0, -4), (0, 4)$ ; ejes  $x$  y  $y$  y el origen

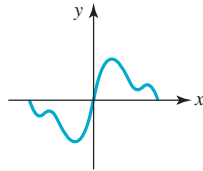
63. ejes  $x$  y  $y$  y el origen

65. eje  $y$

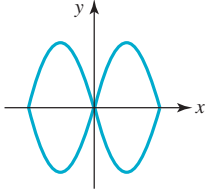
67.



69.

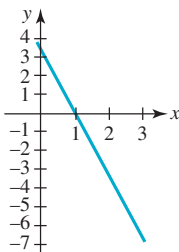


71.

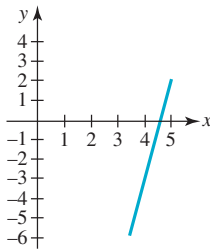


**Ejercicios 4.3, página 188**

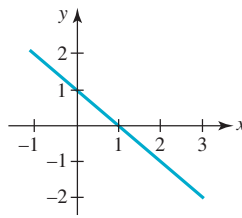
1.  $-\frac{7}{2}$ ;



3. 5;

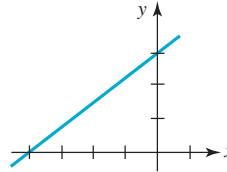


5.  $-1$ ;

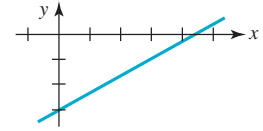


7.  $-\frac{5}{12}$

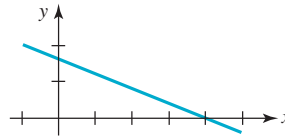
9.  $\frac{3}{4}; (-4, 0), (0, 3)$ ;



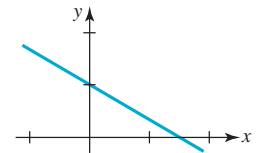
11.  $\frac{2}{3}; (\frac{9}{2}, 0), (0, -3)$ ;



13.  $-\frac{2}{5}; (4, 0), (0, \frac{8}{5})$ ;



15.  $-\frac{2}{3}; (\frac{3}{2}, 0), (0, 1)$ ;



17.  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

19.  $y = 2$

21.  $y = -x + 3$

23.  $y = -2x + 7$

25.  $y = 1$

27.  $x = -2$

29.  $y = -3x - 2$

31.  $x = 5$

33.  $y = -4x + 11$

35.  $y = -\frac{1}{3}x - 5$

37. (a) y (c) son paralelos, (b) y (e) son paralelos; (a) y (c) son perpendiculares a (b) y (e); (d) es perpendicular a (f)

39. (a) y (d) son perpendiculares, (b) y (c) son perpendiculares, (e) y (f) son perpendiculares

41.  $y = x + 3$

**Ejercicios 4.4, página 193**

1. 12

3. 3

5. (a)  $F = 40x$  (b) 1.25 ft

7.  $s = 16t^2$ ; 400 ft; 80 ft

9. La longitud debe ser  $4L$ .

11. aproximadamente 2.06 m<sup>2</sup>

13.  $F_L = k \frac{I_1 I_2}{r^2}$ ;  $F_L$  es cuádruple

15.  $P = k \frac{T}{V}$ ; aproximadamente 3 646 ft<sup>3</sup>

17. 4 de julio; aproximadamente 2 357 cm/s

19. aproximadamente 0.016 cm

**Capítulo 4. Ejercicios de repaso, página 195**

A. 1. falso

3. verdadero

5. verdadero

7. falso

9. verdadero

11. verdadero

13. verdadero

15. verdadero

17. verdadero

19. verdadero

21. verdadero

B. 1.  $-\frac{6}{5}$

3.  $\frac{4}{3}; (-12, 0), (0, 16)$

5.  $\frac{3}{2}$

7.  $(4, -3)$  y  $(-4, -3)$

9.  $(2, -7), 2\sqrt{2}$

11.  $x_1 = -12; y_2 = 9$

13. cuadrantes II y IV

15.  $x = -2$

17. semicírculo

19.  $\sqrt{10}$

C. 1. un triángulo rectángulo

3.  $y = \frac{1}{3}x$

5.  $y = -\frac{15}{4}x + 8$

7.  $(1, 2), (-4, 4)$

9.  $x^2 + y^2 = 16$

11.  $(x + 9)^2 + (y - 3)^2 = 100, (x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 100$

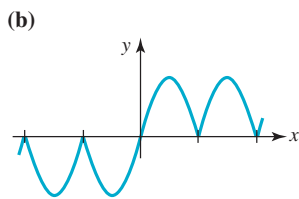
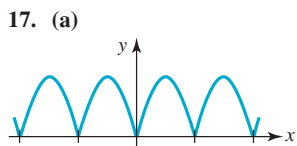
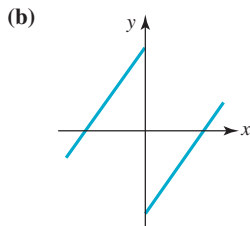
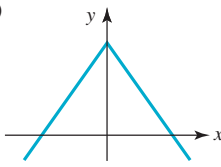
13.  $(0, -4)$                       15.  $x = 4, x = -2$   
 17.  $x^2 = 4y$                       19.  $(3, 0), (5, -6)$   
 21.  $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$     23. (g)  
 25. (h)                              27. (b)                              29. (d)

**Ejercicios 5.1, página 205**

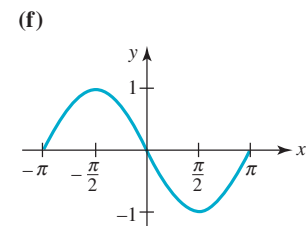
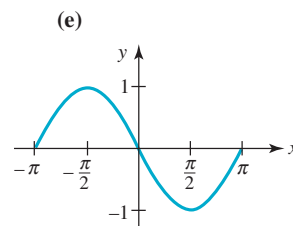
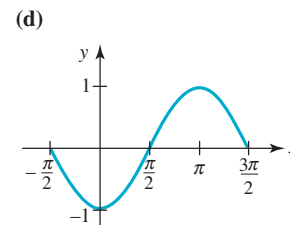
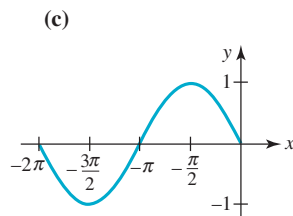
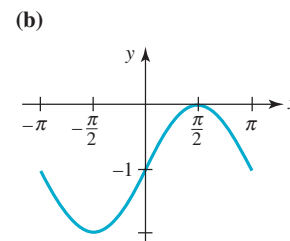
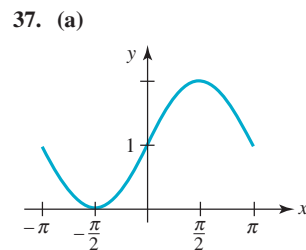
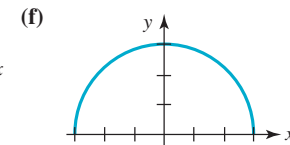
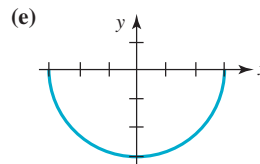
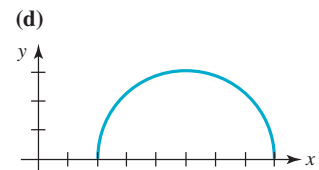
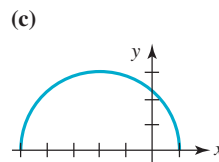
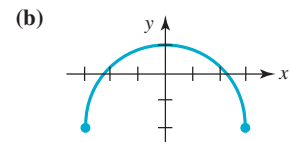
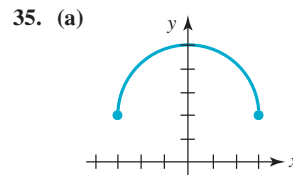
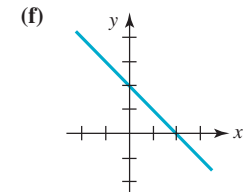
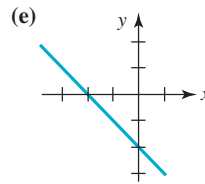
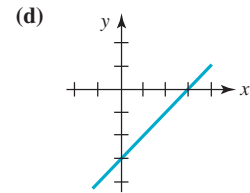
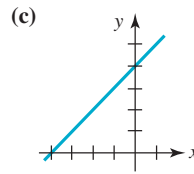
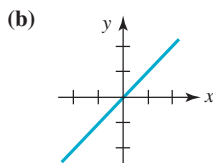
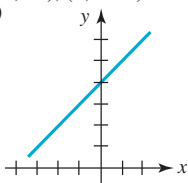
1. 24, 2, 8, 35                      3. 0, 1, 2,  $\sqrt{6}$   
 5.  $-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \sqrt{2}$   
 7.  $-2x^2 + 3x, -8a^2 + 6a, -2a^4 + 3a^2, -50x^2 - 15x,$   
 $-8a^2 - 2a + 1, -2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$   
 9. -2, 2                              11.  $[\frac{1}{2}, \infty)$   
 13.  $(-\infty, 1)$                       15.  $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$   
 17.  $\{x | x \neq 5\}$                       19.  $(-\infty, \infty)$   
 21.  $[-5, 5]$                             23.  $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$   
 25.  $(-2, 3]$                             27. no es función  
 29. función                            31.  $[-4, 4], [0, 5]$   
 33.  $[1, 9], [1, 6]$                       35.  $-\frac{6}{5}$   
 37. 2, 3                                39.  $0, \frac{1}{3}, -9$   
 41. -1, 1                                43.  $(8, 0), (0, -4)$   
 45.  $(\frac{3}{2}, 0), (\frac{5}{2}, 0), (0, 15)$       47.  $(0, -\frac{1}{4})$   
 49.  $(-2, 0), (2, 0), (0, 3)$   
 51.  $f_1(x) = \sqrt{x+5}, f_2(x) = -\sqrt{x+5}; [-5, \infty)$   
 53. 0, -3.4, 0.3, 2, 3.8, 2.9;  $(0, 2)$   
 55. 3.6, 2, 3.3, 4.1, 2, -4.1;  $(-3.2, 0), (2.3, 0), (3.8, 0)$   
 57. (a) 2; 6; 120; 5 040              (c)  $(n+1)(n+2)$

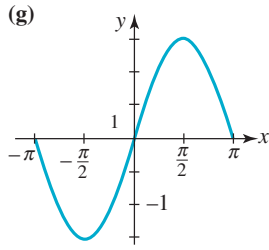
**Ejercicios 5.2, página 215**

1. par                                3. ni par ni impar  
 5. impar                              7. par  
 9. par                                11. impar  
 13. ni par ni impar  
 15. (a)

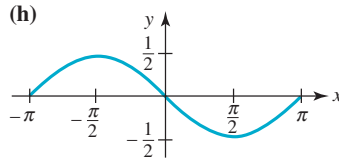


17. (a)                                19.  $f(2) = 4, f(-3) = 7$   
 23.  $(-2, 3), (3, -2)$               21.  $g(1) = 5, g(-4) = -8$   
 27.  $(-6, 2), (-1, -3)$             25.  $(-8, 1), (-3, -4)$   
 31.  $(-2, 15), (3, -60)$             29.  $(2, 1), (-3, -4)$   
 33. (a)





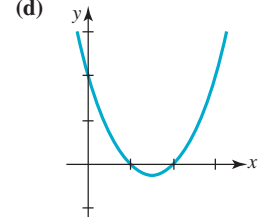
39.  $y = (x - 1)^3 + 5$



41.  $y = -(x + 7)^4$

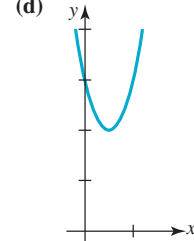
23. (a)  $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$   
 (c)  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}), x = \frac{3}{2}$

(b)  $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$



25. (a)  $(0, 3)$   
 (c)  $(\frac{1}{2}, 2), x = \frac{1}{2}$

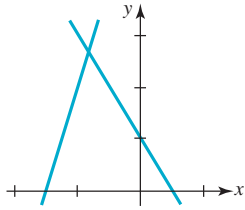
(b)  $y = 4(x - \frac{1}{2})^2 + 2$



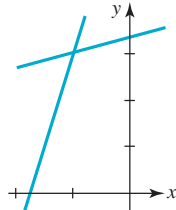
**Ejercicios 5.3, página 224**

1.  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

3.  $(-\frac{5}{6}, \frac{8}{3})$ ;



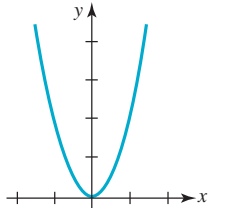
5.  $(-1, 3)$ ;



7.  $-9$

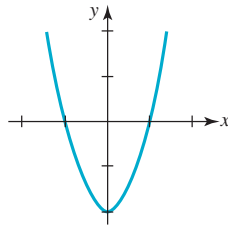
11.  $2x - 4 + h$

13.



9.  $-2x + 1 - h$

15.

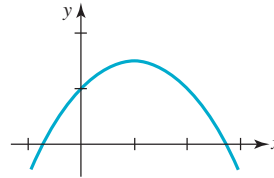


27. (a)  $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0), (0, 1)$

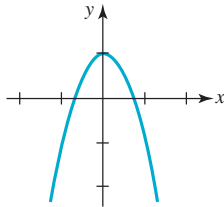
(b)  $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2}$

(c)  $(1, \frac{3}{2}), x = 1$

(d)



17.

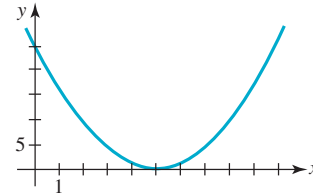


29. (a)  $(5, 0), (0, 25)$

(b)  $y = (x - 5)^2$

(c)  $(5, 0), x = 5$

(d)

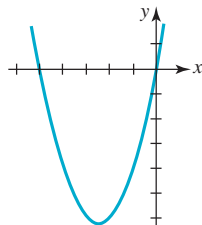


19. (a)  $(0, 0), (-5, 0)$

(c)  $(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}), x = -\frac{5}{2}$

(b)  $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

(d)



31. El mínimo valor de la función es  $f(\frac{4}{3}) = -\frac{13}{3}; [-\frac{13}{3}, \infty)$

33. Creciente en  $[0, \infty)$ , decreciente en  $[-\infty, 0]$

35. Creciente en  $(-\infty, 23]$ , decreciente en  $[-3, \infty)$

37. La gráfica de  $y = x^2$  se desplaza horizontalmente 10 unidades a la derecha.

39. La gráfica de  $y = x^2$  se comprime verticalmente, luego se refleja en el eje  $x$ , después se desplaza horizontalmente 4 unidades a la izquierda y luego verticalmente 9 unidades hacia arriba.

41. Como  $f(x) = (-x - 6)^2 - 4 = (x + 6)^2 - 4$ , la gráfica de  $f$  es la gráfica de  $y = x^2$  desplazada horizontalmente 6 unidades hacia la izquierda y luego desplazada verticalmente 4 unidades hacia abajo.

43.  $y = (x + 2)^2$

45.  $y = -x^2 - 1$

47.  $y = -(x - 1)^2 + 5$

49.  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

51.  $f(x) = 4(x - 1)^2 + 2$

53.  $(-4, 8), (1, 3)$ ,

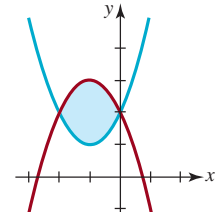
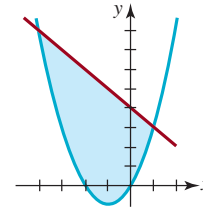
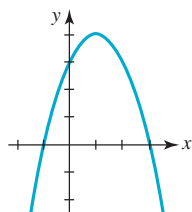
55.  $(-2, 2), (0, 2)$ ,

21. (a)  $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$

(c)  $(1, 4), x = 1$

(b)  $y = -(x - 1)^2 + 4$

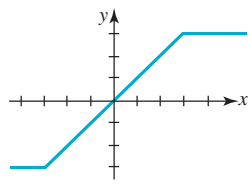
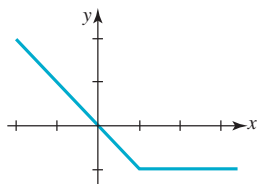
(d)



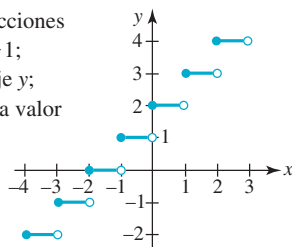
57. (a)  $d^2 = 5x^2 - 10x + 25$  (b) (1, 2)  
 59. (a)  $s(t) = -16t^2 + 64t + 6$ ,  $v(t) = -32t + 64$   
 (b) 70 ft, 0 ft/s (c) 4 s, -64 ft/s  
 61. (a) 117.6 m, -9.8 m/s (b) en 5 segundos (c) -49 m/s  
 63. (a)  $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$   
 65. \$1 680.00; aproximadamente 35.3 años  
 67. (a) La gráfica de  $R(D) = -kD^2 + kPD$  es una parábola con vértice en  $-b/2a = (-kP)/(-2k) = P/2$ . Como  $k$  es positiva, la gráfica se abre hacia abajo, y por tanto  $R(D)$  es un máximo en este valor. Puesto que  $R(D)$  mide la velocidad de propagación de la enfermedad, se concluye que ésta se difunde más rápido cuando la mitad de la población está infectada.  
 (b)  $3 \times 10^{-5}$   
 (c) aproximadamente 48  
 (d) aproximadamente 62, 79, 102 y 130

**Ejercicios 5.4, página 232**

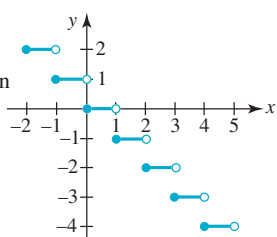
1. 2, 4, -5                                    3. 3, 0, 8, 2 + 2√2  
 5. (a) 1 (b) 1 (c) 0 (d) 1 (e) 1 (f) 0  
 7. (a) 3 (b) -1, √2 (c) √-2, 1 (d) √-3, 0  
 (e) √3 (f) -2  
 9. (0, 0); continua;                    11. (0, 0); continua;



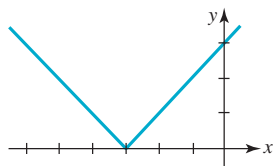
13. Los puntos  $(x, 0)$  son las intersecciones con el eje  $x$ , donde  $-2 \leq x < -1$ ;  $(0, 2)$  es la intersección con el eje  $y$ ; la función es discontinua en cada valor entero de  $x$ .



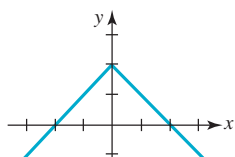
15. Los puntos  $(x, 0)$  son las intersecciones con el eje  $x$ , donde  $0 \leq x < 1$ ;  $(0, 0)$  es la intersección con el eje; la función es discontinua en cada valor entero de  $x$ .



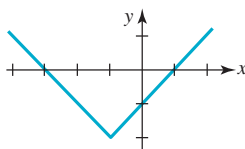
17.  $(-3, 0), (0, 3)$ ; continua;



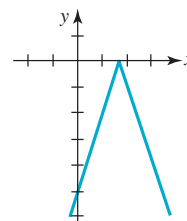
19.  $(-2, 0), (2, 0), (0, 2)$ ; continua;



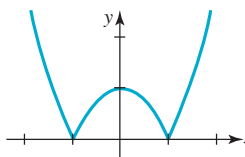
21.  $(-3, 0), (1, 0), (0, -1)$ ; continua;



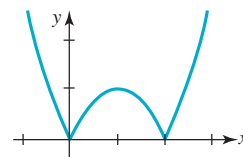
23.  $(\frac{5}{3}, 0), (0, -5)$ ; continua;



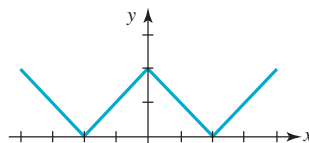
25.  $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$ ; continua;



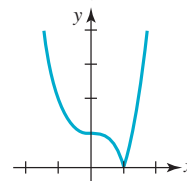
27.  $(0, 0), (2, 0)$ ; continua;



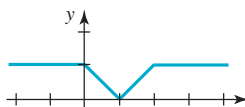
29.  $(-2, 0), (2, 0), (0, 2)$ ; continua;



31.  $(1, 0), (0, 1)$ ; continua;



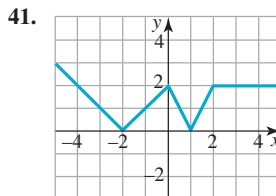
33.  $(1, 0), (0, 1)$ ; continua;



35.  $\{-1, 1\}$

37.  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -2x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$

39.  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \leq x < 3 \\ x, & x \geq 3 \end{cases}$



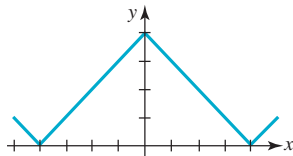
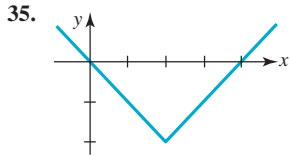
43.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

45.  $k = 1$

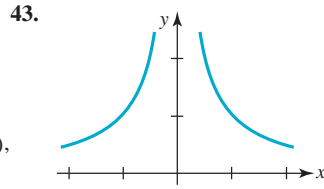
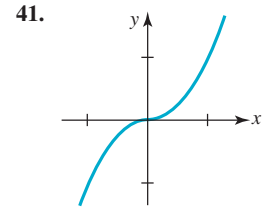
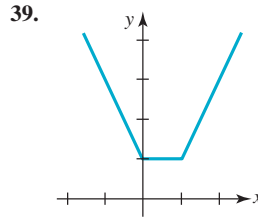
47.  $g(x) = [x] = \begin{cases} -2, & -3 < x \leq -2 \\ -1, & -2 < x \leq -1 \\ 0, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \\ 3, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

**Ejercicios 5.5, página 240**

1.  $(f + g)(x) = 3x^2 - x + 1$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$   
 $(f - g)(x) = -x^2 + x + 1$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$   
 $(fg)(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$   
 $(f/g)(x) = (x^2 + 1)/(2x^2 - x)$ , números reales, excepto  $x = 0$  y  $x = \frac{1}{2}$
3.  $(f + g)(x) = x + \sqrt{x - 1}$ , dominio:  $[1, \infty)$ ,  
 $(f - g)(x) = x - \sqrt{x - 1}$ , dominio:  $[1, \infty)$ ,  
 $(fg)(x) = x\sqrt{x - 1}$ , dominio:  $[1, \infty)$ ,  
 $(f/g)(x) = x/\sqrt{x - 1}$ , dominio:  $[1, \infty)$
5.  $(f + g)(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$ ,  
 $(f - g)(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$ ,  
 $(fg)(x) = 3x^5 - 10x^4 + 16x^3 - 14x^2 + 5x$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$ ,  
 $(f/g)(x) = (3x^3 - 4x^2 + 5x)/(1 - x)^2$ , números reales, excepto  $x = 1$
7.  $(f + g)(x) = \sqrt{x + 2} + \sqrt{5 - 5x}$ , dominio:  $[-2, 1]$ ,  
 $(f - g)(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{5 - 5x}$ , dominio:  $[-2, 1]$ ,  
 $(fg)(x) = \sqrt{5(x + 2)(1 - x)}$ , dominio:  $[-2, 1]$ ,  
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{5 - 5x}}$ , dominio:  $[-2, 1]$
9. 10, 8, -1, 2, 0
11.  $(f \circ g)(x) = x$ , dominio:  $[1, \infty)$ ;  
 $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$
13.  $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$ , dominio:  $(-\infty, \infty)$ ;  
 $(g \circ f)(x) = \frac{4x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 4x + 1}$ , números reales, excepto  $x = \frac{1}{2}$
15.  $(f \circ g)(x) = x$ ,  $(g \circ f)(x) = x$
17.  $(f \circ g)(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ ,  $(g \circ f)(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$
19.  $(f \circ g)(x) = x + 1 + \sqrt{x - 1}$ ,  
 $(g \circ f)(x) = x + 1 + \sqrt{x}$
21.  $(f \circ f)(x) = 4x + 18$ ,  $\left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = \frac{6x + 19}{x + 3}$
23.  $(f \circ f)(x) = x^4$ ,  $\left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x^4}$
25.  $(f \circ g \circ h)(x) = |x - 1|$
27.  $(f \circ g \circ g)(x) = 54x^4 + 7$
29.  $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$
31.  $f(x) = x^5$ ,  $g(x) = x^2 - 4x$
33.  $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$ ,  $g(x) = x - 3$



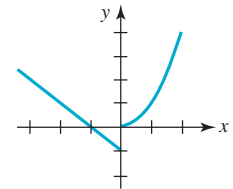
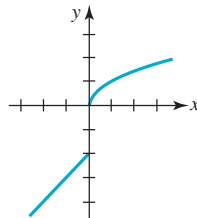
$$y = \begin{cases} \vdots \\ x + 3, & -3 \leq x < -2 \\ x + 2, & -2 \leq x < -1 \\ x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases}$$



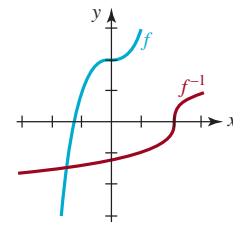
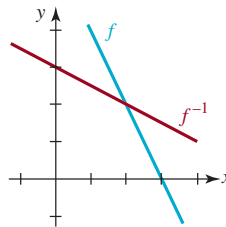
39. (a)  $(-2, 3), (1, 0)$  (b)  $d = -x^2 - x + 2$   
(c)  $\frac{9}{4}$
47. (a)  $-8x - 4h$  (b)  $-24.4$
49. (a)  $6x + 3h - 1$  (b)  $17.3$
51. (a)  $3x^2 + 3xh + h^2 + 5$  (b)  $32.91$
53. (a)  $\frac{1}{(4 - x)(4 - x - h)}$  (b)  $\frac{10}{9}$
55. (a)  $\frac{-1}{(x - 1)(x + h - 1)}$  (b)  $-\frac{5}{21}$
57. (a)  $1 - \frac{1}{x(x + h)}$  (b)  $\frac{83}{93}$
59.  $\frac{2}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$
61.  $d = \sqrt{10\,000 + 250\,000r^2}$ ; aproximadamente 2 502 ft

**Ejercicios 5.6, página 247**

1. no es uno a uno
5. uno a uno
7. uno a uno;
3. no es uno a uno
9. no es uno a uno

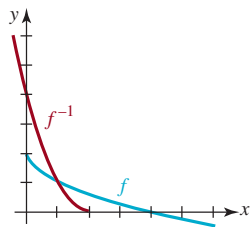


19. El dominio es  $[4, \infty)$ ; el rango es  $[0, \infty)$
21.  $f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2}, x > 0, y > 0$
23.  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ , 25.  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$





27.  $f^{-1}(x) = (2 - x)^2, x \leq 2,$

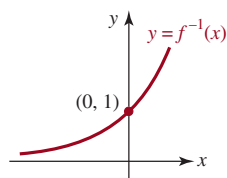


29.  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x}$ , el dominio de  $f^{-1}$  es el conjunto de los números reales, excepto  $x = 0$ ; su rango es el conjunto de los números reales, excepto  $\frac{1}{2}$ ; el rango de  $f$  es el conjunto de los números reales, excepto  $y = 0$

31.  $f^{-1}(x) = \frac{3x}{2x-7}$ , dominio de  $f^{-1}$  es el conjunto de números reales, excepto  $x = \frac{7}{2}$ ; rango de  $f^{-1}$  es el conjunto de números reales, excepto  $y = \frac{3}{2}$ ; rango de  $f$  es el conjunto de números reales, excepto  $y = \frac{7}{2}$

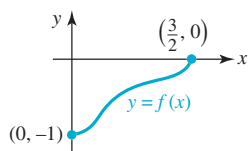
33. (20, 2)

37.

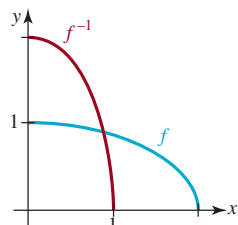
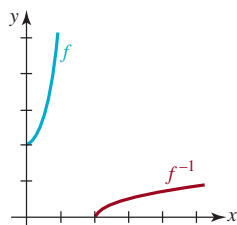


35. (12, 9)

39.



41.  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2}, x \geq 2;$  43.  $f^{-1}(x) = 2\sqrt{1-x^2}, [0, 1];$



### Ejercicios 5.7, página 254

- $S(x) = x + \frac{50}{x}, (0, \infty)$
- $S(x) = 3x^2 - 4x + 2, [0, 1]$
- $A(x) = 100x - x^2, [0, 100]$
- $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2, [0, 4]$
- $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}, (-\infty, \infty)$
- $P(A) = 4\sqrt{A}, (0, \infty)$
- $d(C) = \frac{1}{\pi}C, (0, \infty)$
- $A(h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2, (0, \infty)$
- $A(x) = \frac{1}{4\pi}x^2, (0, \infty)$
- $s(h) = \frac{30h}{25-h}, [0, 25]$
- $S(w) = 3w^2 + \frac{1200}{w}, (0, \infty)$
- $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}, (0, \infty)$
- $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \leq h < 5 \\ 1200h - 3000, & 5 \leq h \leq 8 \end{cases}, [0, 8]$

27.  $A(x) = \frac{1}{2}xp - x^2, [0, \frac{1}{2}p]$

29.  $F(x) = 2x + \frac{16000}{x}, (0, \infty)$

31.  $C(x) = 4x + \frac{640000}{x}, (0, \infty)$

33.  $A(x) = x^2 + \frac{128000}{x}, (0, \infty)$

35.  $V(x) = 20x - 40x^2, [0, \frac{1}{2}]$

37.  $A(y) = 40 + 4y + \frac{64}{y}, (0, \infty)$

39.  $V(x) = 5x\sqrt{64 - x^2}, [0, 8]$

### Ejercicios 5.8, página 260

- $y = 0.4x + 0.6$
- $y = 1.1x - 0.3$
- $y = 1.3571x + 1.9286$
- $v = -0.8357T + 234.333; 117.335, 100.621$
- $y = 0.5996x + 4.3665; y = -0.0232x^2 + 0.5618x + 4.5942; y = 0.00079x^3 - 0.0212x^2 + 0.5498x + 4.5840$

### Capítulo 5. Ejercicios de repaso, página 261

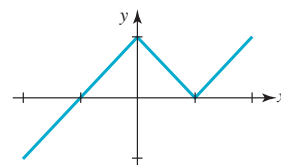
- A. 1. falso 3. falso  
 5. verdadero 7. verdadero  
 9. verdadero 11. verdadero  
 13. verdadero 15. falso  
 17. falso 19. verdadero  
 21. verdadero
- B. 1.  $-\frac{1}{3}$  3.  $(-\infty, 5)$   
 5.  $x = 0, x = 2$  7. -2  
 9.  $f(x) = 4x + 4$   
 11.  $(1 - \sqrt{2}, 0), (1 + \sqrt{2}, 0), (0, -1)$   
 13.  $f(x) = \frac{7}{4}(x+2)^2$  15. (10, 2)  
 17. (0, 5) 19. -8

C. 1.  $f(x) = x^2, g(x) = \frac{3x-5}{x}$

3. (a)  $y = (x+3)^3 - 2$  (b)  $y = x^3 - 7$  (c)  $y = (x-1)^3$   
 (d)  $y = -x^3 + 2$  (e)  $y = -x^3 - 2$  (f)  $y = 3x^3 - 6$

5. dominio:  $(\pi/2, 3\pi/2)$ ; rango:  $(-\infty, \infty)$

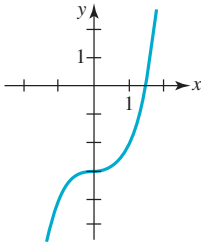
7.  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$



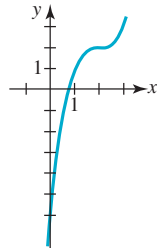
9. A partir de la gráfica de  $f$  se observa que  $f(x) > 0$  para toda  $x$ ; por tanto, el dominio de  $g$  es  $(-\infty, \infty)$ .
- $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x}$
  - $-6x - 3h + 16$
  - $\frac{2x+h}{2x^2(x+h)^2}$
  - $A(h) = h^2(1 - \pi/4)$
  - $d(s) = \sqrt{3}s$
  - (a)  $d(t) = 6t$  (b)  $d(t) = \sqrt{90^2 + (90 - 6t)^2}$
  - $A(x) = 2x(1 - \pi x)$ , donde  $x$  es el radio del semicírculo

**Ejercicios 6.1, página 273**

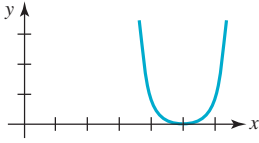
1.



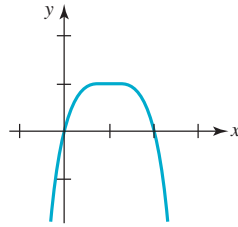
3.



5.



7.

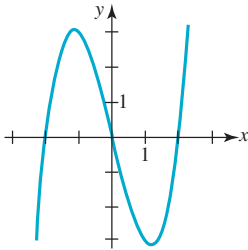


9. impar

13. (f)

15. (e)

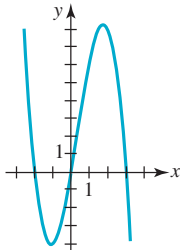
19.



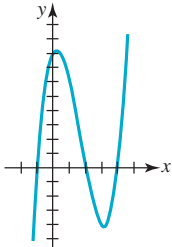
11. ni par ni impar

17. (b)

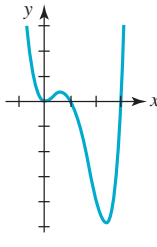
21.



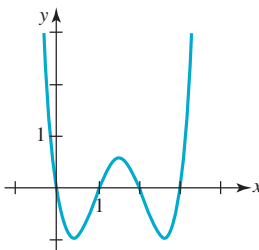
23.



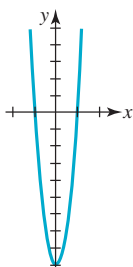
25.



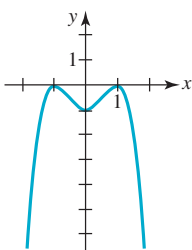
27.



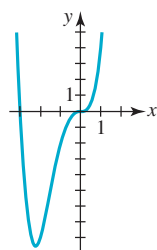
29.



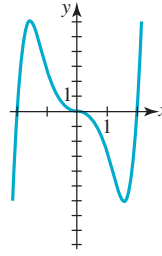
31.



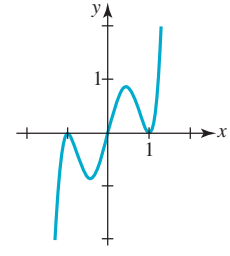
33.



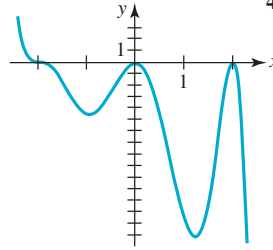
35.



37.



39.



41. (b)  $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

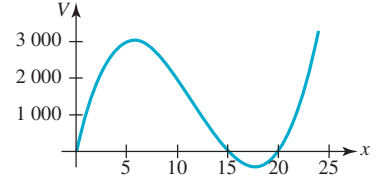
43.  $k = -\frac{7}{16}$

45.  $k = -\frac{10}{3}$

47. los enteros positivos impares

49. el dominio es  $[0, 15]$ ;

la gráfica de  $V$  es:



**Ejercicios 6.2, página 281**

1.  $f(x) = x^2 \cdot 8 + 4x - 7$

3.  $f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (5x - 12) + 21x - 11$

5.  $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (2x - 4) + 5x + 21$

7.  $f(x) = (3x^2 - x) \cdot (9x + 3) + 4x - 2$

9.  $f(x) = (6x^2 + 4x + 1) \cdot (x^3 - 2) + 12x^2 + 8x + 2$

11.  $r = 6$

13.  $r = \frac{29}{8}$

15.  $r = 76$

17.  $f(2) = 2$

19.  $f(-5) = -74$

21.  $f(\frac{1}{2}) = \frac{303}{16}$

23.  $q(x) = 2x + 3, r = 11$

25.  $q(x) = x^2 - 4x + 12, r = -34$

27.  $q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8, r = 32$

29.  $q(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 32, r = -132$

31.  $q(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}, r = 0$

33.  $f(-3) = 51$

35.  $f(1) = 1$

37.  $f(4) = 5369$

39.  $k = -1$

41.  $k = -\frac{1}{5}$

43.  $k = -4$

**Ejercicios 6.3, página 288**

1.  $f(x) = 4(x - \frac{1}{4})(x - 1)^2$

3. 5 no es cero

5.  $f(x) = 3(x + \frac{2}{3})(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$

7.  $f(x) = 4(x + 3)(x - 5)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

9.  $f(x) = 9(x - 1)(x + \frac{1}{3})^2(x + 8)$

11.  $x - 5$  no es un factor

13.  $f(x) = (x - 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}i)$

15.  $x - \frac{1}{3}$  no es un factor

17.  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 2i)(x + 2i)$

19.  $f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)(x + \frac{3}{2})$

21.  $f(x) = 3(x - \frac{5}{3})(x + 2i)(x - 2i)$
23.  $f(x) = 5(x - \frac{3}{5})(x + 1 - i)(x + 1 + i)$
25.  $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$
27.  $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)^2 = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 15x + 18$
29.  $f(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3$
31.  $f(x) = x^2 - 2x + 37$
33. 0 es una raíz simple;  $\frac{5}{4}$  es una raíz de multiplicidad 2;  $\frac{1}{2}$  es una raíz de multiplicidad 3
35.  $-\frac{2}{3}$  es una raíz de multiplicidad 2;  $\frac{2}{3}$  es una raíz de multiplicidad 2
37.  $k = -36; f(x) = 2(x - 3)(x + 1 - \sqrt{5}i)(x + 1 + \sqrt{5}i)$
39.  $f(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)(x + 2)^2$

**Ejercicios 6.4, página 295**

1.  $\frac{2}{5}$                       3. 3                      5.  $\frac{1}{2}$  (multiplicidad 2)
7. no hay raíces racionales                      9.  $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
11. 0, 1                      13. -3, 0, 2                      15.  $\frac{3}{2}$
17.  $-\frac{1}{5}$                       19.  $-\frac{1}{2}$  (multiplicidad 2);  $\frac{1}{3}$  (multiplicidad 2)
21.  $\frac{3}{8}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ;  
 $f(x) = (8x - 3)(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$
23.  $\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ ;  
 $f(x) = (5x - 4)(2x - 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
25. -4, -1, 1,  $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ ;  
 $f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
27. 0, 1, 3,  $-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$ ;  
 $f(x) = 4x(x - 1)(x - 3)(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$
29.  $-1, \frac{1}{4}$  (multiplicidad 2);  $f(x) = (x + 1)(4x - 1)^2(x^2 - 2x + 3)$
31.  $-\frac{1}{2}$
33.  $-\frac{3}{2}, 2, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$
35. 1 (multiplicidad 3)
37.  $f(x) = 3x^4 - x^3 - 39x^2 + 49x - 12$
39.  $f(x) = -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
41. 3 in. o  $\frac{1}{2}(7 - \sqrt{33}) \approx 0.63$  in.

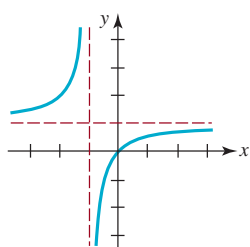
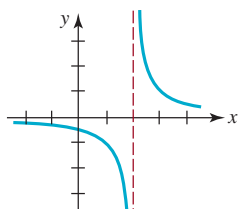
**Ejercicios 6.5, página 298**

1. -1.531                      3. -1.314
5. 1.611; 3.820                      7. -1.141; 1.141
9. 1.730 in.

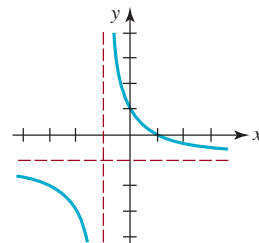
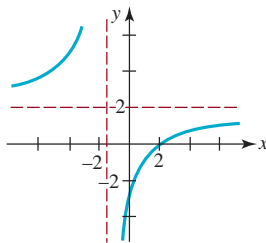
**Ejercicios 6.6, página 310**

1.	$x$	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
	$f(x)$	62	602	6 002	60 002	600 002
	$x$	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
	$f(x)$	-58	-598	-5 998	-59 998	-599 998

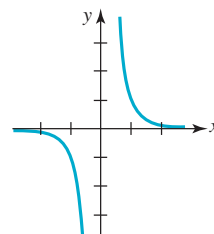
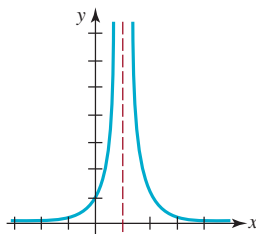
3. Asíntotas:  $x = 2, y = 0$   
Intersecciones:  $(0, -\frac{1}{2})$
5. Asíntotas:  $x = -1, y = 1$   
Intersecciones:  $(0, 0)$



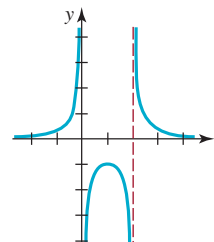
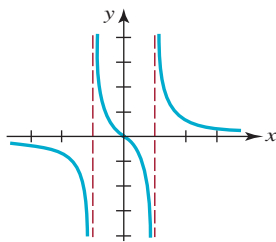
7. Asíntotas:  $x = -\frac{3}{2}, y = 2$   
Intersecciones:  $(\frac{9}{4}, 0), (0, -3)$
9. Asíntotas:  $x = -1, y = -1$   
Intersecciones:  $(1, 0), (0, 1)$



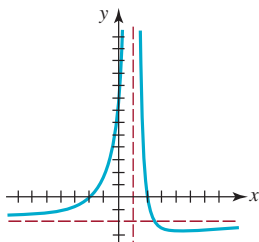
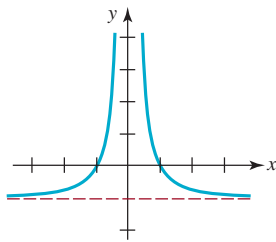
11. Asíntotas:  $x = 1, y = 0$   
Intersecciones:  $(0, 1)$
13. Asíntotas:  $x = 0, y = 0$   
Intersecciones: ninguno



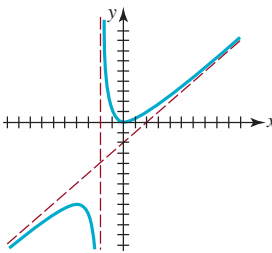
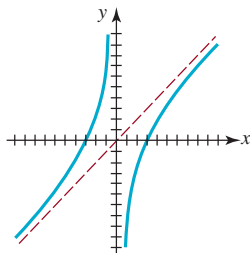
15. Asíntotas:  $x = 1, x = -1, y = 0$   
Intersecciones:  $(0, 0)$
17. Asíntotas:  $x = 0, x = 2, y = 0$   
Intersecciones: ninguno



19. Asíntotas:  $x = 0, y = -1$   
Intersecciones:  $(-1, 0), (1, 0)$
21. Asíntotas:  $x = 1, y = -2$   
Intersecciones:  $(-2, 0), (2, 0), (0, 8)$

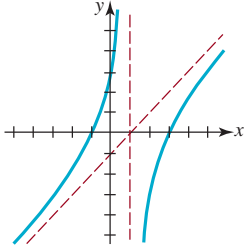


23. Asíntotas:  $x = 0, y = x$   
Intersecciones:  $(-3, 0), (3, 0)$
25. Asíntotas:  $x = -2, y = x - 2$   
Intersecciones:  $(0, 0)$



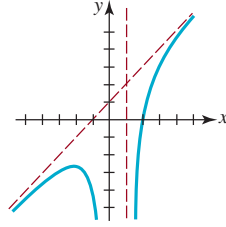
27. Asíntotas:  $x = 1$ ,  
 $y = x - 1$

Intersecciones:  $(3, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 3)$



29. Asíntotas:  $x = 1$ ,  
 $x = 0$ ,  $y = x + 1$

Intersecciones:  $(2, 0)$



3.  $7x^3 + 14x^2 + 22x + 53 + \frac{109}{x-2}$

5.  $r = f(-3) = -198$

7.  $n$  entero positivo impar

9.  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{15}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{5}{8}, \pm \frac{15}{8}$

11.  $f(x) = (x-2)(x-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)(x-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)$

13.  $k = -\frac{21}{2}$

15.  $k = \frac{3}{2}$

17.  $f(x) = 3x^2(x+2)^2(x-1)$

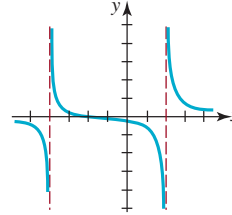
21. (d)

19. (f)

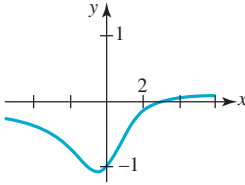
25. (c)

23. (h)

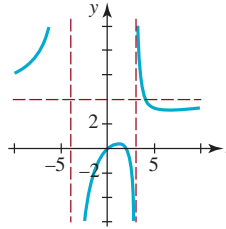
29.  $y = 0, x = -4, x = 2, (-2, 0), (0, -\frac{1}{4})$



31.  $(3, 0)$ ;

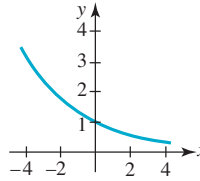


33.  $(4, 4)$ ;

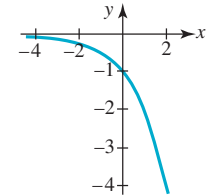


**Ejercicios 7.1, página 323**

1.  $(0, 1)$ ;  $y = 0$ ; decreciente



3.  $(0, -1)$ ;  $y = 0$ ; decreciente

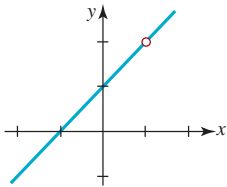


35.  $(-3, -6)$

39.  $y = \frac{3x(x-3)}{(x+1)(x-2)}$

41. Hay un hoyo en la gráfica en  $x = 1$

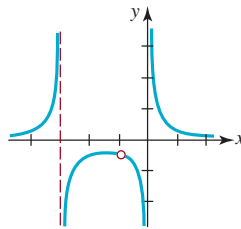
Intersecciones:  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$



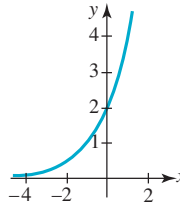
37.  $y = \frac{x-5}{x-2}$

43. Hay un hoyo en la gráfica en  $x = -1$

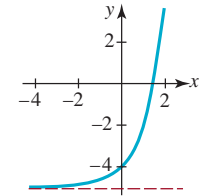
Intersecciones: ninguno



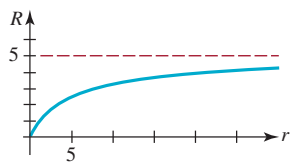
5.  $(0, 2)$ ;  $y = 0$ ; creciente



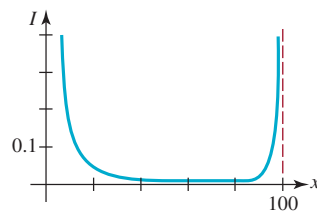
7.  $(0, -4)$ ;  $y = -5$ ; creciente



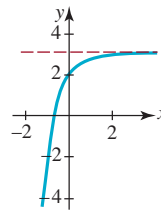
45.  $R \rightarrow 5$  cuando  $r \rightarrow \infty$



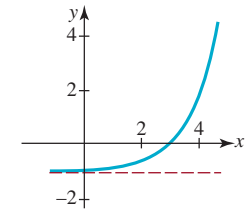
47.  $I(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ ;  
 $I(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 100^-$



9.  $(0, 2)$ ;  $y = 3$ ; creciente



11.  $(0, -1 + e^{-3})$ ;  $y = -1$ ; creciente



**Capítulo 6. Ejercicios de repaso, página 313**

A. 1. verdadero

5. verdadero

9. verdadero

13. falso

17. verdadero

3. verdadero

7. verdadero

11. falso

15. falso

B. 1.  $(1, 0)$ ;  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$

5.  $k = \frac{2}{3}$

9.  $y = -\frac{1}{2}$

3.  $f(x) = x^4$

7.  $x = 1, x = 4$

11.  $n = 0, n = 1, n = 2$

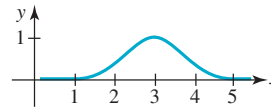
C. 1.  $3x^3 - \frac{1}{2}x + 1 + \frac{-\frac{1}{2}x + 5}{2x^2 - 1}$

13.  $f(x) = 6^x$

17.  $(5, \infty)$

21.  $x > 4$

25.

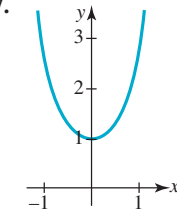


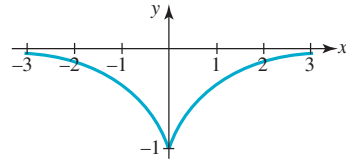
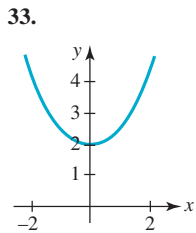
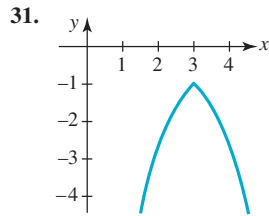
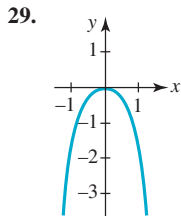
15.  $f(x) = (e^{-2})^x = e^{-2x}$

19.  $(-10, 0)$ ,  $(0, 10)$

23.  $x < 2$

27.

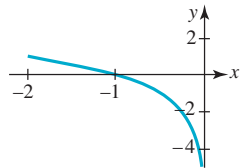
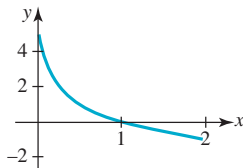




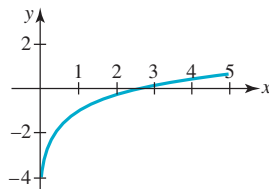
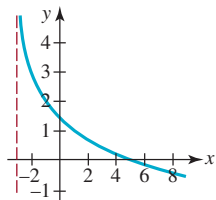
37.  $y = \frac{26}{9}x + \frac{29}{9}$

**Ejercicios 7.2, página 329**

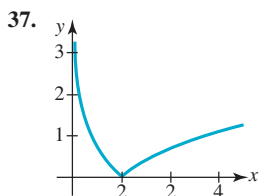
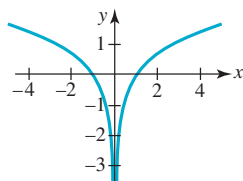
- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1. $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$ | 3. $4 = \log_{10} 10\,000$         |
| 5. $-s = \log_7 v$                     | 7. $2^7 = 128$                     |
| 9. $(\sqrt{3})^8 = 81$                 | 11. $b^y = u$                      |
| 13. $-7$                               | 15. $3$                            |
| 17. $e$                                | 19. $36$                           |
| 21. $\frac{1}{7}$                      | 23. $f(x) = \log_7 x$              |
| 25. $(0, \infty); (1, 0), x = 0$       | 27. $(-\infty, 0); (-1, 0), x = 0$ |



29.  $(-3, \infty); (5, 0), x = -3$       31.  $(0, \infty); (e, 0), x = 0$



33.  $-1 < x < 0$   
 35.  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}, (-1, 0), (1, 0), x = 0$

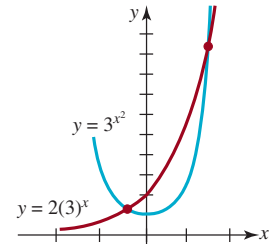
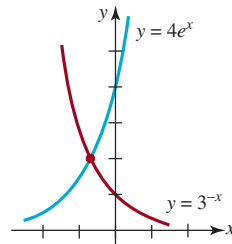


39. el intervalo  $(\frac{3}{2}, \infty)$

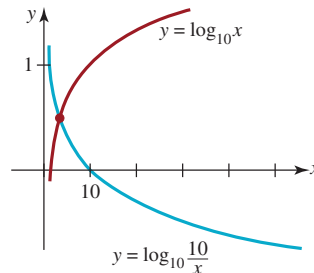
41. el intervalo  $(-3, 3)$       43.  $\log_{10} 50$   
 45.  $\ln(x^2 - 2)$       47.  $\ln 1 = 0$   
 49. 0.3011      51. 1.8063  
 53. 0.3495      55. 0.2007  
 57.  $-0.0969$       59. 1.6609  
 61.  $\ln y = 10 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3} \ln(8x^3 + 2)$   
 63.  $\ln y = 5 \ln(x^3 - 3) + 8 \ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln x - 9 \ln(7x + 5)$

**Ejercicios 7.3, página 336**

- |                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| 1. 2                   | 3. 2              |
| 5. 1.0802              | 7. 2              |
| 9. 3                   | 11. 0.3495        |
| 13. 2.7712             | 15. $\pm 4$       |
| 17. $\pm 3$            | 19. $-0.8782$     |
| 21. 32                 | 23. 45            |
| 25. $\pm \frac{1}{10}$ | 27. 81            |
| 29. $\frac{3}{2}$      | 31. 100           |
| 33. 2, 8               | 35. 1             |
| 37. 4                  | 39. $\frac{7}{2}$ |
| 41. 0, 2               | 43. 1, 16         |
45.  $\log_5(1 + \sqrt{2}) = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln 5}$   
 47.  $e^{-2}, e$       49. 0  
 51.  $(-3, 0)$   
 53.  $(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4}, 0) \approx (1.7925, 0)$   
 55.  $(-3, 0), (-2, 0), (0, 0)$   
 57. aproximadamente  $-0.6606$   
 59. aproximadamente  $-0.4481, 1.5468$



61.  $\sqrt{10} \approx 3.1623$       63.  $e^{-3}, e^3$

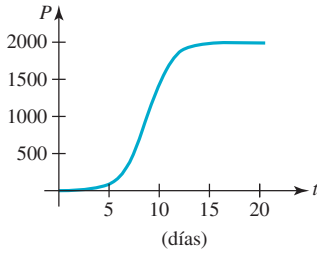


65. 9      67.  $x \approx 2.1944$

**Ejercicios 7.4, página 345**

1. (a)  $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$       (b)  $5.66P_0$       (c) 8.64 h  
 3. 2 344      5. 201

7. (a) 82 (b) 8.53 días (c) 2 000  
(d)



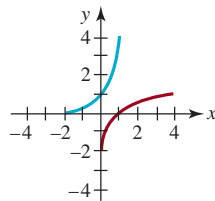
9.  $A(t) = 200e^{-0.005077t}$ ; 177 mg  
 11. aproximadamente 100 g, 50 g, 25 g  
 13. aproximadamente  $k = -0.08664$ ; 34.58 días  
 15.  $0.6730 A_0$ ;  $0.2264 A_0$   
 17. Aproximadamente 16 253 años  
 19. Aproximadamente 92%  
 21. (a)  $220.2^\circ\text{F}$  (b) 9.2 minutos (c)  $80^\circ\text{F}$   
 23. 8.74 minutos  
 25. Aproximadamente 1.6 horas  
 27. \$4 851 651.95;  $\$2.35 \times 10^{15}$   
 29. \$3 080.37 en interés  
 31. (a) 6 días (b) 19.84%  
 33.  $t = -\frac{L}{R} \ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$   
 35. aproximadamente 25 veces más fuerte  
 37. 5.5 39. 6  
 41. 7.6 43.  $5 \times 10^{-4}$   
 45.  $2.5 \times 10^{-7}$  47. 10 veces más ácida  
 49. 158.5 veces más ácida 51.  $5.62 \times 10^{25}$  ergs  
 53.  $10^{-2}$  watts/cm<sup>2</sup>  
 55. 65 dB  
 57. (a) 2.46 mm (b) 0.79 mm, 0.19 mm (c)  $7.7 \times 10^{-6}$  mL

**Ejercicios 7.5, página 351**

7. (a)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  (b)  $\frac{-3}{\sqrt{13}}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}$

**Capítulo 7. Ejercicios de repaso, página 352**

- A.** 1. verdadero 3. verdadero 5. verdadero  
 7. falso 9. verdadero 11. falso  
 13. verdadero  
**B.** 1. (0, 5);  $y = 6$  3. (-3, 0);  $x = -4$   
 5. -1 7. 1 000  
 9. 6 11.  $\frac{1}{9}$   
 13. 3 15.  $3 + e$   
 17. -7.8577 19. 64  
 21. 8  
**C.** 1.  $\log_5 0.2 = -1$  3.  $9^{1.5} = 27$   
 5. -2 7.  $-\frac{1}{2}$   
 9.  $1 - \log_2 7 = 1 - \frac{\ln 7}{\ln 2}$  11.  $-2 + \ln 6$   
 13.  $m = -\frac{1}{r} \ln(P/S)$  15.



17. C, D, A, B 19.  $\frac{3^{1-h} - 3}{h}$   
 21. (ii) 23. (iv)  
 25. (iii)  
 27. desplazamiento hacia arriba de una unidad  
 29.  $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{2} \ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$  31.  $f(x) = 5 + (\frac{1}{2})^x$   
 33. Después de duplicarse se necesitan 9 horas para volverse a duplicar. Dicho de otro modo, se requieren 18 horas para que la población cuadruple su tamaño original.  
 35.  $0.0625A_0$  o  $6\frac{1}{4}\%$  de la cantidad inicial  $A_0$   
 37. 4.3%  
 39.  $x = \frac{1}{c} [\ln b - \ln(\ln a - \ln y)]$

**Ejercicios 8.1, página 362**

1. 3.   
 5. 7.   
 9. 11.   
 13. 15.   
 17.  $10.6547^\circ$  19.  $5.17^\circ$   
 21.  $210^\circ 46' 48''$  23.  $30^\circ 48' 36''$   
 25.  $\pi/18$  27.  $\pi/4$   
 29.  $3\pi/2$  31.  $-23\pi/18$   
 33.  $40^\circ$  35.  $120^\circ$   
 37.  $225^\circ$  39.  $177.62^\circ$   
 41.  $155^\circ$  43.  $110^\circ$   
 45.  $-205^\circ$  47.  $7\pi/4$   
 49.  $1.3\pi$  51.  $2\pi - 4 \approx 2.28$   
 53.  $-\pi/4$   
 55. (a)  $41.75^\circ$  (b)  $131.75^\circ$   
 57. (a) El ángulo dado es mayor a  $90^\circ$ . (b)  $81.6^\circ$   
 59. (a)  $\pi/4$  (b)  $3\pi/4$   
 61. (a) El ángulo dado es mayor que  $\pi/2$ . (b)  $\pi/3$   
 63. (a)  $216^\circ$ ;  $1.2\pi$  (b)  $-1 845^\circ$ ;  $-10.25\pi$   
 65. Porque la aguja de la hora se mueve en sentido dextrógiro:  $-60^\circ$ ,  $-\pi/3$   
 67. (a) 16 h (b) 2 h  
 69. (a) 9 (b) 15  
 71. (a) 1.5 (b)  $85.94^\circ$   
 75. (a) 0.000072921 rad/s (b) 3.074641 km/s  
 77. 1.15 millas terrestres

79. (a)  $3\pi$  rad/s      (b)  $300\pi$  cm/s  
 81. (a) 711.1 rev/min      (b) 4 468 rad/min

**Ejercicios 8.2, página 369**

1.  $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4}$
3.  $\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = 3, \cot \theta = \frac{1}{3}, \sec \theta = \sqrt{10}, \csc \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$
5.  $\sin \theta = \frac{2}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan \theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}, \cot \theta = \frac{\sqrt{21}}{2}, \sec \theta = \frac{5\sqrt{21}}{21}, \csc \theta = \frac{5}{2}$
7.  $\sin \theta = \frac{1}{3}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}, \cot \theta = 2\sqrt{2}, \sec \theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \csc \theta = 3$
9.  $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tan \theta = \frac{y}{x}, \cot \theta = \frac{x}{y}, \sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \csc \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$
11.  $\tan \theta = \frac{2}{3}, \cot \theta = \frac{3}{2}, \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$
13.  $\tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \cot \theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \sec \theta = \frac{7\sqrt{5}}{15}, \csc \theta = \frac{7}{2}$
15.  $\cos \theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}, \cot \theta = 8, \sec \theta = \frac{\sqrt{65}}{8}, \csc \theta = \sqrt{65}$
17.  $\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}, \cot \theta = \frac{4}{3}$
19.  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = 2\sqrt{2}, \cot \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}, \sec \theta = 3$
21.  $\cos \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}, \cot \theta = \frac{5}{12}, \sec \theta = \frac{13}{5}, \csc \theta = \frac{13}{12}$
23.  $\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot \theta = \sqrt{3}, \csc \theta = 2$
25.  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{29}}{29}, \cos \theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}, \cot \theta = \frac{5}{2}, \sec \theta = \frac{\sqrt{29}}{5}, \csc \theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$
27.  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}, \cos \theta = \frac{3}{7}, \tan \theta = \frac{2\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = \frac{3\sqrt{10}}{20}, \csc \theta = \frac{7\sqrt{10}}{20}$
29.  $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$       31.  $\sqrt{2} - 1$
33. 3      35. 2      37. -1
39. 0      41. 5      43. 1
45. 1      47.  $\frac{1}{2}$       49.  $\sqrt{3}$
51.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       53.  $\frac{1}{2}$

**Ejercicios 8.3, página 374**

1.  $\tan 45^\circ = 1, \cot 45^\circ = 1, \sec 45^\circ = \sqrt{2}, \csc 45^\circ = \sqrt{2}$
3.  $\frac{1}{4}$       5. 2      7.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. 18      11.  $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
13.  $9\sqrt{3}$       15. 0      17.  $2\sqrt{2}$
19.  $\frac{3}{4}$       21.  $2 - \sqrt{3}$
23.  $\sin 17^\circ = 0.2924, \cos 17^\circ = 0.9563, \tan 17^\circ = 0.3057, \cot 17^\circ = 3.2709, \sec 17^\circ = 1.0457, \csc 17^\circ = 3.4203$
25.  $\sin 14.3^\circ = 0.2470, \cos 14.3^\circ = 0.9690, \tan 14.3^\circ = 0.2549, \cot 14.3^\circ = 3.9232, \sec 14.3^\circ = 1.0320, \csc 14.3^\circ = 4.0486$
27.  $\sin 71.50417^\circ = 0.9483, \cos 71.50417^\circ = 0.3172, \tan 71.50417^\circ = 2.9894, \cot 71.50417^\circ = 0.3345, \sec 71.50417^\circ = 3.1522, \csc 71.50417^\circ = 1.0545$
29.  $\sin \frac{\pi}{5} = 0.5878, \cos \frac{\pi}{5} = 0.8090, \tan \frac{\pi}{5} = 0.7265, \cot \frac{\pi}{5} = 1.3764, \sec \frac{\pi}{5} = 1.2361, \csc \frac{\pi}{5} = 1.7013$
31.  $\sin 0.6725 = 0.6229, \cos 0.6725 = 0.7823, \tan 0.6725 = 0.7963, \cot 0.6725 = 1.2558, \sec 0.6725 = 1.2783, \csc 0.6725 = 1.6053$

**Ejercicios 8.4, página 383**

1.  $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$
3.  $\sin \theta = -\frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{12}{5}, \csc \theta = -\frac{13}{12}, \sec \theta = \frac{13}{5}, \cot \theta = -\frac{5}{12}$

5.  $\sin \theta = 1, \cos \theta = 0, \tan \theta$  no está definida,  $\csc \theta = 1, \sec \theta$  no está definida,  $\cot \theta = 0$
7.  $\sin \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \tan \theta = -\frac{3}{2}, \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \sec \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \cot \theta = -\frac{2}{3}$
9.  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \csc \theta = -\sqrt{3}, \sec \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \cot \theta = \sqrt{2}$
11. III      13. II
15. I      17. II
19.  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \csc \theta = 4, \sec \theta = -\frac{4\sqrt{15}}{15}, \cot \theta = -\sqrt{15}$
21.  $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \csc \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \sec \theta = -\sqrt{10}, \cot \theta = \frac{1}{3}$
23.  $\sin \theta = -\frac{1}{10}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{11}}{33}, \sec \theta = \frac{10\sqrt{11}}{33}, \cot \theta = -3\sqrt{11}$
25.  $\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \csc \theta = -5, \sec \theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}, \cot \theta = -2\sqrt{6}$
27.  $\sin \theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}, \cos \theta = \frac{\sqrt{65}}{65}, \csc \theta = \frac{\sqrt{65}}{8}, \sec \theta = \sqrt{65}, \cot \theta = \frac{1}{8}$
29.  $\pm \frac{\sqrt{91}}{10}$
31.  $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$
33.  $\cos \theta = -\frac{1}{5}, \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$

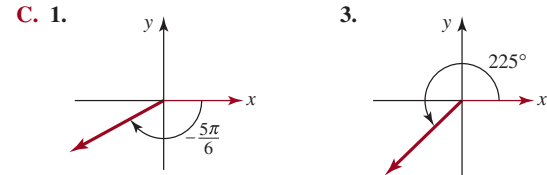
$\theta$ (radianes)	$\theta$ (grados)	seno $\theta$	coseno $\theta$	tan $\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	$\pi$	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360°	$2\pi$	0	1	0

37. -1
41.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
45. -2
49. 1
39.  $\sqrt{3}$
43. -2
47.  $\frac{1}{2}$
51. no definido

53.  $60^\circ, 240^\circ$       55.  $135^\circ, 225^\circ$   
 57.  $270^\circ$       59.  $0, \pi$   
 61.  $3\pi/4, 5\pi/4$       63.  $5\pi/6, 11\pi/6$   
 65.  $4.81 \text{ m}$   
 67. (a)  $978.0309 \text{ cm/s}^2$       (b)  $983.21642 \text{ cm/s}^2$   
 (c)  $980.61796 \text{ cm/s}^2$

**Capítulo 8. Ejercicios de repaso, página 386**

- A.** 1. verdadero    3. falso    5. falso  
 7. verdadero    9. verdadero  
**B.** 1.  $57^\circ$     3. en dirección levógiara    5. 2  
 7.  $\frac{5}{2}$     9.  $\pi/3$

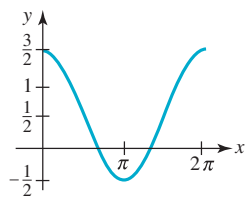
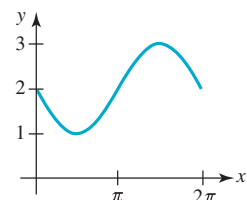
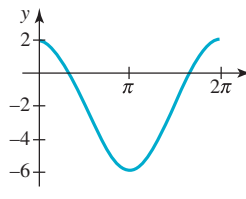
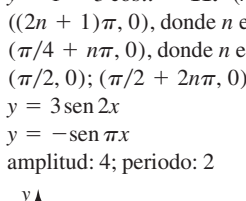
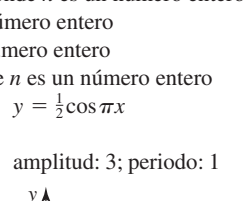
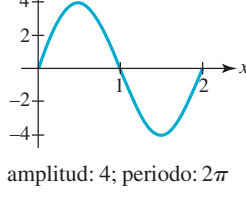
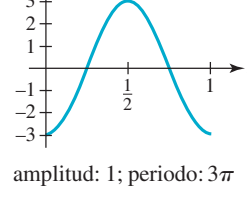
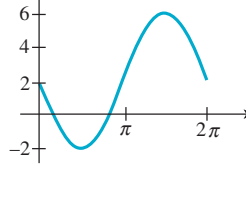
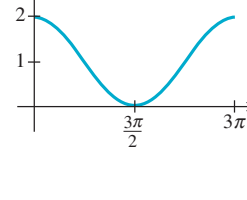
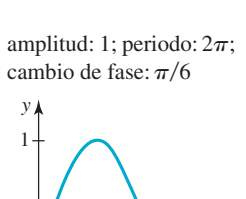
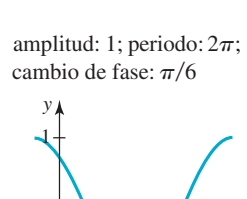


5.  $-2\pi/3$       7.  $0.27\pi$   
 9.  $20^\circ$       11.  $131.78^\circ$   
 13.  $70^\circ 30'$       15.  $177^\circ 37' 1''$   
 17.  $445^\circ, 805^\circ, -275^\circ, -635^\circ$  (Nota: puede haber otras respuestas.)  
 19.  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = -2, \cot \theta = -\frac{1}{2},$   
 $\sec \theta = -\sqrt{5}, \csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 21.  $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos \theta = -\frac{5\sqrt{34}}{34}, \tan \theta = \frac{3}{5}, \cot \theta = \frac{5}{3},$   
 $\sec \theta = -\frac{\sqrt{34}}{3}, \csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{3}$   
 23.  $\sin \theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}, \tan \theta = 4\sqrt{3}, \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{12}, \sec \theta = -7,$   
 $\csc \theta = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$   
 25.  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{26}}{26}, \cos \theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}, \tan \theta = -\frac{1}{5}, \sec \theta = \frac{\sqrt{26}}{5},$   
 $\csc \theta = -\sqrt{26}$   
 27.  $\sin \theta = -\frac{1}{7}, \cos \theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{12}, \cot \theta = 4\sqrt{3},$   
 $\sec \theta = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$   
 29.  $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{17}}{17}, \cos \theta = \mp \frac{4\sqrt{17}}{17}, \tan \theta = -\frac{1}{4}, \sec \theta = \mp \frac{\sqrt{17}}{4},$   
 $\csc \theta = \pm \sqrt{17}$   
 31.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       33.  $-1$   
 35.  $45^\circ, 135^\circ$       37.  $120^\circ, 240^\circ$   
 39.  $\pi/3, 2\pi/3$       41.  $3\pi/4, 7\pi/4$

**Ejercicios 9.1, página 396**

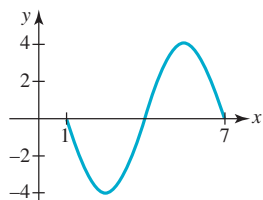
1. (b)  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$       3. (b)  $(0, -1)$   
 5. (b)  $(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$       7. (b)  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$   
 9. (b)  $(0.2675, 0.9636)$       11. (b)  $(0.6084, -0.7937)$   
 13. (b)  $(0.9833, -0.1822)$       15. (b)  $(-0.8569, -0.5155)$   
 17.  $\frac{1}{2}$       19.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 21.  $-1$       23.  $-1$   
 25.  $\sin t$  es de periodicidad  $2\pi$       27.  $\sin t$  es una función impar  
 29.  $\cos t$  es una función par      31.  $\frac{\sqrt{21}}{5}$   
 33.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       35.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$   
 37.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$   
 39.  $t = \pi/4 + 2n\pi, t = 3\pi/4 + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
 41.  $t = (2n + 1)\pi$ , donde  $n$  es un número entero

**Ejercicios 9.2, página 404**

1.  3.   
 5.  7.  $y = -3 \sin x$   
 9.  $y = 1 - 3 \cos x$     11.  $(n, 0)$ , donde  $n$  es un número entero  
 13.  $((2n + 1)\pi, 0)$ , donde  $n$  es un número entero  
 15.  $(\pi/4 + n\pi, 0)$ , donde  $n$  es un número entero  
 17.  $(\pi/2, 0); (\pi/2 + 2n\pi, 0)$ , donde  $n$  es un número entero  
 19.  $y = 3 \sin 2x$       21.  $y = \frac{1}{2} \cos \pi x$   
 23.  $y = -\sin \pi x$   
 25. amplitud: 4; periodo: 2      27. amplitud: 3; periodo: 1  
   
 29. amplitud: 4; periodo:  $2\pi$       31. amplitud: 1; periodo:  $3\pi$   
   
 33. amplitud: 1; periodo:  $2\pi$ ; cambio de fase:  $\pi/6$       35. amplitud: 1; periodo:  $2\pi$ ; cambio de fase:  $\pi/6$   
   
 37. amplitud: 4; periodo:  $\pi$ ; cambio de fase:  $3\pi/4$       39. amplitud: 3; periodo:  $4\pi$ ; cambio de fase:  $2\pi/3$   
 

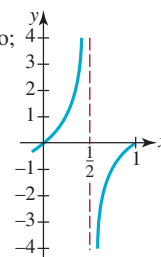


41. amplitud: 4; periodo: 6; cambio de fase: 1

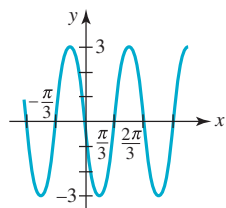


43.  $y = -5 + 3 \cos\left(6x + \frac{3\pi}{2}\right)$

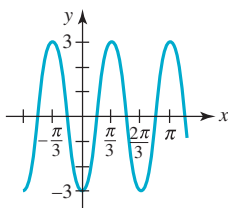
25. periodo: 1; intersecciones  $x: (n, 0)$ , donde  $n$  es un entero; asíntotas:  $x = \frac{2n+1}{2}$ ,  $n$  es un entero;



45.



$y = 3 \sin(3x - \pi)$



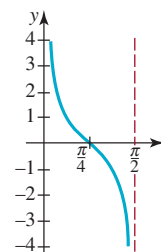
$y = 3 \cos(3x - \pi)$

27. periodo:  $\pi/2$ ;

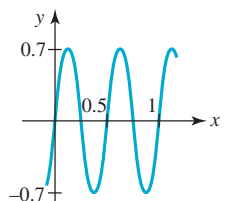
intersecciones  $x: \left(\frac{2n+1}{4}\pi, 0\right)$ ,

donde  $n$  es un entero;

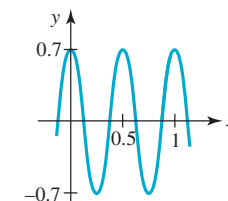
asíntotas:  $x = n\pi/2$ ,  $n$  es un entero;



47.



$y = 0.7 \sin[4\pi(x-4)]$



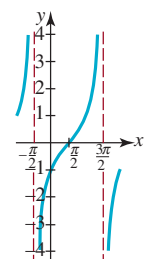
$y = 0.7 \cos[4\pi(x-4)]$

29. periodo:  $2\pi$ ;

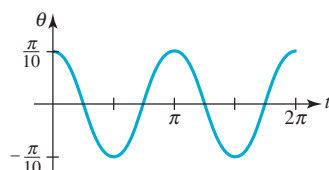
intersecciones  $x: \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0\right)$ ,

donde  $n$  es un entero;

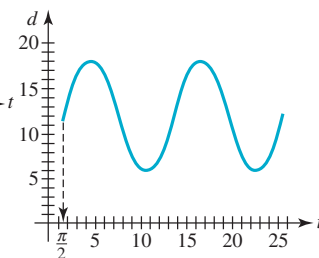
asíntotas:  $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $n$  es un entero;



51.



53.

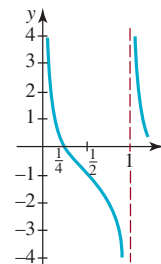


31. periodo: 1;

intersecciones  $x: \left(\frac{1}{4} + n, 0\right)$ ,

donde  $n$  es un entero;

asíntotas:  $x = n$ ,  $n$  es un entero;



**Ejercicios 9.3, página 413**

1. $x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-1$	$-\sqrt{3}$	$-$	$\sqrt{3}$	$1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-1$	$-\sqrt{3}$	$-$

3.  $\sqrt{3}$

5. no definido

7.  $-2/\sqrt{3}$

9.  $-1$

11.  $-2$

13. no definido

15.  $-2$

17.  $\sqrt{2}$

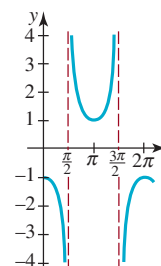
19.  $\cot x = -\frac{1}{2}$ ,  $\sec x = -\sqrt{5}$ ,  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sen x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\csc x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

21.  $\sen x = \frac{3}{4}$ ,  $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\tan x = \frac{3}{\sqrt{7}}$ ,  $\cot x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ,  $\sec x = \frac{4}{\sqrt{7}}$

23.  $\tan x = 3$ ,  $\cot x = \frac{1}{3}$ ,  $\sec x = \pm\sqrt{10}$ ,  $\csc x = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

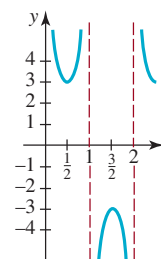
33. periodo:  $2\pi$ ;

asíntotas:  $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ ,  $n$  es un entero;

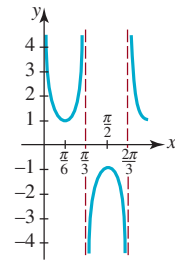


35. periodo: 2;

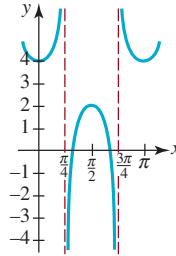
asíntotas:  $x = n$ ,  $n$  es un entero;



37. periodo:  $2\pi/3$ ;  
asíntotas:  $x = n\pi/3, n$  es un entero;

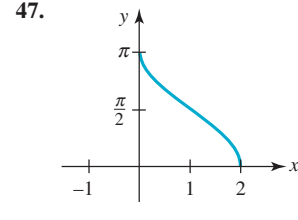
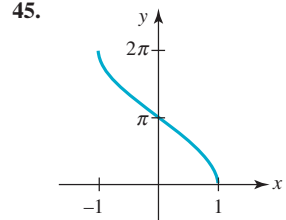
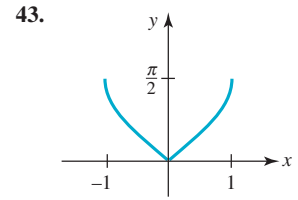
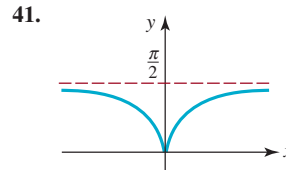


39. periodo:  $\pi$ ;  
asíntotas:  $x = \frac{2n-1}{4}\pi, n$  es un entero;

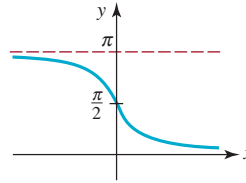


41.  $\cot x = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

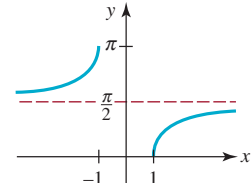
31.  $\pi/4$       33.  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$       35.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$   
37.  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$       39.  $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$



49. dominio:  $(-\infty, \infty)$ ;  
rango:  $(0, \pi)$



51. dominio:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ;  
rango:  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



**Ejercicios 9.4, página 421**

- |   |  |
|---|--|
| 1. $a \sin \theta$  | 3. $a \tan \theta$                     |
| 5. $\tan \theta$  | 7. $\frac{\sqrt{7}}{7} \cos \theta$    |
| 9. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$   | 11. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$ |
| 13. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$  | 15. $2 + \sqrt{3}$                     |
| 17. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$  | 19. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ |
| 21. $-\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$   | 23. $-2 + \sqrt{3}$                    |
| 25. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$  | 27. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ |
| 29. $-\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$   | 31. $\sin 2\beta$                      |
| 33. $\cos \frac{2\pi}{5}$   |  |
| 35. (a) $\frac{5}{9}$ (b) $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$ (c) $-\frac{2\sqrt{14}}{5}$   |  |
| 37. (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{4}{3}$                       |  |
| 39. (a) $-\frac{119}{169}$ (b) $-\frac{120}{169}$ (c) $\frac{120}{119}$         |  |
| 41. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$   | 43. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$    |
| 45. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$   | 47. $\frac{-2}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$   |
| 49. (a) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ (b) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{3}{2}$   |  |
| 51. (a) $-\sqrt{(5 - \sqrt{5})/10}$ (b) $\sqrt{(5 + \sqrt{5})/10}$              |  |
| (c) $-\sqrt{(3 + \sqrt{5})/2}$  |  |
| 53. (a) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |  |
| 55. (a) $-\frac{2}{9}(\sqrt{10} + 1)$ (b) $\frac{1}{9}(\sqrt{5} - 4\sqrt{2})$   |  |
| (c) $\frac{2}{9}(1 - \sqrt{10})$ (d) $\frac{1}{9}(\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$        |  |
| 57. $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 3.86$   |  |

**Ejercicios 9.5, página 430**

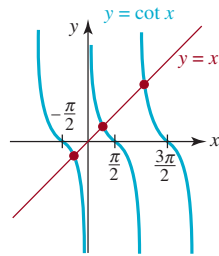
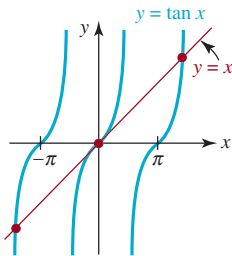
- |                  |                      |                   |
|------------------|----------------------|-------------------|
| 1. 0             | 3. $\pi$             | 5. $\pi/3$        |
| 7. $-\pi/3$      | 9. $\pi/4$           | 11. $-\pi/6$      |
| 13. $-\pi/4$     | 15. $\frac{4}{5\pi}$ | 17. $-\sqrt{5}/2$ |
| 19. $\sqrt{5}/5$ | 21. $\frac{5}{3\pi}$ | 23. $\frac{1}{5}$ |
| 25. 1.2          | 27. $\pi/16$         | 29. 0             |

53. (a)  $x$  en  $(-\infty, \infty)$       (b)  $x$  en  $(0, \pi)$   
55. (a)  $x$  en  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$       (b)  $x$  en  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$   
59. 0.9273      61.  $-0.7297$   
63. 2.5559      65.  $19.9^\circ, 70.1^\circ$   
67.  $5.76^\circ$       69.  $\phi = 0.5404$  radianes  $\approx 31^\circ$

**Ejercicios 9.6, página 438**

1.  $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$  o  $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
3.  $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$  o  $x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
5.  $x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
7.  $x = \pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
9.  $x = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
11.  $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
13.  $\theta = 60^\circ + 360^\circ n, \theta = 120^\circ + 360^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
15.  $\theta = 135^\circ + 180^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
17.  $\theta = 120^\circ + 360^\circ n, \theta = 240^\circ + 360^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
19.  $x = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
21. sin soluciones  
23.  $\theta = 120^\circ + 360^\circ n, \theta = 240^\circ + 360^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
25.  $\theta = 90^\circ + 180^\circ n, \theta = 135^\circ + 180^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
27.  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
29.  $\theta = 10^\circ + 120^\circ n, \theta = 50^\circ + 120^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero  
31.  $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero  
33.  $x = n\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero

35.  $\theta = 30^\circ + 360^\circ n, \theta = 150^\circ + 360^\circ n, \theta = 270^\circ + 360^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero
37.  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , donde  $n$  es un número entero
39.  $x = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero
41.  $\theta = 2n\pi, \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero
43.  $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ , donde  $n$  es un número entero
45.  $\theta = 90^\circ + 180^\circ n, \theta = 360^\circ n$ , donde  $n$  es un número entero
47.  $(\pi/3, 0), (2\pi/3, 0), (\pi, 0)$
49.  $(\frac{2}{3}, 0), (\frac{10}{3}, 0), (\frac{14}{3}, 0)$
51.  $(\pi, 0), (2\pi, 0), (3\pi, 0)$
53.  $(\pi/3, 0), (\pi, 0), (5\pi/3, 0)$
55. La ecuación tiene infinidad de soluciones.
57. La ecuación tiene infinidad de soluciones.

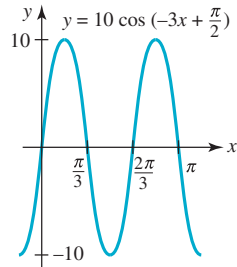
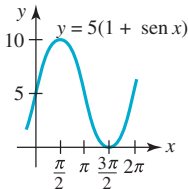


59. 1.37, 1.82
63. 0.58, 1.57, 1.81
67.  $60^\circ$
69.  $t = \frac{1}{120}(\frac{1}{6} + n)$ , donde  $n$  es un número entero
71. (a) 36.93 millones de kilómetros cuadrados  
(b)  $w = 31$  semanas (c) Agosto

61. -1.02, 0.55
65.  $30^\circ, 150^\circ$

### Capítulo 9. Ejercicios de repaso, página 440

- A. 1. falso 3. verdadero 5. verdadero 7. verdadero  
9. verdadero 11. verdadero 13. verdadero 15. falso  
17. falso 19. verdadero
- B. 1.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  3. 6 5.  $4\pi/3$  7. 10  
9.  $\pi/5$  11.  $(5, 0)$
13.  $\sqrt{(3 - \sqrt{2})/6}, -\sqrt{(3 + \sqrt{2})/6}, -\frac{2\sqrt{14}}{9}, -\frac{5}{9}$
- C.
1. amplitud: 5; periodo:  $2\pi$
3. amplitud: 10; periodo:  $2\pi/3$ ; cambio de fase:  $\pi/6$



5.  $\pi/2, \pi$
9.  $\pi/4$
13.  $2\pi/3$
7.  $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$
11. -0.68, 0.92
15.  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

17. 0
21.  $\sqrt{1 - x^2}$
25.  $3\sin(4x - \pi); -3\sin(4x + \pi)$
27.  $y = -\sin x, y = \cos(x + \pi/2)$
29.  $y = 1 + \frac{1}{2}\sin(x + \pi/2), y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$
19.  $\frac{12}{13}$
23.  $6\sin(\pi x/2); -6\sin(\pi x/2)$

### Ejercicios 10.1, página 445

1.  $b = 2.04, c = 4.49$
3.  $a = 11.71, c = 14.19$
5.  $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, a = 2.6$
7.  $\alpha = 21.8^\circ, \beta = 68.2^\circ, c = 10.8$
9.  $\alpha = 48.6^\circ, \beta = 41.4^\circ, b = 7.9$
11.  $a = 8.5, c = 21.7$

### Ejercicios 10.2, página 449

1. 52.1 m
5. 409.7 ft
9.  $8.7^\circ$
13. 20.2 ft
17. Sí, ya que la altitud de la tormenta es de aproximadamente 6.3 km
21. 227 100 mi
23.  $h = \frac{c}{\cot \alpha + \cot \beta}$
3. 66.4 ft
7. altura: 15.5 ft; distancia: 12.6 ft
11. 34 157 ft  $\approx$  6.5 mi
15. 6 617 ft
25. La altura es aproximadamente 1.35; el área es aproximadamente 4.8
27.  $h(\theta) = 1.25 \tan \theta$
29.  $\theta(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2x}\right)$ , donde  $x$  se mide en metros

### Ejercicios 10.3, página 456

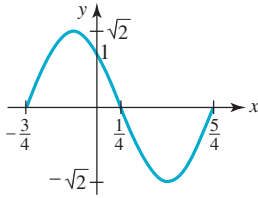
1.  $\gamma = 80^\circ, a = 20.16, c = 20.16$
3.  $\alpha = 92^\circ, b = 3.01, c = 3.89$
5.  $\alpha = 79.61^\circ, \gamma = 28.39^\circ, a = 12.41$
7. sin solución
9.  $\alpha = 24.46^\circ, \beta = 140.54^\circ, b = 12.28;$   
 $\alpha = 155.54^\circ, \beta = 9.46^\circ, b = 3.18$
11. sin solución
13.  $\alpha = 45.58^\circ, \gamma = 104.42^\circ, c = 13.56;$   
 $\alpha = 134.42^\circ, \gamma = 15.58^\circ, c = 3.76$
15. sin solución
17. 15.80 ft
19. 9.07 m
21. 10.35 ft
23.  $8.81^\circ$

### Ejercicios 10.4, página 460

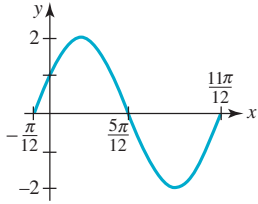
1.  $\alpha = 37.59^\circ, \beta = 77.41^\circ, c = 7.43$
3.  $\alpha = 52.62^\circ, \beta = 83.33^\circ, \gamma = 44.05^\circ$
5.  $\alpha = 25^\circ, \beta = 57.67^\circ, c = 7.04$
7.  $\alpha = 76.45^\circ, \beta = 57.10^\circ, \gamma = 46.45^\circ$
9.  $\alpha = 27.66^\circ, \beta = 40.54^\circ, \gamma = 111.80^\circ$
11.  $\alpha = 36.87^\circ, \beta = 53.13^\circ, \gamma = 90^\circ$
13.  $\alpha = 26.38^\circ, \beta = 36.34^\circ, \gamma = 117.28^\circ$
15.  $\beta = 10.24^\circ, \gamma = 147.76^\circ, a = 6.32$
17. 35.94 millas náuticas
19. (a) S33.66°O (b) S2.82°E
21.  $\alpha = 119.45^\circ, \beta = 67.98^\circ$
23. 91.77, 176.18

**Ejercicios 10.5, página 466**

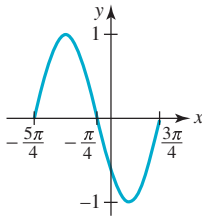
1.  $y = \sqrt{2}\text{sen}(\pi x + 3\pi/4)$ ; amplitud:  $\sqrt{2}$ ; periodo: 2; cambio de fase:  $\frac{3}{4}$ ; un ciclo de la gráfica es:



3.  $y = 2\text{sen}(2x + \pi/6)$ ; amplitud: 2; periodo:  $\pi$ ; cambio de fase:  $\pi/12$ ; un ciclo de la gráfica es:



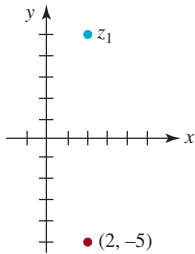
5.  $y = \text{sen}(x + 5\pi/4)$ ; amplitud: 1; periodo:  $2\pi$ ; cambio de fase:  $5\pi/4$ ; un ciclo de la gráfica es:



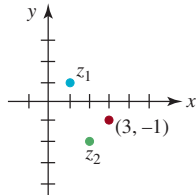
7.  $y = \frac{\sqrt{13}}{4}\text{sen}(2t + 0.5880)$ ; amplitud:  $\frac{\sqrt{13}}{4}$  de pie; periodo:  $\pi$  segundos; frecuencia:  $1/\pi$  ciclos por segundo  
 9.  $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{sen}(4t + 4.2487)$ ; amplitud:  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  de pie; periodo:  $\pi/2$  segundos; frecuencia:  $2/\pi$  ciclos por segundo  
 11.  $y_0 = -\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ,  $v_0 = \frac{5}{2}$   
 13.  $I(t) = I_0\text{sen}(\omega t + \theta + \phi)$

**Ejercicios 10.6, página 471**

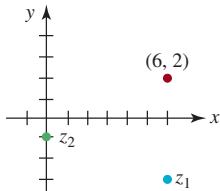
1.  $\bar{z}_1 = 2 - 5i$



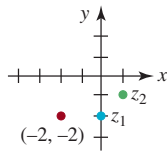
3.  $z_1 + z_2 = 3 - i$



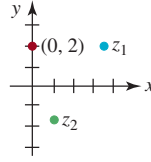
5.  $\bar{z}_1 + z_2 = 6 + 2i$



7.  $z_1 z_2 = -2 - 2i$



9.  $\frac{z_1}{z_2} = 2i$



11.  $r = 1, \theta = \frac{5\pi}{3}$

13.  $r = 3\sqrt{2}, \theta = 289.47^\circ$       15.  $r = \frac{\sqrt{10}}{4}, \theta = 341.57^\circ$

17.  $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$       19.  $r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$

21.  $r = \sqrt{5}, \theta = 333.43^\circ$       23.  $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

25.  $z = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

27.  $z = \sqrt{29}(\cos 111.8^\circ + i\text{sen} 111.8^\circ)$

29.  $z = \sqrt{34}(\cos 300.96^\circ + i\text{sen} 300.96^\circ)$

31.  $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

33.  $1 + i$       35.  $-5\sqrt{3} - 5i$

37.  $\sqrt{3} + i$       39.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

41.  $\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{5}i$

43.  $z_1 z_2 = 18\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ ,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

45.  $z_1 z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

47.  $z_1 z_2 = 10\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\text{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$ ,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\text{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$

49.  $z_1 z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\text{sen}\frac{\pi}{12}\right) \approx 3.3461 + 0.8966i$ ,

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\text{sen}\frac{7\pi}{12}\right) \approx -0.4483 + 1.6730i$

51.  $z_1 z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\text{sen}\frac{\pi}{8}\right) \approx 11.0866 + 4.5922i$ ,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\text{sen}\frac{3\pi}{8}\right) \approx 0.2870 + 0.6929i$

**Ejercicios 10.7, página 475**

1.  $-1$       3.  $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

5.  $-\frac{243}{2}\sqrt{3} - \frac{243}{2}i$

7. aproximadamente  $19.5543 + 123.4610i$

9. aproximadamente  $26.5099 + 19.2605i$

11.  $-16i$       13.  $-1$

15.  $-8i$       17.  $-64$

19.  $-16\sqrt{3} + 16i$       21.  $-16\sqrt{2}$

23.  $-7 - 24i$       25.  $1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i$

27.  $0.9239 + 0.3827i, -0.3827 + 0.9239i,$

$-0.9239 - 0.3827i, 0.3827 - 0.9239i$

29.  $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right),$

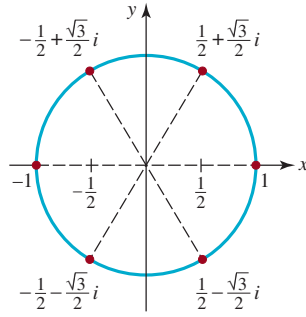
$\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right), \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)$

31.  $\sqrt[4]{2}(0.9239 + 0.3827i), \sqrt[4]{2}(-0.9239 - 0.3827i)$

33.  $1.9754 + 0.3129i, 0.7167 + 1.8672i, -1.2586 + 1.5543i,$

$-1.9754 - 0.3129i, -0.7167 - 1.8672i, 1.2586 - 1.5543i$

35.  $1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$



37.  $n = 8k, k = 1, 2, 3, \dots; n = 2 + 8k, k = 0, 1, 2, \dots;$   
 $n = 5 + 8k, k = 0, 1, 2, \dots; n = 1 + 8k, k = 0, 1, 2, \dots$

39.  $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i, \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i,$   
 $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

41.  $-2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

### Capítulo 10. Ejercicios de repaso, página 477

- A. 1. verdadero      3. verdadero      5. verdadero  
 B. 1. Senos          3. Cosenos      5.  $z = 5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

7.  $\frac{1}{4}(\cos 5^\circ + i \operatorname{sen} 5^\circ)$       9. 1

C. 1.  $\gamma = 80^\circ, a = 5.32, c = 10.48$

3.  $a = 15.76, \beta = 99.44^\circ, \gamma = 29.56^\circ$

5. 42.61 m

7. 118 ft

9. (a) 42.35°

11. 16,927.6 km

13. frente:  $18.88^\circ$ ; parte de atrás:  $35.12^\circ$       15.  $V(\theta) = 160 \operatorname{sen} 2\theta$

17.  $L(\theta) = 3 \operatorname{csc} \theta + 4 \operatorname{sec} \theta$

19.  $V(\theta) = 360 + 75 \cot \theta$

21.  $A(\phi) = 100 \cos \phi + 50 \operatorname{sen} 2\phi$

23.  $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}, 3\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

25.  $r = \sqrt{13}, \theta = 123.69^\circ, \sqrt{13}(\cos 123.69^\circ + i \operatorname{sen} 123.69^\circ)$

27.  $-2 - 2\sqrt{3}i$

29.  $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12}\right),$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}\right)$$

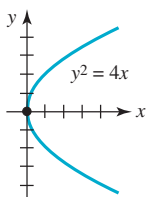
31.  $-8 + 8i$

33. 2,  $0.6180 + 1.9021i, -1.6180 + 1.1756i,$   
 $-1.6180 - 1.1756i, 0.6180 - 1.9021i$

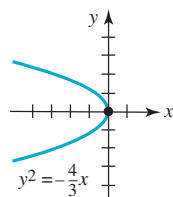
35.  $(x - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i)(x + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i)(x + 3i)$

### Ejercicios 11.1, página 487

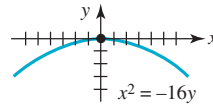
1. Vértice: (0, 0)  
 Focos: (1, 0)  
 Directriz:  $x = -1$   
 Eje:  $y = 0$



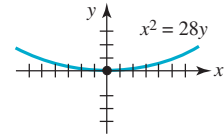
3. Vértice: (0, 0)  
 Focos:  $(-\frac{1}{3}, 0)$   
 Directriz:  $x = \frac{1}{3}$   
 Eje:  $y = 0$



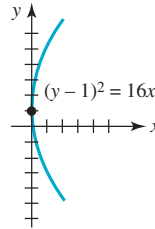
5. Vértice: (0, 0)  
 Focos: (0, -4)  
 Directriz:  $y = 4$   
 Eje:  $x = 0$



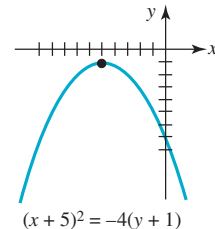
7. Vértice: (0, 0)  
 Focos: (0, 7)  
 Directriz:  $y = -7$   
 Eje:  $x = 0$



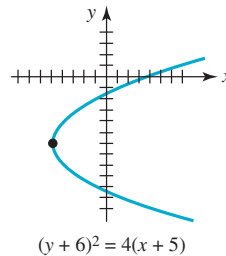
9. Vértice: (0, 1)  
 Focos: (4, 1)  
 Directriz:  $x = -4$   
 Eje:  $y = 1$



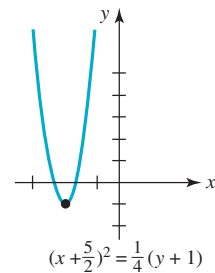
11. Vértice: (-5, -1)  
 Focos: (-5, -2)  
 Directriz:  $y = 0$   
 Eje:  $x = -5$



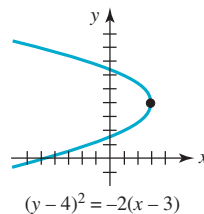
13. Vértice: (-5, -6)  
 Focos: (-4, -6)  
 Directriz:  $x = -6$   
 Eje:  $y = -6$



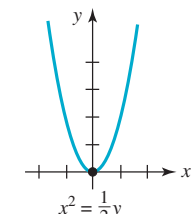
15. Vértice:  $(-\frac{5}{2}, -1)$   
 Focos:  $(-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16})$   
 Directriz:  $y = -\frac{17}{16}$   
 Eje:  $x = -\frac{5}{2}$



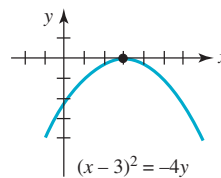
17. Vértice: (3, 4)  
 Focos:  $(\frac{5}{2}, 4)$   
 Directriz:  $x = \frac{7}{2}$   
 Eje:  $y = 4$



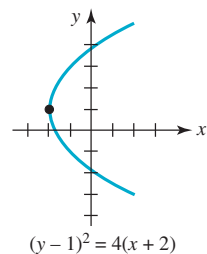
19. Vértice: (0, 0)  
 Focos:  $(0, \frac{1}{8})$   
 Directriz:  $y = -\frac{1}{8}$   
 Eje:  $x = 0$



21. Vértice: (3, 0)  
 Focos: (3, -1)  
 Directriz:  $y = 1$   
 Eje:  $x = 3$



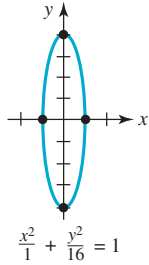
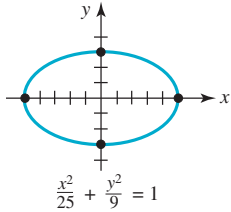
23. Vértice: (-2, 1)  
 Focos: (-1, 1)  
 Directriz:  $x = -3$   
 Eje:  $y = 1$



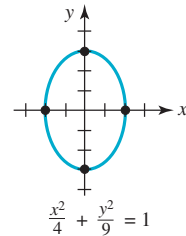
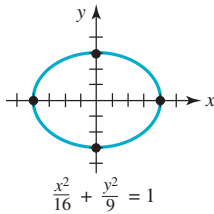
25.  $x^2 = 28y$   
 29.  $y^2 = 10x$   
 33.  $(y - 4)^2 = -12(x - 2)$   
 37.  $(y + 3)^2 = 32x$   
 41.  $(x - 5)^2 = -24(y - 1)$   
 45.  $(3, 0), (0, -2), (0, -6)$   
 49. en el foco, a 6 pulgadas del vértice  
 51.  $y = -2$   
 55. 4.5 ft
27.  $y^2 = -16x$   
 31.  $(x - 2)^2 = 12y$   
 35.  $(x - 1)^2 = 32(y + 3)$   
 39.  $x^2 = 7y$   
 43.  $x^2 = \frac{1}{2}y$   
 47.  $(-3\sqrt{2}, 0), (3\sqrt{2}, 0), (0, 9)$   
 53. 27 ft  
 57. (a) 8

**Ejercicios 11.2, página 493**

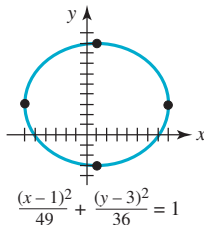
1. Centro:  $(0, 0)$   
 Foco:  $(\pm 4, 0)$   
 Vértices:  $(\pm 5, 0)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(0, \pm 3)$   
 Excentricidad:  $\frac{4}{5}$
3. Centro:  $(0, 0)$   
 Foco:  $(0, \pm \sqrt{15})$   
 Vértices:  $(0, \pm 4)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(\pm 1, 0)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{15}/4$



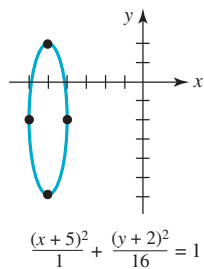
5. Centro:  $(0, 0)$   
 Foco:  $(\pm \sqrt{7}, 0)$   
 Vértices:  $(\pm 4, 0)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(0, \pm 3)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{7}/4$
7. Centro:  $(0, 0)$   
 Foco:  $(0, \pm \sqrt{5})$   
 Vértices:  $(0, \pm 3)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(\pm 2, 0)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{5}/3$



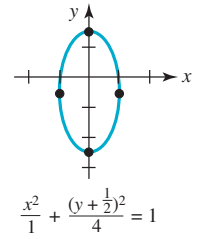
9. Centro:  $(1, 3)$   
 Foco:  $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$   
 Vértices:  $(-6, 3), (8, 3)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(1, -3), (1, 9)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{13}/7$



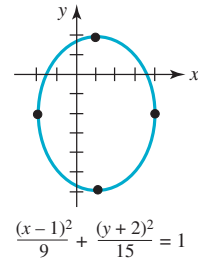
11. Centro:  $(-5, -2)$   
 Foco:  $(-5, -2 \pm \sqrt{15})$   
 Vértices:  $(-5, -6), (-5, 2)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(-6, -2), (-4, -2)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{15}/4$



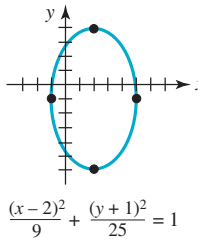
13. Centro:  $(0, -\frac{1}{2})$   
 Foco:  $(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$   
 Vértices:  $(0, -\frac{5}{2}), (0, \frac{3}{2})$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(-1, -\frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})$   
 Excentricidad:  $\sqrt{3}/2$



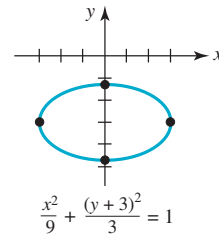
15. Centro:  $(1, -2)$   
 Foco:  $(1, -2 \pm \sqrt{6})$   
 Vértices:  $(1, -2 \pm \sqrt{15})$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(-2, -2), (4, -2)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{\frac{2}{3}}$



17. Centro:  $(2, -1)$   
 Foco:  $(2, -5), (2, 3)$   
 Vértices:  $(2, -6), (2, 4)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(-1, -1), (5, -1)$   
 Excentricidad:  $\frac{4}{5}$



19. Centro:  $(0, -3)$   
 Foco:  $(\pm \sqrt{6}, -3)$   
 Vértices:  $(-3, -3), (3, -3)$   
 Puntos extremo del eje menor:  $(0, -3 \pm \sqrt{3})$   
 Excentricidad:  $\sqrt{6}/3$



21.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

23.  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$

25.  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$

27.  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

29.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$

31.  $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$

33.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$

35.  $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

37.  $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

39.  $\frac{x^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

41. La distancia mínima es 28.5 millones de millas; la distancia mayor es 43.5 millones de millas

43. Aproximadamente 0.97

45. 12 ft

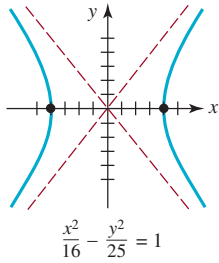
47. El trozo de cuerda debe ser de 4 pies de largo. Las tachuelas deben colocarse a  $\sqrt{7}/2$  del centro del rectángulo en el eje mayor de la elipse.

49. En el eje mayor, a 12 pies de cualquier desde el centro de la habitación

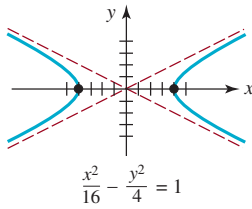
51.  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 24x - 48y = 0$

**Ejercicios 11.3, página 502**

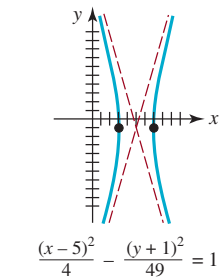
1. Centro: (0, 0)  
 Foco:  $(\pm\sqrt{41}, 0)$   
 Vértices:  $(\pm 4, 0)$   
 Asíntota:  $y = \pm \frac{5}{4}x$   
 Excentricidad:  $\sqrt{41}/4$



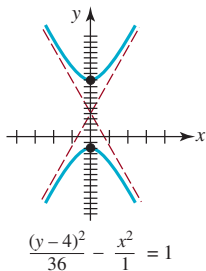
5. Centro: (0, 0)  
 Foco:  $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$   
 Vértices:  $(\pm 4, 0)$   
 Asíntota:  $y = \pm \frac{1}{2}x$   
 Excentricidad:  $\sqrt{5}/2$



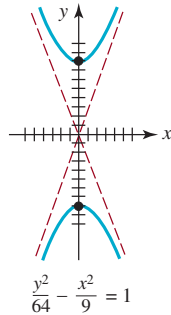
9. Centro: (5, -1)  
 Foco:  $(5 \pm \sqrt{53}, -1)$   
 Vértices: (3, -1), (7, -1)  
 Asíntota:  $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x - 5)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{53}/2$



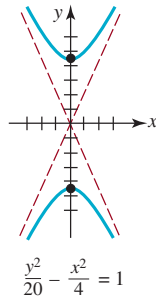
11. Centro: (0, 4)  
 Foco:  $(0, 4 \pm \sqrt{37})$   
 Vértices: (0, -2), (0, 10)  
 Asíntota:  $y = 4 \pm 6x$   
 Excentricidad:  $\sqrt{37}/6$



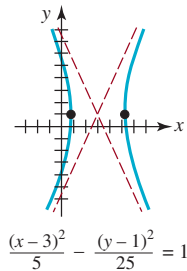
3. Centro: (0, 0)  
 Foco:  $(0, \pm\sqrt{73})$   
 Vértices:  $(0, \pm 8)$   
 Asíntota:  $y = \pm \frac{8}{3}x$   
 Excentricidad:  $\sqrt{73}/8$



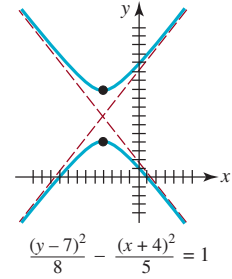
7. Centro: (0, 0)  
 Foco:  $(0, \pm 2\sqrt{6})$   
 Vértices:  $(0, \pm 2\sqrt{5})$   
 Asíntota:  $y = \pm \sqrt{5}x$   
 Excentricidad:  $\sqrt{6}/5$



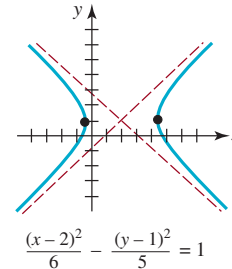
13. Centro: (3, 1)  
 Foco:  $(3 \pm \sqrt{30}, 1)$   
 Vértices:  $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$   
 Asíntota:  $y = 1 \pm \sqrt{5}(x - 3)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{6}$



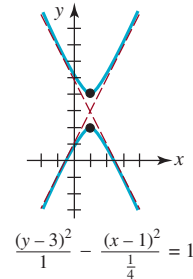
15. Centro: (-4, 7)  
 Foco:  $(-4, 7 \pm \sqrt{13})$   
 Vértices:  $(-4, 7 \pm 2\sqrt{2})$   
 Asíntota:  $y = 7 \pm \sqrt{5/3}(x + 4)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{13}/8$



17. Centro: (2, 1)  
 Foco:  $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$   
 Vértices:  $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$   
 Asíntota:  $y = 1 \pm \sqrt{5/6}(x - 2)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{11}/6$



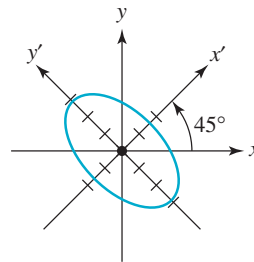
19. Centro: (1, 3)  
 Foco:  $(1, 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$   
 Vértices: (1, 2), (1, 4)  
 Asíntota:  $y = 3 \pm 2(x - 1)$   
 Excentricidad:  $\sqrt{5}/2$



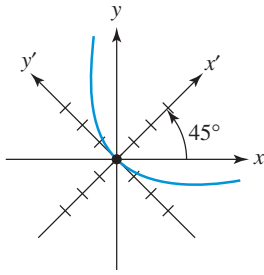
21.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$     23.  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$     25.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$   
 27.  $\frac{y^2}{\frac{25}{4}} - \frac{x^2}{\frac{11}{4}} = 1$     29.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$     31.  $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$   
 33.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$     35.  $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$   
 37.  $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$     39.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$   
 41.  $\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$     43.  $\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$   
 45. (-7, 12)  
 47.  $7y^2 - 24xy + 24x + 82y + 55 = 0$

**Ejercicios 11.4, página 508**

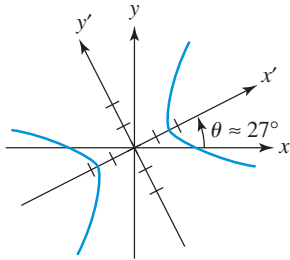
1.  $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$     3.  $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})$   
 5.  $(4 + \sqrt{3}, 1 - 4\sqrt{3})$     7. (-4, 0)  
 9. aproximadamente (2.31, 6.83)  
 11. elipse rotada 45°,  $3x'^2 + y'^2 = 8$ ,



13. parábola rotada  $45^\circ$ ,  $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$



15. hipérbola rotada aproximadamente  $27^\circ$ ,  $2x'^2 - 3y'^2 = 6$



17. elipse,  $3(x' + \sqrt{5})^2 + 8y'^2 = 24$

19. parábola,  $(y' - 1)^2 = -(x' - \frac{3}{2})$

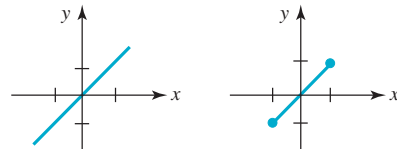
21. (a)  $y' = x'^2$

(b) coordenadas  $x'y'$ :  $(0, \frac{1}{4})$ ; coordenadas  $xy$ :  $(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8})$

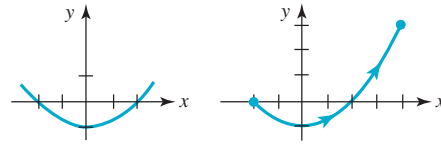
(c)  $y' = -\frac{1}{4}2x - 2\sqrt{3}y = 1$

23. hipérbola    25. parábola    27. elipse

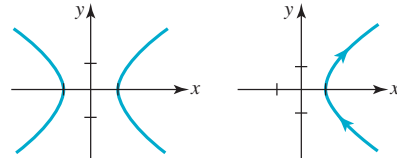
19.



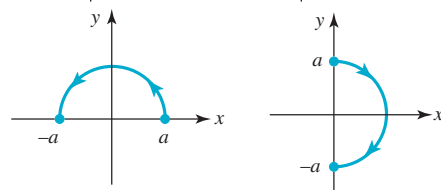
21.



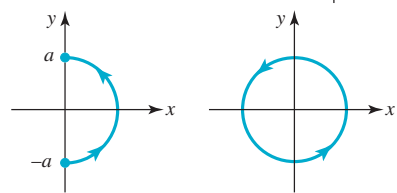
23.



25.



27.



29.  $(3, 0)$ ;  $(0, 1)$ ,  $(0, 3)$

31. El segmento de recta entre  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

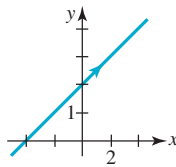
33.  $x = 95\sqrt{2}t$ ,  $y = -16t^2 + 95\sqrt{2}t$ ,  $t \geq 0$ ;  
 $(190\sqrt{2}, 190\sqrt{2} - 64) \approx (268.70, 204.70)$

35.  $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2 \sin^2 \phi}$ ,  $y = L \sin \phi$

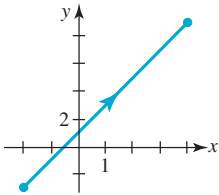
**Ejercicios 11.5, página 515**

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$

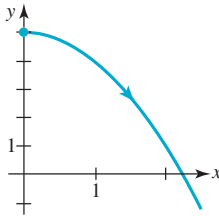
intersecciones:  $(-4, 0)$ ,  $(0, 2)$ ; curva:



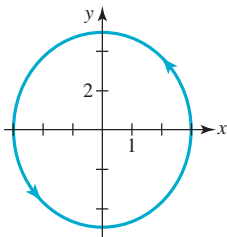
3.



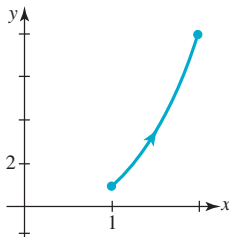
5.



7.



9.



11.  $y = x^2 + 3x - 1, x \geq 0$

13.  $x = 1 - 2y^2, -1 \leq x \leq 1$

15.  $y = \ln x, x > 0$

17.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

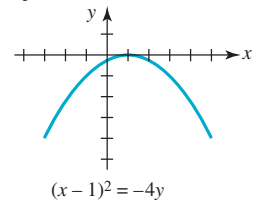
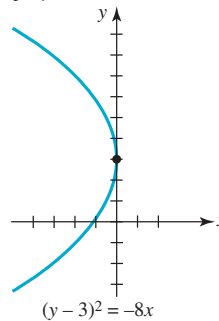
**Capítulo 11. Ejercicios de repaso, página 517**

- A. 1. verdadero    3. falso    5. verdadero    7. verdadero  
 9. verdadero    11. verdadero    13. verdadero    15. falso  
 17. falso    19. falso

- B. 1.  $y^2 = 20x$     3.  $(x - 1)^2 = 8(y + 5)$   
 5.  $(0, 0)$     7. 1  
 9.  $(-3, 0)$ ;  $(-3, -1)$ ,  $(-3, 1)$     11.  $(0, -\sqrt{2})$ ,  $(0, \sqrt{2})$

13. 1    15. recta  
 17.  $(5, 0)$     19.  $(0, -2)$ ,  $(0, 2)$

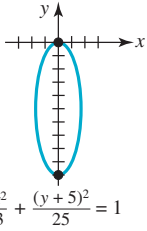
- C. 1. Vértice:  $(0, 3)$   
 Foco:  $(-2, 3)$   
 Directriz:  $x = 2$   
 Eje:  $y = 3$   
 3. Vértice:  $(1, 0)$   
 Foco:  $(1, -1)$   
 Directriz:  $y = 1$   
 Eje:  $x = 1$





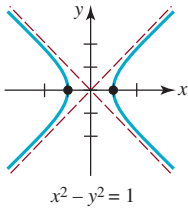
5.  $(x - 1)^2 = 8(y + 5)$

9. Centro:  $(0, -5)$   
 Vértices:  $(0, -10), (0, 0)$   
 Foco:  $(0, -5 - \sqrt{22}), (0, -5 + \sqrt{22})$

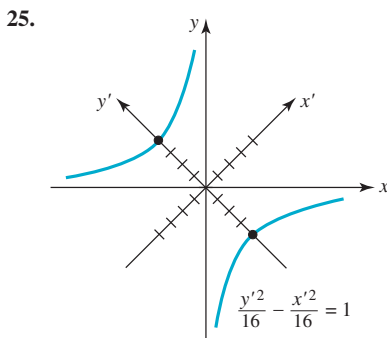


13.  $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

17. Centro:  $(0, 0)$   
 Vértices:  $(-1, 0), (1, 0)$   
 Foco:  $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$   
 Asíntotas:  $y = \pm x$

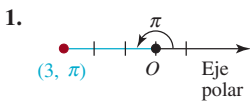


21.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$



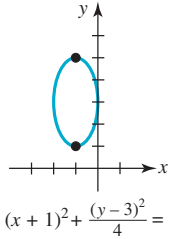
27.  $(x + 5)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$

**Ejercicios 12.1, página 525**



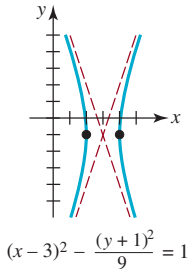
7.  $(x - 1)^2 = 3(y - 2)$

11. Centro:  $(-1, 3)$   
 Vértices:  $(-1, 1), (-1, 5)$   
 Foco:  $(-1, 3 - \sqrt{3}), (-1, 3 + \sqrt{3})$



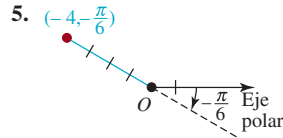
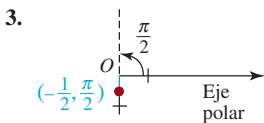
15.  $\frac{x^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$

19. Centro:  $(3, -1)$   
 Vértices:  $(2, -1), (4, -1)$   
 Foco:  $(3 - \sqrt{10}, -1), (3 + \sqrt{10}, -1)$   
 Asíntotas:  $y + 1 = \pm 3(x - 3)$

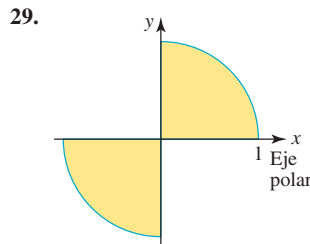
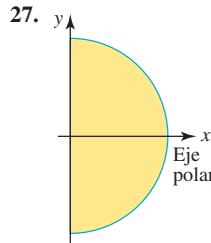
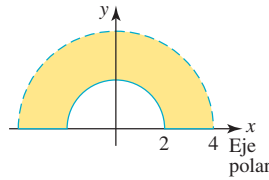


23.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

29.  $1.95 \times 10^9 \text{ m}$



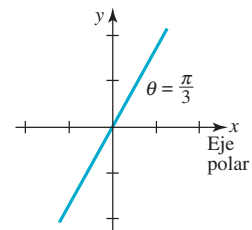
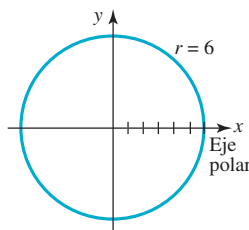
- 7. (a)  $(2, -5\pi/4)$  (b)  $(2, 11\pi/4)$
- (c)  $(-2, 7\pi/4)$  (d)  $(-2, -\pi/4)$
- 9. (a)  $(4, -5\pi/3)$  (b)  $(4, 7\pi/3)$
- (c)  $(-4, 4\pi/3)$  (d)  $(-4, -2\pi/3)$
- 11. (a)  $(1, -11\pi/6)$  (b)  $(1, 13\pi/6)$
- (c)  $(-1, 7\pi/6)$  (d)  $(-1, -5\pi/6)$
- 13.  $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  (b)  $(-2\sqrt{2}, \pi/4)$
- 17.  $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$  (b)  $(-2, 2\pi/3)$
- 19. (a)  $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$  (b)  $(-7, \pi)$
- 21. (a)  $(2, -\pi/3)$
- 23. (a)  $(7, 0)$



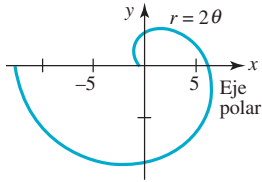
- 31.  $r = 5 \csc \theta$
- 35.  $r = 2/(1 + \cos \theta)$
- 39.  $r = 1 - \cos \theta$
- 43.  $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$
- 47.  $x^2 + y^2 + 5y = 0$
- 51.  $3x + 8y = 5$
- 33.  $\theta = \tan^{-1} 7$
- 37.  $r = 6$
- 41.  $x = 2$
- 45.  $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$
- 49.  $8x^2 - 12x - y^2 + 4 = 0$

**Ejercicios 12.2, página 534**

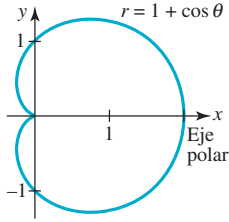
- 1. círculo
- 3. la recta pasa por el polo



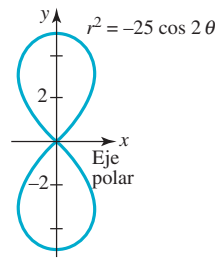
5. espiral



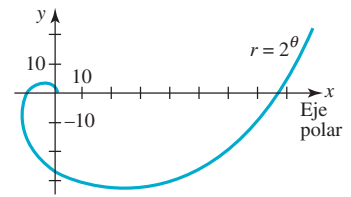
7. cardioide



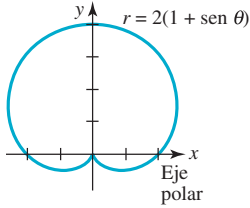
29. lemniscata



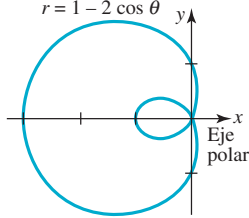
31.



9. cardioide



11. caracol con bucle interior



33.  $r = \frac{5}{2}$

37.  $r = 2 \cos 4\theta$

41.  $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2), \text{origen}$

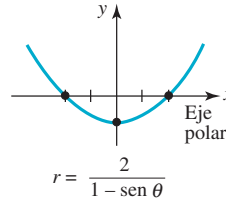
35.  $r = 4 - 3 \cos \theta$

39.  $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$

43.  $(0, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3})$

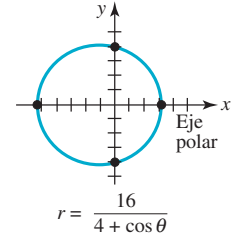
**Ejercicios 12.3, página 540**

1.  $e = 1$ , parábola



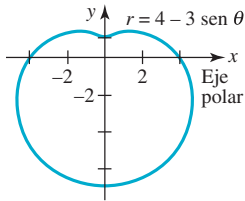
$$r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$$

3.  $e = \frac{1}{4}$ , elipse

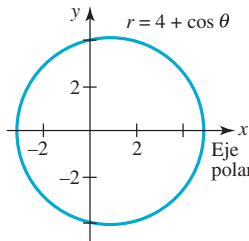


$$r = \frac{16}{4 + \cos \theta}$$

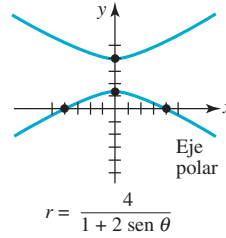
13. caracol cóncavo



15. caracol convexo

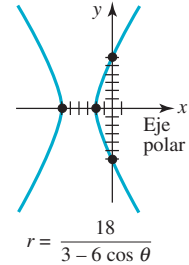


5.  $e = 2$ , hipérbola



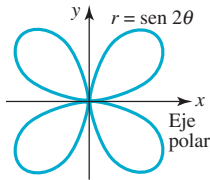
$$r = \frac{4}{1 + 2 \sin \theta}$$

7.  $e = 2$ , hipérbola

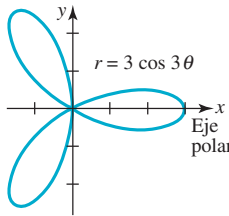


$$r = \frac{18}{3 - 6 \cos \theta}$$

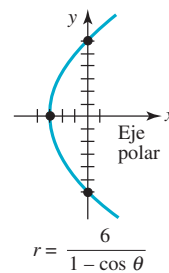
17. rosa



19. rosa



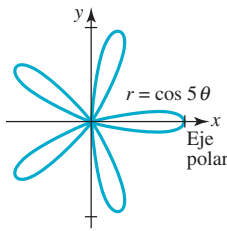
9.  $e = 1$ , parábola



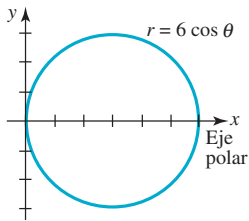
$$r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$$

11.  $e = 2, \frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

21. rosa



23. círculo con centro en el eje x



13.  $e = \frac{2}{3}, \frac{(x - \frac{24}{5})^2}{\frac{1296}{25}} + \frac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1$

17.  $r = \frac{4}{3 - 2 \sin \theta}$

21.  $r = \frac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$

25.  $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$

29. vértice:  $(2, \pi/4)$

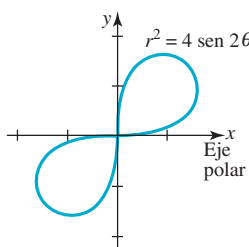
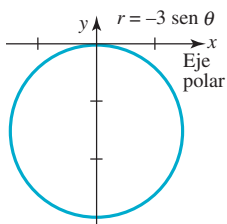
15.  $r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$

19.  $r = \frac{12}{1 + 2 \cos \theta}$

23.  $r = \frac{3}{1 - \sin \theta}$

27.  $r = \frac{1}{2 - 2 \sin \theta}$

25. círculo con centro en el eje y 27. lemniscata



31. vértices:  $(10, \pi/3)$  y  $(\frac{10}{3}, 4\pi/3)$

33.  $r_p = 8\,000$  km

35.  $r = \frac{1.495 \times 10^8}{1 - 0.0167 \cos \theta}$

43. 10.16, 30.26°

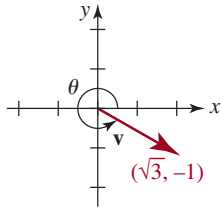
45.  $2i - 10j$

47. El curso real crea un ángulo de 71.6° desde el punto de partida.

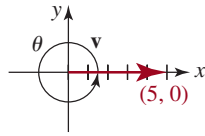
49. 52.9 mi/h

**Ejercicios 12.4, página 548**

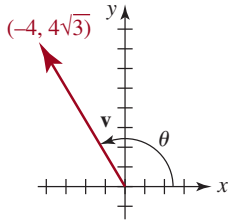
1.  $|v| = 2, \theta = 11\pi/6$



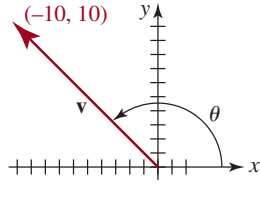
3.  $|v| = 5, \theta = 2\pi$



5.  $|v| = 8, \theta = 2\pi/3$



7.  $|v| = 10\sqrt{2}, \theta = 3\pi/4$



9.  $\langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle -6, -9 \rangle, \langle 2, 13 \rangle$

11.  $\langle 0, 3 \rangle, \langle -8, 1 \rangle, \langle 12, -6 \rangle, \langle -28, 2 \rangle$

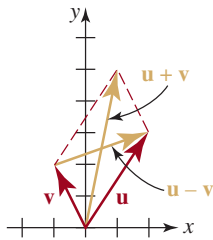
13.  $\langle -\frac{9}{2}, -\frac{29}{4} \rangle, \langle -\frac{11}{2}, -\frac{27}{4} \rangle, \langle 15, 21 \rangle, \langle -17, -20 \rangle$

15.  $-31i - 14j, 42i + 11j$

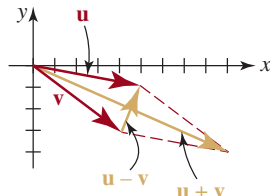
17.  $-\frac{15}{2}i - \frac{3}{2}j, 11i - 3j$

19.  $5.8i + 8.5j, -6.6i - 10.3j$

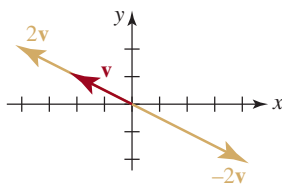
21.



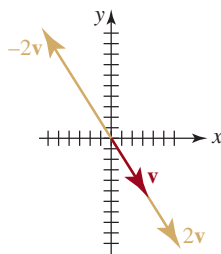
23.



25.



27.



29. componente horizontal: 4; componente vertical: -6

31. componente horizontal: -10; componente vertical: 8

33. (a)  $2(\cos \frac{3\pi}{4} i + \sin \frac{3\pi}{4} j)$  (b)  $-\sqrt{2}i + \sqrt{2}j$

35. (a)  $6(\cos \frac{5\pi}{6} i + \sin \frac{5\pi}{6} j)$  (b)  $-3\sqrt{3}i + 3j$

37. (a)  $\langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$  (b)  $\langle -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} \rangle$

39. (a)  $\langle 0, -1 \rangle$  (b)  $\langle 0, 1 \rangle$  41.  $\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \rangle$

**Ejercicios 12.5, página 555**

1. 10

3. 1

5. -17

7. 12

9. 13

11. -68

13.  $\frac{13}{2}$

15. 8

17.  $(\frac{17}{26}, -\frac{85}{26})$

19.  $25\sqrt{2}$

21. 102.53°

23. 63.43°

25. no ortogonal

27. ortogonal

29.  $c = 3$

33.  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

35.  $-3\sqrt{2}$

37. (a)  $-\frac{21}{5}i + \frac{28}{5}j$  (b)  $-\frac{7}{2}i + \frac{7}{2}j$

39.  $\frac{72}{25}i + \frac{96}{25}j$

41. 1 000 ft-lb

43.  $\frac{78}{5}$  ft-lb

**Capítulo 12. Ejercicios de repaso, página 557**

A. 1. verdadero

3. verdadero

5. falso

7. verdadero

9. falso

11. verdadero

13. falso

B. 1. (1, 1)

3.  $(10, 3\pi/2)$

5.  $\frac{1}{2}$

7. hipérbola

9. caracol convexo

11.  $\pi/2$  radianes o 90°

13.  $\frac{12}{13}i + \frac{5}{13}j$

C. 1.  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

3.  $r = 4 \text{ sen } \theta$

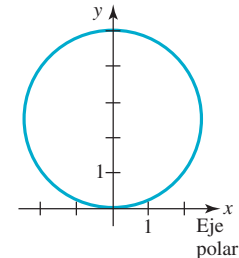
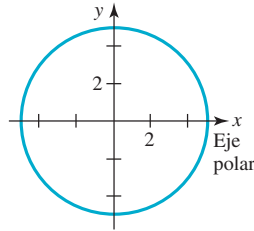
5.  $(0, 2), (0, -\frac{2}{3})$

7. (a)  $(\sqrt{6}, -\pi/4)$

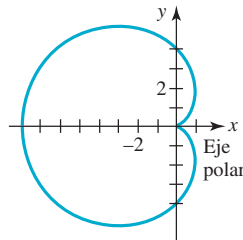
(b)  $(-\sqrt{6}, 3\pi/4)$

9. círculo de radio 5; centro en el origen

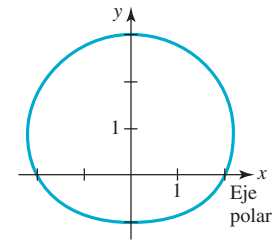
11. círculo con centro en el eje y



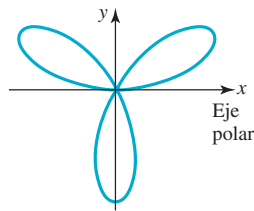
13. cardiode



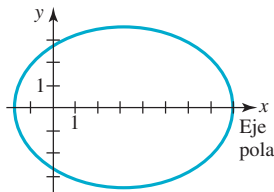
15. caracol convexo



17. rosa



19. elipse



21.  $r = 3 \operatorname{sen} 10\theta$   
 23. (a)  $r = 2 \cos(\theta - \pi/4)$  (b)  $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$   
 25. (b) centro  $(b/2, a/2)$ , radio  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$   
 27.  $13\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$  29.  $3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$   
 31.  $7\mathbf{i} - 13\mathbf{j}$  33.  $\frac{-3}{\sqrt{17}}$   
 35.  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  37.  $\sqrt{13} + 2\sqrt{2}$   
 39.  $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j}\right)$  41.  $-\frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$

**Ejercicios 13.1, página 566**

- (0, 2); consistente; independiente
- $(-\frac{12}{13}, -\frac{35}{13})$ ; consistente; independiente
- sin soluciones; independiente
- $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ; consistente; independiente
- $(-2\alpha + 4, \alpha)$ ;  $\alpha$  un número real; consistente; dependiente
- (1, 2, 3); consistente; independiente
- $(-1, \frac{1}{2}, -3)$ ; consistente; independiente
- sin soluciones; independiente
- (0, 0, 0); consistente; independiente
- $(7, -5, \frac{1}{3})$ ; consistente; independiente
- $(2\alpha + 3\beta - 2, \beta, \alpha)$ ;  $\alpha$  y  $\beta$  números reales; consistente; dependiente
- sin soluciones; independiente
- (1, -2, 4, 8); consistente; independiente
- $x = 2, y = 3$
- $x = 10^3, y = 10^{-7}$
- $T_1 = \frac{200 \cos 15^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 300.54, T_2 = \frac{200 \cos 25^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 281.99$
- plano: 575 mi/h; viento: 25 mi/h
- 50 gal del primer tanque; 40 gal del segundo
- $P_1: 4 \text{ h}; P_2: 12 \text{ h}; P_3: 6 \text{ h}$
- 25
- 20 A, 5 B y 15 C

**Ejercicios 13.2, página 572**

- dos soluciones
  - dos soluciones
  - una solución
  - ninguna solución
  - ninguna solución
  - ninguna solución
  - ninguna solución
  - ninguna solución
  - (1, 1)
  - (0, 1)
  - $(\sqrt{3}, 3)$
  - sin soluciones
  - $(-\sqrt{5}, \sqrt{5}), (\sqrt{5}, \sqrt{5})$
  - (0, 0),  $(-2\sqrt{5}, 4), (2\sqrt{5}, 4), (-2\sqrt{3}, -4), (2\sqrt{3}, -4)$
  - sin soluciones
- 

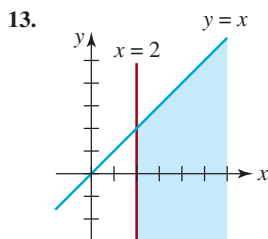
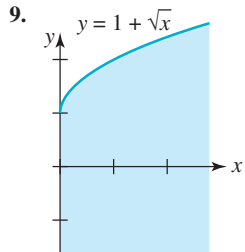
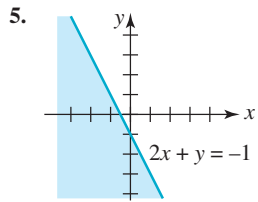
- $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5}), (\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{4}{5}\sqrt{5})$
- $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0), (-2, -1), (2, -1)$
- $(-1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}), (-1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$
- $\left\{ \left( \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\} \cup \left\{ \left( \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\}$
- $\left\{ \left( \frac{\pi}{6} + 2n\pi, 1 \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\} \cup \left\{ \left( \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, 1 \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\} \cup \left\{ \left( \frac{7\pi}{6} + 2n\pi, -1 \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\} \cup \left\{ \left( \frac{11\pi}{6} + 2n\pi, -1 \right) \mid n = 0, \pm 1, \dots \right\}$
- (0.1, -1), (100, 000, 5)
- (-101, -201), (99, 199)
- $(5, \log_3 5)$
- $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
- $(1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}), (1, 0, 0), (-1, 0, 0)$
- 50 ft  $\times$  80 ft
- cada radio es de 4 cm
- aproximadamente 7.9 in  $\times$  12.7 in
- 2 pies  $\times$  2 pies  $\times$  8 pies, o aproximadamente 7.06 pies  $\times$  7.06 pies  $\times$  0.64 pies

**Ejercicios 13.3, página 580**

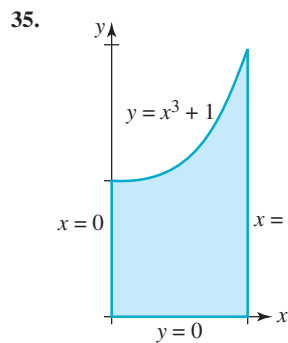
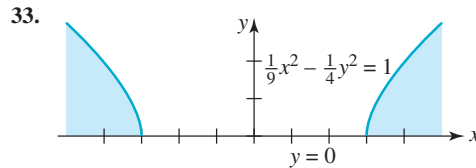
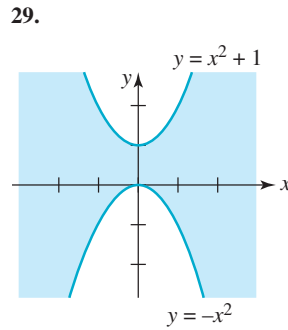
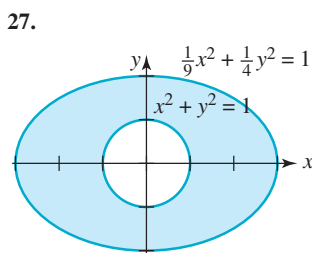
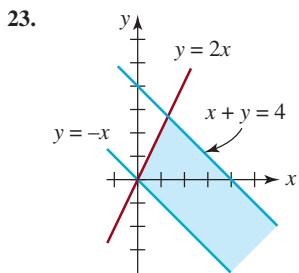
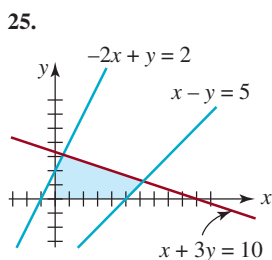
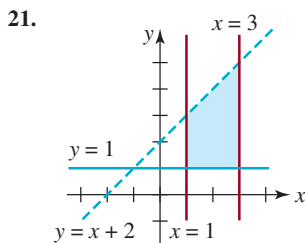
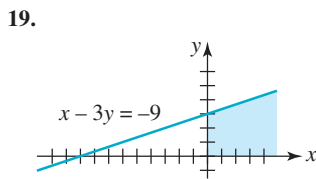
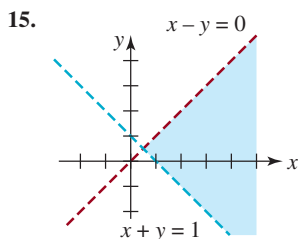
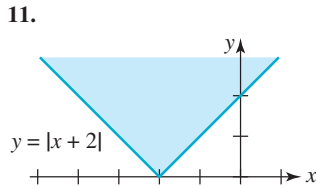
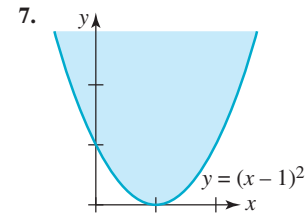
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$
- $\frac{6}{x+1} - \frac{3}{x-5}$
- $\frac{3}{x+1} - \frac{10}{x+2} + \frac{21}{x+3}$
- $\frac{3}{x+4} + \frac{3}{x-4}$
- $\frac{5}{x-3} + \frac{9}{(x-3)^2}$
- $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$
- $-\frac{11}{27} - \frac{7}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{54}$
- $\frac{1}{x-1} + \frac{5x-2}{x^2+9}$
- $\frac{36}{2x-3} + \frac{-4x+26}{x^2-x+1}$
- $-\frac{7}{t+1} + \frac{9}{t-1} + \frac{-1}{t^2+1} - 4$
- $\frac{2x}{x^2+2} - \frac{x}{x^2+1}$
- $\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
- $x^3 + x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$
- $\frac{1}{2} - \frac{13}{x+2} + \frac{13}{2x+1}$
- $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 + \frac{64}{x-2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{5x+2}{x^2+1}$

**Ejercicios 13.4, página 584**

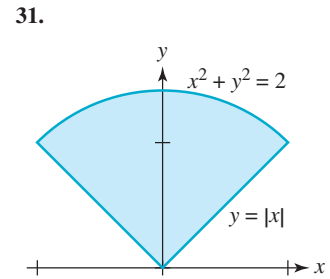
- 
-



17. sin soluciones



39. 
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$$



37. 
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 12 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

### Ejercicios 13.5, página 590

- mínimo: 11; máximo: 33
- mínimo: 0; máximo:  $\frac{39}{2}$
- mínimo: 12; máximo: 54
- mínimo: 1; máximo: 13
- mínimo: 0; máximo: 30
- mínimo: 25; máximo:  $\frac{175}{3}$
- mínimo:  $\frac{68}{3}$ . La función objetivo no tiene máximo, ya que puede crecer sin cota al aumentar  $x$ .
- mínimo:  $\frac{110}{3}$ . La función objetivo no tiene máximo, ya que puede crecer sin cota al aumentar  $x$  o  $y$ .
- 50 radios por satélite; 100 reproductores de DVD
- tres cápsulas de X; una de Y
- 1 300 pantalones vaqueros de diseñador y 50 genéricos a la tienda de lujo; ningún pantalón vaquero de diseñador y 1 200 de marca genérica a la tienda de descuento. La ganancia máxima es \$28 855.
- 17 kg de plantas acuáticas y 16 kg de plantas terrestres.

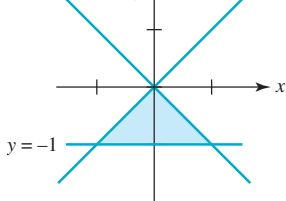
### Capítulo 13. Ejercicios de repaso, página 593

- A.**
- verdadero
  - verdadero
  - verdadero
  - falso
  - verdadero
  - verdadero
- B.**
- inconsistente
  - semiplano
  - división larga
  - dependiente
  - segundo

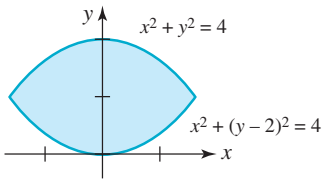
- C. 1.  $(-1, 0), (6, -7)$   
 3.  $(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}), (-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}), (\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}), (\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$   
 5.  $(100, 2)$       7.  $(e^2, e^{-1})$   
 9.  $(0, 0, 0)$       11.  $(-1, 4, -5)$   
 13.  $(-2, \frac{1}{64})$       15. 33  
 17. longitud del lado del cuadrado:  $\frac{4 - \pi}{4(4 + \pi)} \approx 0.03$ ;  
 radio del círculo:  $\frac{1}{4 + \pi} \approx 0.14$

19.  $\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{7}{12}}{x+3}$

23.  $y = -x$        $y = x$



27.  $x^2 + y^2 = 4$   
 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

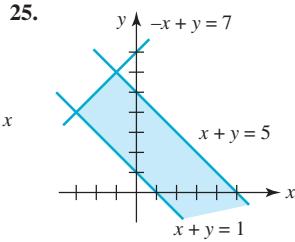


29.  $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \geq 2 - x \end{cases}$

31.  $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \leq 2 - x \end{cases}$

35. 6 hectáreas de maíz y 6 de avena

21.  $\frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4}{(x^2 + 4)^2}$



33. mínimo: 20; máximo: 380

**Ejercicios 14.1, página 601**

1.  $3 \times 3$       3.  $3 \times 2$   
 5.  $1 \times 1$       7.  $3 \times 1$   
 9.  $5 \times 7$       11. 7  
 13. -9      15.  $-\frac{3}{4}$   
 17.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       19.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 18 \end{bmatrix}$   
 21.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 8 & 4 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$       23. no igual  
 25. igual      27.  $x = 3, y = -4, z = -1$   
 29.  $x = 9, y = -\frac{3}{2}, z = \frac{5}{4}, w = 1$       31.  $x = \pm 2, y = \pm 3$   
 33.  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       35.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$   
 37.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

**Ejercicios 14.2, página 608**

1.  $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$   
 $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 16 & 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 & -18 & 7 \\ 0 & 8 & 15 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 8 & 32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 6 & 28 \end{bmatrix}$   
 5.  $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}$   
 7.  $\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 & 12 \\ 22 & 19 \end{bmatrix}$   
 9.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$   
 11.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$

13.  $\begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & -6 & 13 \\ 12 & -12 & 21 \\ 12 & -18 & 30 \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

17.  $AB$  no está definida;  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19.  $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, [-11]$

23.  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{bmatrix}$

27.  $\begin{bmatrix} -38 \\ -2 \end{bmatrix}$

31.  $2 \times 3$

37.  $\begin{bmatrix} -5 & 15 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

43.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Una entrada de 1 significa que  $P_5, P_6, P_7$

o  $P_8$  ha tenido sólo un contacto secundario con  $X$  o  $Y$ . Una entrada de 2 significa dos contactos secundarios, ya sea con  $X$  o  $Y$ , y así sucesivamente.

45.  $\begin{bmatrix} 120 & 20 \\ 144 & 24 \\ 288 & 48 \end{bmatrix}$ . Las tres entradas en la primera columna

representan (en dólares) el impuesto estatal sobre las ventas de amplificadores, radios y bocinas, respectivamente, en la tienda de menudeo. Las entradas en la segunda columna representan el impuesto municipal sobre las ventas de amplificadores, radios y bocinas, respectivamente, en la tienda de menudeo.

47.  $\begin{bmatrix} 950 & 475 & 380 \\ 760 & 190 & 475 \\ 1900 & 570 & 190 \\ 950 & 950 & 950 \end{bmatrix}$       49. [385]

**Ejercicios 14.3, página 617**

1.  $M_{11} = -2, M_{12} = 3, M_{21} = 0, M_{22} = 4; A_{11} = -2, A_{12} = -3, A_{21} = 0, A_{22} = 4$   
 3.  $M_{11} = 5, M_{12} = 10, M_{13} = 3, M_{21} = -35, M_{22} = 29, M_{23} = -21, M_{31} = -8, M_{32} = -16, M_{33} = 15; A_{11} = 5, A_{12} = -10, A_{13} = 3, A_{21} = 35, A_{22} = 29, A_{23} = 21, A_{31} = -8, A_{32} = 16, A_{33} = 15$   
 5. -7      7. 12  
 9.  $a^2 + b^2$       11. 60  
 13. -61      15. -862  
 17.  $-abcd$       19. Teorema 12.3.2(ii)  
 21. Teorema 12.3.2(i)  
 23. Teorema 12.3.2(v), donde -4 veces la tercera fila se suma a la primera fila  
 25. Teorema 12.3.2(iv)

27. 101  
 37. -5, 2  
 41. Al sumar la segunda fila a la tercera se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Con base en el teorema 12.3.2(iv), el último determinante es 0

43. -3  
 47. -6  
 29. 560  
 39. -2, -1, 3  
 45. 0  
 49. -4

**Ejercicios 14.4, página 626**

3.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$   
 5. no existe la inversa

7.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \end{bmatrix}$   
 9.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

11. no existe la inversa  
 13.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} -\frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$   
 17. no existe la inversa

19.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$   
 21.  $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} \frac{7}{66} & -\frac{4}{33} & \frac{10}{33} \\ -\frac{2}{33} & \frac{7}{33} & -\frac{1}{33} \\ -\frac{13}{66} & -\frac{2}{33} & \frac{5}{33} \end{bmatrix}$   
 25.  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

27.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

**Ejercicios 14.5, página 634**

1.  $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$   
 3.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$   
 5.  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$   
 7.  $(3\alpha - 4, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 9.  $(2, 1, -3)$   
 11.  $(-1, \alpha - 4, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 13.  $(-\frac{1}{3}\alpha + \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 15.  $(4, 3, \frac{1}{3})$   
 17.  $(3, -1, 0)$   
 19. sin solución  
 21.  $(0, 0, 0)$   
 23.  $(10\alpha, 8\alpha, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 25.  $(1, 2, 1, 0)$   
 27.  $(19\alpha + 27, -10\alpha - 10, 2\alpha + 3, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 29.  $(-\frac{3}{7}\alpha + \frac{3}{7}, \frac{25}{7}\alpha - \frac{4}{7}, \alpha)$ ; con  $\alpha$  cualquier número real  
 31. sin solución  
 33.  $2\text{Na} + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow 2\text{NaOH} + \text{H}_2$   
 35.  $\text{Fe}_3\text{O}_4 + 4\text{C} \rightarrow 3\text{Fe} + 4\text{CO}$   
 37.  $3\text{Cu} + 8\text{HNO}_3 \rightarrow 3\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\text{NO}$   
 39.  $f(x) = -2x^2 + 6x + 4$

41.  $x = -2, y = 4, z = 6, w = -5$   
 43.  $i_1 = \frac{18}{25}, i_2 = \frac{6}{25}, i_3 = \frac{12}{25}$   
 45.  $x = 0.3, y = -0.12, z = 4.1$   
 47.  $x = 3.76993, y = -1.09071, z = -4.50461, w = -3.12221$

**Ejercicios 14.6, página 640**

1.  $x = 2, y = -1$   
 3.  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$   
 5.  $x = \frac{13}{22}, y = -\frac{3}{11}$   
 7.  $x = 3, y = -3$   
 9.  $x = 2, y = 0, z = 1$   
 11.  $x = 3, y = 1, z = 4$   
 13.  $x = -2, y = 1, z = 0$   
 15.  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = 5$   
 17.  $x = 0, y = 1, z = 1, w = 0$   
 19.  $x = 22, y = -12$   
 21.  $x = -65, y = 36$   
 23.  $y = 0.4x + 0.6$   
 25.  $y = 1.1x - 0.3$   
 27.  $y = 1.3571x + 1.9286$   
 29. 1, 4, 7

31. (b)  $v = \sqrt{\frac{d_2^2 - d_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}; D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_1^2 d_2^2 - t_2^2 d_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}$   
 (c) 947.9 m; 1531 m/s

**Ejercicios 14.7, página 644**

1.  $x = 4, y = -3$   
 3.  $x = 2, y = 7$   
 5.  $x = -\frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}$   
 7.  $x = 4, y = -4, z = -5$   
 9.  $x = 4, y = 1, z = 2$   
 11.  $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = 1$   
 13.  $x = 1, y = 0, z = -1, w = 2$   
 15.  $x = 5, y = 3, z = 10$

**Ejercicios 14.8, página 648**

1. (a)  $\begin{bmatrix} 35 & 15 & 38 & 36 & 0 \\ 27 & 10 & 26 & 20 & 0 \end{bmatrix}$   
 3. (a)  $\begin{bmatrix} 48 & 64 & 120 & 107 & 40 \\ 32 & 40 & 75 & 67 & 25 \end{bmatrix}$   
 5. (a)  $\begin{bmatrix} 31 & 44 & 15 & 61 & 50 & 49 & 41 \\ 24 & 29 & 15 & 47 & 35 & 31 & 21 \\ 1 & -15 & 15 & 0 & -15 & -5 & -19 \end{bmatrix}$   
 7. STUDY\_HARD  
 9. MATH\_IS\_IMPORTANT\_  
 11. DAD\_I\_NEED\_MONEY\_TODAY  
 13. (a)  $B' = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 12 \end{bmatrix}$

**Capítulo 14. Ejercicios de repaso, página 649**

- A. 1. verdadero  
 3. falso  
 5. verdadero  
 7. falso  
 9. verdadero  
 11. falso  
 B. 1.  $3 \times 6$   
 3.  $a_{32} = 10$   
 5. 7  
 7.  $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$   
 9.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$   
 11. 6  
 C. 1.  $x = 1, y = 1, z = 0$   
 5.  $A_{11} = -14, A_{12} = -18, A_{13} = 13, A_{21} = 14, A_{22} = 9, A_{23} = -10, A_{31} = -7, A_{32} = -3, A_{33} = 8$   
 7. 128  
 9. 2  
 11.  $aeg - cef$   
 13.  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$   
 15.  $\begin{bmatrix} \frac{16}{23} & -\frac{6}{23} \\ \frac{20}{23} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$   
 17.  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$

19.  $x = -1, y = -2, z = -5$     21.  $x = -7, y = 8, z = 9$   
 23.  $x = \frac{75}{13}, y = -\frac{145}{26}$     25. 68  
 27.  $x = \pm 1, A^{-1} = \frac{1}{x^2 - 1} \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & x^2 - 1 & 0 \\ -1 & -x & x \end{bmatrix}$   
 29.  $[2 \quad -10 \quad 8]$     31.  $[-32]$   
 33.  $[-11 \quad -2]$     35.  $\begin{bmatrix} 78 & 54 & 99 \\ 104 & 72 & 132 \\ -26 & -18 & -33 \end{bmatrix}$   
 37.  $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$     39.  $\begin{bmatrix} -13 & \frac{78}{5} & -\frac{91}{5} \\ 18 & -\frac{108}{5} & \frac{126}{5} \\ -2 & \frac{12}{5} & -\frac{14}{5} \end{bmatrix}$

**Ejercicios 15.1, página 659**

1.  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$     3.  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$   
 5.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \dots$     7.  $-1, 2, -3, 4, -5, \dots$   
 9.  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{13}, \frac{5}{17}, \frac{4}{21}, \dots$     11.  $-2, 4, -8, 16, -32, 36, \dots$   
 13.  $\frac{1}{49}, 8, \frac{1}{81}$     15.  $3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{3}, 3, \dots$   
 17.  $0, 2, 8, 26, 80, \dots$     19.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$   
 21.  $7, 9, 11, 13, 15, \dots$   
 23.  $d = -5; a_n = 4 - 5(n - 1); a_{n+1} = a_n - 5, a_1 = 4$   
 25.  $r = -\frac{3}{4}; a_n = 4(-\frac{3}{4})^{n-1}; a_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n, a_1 = 4$   
 27.  $d = -11; a_n = 2 - 11(n - 1); a_{n+1} = a_n - 11, a_1 = 2$   
 29.  $r = 0.1y; a_n = 0.1(0.1y)^{n-1}; a_{n+1} = (0.1y)a_n, a_1 = 0.1$   
 31.  $r = -\frac{2}{3}; a_n = \frac{3}{8}(-\frac{2}{3})^{n-1}; a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n, a_1 = \frac{3}{8}$   
 33. 113    35.  $\frac{1}{2}$   
 37.  $\frac{1}{8}$     39. 255  
 41.  $4, 7, 10, 13, \dots$     43. \$3 870  
 45. 6.6%    47. \$145  
 49. 57 665    51. 32  
 53.  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

**Ejercicios 15.2, página 665**

1. 14    3. -40  
 5.  $\frac{23}{2}$     7.  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}$   
 9.  $1 - 1 + 1 - 1$     11.  $\sum_{k=1}^5 (2k + 1)$   
 13.  $\sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^k}$     15.  $\sum_{k=1}^5 \frac{2^k + 1}{2^k}$   
 17. 35    19. 564  
 21. -748    23.  $\frac{40}{81}$   
 25. 66.666    27.  $\frac{85}{128}$   
 29.  $a_1 = \frac{9}{2}, a_{10} = \frac{45}{2}$     31. 80  
 33. 12    35.  $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^{13}y(x + y)}$   
 37.  $n^2 + n$     39. 500, 500  
 41. \$13 500    43. 72 m  
 47. aproximadamente 69.73 ft    49. aproximadamente 55.6 mg

**Ejercicios 15.3, página 674**

1. converge en 0    3. converge en 0  
 5. converge en  $\frac{1}{2}$     7. diverge

9. diverge    11. converge en  $\sqrt{2}$   
 13. diverge    15. converge en  $\frac{5}{6}$   
 17. converge en 5    19. converge en 0  
 21.  $\frac{2}{9}$     23.  $\frac{61}{99}$   
 25.  $\frac{1313}{999}$     27. 4  
 29.  $\frac{2}{5}$     31.  $\frac{81}{7}$   
 33. diverge    35.  $-\frac{3}{10}$   
 37. (a)  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$     (b) 1  
 39. 75 ft    41.  $\sqrt{3}$

**Ejercicios 15.4, página 679**

1. (i)  $2 = (1)^2 + 1$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k) = 2 + 4 + \dots + 2k = k^2 + k$ , es verdadera. Entonces  
 $2 + 4 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2k + 2 = (k^2 + 2k + 1) + (k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1)$ .  
 Así,  $S(k + 1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.  
 3. (i)  $1^2 = \frac{1}{6}1(1 + 1)[2(1) + 1] = \frac{1}{6}2 \cdot 3$ , es verdadera.  
 (ii) Supóngase que  $S(k), 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1)$ , es verdadera. Entonces  
 $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} = \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} = \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} = \frac{1}{6}(k + 1)(k + 1 + 1)[2(k + 1) + 1]$ .

- Así,  $S(k + 1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.  
 5. (i)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} = 1$ , es verdadera. Entonces  
 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{2}{2^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{2}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 1$ .

- Así,  $S(k + 1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.  
 7. (i)  $\frac{1}{1 \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{1 + 1}$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$ , es verdadera. Entonces  
 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k + 1)} + \frac{1}{(k + 1)[(k + 1) + 1]} = \frac{k}{k + 1} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k(k + 2) + 1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{(k + 1)^2}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k + 1}{k + 2}$ .



$$\begin{aligned}
 &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} \\
 &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{k+1}{(k+1)+1}.
 \end{aligned}$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

9. (i)  $1 = \frac{1}{3}(4-1)$  es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$ ,  $1+4+4^2+\dots+4^{k-1} = \frac{1}{3}(4^k-1)$ , es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned}
 1+4+4^2+\dots+4^{k-1}+4^k &= \frac{1}{3}(4^k-1)+4^k \\
 &= \frac{1}{3}4^k+4^k-\frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{3}4^k-\frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(4^{k+1}-1).
 \end{aligned}$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

11. (i) La proposición  $(1)^3+2(1)$  es divisible entre 3 es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$ ,  $k^3+2k$  es divisible entre 3 es verdadera; en otras palabras,  $k^3+2k=3x$  para algún entero  $x$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 (k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2 \\
 &= k^3+2k+3k^2+3k+3 \\
 &= (k^3+2k)+3(k^2+k+1) \\
 &= 3x+3(k^2+k+1) \\
 &= 3(x+k^2+k+1),
 \end{aligned}$$

es divisible entre 3. Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

13. (i) La proposición 4 es factor de  $5-1$  es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$ , 4 es factor de  $5^k-1$  es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned}
 5^{k+1}-1 &= 5^k \cdot 5 - 1 \\
 &= 5^k \cdot 5 - 5 + 4 \\
 &= 5(5^k-1) + 4.
 \end{aligned}$$

Puesto que 4 es factor de  $5^k-1$  y de 4, se desprende que es factor de  $5^{k+1}-1$ . Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

15. (i) La proposición  $7$  es factor de  $3^2-2^1=9-2$  es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$ ,  $7$  es factor de  $3^{2k}-2^k$  es verdadera.

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces } 3^{2(k+1)}-2^{k+1} &= 3^{2k} \cdot 3^2 - 2^k \cdot 2 \\
 &= 3^{2k} \cdot 9 - 2^k \cdot 2 \\
 &= 3^{2k} \cdot (2+7) - 2^k \cdot 2 \\
 &= 2(3^{2k}-2^k) + 7 \cdot 3^{2k}.
 \end{aligned}$$

Puesto que 7 es factor de  $3^{2k}-2^k$  y de  $7 \cdot 3^{2k}$ , se desprende que es factor de  $3^{2k+2}-2^{k+1}$ . Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

17. (i) La proposición,  $(1+a)^1 \geq 1+(1)a$  para  $a \geq -1$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$ ,  $(1+a)^k \geq 1+ka$  para  $a \geq -1$ , es verdadera. Entonces, para  $a \geq -1$ ,

$$\begin{aligned}
 (1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \\
 &\geq (1+ka)(1+a) \\
 &= 1+ka^2+ka+a \\
 &\geq 1+ka+a \\
 &= 1+(k+1)a.
 \end{aligned}$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

19. (i) Puesto que  $r > 1$ , la proposición  $r^k > 1$  es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$

$$\text{si } r > 1, \text{ entonces } r^k > 1$$

es verdadera. Entonces, para  $r > 1$ ,

$$r^{k+1} = r^k \cdot r > r^k \cdot 1 > 1 \cdot 1 = 1.$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

### Ejercicios 15.5, página 684

- |  |                     |                              |               |
|--|---------------------|------------------------------|---------------|
| 1. 6   | 3. $\frac{1}{60}$   | 5. 144                       | 7. 10         |
| 9. 7   | 11. 4               | 13. $n$                      |               |
| 15. $\frac{1}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}$  | 17. 5!              | 19. 100!                     |               |
| 21. 4!5!   | 23. $\frac{4!}{2!}$ | 25. $\frac{n!}{(n-2)!}$      | 27. verdadero |
| 29. falso  | 31. verdadero       | 33. $x^4 - 10x^2y^4 + 25y^8$ |               |
| 35. $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$  |                     |                              |               |
| 37. $x^2 + 4x^{3/2}y^{1/2} + 6xy + 4x^{1/2}y^{3/2} + y^2$                    |                     |                              |               |
| 39. $x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}$              |                     |                              |               |
| 41. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$ |                     |                              |               |
| 43. $n=6: 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1; n=7: 1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1$           |                     |                              |               |
| 45. $6ab^5$  | 47. $-20x^6y^6$     |                              |               |
| 49. $2\ 240x^4$  | 51. $2\ 002x^5y^9$  |                              |               |
| 53. $-144y^7$  | 55. 252             |                              |               |
| 57. 0.95099  |                     |                              |               |

### Ejercicios 15.6, página 692

- $abc, acb, bac, bca, cab, cba$
- Aquí  $(x, y)$  representa el número de  $x$  en el dado rojo y el número de  $y$  en el dado negro  
 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$
- 576
- 120
- 9 900
- 6
- 78
- 24
- 66
- 90
- 56
- $C(5, 3) \cdot C(3, 2) \cdot 5! = 3\ 600$
- 800
- 6
- 20, 160
- 1 225
- 1
- (a) 5 040 (b) 2 520
- 252
- 10
- (a) 360 (b) 1 296 (c) 2 401
- (a) 40 (b) 80

### Ejercicios 15.7, página 699

- {HH, HT, TH, TT}
- {1H, 2H, 3H, 4H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 6T}
- $\frac{3}{13}$
- $\frac{1}{36}$
- $\frac{13 \cdot 48}{C(52, 5)} \approx 0.00024$
- $1 - \frac{C(39, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.78$
- $\frac{15}{16}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{4 \cdot C(13, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.002$
- $1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 0.999$
- (a)  $\frac{28}{143}$  (b)  $\frac{134}{143}$

25.  $\frac{1}{1024}$                                       27.  $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$   
 29.  $\frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{3}{20}$                 31.  $\frac{1}{6}$   
 33.  $\frac{3}{5}$  o 60%                                35.  $\frac{2}{3}$

**Capítulo 15. Ejercicios de repaso, página 702**

- A.** 1. falso                                      3. verdadero  
 5. verdadero                                  7. verdadero  
 9. verdadero                                  11. verdadero  
**B.** 1.  $2x + 7, 2x + 10, 2x + 13, \dots$   
 3.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$                       5.  $\frac{2}{5}$   
 7. 2 700                                        9.  $\frac{9}{4}$   
 11.  $\frac{8}{15}$   
**C.** 1. 6, 3, 0, -3, -6, ...                3. -1, 2, -3, 4, -5, ...  
 5. 1, 3, 14, 72, 434, ...                7.  $-\frac{1}{8}$   
 9.  $\frac{341}{256}$                                         11. C

15. (i)  $1^2(1+1)^2 = 4$  es divisible entre 4. (ii) Supóngase que  $S(k)$ ,  $k^2(k+1)^2$  es divisible entre 4 es verdadera. Entonces

$$(k+1)^2(k+2)^2 = (k+1)^2(k^2+4k+4) = k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3$$

es divisible entre 4 puesto que cada término es divisible entre 4. Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

17. (i)  $1(1!) = 2! - 1 = 1$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$

$$1(1!) + 2(2!) + \dots + k(k!) = (k+1)! - 1,$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 1(1!) + 2(2!) + \dots + k(k!) + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)!(1+k+1) - 1 \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

19. (i)  $(1 + \frac{1}{1}) = 1 + 1$ , es verdadera. (ii) Supóngase que  $S(k)$

$$(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{k}) = k + 1,$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1}) \\ &= (k+1)(1 + \frac{1}{k+1}) \\ &= (k+1+1) \\ &= k+2. \end{aligned}$$

Así,  $S(k+1)$  es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

21. 40    23. 28  
 25.  $(n+1)(n+2)(n+3)$   
 27.  $a^4 + 16a^3b + 96a^2b^2 + 256ab^3 + 256b^4$   
 29.  $x^{10} - 5x^8y + 10x^6y^2 - 10x^4y^3 + 5x^2y^4 - y^5$   
 31.  $-175\,000a^5b^9$                               33.  $210x^6y^{12}z^{12}$   
 35. 37th    37.  $\frac{1}{5}$   
 39. converge en 0  
 41. HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT  
 43. (a) 496    (b) 328                        45. 120  
 47. 720  
 49. (a)  $2 \cdot 10!12! \approx 3.48 \times 10^{15}$     (b)  $22! \approx 1.124 \times 10^{21}$   
 51.  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$   
 53.  $\frac{25}{102}$     55. (iii)  
 57. (a)  $\frac{14}{33}$     (b)  $\frac{1}{11}$     (c)  $\frac{17}{33}$   
 59. (a) 24    (b)  $\frac{1}{[C(15, 5)]^4 C(15, 4)} \approx \frac{1}{11.1 \times 10^{17}} \approx 9 \times 10^{-18}$

# ÍNDICE ANALÍTICO

## A

Abel, Niels Henrik, 265, 290  
abscisa, 169  
adición, 18  
    con denominadores comunes, 54  
    de dos funciones senoidales, 463  
álgebra, 2, 47  
    de los polinomios, 85  
    teorema fundamental del, 283  
algoritmo de división para polinomios, 276  
amplitud, 399, 402  
    de la función coseno, 398-399  
    de la función seno, 398-399  
ángulo(s)  
    agudo, 360, 365  
    central, 361, 390  
    complementarios, 360  
    coterminales, 356, 359  
    cuadrantal, 361  
    de depresión, 447  
    de elevación, 447  
    de referencia, 380, 394-395  
        propiedad de los, 381  
    doble, fórmula para obtener el, 542  
    entre vectores, 552  
    lado inicial de un, 356  
    lado terminal de un, 356  
    medidas de, 356-364  
    medio, fórmula para obtener el, 420  
    obtuso, 360  
    posición normal de un, 356  
    recto doble, 360  
    suplementarios, 360  
    vértice del, 356  
Apolonio, 481, 482  
arco  
    coseno, función, 427. *Véase también*  
        función(es)  
    parabólico, 486  
    seno, función, 425-426. *Véase también*  
        función(es)  
    tangente, 428. *Véase también* función(es)  
argumento, 14, 15, 16  
    de un número complejo, 468

aritmética de vectores, 543  
Arquímedes, 521  
asíntota(s), 300, 302  
    de una función racional, 300, 302, 303, 304  
    horizontal, 302, 303, 320  
        determinación de, 304-305  
    oblicua, 302, 304  
        determinación de, 307-308  
    vertical, 302, 326  
        determinación de, 304  
axioma, 3

## B

base  
    de los exponentes enteros, 64  
    de una función exponencial, 318  
    de una función logarítmica, 324-325  
    diez, 327  
     $e$ , 327  
    reformulación de la, 328  
bicondicional, 5, 8-9  
binomio, 84  
biunívoca (o uno a uno), función, 243. *Véase*  
    *también* función(es)  
    inversa de la, 243-243, 245  
Briggs, Henry, 317

## C

caída libre, objeto en, 224  
calculadora, uso de la,  
    conversión de radianes a grados, 374  
    exactitud de la, 445  
    modo de grados, 374  
    resolución de triángulos, 444-445  
    valores de las funciones trigonométricas,  
        374, 444-445  
cálculo proposicional, 3  
cambio de base, 335  
cancelación, 99  
Cantor, George, 21  
caracoles, 529  
    aplanado, 530  
    con bucle interno, 530  
    convexo, 530

- cardinalidad, 23-24
- cardioide, 529, 530
- caso ambiguo de la ley de senos, 455-456
- catenaria, 350
- catetos, 365
  - adyacente, 365
  - opuesto, 365
- Cavalieri, Bonaventura, 521
- Cayley, Arthur, 597
- centro, de una
  - circunferencia, 175
  - elipse, 489, 491
  - hipérbola, 495, 496, 499
- cero(s),
  - de una función, 204
  - determinación aproximada de los, 205
  - reales de una función, 296
  - aproximación de un, en una función polinomial 297
- Chladni, Ernest Florens, 443
- ciclo, 398, 409
  - compresión horizontal del, 400
- cicloide, 513
- circulares, funciones, 390-391
  - signos de las funciones, 392
- círculo, 174-175
  - con centro en el origen, 527
  - con centro en un eje, 531
  - unitario, 175, 390, 391, 433
- cociente, 52, 276, 470
  - de diferencias, 238-239
- codificación, 645
- coeficiente(s), 84
  - binomiales, 682, 683
  - matriz de, 628, 636
  - principal de un polinomio, 84, 266
- cofactor, 612-613
- cofunciones, 367-368, 372
- combinación, 689
  - aritmética, 235
  - dominio de una, 236, 238
  - de funciones, 235
- compleción (completar) del cuadrado, 176-177
- composición de funciones, 238. *Véase también*
  - función(es)
- componentes de un vector, 542
  - horizontal, 546
  - vertical, 546
- comportamiento
  - en los extremos, 268-269, 303
  - local, 269-270
  - global de una función, 202. *Véase también*
    - función(es)
- composición de funciones, 236-237
- compresión vertical, 214, 218
- condicional, 5, 7-8
- conectivos lógicos, 4, 30
  - bicondicional, 5, 8-9
  - condicional, 5, 7-8
  - conjunción, 5, 6
  - disyunción exclusiva, 5, 7
  - disyunción inclusiva, 5, 6-7
  - negación, 5
- conjugado
  - de un número complejo, 282
  - propiedades del, 142
  - par, 282
- conjunción, 5, 6, 18
- conjunto(s), 1-2, 48
  - de postulados del sistema, 3
  - de verdad, 19
  - descripción de,
    - por comprensión, 22
    - por extensión, 22
  - diferencia de, 34
  - diferencia simétrica de, 35
  - disjuntos, 38, 48
  - elementos y, 21
  - equipotentes, 24
  - familia de, 27
  - finito, 23
  - iguales, 22-23
  - infinito, 23
  - intersección de, 30-31, 34, 48
    - propiedades de la, 30
  - no comparables, 26
  - no disjuntos, 38-39
  - operaciones con, 30
  - potencia, 27-28
  - solución, 112, 144, 158, 174, 582
  - técnicas de conteo y, 38, 41, 42
  - teoría de, 23
  - terminología de, 48
  - tipos de, 23
  - unión de, 31-32, 33
    - dos, 48
  - unitario, 25
  - universal (o universo), 19, 25
  - universo, 19
  - vacío, 24-25, 48
- constante
  - de crecimiento, 338
  - de decaimiento, 339
  - de la gravitación universal, 193
  - de proporcionalidad, 190
  - de resorte, 465
  - función, 218, 230, 238. *Véase también* función(es)
- conteo, 38-39, 41, 42, 653, 686
  - principio fundamental de, 687-691
- contingencia, 13
- continua, función, 230. *Véase también* función(es)

- contradicción, 12
- contradominio, 407
- conversión entre grados y radianes, 360
- coordenada(s), 58, 168
  - del punto medio, 61
  - polares, 521-526
    - convenciones sobre las, 522
    - conversión de, 523-525
    - pruebas de simetría en, 528
    - secciones cónicas en, 536-542
- Copérnico, Nicolás, 355
- cosecante, 377, 407
  - definición de, 407
  - gráfica de la función, 408
- coseno, 389, 390
  - amplitud de la función, 398-399
  - desplazada, gráfica de, 402-403
  - fórmula para el ángulo doble, 542
  - fórmula para ángulo medio, 420
  - gráfica de la función, 350, 397-407
  - hiperbólico, 349, 350
  - ley del, 457-458, 460
- cotangente, 377
  - definición, 407
  - gráfica de la función, 408
  - periodo de la función, 408
- Cramer, Gabriel, 643
  - regla de, 643-644
- creciente, función, 223. *Véase también* función(es)
- crecimiento demográfico, 338-339
- criptografía, 645
- cuadrado
  - perfecto, 95
  - completar el, 176-177
- cuadrante, 168
- cuadrática, función, 218, 230. *Véase también* función(es)
- cuantificador, 19
  - existencial, 19-20
  - universal, 19
- cuerda focal, 484
- curva(s)
  - braquistócrona, 514
  - cerrada, 511
  - cicloidal, 513
  - de rosas, 531
  - parametrización de, 514
    - solución alternativa de la, 514
  - parametrizada, 510
  - plana, 510, 514
    - gráfica de una, 510
    - punto inicial, 511
    - punto terminal, 511
  - rectangulares, 514
  - tautócroma, 514
- D**
  - Dantzing, George B., 559
  - datación con carbono, 340
  - decaimiento radiactivo, 339
  - decimal(es), 50
    - finitos, 50
    - periódico, 672
    - periódicos o recurrentes, 50
  - decodificación, 645
  - decreciente, función, 223. *Véase también* función(es)
  - definida por partes, función, 228. *Véase también* función(es)
  - DeMoivre, Abraham, 472
  - demonstración matemática, 17
  - denominador, 53
    - mínimo común, 100
  - Descartes, René, 167, 168
    - regla de los signos de, 54
  - desigualdad(es), 58, 59, 112, 147, 178
    - con valor absoluto, 150-153
    - estrictas, 59, 158
    - equivalentes, operaciones de, 145
    - lineales, 144, 145
      - con dos variables, 581
      - resolución de, 145
      - solución de la, 144
    - no estrictas, 59, 158
    - no lineales, 583
    - polinomiales, 154-155
      - reglas para resolver, 155-157
    - racionales, 154-155, 157
    - simultáneas, 147
      - resolución de, 148
    - triangular, 61
  - desplazamiento(s),
    - combinación de, 212
    - de la fase, 402
    - horizontales, de una gráfica, 211-212
    - verticales, de una gráfica, 211-212
  - determinante(s), 597, 611-619, 641
    - de los coeficientes, 636
    - de  $n$ -ésimo orden, 611
    - de orden  $n$ , 611
    - de una matriz, 612
    - propiedades de los, 616
  - diagonal principal de una matriz, 599
  - diagrama
    - de árbol, 686
    - de Venn, 26, 30
  - diámetro, 484
  - diferencia, 52
    - de dos cuadrados, 87, 95
    - de dos cubos, 95
    - de conjuntos, 34
    - simétrica, 35

- dígitos significativos, 67
  - Diofanto, 111
  - dirección, 542
  - directriz de una parábola, 482, 536
  - discontinua, función, 230, 303. *Véase también* función(es)
  - discriminante, 131, 508
  - distancia, 170
    - entre puntos en la recta numérica, 61
    - fórmula de la, 170, 174
  - disjuntos, conjuntos, 38, 48. *Véase también* conjunto(s)
  - disyunción
    - exclusiva, 5, 7
    - inclusiva, 5, 6-7
  - dividendo, 276
  - división, 54, 99
    - de cero, 55
    - de funciones polinomiales, 275-281
    - sintética, 278-280, 285
      - guía para la, 279
  - divisor, 276
  - dominio, 98, 200, 201-202, 203, 208, 243, 266, 300, 318, 392, 407. *Véase también* función(es) de la variable, 83 restringido, 247
- E**
- ecuación(es), 112
    - con dos variables, 174
    - condicional, 112
    - construcción de una, 118
    - cuadráticas, 127, 142
    - de movimiento, 465
    - de rectas, 183
    - de una recta horizontal, 186
    - de una recta vertical, 186
    - de valor absoluto, 150-151
    - diofánticas, 111
    - en una variable, 112
    - equivalentes, 113
    - exponenciales y logarítmicas, 331-338
      - solución de, 331-332
    - lineal, 113, 127, 186, 187
      - con dos variables, 560
      - con  $n$  variables, 560
      - con tres variables, 562
    - operaciones que producen, 113
    - paramétricas, 509
      - aplicaciones de las, 513
    - pendiente-intersección, 185
    - polares, 526
      - de cónicas, 536-537
      - gráficas de, 526-534
    - polinomial de grado  $n$ , 127
    - punto-pendiente, 184-185
    - raíces de una, 131
    - raíz de la, 127
    - solución de una, 112
    - traducción de palabras en una, 118
    - trigonométricas, 433-439

eje

    - de la parábola, 482
    - de simetría, 219
    - imaginario, 467
    - mayor de una elipse, 490
    - menor de una elipse, 490
    - polar, 522
    - real, 467
    - rotación de un, 504-505
    - $x$ , 168, 180
      - intersecciones con el, 178
    - $y$ , 168, 180
      - intersecciones con el, 178

elemento(s), 21, 48

elevación, ángulo de, 447

eliminación
 
    - de Gauss-Jordan, 631-632
    - método de, 563, 569

elipse, 489-495, 536, 537, 538
 
    - aplicaciones de la, 493
    - centro de la, 489, 491
    - ecuación de la, 490
    - eje mayor de la, 490
    - eje menor de la, 490
    - foco de la, 489
    - vértice de la, 490

elipsis, 49

entero(s)
 
    - positivos, 48, 49, 158
    - impar, 72
    - par, 72

equipotentes, conjuntos, 24. *Véase también* conjunto(s)

error, 259

escala de Richter, 343

escalar, 542
 
    - producto, 603-604

escalón, función, 229

espacio
 
    - bidimensional, 168
    - muestral, 694

espiral de Arquímedes, 528

espirales, 527

estiramiento vertical, 214, 218

evento(s), 694
 
    - cierto, 696
    - complemento de un, 696
    - imposible, 696
    - mutuamente excluyentes, 697
    - unión de dos, 697

excentricidad, 492, 536

exponencial, función, 318-324, 325. *Véase también*  
 función(es)  
 natural, 321-322  
 propiedades de una, 320  
 exponente(s), 64, 318  
 enteros, 64  
 ley de los, 65, 86, 318-319  
 racionales, 78  
 expresión(es)  
 algebraica, 83  
 fraccionaria, 102  
 racional propia, 575  
 racionales, 98  
 extremo relativo, 270

## F

factor(es), 92  
 conjugado, uso de un, 74  
 de funciones polinomiales, 282  
 factorización, 92, 94  
 de fórmulas, 95  
 de polinomios, 92, 94, 95  
 cuadráticos, 93  
 método de, 127  
 falacia, 15  
 Fermat, Pierre de, 653  
 Ferrari, Ludovico, 265, 290  
 finito, conjunto, 23. *Véase también* conjuntos  
 foco, 536  
 de una elipse, 489  
 de una hipérbola, 495  
 de una parábola, 482  
 Fontana, Gregorio, 521  
 Fontana, Nicolò (Tartaglia), 265, 290  
 forma escalonada por filas, matriz y, 628  
 fórmula(s)  
 cuadrática, 130  
 de ángulo doble, 419  
 del coseno, 419  
 del seno, 419  
 de cambio de base, 335-336  
 de conversión, 359  
 de factorización, 95  
 de la distancia, 170, 174  
 de la longitud del arco, 361  
 de mitad de ángulo, 420  
 de recursión, 655  
 del punto medio, 171  
 fracción(es), 53  
 equivalentes, 54  
 impropia, 276, 579  
 parciales, descomposición en, 575  
 propia, 276  
 frecuencia, 465  
 fuerza resultante, 547

función(es), 199, 200  
 arco coseno, 427  
 arco seno, 425-426  
 arco tangente, 428  
 ceros reales de una, 204  
 circulares, 390-391  
 signos de las, 392  
 combinación de, 235  
 comportamiento global de, 202  
 composiciones de una, 238  
 constante, 218, 230, 238  
 continuas, 230  
 creación de una, 251  
 creciente, 223  
 cuadrática, 218, 230  
 de importe postal, 228  
 decreciente, 223  
 definidas por partes, 228  
 diferencia de la, 238  
 discontinua, 230, 303  
 dominio de una, 201, 208  
 entrada de la, 200  
 escalón, 229  
 exponencial, 318-324, 325  
 natural, 321-322  
 propiedades de una, 320  
 gráfica de una, 202, 218  
 hiperbólica, 349-351  
 impar, 210-211, 393, 409  
 inversa, 242, 244  
 propiedades de la, 244  
 lineal, 218, 230  
 logística, 339  
 máximo entero, 229  
 objetivo, 586  
 par, 210-211, 393  
 periódicas, 392  
 piso, 230  
 polinomiales, 218  
 potencia, 208  
 recíprocas, 407  
 salida de la, 200  
 suma de la, 238  
 traducción de palabras a, 250  
 uno a uno (biunívoca), 243  
 inversa de la, 243-243, 245  
 valor absoluto, 231- 232  
 valor de la, 200  
 función coseno, 397, 415  
 fórmulas  
 de diferencia, 415  
 de suma, 415  
 propiedades de la, 398-399  
 función logarítmica, 324-331  
 contradominio, 325

dominio de una, 325  
 propiedades de la, 326  
 racional, 300-312  
     gráfica de una, 306-307  
 recíproca desplazada, 301  
 función polinomial, 265-275  
     constante, 266  
         gráfica de una, 267  
     cuadrática, 266, 290  
     cúbica, 266  
     de cuarto grado, 265, 266, 290  
     de grado  $n$  impar, 268, 270  
     de grado  $n$  par, 268, 270  
     de quinto orden, 266  
     de segundo grado, 265, 290  
     de tercer grado, 265, 290  
     de un sólo término, 267  
     gráfica de una, 271  
     lineal, 266  
     potencia, 267  
     raíces reales de una, 270, 289-296  
 función seno, 39, 415  
     fórmulas  
         de diferencia, 415, 417  
         de suma, 415, 417  
     propiedades de la, 398-399  
 función trigonométrica, 391  
     cálculo del valor de una, 381-382  
     de ángulos especiales, 371-375  
     de ángulos generales, 375-386  
     de los números reales, 390  
     gráficas de la, 407-414  
     inversas, 424  
         propiedades de las, 424-425, 429-430  
         uso de, 437  
     valores de la, 390

**G**

Galilei, Galileo, 481, 482  
 Gauss, Carl Friedrich, 265, 283  
 geometría, 2, 3  
     euclidiana, 371  
      $n$ -dimensional, 597  
 Germain, Marie-Sophie, 443  
 grado(s), 84, 266, 356  
     conversión a radianes, 360, 374  
     uso de la calculadora y, 374  
     de un polinomio, 84, 127  
 gráfica(s), 144, 174, 178  
     con un agujero, 309  
     de desigualdades, 223  
     de las funciones seno y coseno, 397-407  
     desplazada, 222-223, 268  
     desplazamientos horizontales y verticales  
         (transformaciones rígidas), 211-213

del conjunto solución, 581  
 estiramientos y compresiones  
     (transformaciones no rígidas),  
     214-215  
 gráfica de una función, 202, 218  
 polares, 533  
 por transformaciones, 222  
 punto de inflexión de la, 224  
 reflexiones, 213-214  
 graficación de puntos, 169

**H**

Hiparco, 355, 521  
 Hipatia, 481, 482  
 hipérbola, 495-504, 536, 537, 538  
     aplicaciones de la, 501  
     asíntotas de la, 497  
     centro de la, 495, 496, 499  
     ecuación de la, 496  
     eje conjugado de la, 496-497  
     eje transversal de la, 496  
     excentricidad de la, 500  
     foco de la, 495  
     ramas de la, 495  
     vértice de la, 496  
 hiperbólica, función, 349-351. *Véase también*  
     función(es)  
 hipotenusa, 365  
 hipótesis, 17  
 Hooke, Robert, 190

**I**

identidad(es), 112, 350  
     aditiva, 51, 141, 603  
     de cofunción, 368  
     multiplicativa, 51, 141  
     pitagórica, 368-369, 378-379, 391, 414  
     por cociente, 366  
     recíprocas, 366  
     trigonométrica, 414  
 igualdad  
     de números complejos, 139  
     de matrices, 599  
 iguales, conjuntos, 22-23. *Véase también*  
     conjunto(s)  
 imagen  
     de  $x$ , en funciones, 200  
     especular, 179  
 impar, función, 210-211, 393, 409. *Véase también*  
     función(es)  
 índice, 72  
     de la suma, 661  
 inducción matemática, 676-680  
     principio de, 676-677  
 infinito, conjunto, 23. *Véase también* conjunto(s)



- interés compuesto, 342
  - intersecciones
    - con el eje  $x$ , 178, 203, 205, 220, 300
    - con el eje  $y$ , 178, 203, 205, 220
    - de conjuntos, 30-31, 34, 48, 147
      - propiedades de la, 30
  - intervalo
    - abierto, 146
    - cerrado, 147
    - extremos del, 146
    - no acotado, 146
    - semiabierto, 147
  - inversa
    - de una función, 242, 244. *Véase también* función(es)
      - propiedades de la, 244
    - de una matriz, 620
  - inverso
    - aditivo, 51, 604
    - multiplicativo, 51, 620
- K**
- Kepler, Johannes, 481, 482
- L**
- Lacroix, Sylvestre François, 521
  - Lauchen, von, George Joachim, 355
  - Leibniz, Gottfried Wilhelm, 167, 199
  - lemniscatas, 532
  - ley(es)
    - asociativas, 36
    - conmutativas, 36
    - de Boyle, 192
    - de De Morgan, 34, 36
    - de Hooke, 190
    - de identidad y absorción, 36
    - de la Gravitación Universal de Newton, 192, 493
    - de los cosenos, 457-458, 460
    - de los exponentes, 65, 86, 318-319
      - enteros, 66
      - racionales, 79-80
    - de los logaritmos, 327-328
    - de los radicales, 72-73
    - de senos, 453, 460
    - de tricotomía, 59
    - del álgebra, 36
    - del enfriamiento/calentamiento de Newton, 341-342
    - del movimiento planetario de Kepler, 493
    - distributivas, 36, 86
    - idemponentes, 36
    - involutiva, 36
  - Libby, Willard, 341
  - límites de los valores
    - de coseno, 392
    - de seno, 392
  - lineal, función, 218, 230
  - logaritmo(s),
    - de base 10, 371, 327
    - leyes de los, 327-328
    - natural, 317, 327
  - lógica, 2, 4
  - logística, función, 339. *Véase también*
    - función(es)
  - longitud de arco, 361
- M**
- magnitud, 542
    - de un número complejo, 467
  - Malthus, Thomas R., 339
  - masa, 465
    - desplazamiento inicial de la, 465
    - velocidad inicial de la, 465
  - Matemática*, 294, 329
  - matriz (matrices), 597-602
    - adjunta de la, 622
    - álgebra de, 602
    - aumentadas, 627-636
    - cero, 603
    - columna, 599
    - cuadrada, 598, 620
    - de codificación, 646
    - de coeficientes, 628, 636
    - de decodificación, 646
    - equivalentes por filas de una, 628
    - fila, 599
    - forma escalonada por filas, 628
    - identidad, 607
    - igualdad de, 599
    - inversa de una, 620-627, 636-641
    - multiplicación de, 605-606
    - orden de la, 598
    - producto escalar de una, 603
    - producto interno de, 608
    - rectangular, 598
    - reducción por filas de una, 628
    - resta de, 604
    - solución de, 637
    - suma de, 602
    - transposición de una, 600
  - máximo
    - entero, función, 229
    - (mínimo) de una función cuadrática, 229, 587
  - mayor que, 58, 59
  - medida angular
    - en grados, 356
    - en minutos, 357
    - en radianes, 358
    - en segundos, 357
    - fórmulas de conversión, 359-360
  - menor que, 58, 59

Méré, Chevalier de, 653

método(s)

- de completar el cuadrado, 129-130
- de eliminación, 563, 569
- de factorización, 127
- de la bisección, 297, 298
- de la raíz cuadrada, 128-129
- de la tabla de signos, 155
- de mínimos cuadrados, 258
- de sustitución, 561-562, 569
- para determinar  $f^1$ , 244-245
- PEIU, 87

mínimo común denominador, 100

minutos, medida de un ángulo, 357

modelo(s)

- matemático, 190, 224, 338
- exponenciales y logarítmicos, 338-349

modus ponendo ponens, 15, 18

modus tollens, 18

monomio, 84

movimiento

- armónico simple, 463, 465
- curvilíneo, 510

multiplicación, 54, 99

de matrices, 605-606

de números complejos, 140

por escalar, 542, 603

## N

Napier, John, 317

negación, 5

Newton, Isaac, 167, 481, 482, 493

notación, 302

algebraica, 47

científica, 67

de conjuntos, 376

de intervalos, 146

factorial, 681, 683

matricial, 599

por comprensión, 48

por extensión, 48

sigma, 259, 661, 683

propiedades de la, 662

numerador, 53

número(s)

$e$ , 321

imaginario puro, 139

irracionales, 49

naturales, 48, 158

primo, 296

racionales, 49

reales, 4, 47, 48, 49, 139, 265, 282

negativos, 49

parte imaginaria de un, 282

parte real de un, 282

positivos, 49

no negativos, 49

números complejos, 135, 138, 265, 282

argumento de, 468

conjugado de un, 282

eje imaginario de un, 467

eje real de un, 467

forma trigonométrica de los, 467-469

igualdad de, 139

magnitud de un, 467

multiplicación de, 140

parte imaginaria de los, 139

parte real de los, 139

potencias de un, 472

propiedades de los, 140

raíces de un, 472, 473

resta de, 140

suma de, 140

unidad imaginaria de un, 282

## O

operaciones

con conjuntos, 30, 36

con vectores, 544

orden de una matriz, 598

ordenada, 168

origen, 58, 179-180

de la recta real, 527

## P

par

conjugado, 286

función, 210-211, 393. *Véase también* función(es)

ordenado, 467, 522

parábola, 179, 209, 218, 221, 267, 482, 483, 484, 536, 537, 538

aplicaciones de la, 485

cuerda focal de la, 484

directriz de la, 482, 536

ecuación de la, 483

eje de la, 482

excentricidad de la, 492

foco de la, 482

vértice de la, 484

paraboloides, 485

parametrización de curvas rectangulares y polares, 510, 514

parámetro, 510

eliminación del, 511-513

parte imaginaria de un número complejo, 139

parte real de un número complejo, 139

Pascal Blaise, 653, 681

triángulo de, 681

Peacock, George, 521

pendiente de una recta, 183-184

- pérdida de soluciones, 435
  - periódicas, funciones, 392
  - periodicidad, 392, 408
  - periodo, de las funciones trigonométricas, 392, 393, 400, 402, 408, 465
  - permutación, 687
  - pH de una solución, 344
  - Pitágoras, 133
    - teorema de, 49, 133, 170, 365, 368, 371, 372, 457
  - plano
    - cartesiano, 167-168
    - complejo, 467
    - $xy$ , 168, 174, 183
  - población inicial, 338
  - polinomial, función, 218. *Véase también* función(es)
  - polinomio(s), 83-84
    - álgebra de los, 85
    - cero, 84
    - de grado  $n$  en la variable  $x$ , 84
    - división de, 89
    - en cuatro variables, 88
    - en dos variables, 88
    - en tres variables, 88
    - factorización de, 92
    - nulo, 266, 300
    - producto de, 89
      - dos, 86
    - suma de, 89
  - polo, 522
  - porcentaje, 50
    - de decrecimiento, 50
    - de incremento, 50
  - posición de equilibrio, 465
  - postulado, 3. *Véase también* axioma
  - potencia racional de  $x$ , 78
  - potencia(s), 64
    - de un número complejo, 472
    - entera
      - negativa de  $x$ , 64
      - positiva de  $x$ , 64
    - función, 208
  - premisa, 14
  - principio(s)
    - de comprensión o abstracción, 21
    - de extensión, 21
    - de inducción matemática, 677-678
    - fundamental de conteo, 686-687
    - de conteo, 686-693
  - probabilidad, 694-701
    - de un evento, 694
    - límites de la, 696
  - problemas
    - de dimensiones, 125
    - de edad, 118-119, 124
    - de inversión, 119-120, 124
    - de mezclas, 121, 125
    - de números, 124
    - de trabajo, 122, 125
    - de velocidad, 120-121, 124
    - diversos, 122-123
  - producto(s), 470
    - escalar de una matriz, 603
    - interno de una matriz, 550
    - notables, 83, 86
    - punto, 550-556
      - interpretación física del, 554
      - propiedades del, 550
  - programación lineal, 559, 586-592
  - progresión aritmética, 655-656
  - propiedad(es)
    - asociativa, 30, 32, 51
    - conmutativa, 30, 32, 51
    - de cancelación, 53
    - de cerradura, 51
    - de identidad, 51
    - de igualdad, 53
    - de la diferencia de conjuntos, 34
    - de la existencia de la identidad, 30, 32
    - de la existencia de un elemento absorbente, 30, 32
    - de la multiplicación por cero, 53, 127
    - de la sustracción y negativos, 53
    - del inverso, 51
    - distributiva de la intersección respecto a la unión, 33, 52
    - distributiva de la unión respecto a la intersección, 33
    - uno a uno, 332-333
    - transitiva, 59
  - proporcionalidad, 190
  - proposiciones, 2
    - compuestas, 4
    - equivalentes, 11-12, 13
    - implicación de, 16-17
    - simples, 4
  - prueba(s)
    - de la recta horizontal, 243
    - de la recta vertical, 203
    - de simetría, 180
  - punto
    - crítico, 269
    - de inflexión de la gráfica, 224
    - de prueba, 582
    - medio, 61-62, 171, 172
- R**
- racionalización, 74
  - radián
    - medida de un ángulo, 356
    - conversión a grados, 374
    - uso de la calculadora, 374

- radical, 71, 72, 80
    - leyes de los, 72-73
  - radicando, 72, 201
  - radio de una circunferencia, 175, 339-340
  - raíz(es), 71
    - cantidad de, 283, 289
    - compleja, 282, 474
    - cuadrada, 71-72
      - principal, 138
    - cúbica, 71-72, 474-475
    - de funciones polinomiales, 282
    - de multiplicidad, 128
      - $m$ , 270-273, 283
    - de un número complejo, 473
    - de una ecuación cuadrática, 131
    - división de, 275-281
    - $n$ -ésima principal, 71
    - racionales, 290-293
    - real, 282, 289-296
      - determinación de, 290
    - repetida, 270
    - simple, 270, 283
  - rango de una función, 200, 221, 243, 392. *Véase también* dominio y función
  - rapidez, 547
  - recíproca, función, 407. *Véase también* función(es)
  - recíproco, 51, 620
  - recta(s), 209
    - con pendiente, 267
    - crecimiento de la, 183
    - de los números reales, 58
      - distancia en la, 61
    - de mínimos cuadrados, 258, 260, 638
    - del mejor ajuste, 259
    - ecuación de la, forma
      - pendiente-intersección, 185
      - forma punto-pendiente, 184-185
    - horizontal, 185, 267
    - numérica real, 58
    - paralelas, 187
    - pendiente de la, 183-184
    - perpendiculares, 187
    - que pasan por el origen, 527
    - recorrido de la, 183
    - verticales, 185
  - rectángulo auxiliar de una hipérbola, 497
  - reducción a una función seno, 463-464
  - reflexión, de gráficas, 213, 246
  - regla(s)
    - de cálculo, 317
    - de Cramer, 643-644
    - de la adición de la probabilidad, 698
    - de los signos, 54
    - para resolver desigualdades polinomiales, 155-157
  - reglas de inferencia, 17
    - adición, 18
    - conjunción, 18
    - modus ponens, 18
    - modus tollens, 18
    - silogismo disyuntivo, 18
    - silogismo hipotético, 18
    - simplificación, 18
  - residuo, 276
  - resta, 99
  - restricción, 251, 586
  - Rheticus, George Joachim, 355
  - Richter, Charles F., 343
  - rotación
    - de ejes, 504-505
      - ecuaciones de, 505
      - eliminación del término  $xy$ , 506-507
      - secciones cónicas sin, 508
    - de gráficas polares, 533
  - rumbo, 459
- S**
- Saint-Vincent de, Grégoire, 521
  - secante
    - definición de, 407
    - dominio de la, 376
    - gráfica de la función, 410
    - periodo de la función, 408-409
  - sección cónica, 481, 536
    - rotada, 539
  - sector, 361
  - segundo, medida de un ángulo, 357
  - semicírculo, 177
    - inferior, 203
    - superior, 203
  - semiplano, 581
  - seno, 389, 390
    - amplitud de la función, 399-402
    - ciclo, 398, 409
    - desplazado, gráfica de, 402-403
    - fórmula para el ángulo doble, 502
    - fórmula para el ángulo medio, 420
    - función, reducción a una, 463-464
    - gráfica de la función, 350, 397-407
    - hiperbólico, 350
    - inverso, 425
    - ley del, 453, 460
      - casos ambiguos de la, 455-456
    - periodo de la función, 400
    - propiedades de la función, 399
  - series, 661-667
    - aritméticas, 662
    - convergentes, 667
    - divergentes, 667
    - geométricas, 664

- finitas, 664
  - infinita, 671
    - suma de una, 672
  - infinitas, 670
  - suma de la, 670
  - sigma, notación, 259
  - signo(s)
    - de un producto, propiedades del, 155
      - algebraicos, 377
    - de las funciones circulares, 392
    - de un cociente, propiedades de, 157
  - silogismo
    - disyuntivo, 18
    - hipotético, 18
  - Silvestre, James Joseph, 597
  - símbolo(s)
    - de infinito, 146, 147
    - de desigualdad, 59
  - simetría, 179, 208, 210, 270
    - pruebas de, 180
  - simplificación, 18, 73-74, 81, 99, 100, 103
  - sistema(s)
    - consistente de ecuaciones, 560
    - de coordenadas rectangulares, 167, 168, 390, 467
    - de desigualdades, 580-586
      - solución de, 581-582
    - de ecuaciones, 258
    - de ecuaciones lineales, 560
      - solución de un, 560
    - de ecuaciones no lineales, 569-575
    - de los números reales, 51
      - propiedades básicas de los, 51
    - homogéneos, 566
    - inconsistente, 560
    - sobredeterminado, 258
  - solución(es)
    - conjugadas, 143
    - de desigualdades lineales, 144
      - con dos variables, 580-586
    - de mínimos cuadrados, 639
    - de sistema de ecuaciones, 112
      - exponenciales y logarítmicas, 331-338
      - lineales, 560
    - de triángulos rectángulos, 444-446
    - de una matriz, 637
    - extraña, 114, 333-334, 436
    - factible, 586
    - de pH, 344
  - Sorense, Soren, 344
  - subconjunto, 25, 48
  - sucesión(es), 654-660
    - aritmética, 655
    - convergentes, 667, 669
    - de sumas parciales, 670
    - definidas, 655
    - divergentes, 667, 668, 669
    - finitas, 654
    - geométrica, 657
    - infinita, 654
    - límite de la, 668
    - rango de una, 654
    - razón común de la, 657
    - término de la, 654
  - suma, 99
    - de errores cuadráticos, 259
    - de dos cubos, 95, 96
    - de los cuadrados, 259
    - de funciones, 238
    - de matrices, 602
    - de números complejos, 140
    - notación de, 259
  - sustitución
    - hacia atrás, 563-565, 629
    - método de, 561-562, 569
  - sustituciones trigonométricas, 414
  - sustracción con denominadores comunes, 54
- ## T
- tabla(s)
    - de verdad, 5, 9-10
    - de cuerdas, 355
    - de valores de las funciones trigonométricas, 355
  - tangente, 204, 376,
    - definición de, 407
    - fórmula de diferencia, 418
    - fórmula de suma, 418
    - fórmula para el ángulo doble, 542
    - fórmula para el ángulo medio, 420
    - gráfica de la función, 350, 397-407
  - tasa
    - de crecimiento, 338
    - de decaimiento, 339
  - tautología, 12, 13
  - técnicas de conteo 38-39, 41, 42
  - temperatura ambiente, 341
  - teorema
    - de DeMoivre, 473
    - de desarrollo, 614, 617
    - de la factorización completa, 283
    - de las raíces complejas, 287
    - de las raíces racionales, 291
    - de Pitágoras, 49, 133, 170, 365, 368, 371, 372, 457
    - del binomio, 680-686
    - del factor, 282
    - del residuo, 277, 282
    - del triángulo isósceles, 3
    - del valor intermedio, 296-297
    - fundamental del álgebra, 283
  - teoría
    - de conjuntos, 21, 23, 30, 47, 48

- de la probabilidad, 21, 653
  - de los determinantes, 597
  - de los grupos, 21
  - heliocéntrica, 355
  - término
    - constante, 84
    - $n$ -ésimo, 654
  - teoría de conjuntos, 23
  - tiempo, 465
  - topología, 21
  - transformación(es), 208, 410. *Véase también* gráfica(s)
    - combinación de, 214-215
    - no rígidas, 214, 238
    - rígidas, 211, 238
  - triángulo(s)
    - de Pascal, 681
    - rectángulos, 360, 361, 460
      - aplicaciones de, 446-453
      - solución de, 444-446
      - trigonometría del, 365-369
  - tricotomía, ley de, 59
  - trigonometría, 2, 355, 443
  - trinomio, 84
  - tripleta ordenada, 560
- U**
- unidad imaginaria, 138
  - unión de conjuntos, 31-32, 33, 48, 152
  - universal (o universo), conjunto, 19, 25. *Véase también* conjunto(s)
  - uno a uno (biunívoca), función, 243
    - inversa de la, 243-243, 245
- V**
- vacío, conjunto, 24-25, 48. *Véase también* conjunto(s)
  - valor(es)
    - absoluto, 59-60, 467
      - propiedades del, 60
    - absoluto, función, 231- 232
    - de coseno, 371, 372, 373
    - de la expresión, 83
    - de las funciones trigonométricas, 390
    - de seno, 371, 372, 373
    - de tangente, 373
    - de verdad, 2, 10
    - futuro, 342-343
    - máximo, 587
    - mínimo, 587
  - variable(s), 4, 83
    - dependiente, 200
    - independiente, 200
    - resolución de, 115
  - variación, 190
    - combinada, 190-191
    - conjunta, 190-191
    - directa, 190, 191
    - inversa, 190, 191-192
  - vector(es)
    - ángulo de dirección del, 543
    - aritmética de, 543
    - cero, 543
    - columna, 599, 608
    - de base estándar, 546
    - de desplazamiento, 542
      - punto inicial del, 542
      - punto terminal del, 542
    - de posición, 542
      - componentes del, 542
    - en el plano, 542-549
    - fila, 599, 608
    - forma trigonométrica de un, 547
    - horizontales, 546
    - normalización del, 546
    - operaciones con, 544
      - propiedades de las, 544
    - ortogonales, 552
    - unitarios, 545
    - verticales de longitud, 546
  - Verhulst, P. F., 339
  - vértice, 219, 356, 482, 587
    - de la parábola, 484
    - de un ángulo, 356
    - de una elipse, 490
    - de una hipérbola, 490
  - vida media, 340
  - Viète, Françoise, 2, 47
- X**
- $x$  cubum (cubo), 2, 47
  - $x$  quadratum (cuadrado), 2, 47

## Índice de contenido

**pág. v** (arriba) © Doug Pahael/Shutterstock, Inc.; **pág. vi** (arriba), cortesía de Joe Ross; **pág. vi** (en medio) © Dainis Derics/Shutterstock, Inc.; **pág. vi** (abajo) © olly/Shutterstock, Inc.; **pág. vii** (primera de arriba abajo) © TebNad/Shutterstock, Inc.; **pág. vii** (en medio) © Tad Denson/Shutterstock, Inc.; **pág. vii** (abajo) © Sergey Shandin/Shutterstock, Inc.; **pág. viii** (arriba) © Gabi Moisa/Shutterstock, Inc.; **pág. viii** (en medio) © Mikhail Khusid/Shutterstock, Inc.; **pág. viii** (abajo) cortesía de NASA/JPL; **pág. ix** (arriba) © Michael Monahan/Shutterstock, Inc.; **pág. ix** (en medio) © Andresr/Shutterstock, Inc.; **pág. ix** (abajo) © Skocko/Shutterstock, Inc.; **pág. x** © Andrea Danti/Shutterstock, Inc.

## Capítulo 2

**pág. 47** © Doug Pahael/Shutterstock, Inc.; **pág. 50** © Toponium/Shutterstock, Inc.; **pág. 55** © Inmage/Alamy Images; **pág. 57** © The Art Gallery Collection/Alamy Images; **pág. 68** © Lisa F. Young/Shutterstock, Inc.; **pág. 70** © Stephen Girimont/Shutterstock, Inc.; **pág. 75** © Luca Oleastri/Dreamstime.com; **págs. 76, 90** © Yuri Arcurs/Shutterstock, Inc.

## Capítulo 3

**pág. 111** cortesía de Joe Ross; **pág. 124** © lightpoet/Shutterstock, Inc.; **pág. 133** cortesía de la Biblioteca Nacional de Medicina de E.U.; **pág. 134** © Tatiana Belova/Shutterstock, Inc.; **pág. 158** © michaeljung/Shutterstock, Inc.; **pág. 164** cortesía de Joe Ross; **pág. 155** © jokerpro/Shutterstock, Inc.

## Capítulo 4

**pág. 167** © Dainis Derics/Shutterstock, Inc.; **pág. 187** © PhotoSmart/Shutterstock, Inc.; **pág. 194** (arriba) © S. Borisov/Shutterstock, Inc.; **pág. 194** (abajo) © Michael Onisiforou/Shutterstock, Inc.

## Capítulo 5

**pág. 199** © olly/Shutterstock, Inc.; **pág. 200** © Noah Strycker/Shutterstock, Inc.; **pág. 213** cortesía de Joanna Lee; **pág. 227** © John Lund/age fotostock; **pág. 238** cortesía de la marina estadounidense.

## Capítulo 6

**pág. 265** © TebNad/Shutterstock, Inc.; **pág. 290** cortesía de la Biblioteca del Congreso estadounidense, división de impresión y fotografía [número de reproducción crph.3c00653]; **pág. 310** © Pindyurin Vasily/Shutterstock, Inc.

## Capítulo 7

**pág. 317** © Tad Denson/Shutterstock, Inc.; **pág. 329** © Stock4B GmbH/Alamy Images; **pág. 338** (arriba) cortesía de Janice Haney Carr/CDC; **pág. 339** (arriba y abajo) © Biblioteca Nacional de Medicina de E.U.; **pág. 340** © Jones & Bartlett Learning, fotografía de Kimberly Potvin; **pág. 341** (arriba) Jules le Baron, cortesía de AIP Emilio Segre Visual Archives; **pág. 341** (izquierda) cortesía de la autoridad de antigüedades de Israel; **pág. 342** © Johanna Goodyear/Shutterstock, Inc.; **pág. 343** cortesía de los Archivos del Instituto de Tecnología de California/foto de James McClanahan; **pág. 344** cortesía de The Carlsberg Group; **pág. 346** (izquierda) © Robert Harding Picture Library Ltd./Alamy Images; **pág. 346** (derecha, arriba) Targa/age fotostock; **pág. 346** (abajo derecha) cor-

tesía del Museo de Arqueología del sur de Tirol (www.iceman.it); **pág. 347** (arriba) © Ron Hilton/ShutterStock, Inc.; **pág. 347** (abajo) © Thomas Weisensfels/ShutterStock, Inc.; **pág. 348** (izquierda arriba) cortesía de USGS; **pág. 348** © Edi Engeler, Keystone/AP Photos; **pág. 349** © Tad Denson/ShutterStock, Inc.; **pág. 350** © Caleb969/Dreamstime.com

### Capítulo 8

**pág. 355** © Sergey Shandin/ShutterStock, Inc.; **pág. 363** cortesía del *Mariner 10*, equipo de astrología y USGS; **pág. 364** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.; **pág. 383** © Ron Buskirk/Alamy Images; **pág. 385** © Doug James/ShutterStock, Inc.

### Capítulo 9

**pág. 389** © Gabi Moisa/ShutterStock Inc.; **pág. 421** © Fernando Batista/ShutterStock, Inc.; **pág. 432** cortesía del servicio del Parque Nacional de E.U.

### Capítulo 10

**pág. 443** © Mikhail Khusid/ShutterStock, Inc.; **pág. 451** (arriba) © Paul Fries/ShutterStock, Inc.; **pág. 452** (abajo) © Peter Elvidgel/ShutterStock, Inc.; **pág. 452** © Mary Lane/ShutterStock, Inc.; **pág. 460** © Roman Sigaev/ShutterStock, Inc.

### Capítulo 11

**págs. 481 y 482** cortesía de la NASA/JPL; **pág. 482** (arriba) © Christos Georghiou/ShutterStock, Inc.; **pág. 485** (abajo) cortesía de NASA/JPL; **pág. 486** (arriba) © dragon\_fang/ShutterStock, Inc.; **pág. 486** (en medio) © where-@tiscali.it/ShutterStock, Inc.; **pág. 486** (abajo) © Corbis; **pág. 493** © Brand X Pictures/Alamy Images; **pág. 514** © Corbis; **pág. 515** cortesía de Robert Guy/Instituto Nacional contra el Cáncer de E.U.; **pág. 519** © David Page/Alamy Images

### Capítulo 12

**pág. 521** © Michael Monahan/ShutterStock, Inc.; **pág. 528** de Wilson Bentley, *The Snowflake Man*, resumen anual de la *Monthly Weather Review*, 1902. Foto cortesía de la colección del Servicio Nacional del Clima de E.U./NOAA; **pág. 533** © Dmitry Nikolaev/ShutterStock, Inc.; **pág. 539** cortesía del *Mariner 10*, equipo de astrología y USGS; **pág. 541** © Datacraft/age fotostock; **pág. 548** © Elnur/ShutterStock, Inc.

### Capítulo 13

**pág. 559** © Skocko/ShutterStock, Inc.; **pág. 579** © Corbis; **pág. 591** (arriba) © Robert Kneschke/ShutterStock, Inc.; **pág. 592** (abajo) © Steve Bower/ShutterStock, Inc.

### Capítulo 14

**pág. 597** © Skocko/ShutterStock, Inc.; **pág. 608** © Africa Studio/ShutterStock, Inc.; **pág. 640** © Matty Symons/ShutterStock, Inc.

### Capítulo 15

**pág. 653** © Andrea Danti/ShutterStock, Inc.; **pág. 660** cortesía de Liam Quin; **pág. 667** (derecha arriba) © Melvin Longhurst/Alamy Images; **pág. 667** (izquierda abajo) © Fesus Robert/ShutterStock, Inc.; **pág. 673** © Sofos Design/ShutterStock, Inc.; **pág. 677** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.; **pág. 689** © Sergielev/ShutterStock, Inc.; **pág. 692** (arriba) © Juan Carlos Tinjaca/ShutterStock, Inc.; **pág. 692** (abajo) © Tony Rolls/Alamy Images; **pág. 693** cortesía de Pressman Toy Corporation; **pág. 694** (arriba) © James Steidl/ShutterStock, Inc.; **pág. 694** (abajo) © Gjermund Alsos/ShutterStock, Inc.; **pág. 695** © Sebastian Kaulitzki/ShutterStock, Inc.; **pág. 699** © xiver/ShutterStock, Inc.; **pág. 701** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.

A menos que se indique otra cosa, Jones & Bartlett Learning tiene los derechos de autor de todas las fotografías e ilustraciones.





