La última matriz tiene forma escalonada reducida por filas. Teniendo en cuenta lo que significa la matriz en términos de ecuaciones, de inmediato vemos que la solución es $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$. ≡

EJEMPLO 8 Sistema inconsistente

Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = -6 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Solución En el proceso de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema nos detenemos en

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right].$$

La tercera fila de la última matriz significa que $0x + 0y = 16$ (o $0 = 16$). Como no hay números x y y que puedan satisfacer esta ecuación, concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, es inconsistente. ≡

EJEMPLO 9 Balanceo de una ecuación química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Solución Buscamos los enteros positivos x, y, z y w para que la ecuación balanceada sea

$$x\, C_2H_6 + y\, O_2 \rightarrow z\, CO_2 + w\, H_2O$$

Como el número de átomos de cada elemento debe ser igual en ambos lados de la última ecuación, obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro variables:

carbono (C):	$2x = z$		$2x + 0y - z + 0w = 0$
hidrógeno (H):	$6x = 2w$	o	$6x + 0y + 0z - 2w = 0$
oxígeno (O):	$2y = 2z + w$		$0x + 2y - 2z - w = 0$

Puesto que el último sistema es homogéneo, debe ser consistente.

Véase la sección 13.1

Realizando operaciones elementales entre filas, obtenemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

y, por tanto, una solución del sistema es $x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{7}{6}\alpha$, $z = \frac{2}{3}\alpha$, $w = \alpha$. En este caso, α debe ser un entero positivo elegido de forma que x, y, z y w sean también enteros positivos. Para lograrlo, seleccionamos $\alpha = 6$. Esto da $x = 2$, $y = 7$, $z = 4$ y $w = 6$. Así, la ecuación balanceada es

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$ ≡

14.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 4, escriba la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y + 8z = 6 \\ 7x - 3y - 5z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ y - 5z + w = 1 \\ x - 9w = 4 \\ y + 6z = -1 \end{cases}$

En los problemas 5 a 32, resuelva el sistema dado, o demuestre que no tiene solución. Use eliminación gaussiana o eliminación de Gauss-Jordan, según lo indique su profesor.

5. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -4x + 6y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 13 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ 3x - 9y = -12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ 2x + y - z = 8 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ x + 3y + z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -5 \\ -2x - y + z = 6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = -1 \\ -3x + 3y + z = -5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 4 \\ 5x - y + 2z = 13 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 12x + 2y - 4z = 26 \\ 2x - y + z = -3 \\ 3x + 6y - 9z = 38 \end{cases}$

15. $\begin{cases} u + v - 3w = 6 \\ 2u - v + 6w = 7 \\ 3u - 9w = 9 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ -x + y + 2z = -2 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = -5 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 2x + 5y - 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x - 5y + 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x - 7y + 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 6z = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z - w = 3 \\ 3x - y + w = 1 \\ 2x - z - w = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y - z + w = 4 \\ -x + y - 2z + w = 3 \\ 2x - y + 3z - 2w = -4 \\ 3x - 2y + z - w = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + w = 7 \\ 4x + 9y + z + 12w = 21 \\ 3x + 9y + 6z + 21w = 9 \\ 3x + 9y + 6z + 21w = 9 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x - y + 3z - w = 0 \\ 3x + 4z = 1 \\ -x + 2y - 2z + 2w = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 6x + y - z = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x + 2y + z = 9 \\ y - z = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

En los problemas 33 a 38, use el procedimiento ilustrado en el ejemplo 9 para balancear la ecuación química dada.

33. $Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$

34. $KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$

35. $Fe_3O_4 + C \rightarrow Fe + CO$

36. $C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

37. $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + H_2O + NO$

38. $Ca_3(PO_4)_2 + H_3PO_4 \rightarrow Ca(H_2PO_4)_2$

39. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 8)$, $(-1, -4)$ y $(3, 4)$.

40. Encuentre los coeficientes a, b, c de modo que $(1, 1, -1)$, $(-2, -3, 3)$ y $(1, 2, -\frac{3}{2})$ sean soluciones de la ecuación $ax + by + cz = 1$.

41. Encuentre x, y, z, w tales que

$$\begin{bmatrix} x + y & 2z + w \\ 5x - 3w & y - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

42. Escriba un sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 9 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 & 2 & 10 \\ 7 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

≡ Aplicaciones diversas

43. Corriente de un circuito Se puede demostrar que las corrientes i_1, i_2 e i_3 de la red eléctrica que se ilustra en la **FIGURA 14.5.1** satisfacen el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1R + i_2R_2 &= E \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0, \end{aligned}$$

donde R_1, R_2, R_3 y E son constantes positivas. Use el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema cuando $R_1 = 10$, $R_2 = 20$, $R_3 = 10$ y $E = 12$.

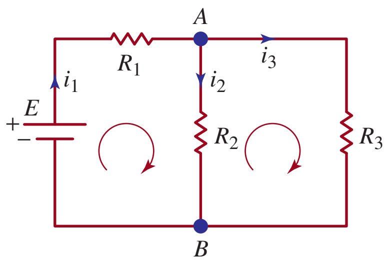


FIGURA 14.5.1 Red para el problema 43

44. Total de *A*, *B* y *C* Una empresa tiene 100 empleados divididos en tres categorías: *A*, *B* y *C*. Como se muestra en la tabla siguiente, cada empleado realiza una aportación diferente a un fondo de jubilación. Después de la negociación de un nuevo contrato, la aportación mensual de los empleados aumenta según el porcentaje indicado. El total de \$4 450 de aportaciones mensuales de todos los empleados aumenta entonces a \$5 270 a causa del nuevo contrato. Use el concepto de matriz aumentada para determinar el número de empleados en cada categoría.

	A	*B*	*C*	Total de aportaciones mensuales
Aportación mensual al fondo de pensiones por empleado	\$20	\$30	\$50	\$4 450
Aumento porcentual al mes por empleado	10%	10%	20%	\$5 270

≡ Problemas para calculadora o programa de cómputo

En los problemas 45 a 48, use una calculadora o programa de cómputo para resolver el sistema dado.

45. $\begin{cases} x + y + z = 4.280 \\ 0.2x - 0.1y - 0.5z = -1.978 \\ 4.1x + 0.3y + 0.12z = 1.686 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2.5x + 1.4y + 4.5z = 2.6170 \\ 1.35x + 0.95y + 1.2z = 0.7545 \\ 2.7x + 3.05y - 1.44z = -1.4292 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 1.2x + 3.5y - 4.4z + 3.1w = 1.8 \\ 0.2x - 6.1y - 2.3z + 5.4w = -0.6 \\ 3.3x - 3.5y - 2.4z - 0.1w = 2.5 \\ 5.2x + 8.5y - 4.4z - 2.9w = 0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 17x_4 - x_5 = 40 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

14.6 Sistemas lineales: matrices inversas

Introducción En esta sección y en la siguiente centraremos la atención únicamente en resolver sistemas lineales con n ecuaciones y n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Si el **determinante de los coeficientes** de las variables del sistema (1) se denota por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

entonces en esta sección y en la sección 14.7 resolveremos sistemas lineales como (1) bajo el supuesto adicional que $\det A \neq 0$.

Forma matricial de (1) Usando la multiplicación e igualdad de matrices podemos escribir el sistema lineal (1) como la ecuación de matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

En otras palabras, si A es la **matriz de coeficientes** del sistema (1) podemos escribir (1) como

$$AX = B, \tag{3}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Forma matricial de un sistema lineal

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x - y = 6 \\ 9x + 2y = -5 \end{cases} \tag{4}$$

se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

■ **Solución matricial** Si existe la inversa de la matriz de coeficientes de A, podemos resolver el sistema (3) multiplicando ambos miembros de la ecuación por A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B, \end{aligned}$$

o

$$X = A^{-1}B. \tag{6}$$

EJEMPLO 2 Reconsideración del ejemplo 1

Use la matriz inversa para resolver el sistema en (4).

Solución Como el determinante de la matriz de coeficientes A no es cero,

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

y la matriz A tiene un inverso multiplicativo, entonces

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{implica} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Por cualquiera de los dos métodos de la sección 14.4, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, se sigue a partir de (6) que la solución de (4) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $x = \frac{1}{3}$, y $y = -4$ es la solución del sistema dado. ≡

EJEMPLO 3 Uso de una matriz inversa

Use la matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ -x + 3y - z = 4 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Solución El sistema puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es det $A = 2 \neq 0$, tenemos que su inversa es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Así, por (6) tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solución del sistema está dada por $x = -5$, $y = 2$ y $z = 7$. ≡

Reconsideración de la recta de mínimos cuadrados En la sección 5.8 vimos que si tratamos de ajustar una recta $y = mx + b$ a un conjunto de puntos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), entonces m y b debe satisfacer un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{7}$$

En términos de matrices, el sistema (7) es $Y = AX$, donde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Definimos la solución de (7) como los valores de m y b que minimizan la suma de errores cuadráticos

$$E = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2$$

y, correspondientemente, $y = mx + b$ se conoce como **recta de mínimos cuadrados** o **recta del mejor ajuste** de los datos. La pendiente m y la constante b se definen por cocientes complicados de las sumas dadas en (5) de la sección 5.8. Estas fórmulas, que se obtienen por medio de cálculo son, en realidad, soluciones de un sistema lineal con las dos variables m y b:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + \qquad nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema anterior puede escribirse de una manera especial usando matrices:

$$A^T A X = A^T Y, \tag{10}$$

donde A, X y Y se definen en (8). Puesto que A es una matriz de $n \times 2$ y su matriz transpuesta A^T es una matriz de $2 \times n$, el orden del producto A^TA es 2×2. Además, a menos que todos los puntos de datos estén situados en la misma recta vertical, la matriz A^TA no es singular. Por tanto, (10) tiene la solución única

$$X = (A^TA)^{-1}A^TY. \tag{11}$$

Decimos que X es la **solución de mínimos cuadrados** del sistema sobredeterminado (7).

El ejemplo que sigue es el 2 de la sección 5.8, pero esta vez resuelto con matrices.

EJEMPLO 4 Ejemplo 2 de la sección 5.8

Obtenga la recta de mínimos cuadrados para los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5).

Solución La ecuación lineal $y = mx + b$ y los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) producen el sistema sobredeterminado

$$\begin{aligned} 1 &= m + b \\ 3 &= 2m + b \\ 4 &= 3m + b \\ 6 &= 4m + b \\ 5 &= 5m + b. \end{aligned} \tag{12}$$

Escrita como ecuación matricial $Y = AX$, (12) nos permite realizar las identificaciones

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$A^TA = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, (11) resulta en

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 \\ 19 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De las entradas de la última matriz, la solución de mínimos cuadrados de (12) es $m = 1.1$ y $b = 0.5$, y la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. ≡

Notas del aula

En conclusión, notamos que no todos los sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$ *consistentes* pueden resolverse por el método explicado en los ejemplos 2 y 3. Como es evidente, este procedimiento no sirve para sistemas lineales en los que la matriz de coeficientes A no tiene inversa, es decir, para los sistemas en los que $\det A = 0$. Sin embargo, cuando $\det A \neq 0$, puede probarse que un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ tiene una solución *única.*

14.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 18, escriba cada uno de los sistemas en la forma $AX = B$. Luego use la matriz inversa para resolver el sistema.

1. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 3y = 12 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -2x + 6y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ -2x - 3y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = -15 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3y - 2z = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y + z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 7 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 2y + 3z = 12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + y - z = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - 2y + z = 5 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x + 8y - z = -1 \\ x - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -4x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + w = -1 \\ 2y + z + w = 3 \\ x + z - w = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y - z + w = 2 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3w = 11 \\ x + y = 1 \end{cases}$

En los problemas 19 a 22, use una matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x + 9y = b_1 \\ 4x + 7y = b_2 \end{cases}$$

para la matriz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 a 28, proceda como en el ejemplo 4 y obtenga la recta de mínimos cuadrados para los datos que se indican.

23. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)

24. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)

25. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)

26. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)

27. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)

28. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)

≡ Aplicaciones diversas

En los problemas 29 a 31, use una matriz inversa para resolver el problema.

29. Juego de números La suma de tres números es 12. El segundo número es 1 más que tres veces el primero, y el tercer número es 1 menos que dos veces el segundo. Obtenga los números.

30. Total de *A*, *B* y *C* Una compañía fabrica tres productos A, B y C con los materiales m_1, m_2 y m_3. Las dos matrices

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{bmatrix} 26 \\ 47 \\ 59 \end{bmatrix}$$

representan, a su vez, el número de unidades de material usado en la elaboración de cada producto y el número de unidades de cada tipo de material usado en una semana específica. Encuentre

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

donde x, y y z son, respectivamente, el número de productos fabricados esa semana en especial.

31. Sondeo de profundidades Este problema muestra cómo se mide la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua con una sonda náutica. Suponga que un barco oceanográfico emite ondas acústicas por medio del sonar y que los tiempos de llegada de las ondas reflejadas desde el fondo del océano se graban en dos boyas rastreadoras (**FIGURA 14.6.1**). Usando la relación *distancia* = *velocidad* × *tiempo*, vemos en la figura que $2l_1 = vt_1$ y $2l_2 = vt_2$, donde v es la velocidad del sonido en el agua, t_1 y t_2 son los tiempos de llegada de las señales a las dos boyas, y l_1 y l_2 son las distancias indicadas.

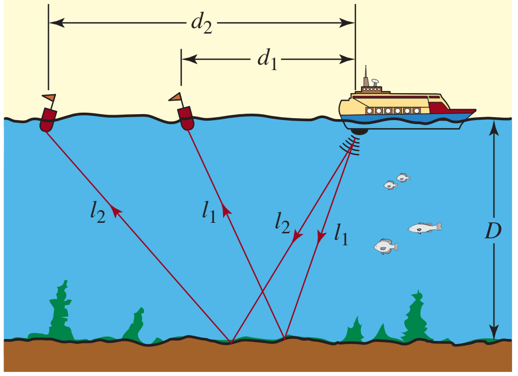


FIGURA 14.6.1 Sonda náutica para el problema 31

a) Demuestre que la velocidad v del sonido en el agua y la profundidad D del océano satisfacen la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & -4 \\ t_2^2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 \\ D^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{bmatrix}.$$

[*Pista:* use el teorema de Pitágoras para relacionar l_1, d_1 y D y l_2, d_2 y D].

b) Resuelva la ecuación matricial del inciso *a*) para obtener fórmulas para v y D en términos de las cantidades medibles d_1, d_2, t_1 y t_2.

c) Las boyas, rastreando a 1 000 y 2 000 m, registran los tiempos de llegada de las señales reflejadas en 1.4 y 1.8 segundos, respectivamente. Encuentre la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua.

14.7 Sistemas lineales: determinantes

■ Introducción En ciertas circunstancias podemos usar determinantes para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n variables.

Suponga que las ecuaciones lineales del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

son independientes. Si multiplicamos la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$ obtenemos

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_2b_1y = -c_2b_1. \end{cases}$$

En la última forma del sistema podemos eliminar la variable y mediante la suma de las dos ecuaciones. Despejamos x para obtener

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \tag{2}$$

De igual forma, al eliminar la variable x encontramos

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \tag{3}$$

Si representamos tres matrices de 2×2 con

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

donde A es la matriz de coeficientes de (1), entonces los numeradores y el común denominador de (2) y (3) se pueden escribir como determinantes de segundo orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \det A_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Los determinantes $\det A_x$ y $\det A_y$ en (5) se obtienen, a su vez, del $\det A$ sustituyendo los coeficientes de x y los coeficientes de y por los términos constantes c_1 y c_2 del sistema (1).

Con esta notación, resumimos la explicación de manera compacta.

Teorema 14.7.1 Dos ecuaciones con dos variables

Si $\det A \neq 0$, entonces el sistema en (1) tiene la solución única

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de (6)

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ -2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Solución Puesto que

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

se deduce que el sistema tiene una solución única. Continuando, tenemos que

$$\det A_x = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

Por (6), la solución está dada por

$$x = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}. \qquad \equiv$$

Del mismo modo, la solución (6) se puede ampliar a sistemas más grandes de ecuaciones lineales. En particular, para un sistema de ecuaciones con tres variables,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases} \tag{7}$$

y los determinantes análogos a los de (5) son

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det A_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \\ \det A_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como en (5), los tres determinantes $\det A_x$, $\det A_y$ y $\det A_z$ se obtienen del determinante $\det A$ de los coeficientes del sistema, sustituyendo los coeficientes x, y y z, respectivamente, por los términos constantes d_1, d_2 y d_3 en cada una de las tres ecuaciones lineales del sistema (7). La solución del sistema (7) que es análoga a (6) se proporciona a continuación.

Indicados en rojo d_1, d_2 y d_3 en (8).

Teorema 14.7.2 Tres ecuaciones con tres variables

Si $\det A \neq 0$, entonces el sistema en (7) tiene la solución única

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A}. \tag{9}$$

Las soluciones de (6) y (9) son casos especiales de un método más general conocido como la **regla de Cramer**, llamada así en honor de **Gabriel Cramer** (1704-1752), matemático suizo quien fue el primero en publicar estos resultados.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de Cramer

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 9 \\ x - y + 6z = -2 \\ 4x + 6y - 2z = -1. \end{cases}$$

Solución Evaluamos los cuatro determinantes de 3×3 de (9) usando el desarrollo de cofactores. Para empezar, obtenemos el valor del determinante de los coeficientes en el sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 126 \neq 0.$$

El hecho de que este determinante no sea cero basta para indicar que el sistema es consistente y tiene una solución única. Continuando, tenemos que

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -378, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 252,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 63.$$

Por (9), la solución del sistema es

$$x = \frac{-378}{126} = -3, \quad y = \frac{252}{126} = 2, \quad z = \frac{63}{126} = \frac{1}{2}. \qquad \equiv$$

Cuando el determinante de los coeficientes de las variables en un sistema lineal es cero, la regla de Cramer no puede usarse. Como veremos en el ejemplo que sigue, esto *no* significa que el sistema no tenga solución.

EJEMPLO 3 Sistema consistente

Para el sistema

$$\begin{cases} 4x - 16y = 3 \\ -x + 4y = -0.75 \end{cases}$$

vemos que

$$\begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0.$$

A pesar de que no podemos aplicar (6), el método de eliminación nos demostrará que el sistema es consistente, pero que las ecuaciones del sistema son dependientes. $\equiv$

Las ecuaciones de (9) pueden extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para el sistema (1) de la sección 14.6, la regla de Cramer es

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A},$$

siempre que $\det A \neq 0$. Como cuestión práctica, la regla de Cramer rara vez se usa en los sistemas con gran número de ecuaciones, simplemente porque la evaluación de los determinantes es una tarea sumamente tediosa. Para sistemas grandes, los métodos analizados en la sección 14.5 son los métodos de solución más eficientes.

14.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 14, use la regla de Cramer para resolver el sistema dado.

1. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 3y = 19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 8x - 2y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 5y = 5 \\ -x + 10y = -15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x - 3y = -7 \\ -2x + 6y = -9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13 \\ 3y + z = 5 \\ x - 7y + z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 4 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + 8z = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x - 8y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 10 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y - z + w = 4 \\ -x - y = -1 \\ 2x + y - 3w = -4 \\ 2y + z - 2w = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z + w = 3 \\ 2x - 2y + w = 4 \\ 2y - z + 3w = 4 \end{cases}$

Aplicaciones diversas

15. **Dosis de vitaminas** La dosis diaria recomendada en Estados Unidos, en porcentaje de contenido vitamínico por onza de alimentos de los grupos X, Y y Z, se indica en la tabla siguiente:

	X	Y	Z
Vitamina A	9	5	4
Vitamina C	3	5	0
Vitamina B_1	24	10	5

Use la regla de Cramer para determinar cuántas onzas de cada grupo de alimentos debe consumir todos los días una persona para tomar 100% de la dosis recomendada diaria de vitamina A, 30% de la dosis recomendada diaria de vitamina B_1 y 200% de la dosis recomendada diaria de vitamina C. Sean x, y y z el número de onzas de los grupos de alimentos X, Y y Z, respectivamente.

14.8 Criptografía

Introducción La palabra *criptografía* es una combinación de dos vocablos griegos: *crypto,* que significa "oculto" o "secreto", y *grapho,* que significa "escritura". Así, la criptografía es el estudio de "escrituras secretas" o **códigos**. En esta sección consideraremos un sistema de codificación y decodificación de mensajes que requiere que tanto el remitente como el destinatario del mensaje conozcan:

- Una regla de correspondencia específica entre un conjunto de símbolos (como las letras del alfabeto y los signos de puntuación que componen los mensajes) y un conjunto de números enteros.
- Una matriz A *no singular* especificada.

Codificación y decodificación Una correspondencia natural entre los 27 enteros no negativos y las letras del alfabeto y el espacio en blanco (para separar las palabras) está dado por

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
espacio	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

(1)

Usando la correspondencia (1), el equivalente numérico del mensaje

SEND THE DOCUMENT TODAY

es

$$19 \quad 5 \quad 14 \quad 4 \quad 0 \quad 20 \quad 8 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 15 \quad 3 \quad 21 \quad 13 \quad 5 \quad 14 \quad 20 \quad 0 \quad 20 \quad 15 \quad 4 \quad 1 \quad 25. \tag{2}$$

El remitente del mensaje lo codificará por medio de una matriz A no singular y el destinatario del mensaje codificado lo decodificará por medio de la matriz A^{-1} (única). La matriz A se llama **matriz de codificación** y A^{-1} se llama **matriz de decodificación**. El mensaje numérico (2) se escribe ahora como una matriz M. Puesto que hay 23 símbolos en el mensaje, necesitamos una matriz que tenga un mínimo de 24 entradas (una matriz de $m \times n$ tiene mn entradas). Optamos por escribir (2) como la matriz de 3×8

$$M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Observe que la última entrada (a_{38}) de la matriz M es simplemente un relleno de un espacio representado por el número 0. Desde luego, podríamos haber escrito el mensaje (2) como una matriz de 6×4, o una matriz de 4×6, pero eso habría requerido una matriz de codificación más grande. La selección de una matriz de 3×8 nos permite codificar el mensaje por medio de una matriz de 3×3. El tamaño de las matrices utilizadas tiene importancia sólo cuando la codificación y la decodificación se hacen a mano, no en computadora.

La matriz de codificación A se elije o, mejor dicho, se elabora de modo que

- A sea no singular
- A tenga sólo entradas de números enteros
- A^{-1} tenga sólo entradas de números enteros

El último criterio no es especialmente difícil de cumplir. Sólo debemos seleccionar las entradas de enteros de A de manera que $\det A = \pm 1$. Para una matriz de 2×2 o una de 3×3 podemos obtener A^{-1} con las fórmulas en (5) y (6) de la sección 14.4. Si A tiene entradas de enteros, entonces todos los cofactores A_{11}, A_{12}, etcétera, también son enteros. Para el análisis que nos ocupa, seleccionamos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Queda a su cargo comprobar que $\det A = -1$.

El mensaje original se **codifica** premultiplicando la matriz M del mensaje por la matriz de codificación A; es decir, el mensaje se envía como la matriz $B = AM$. Usando (3) y (4), el mensaje codificado es

$$\begin{aligned} B = AM &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Trate de imaginar la dificultad para decodificar la última matriz en (5) sin conocer A. Sin embargo, el destinatario del mensaje B conoce A y su inversa y, por tanto, la **decodificación** es un cálculo simple que consiste en premultiplicar B por la matriz de decodificación A^{-1}:

$$AM = B \qquad \text{implica que} \qquad M = A^{-1}B. \tag{6}$$

Para la matriz (4), tenemos por (6) de la sección 14.4 que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, por (6), el mensaje decodificado es

$$M = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

o

$$19 \quad 5 \quad 14 \quad 4 \quad 0 \quad 20 \quad 8 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 15 \quad 3 \quad 21 \quad 13 \quad 5 \quad 14 \quad 20 \quad 0 \quad 20 \quad 15 \quad 4 \quad 1 \quad 25 \quad 0.$$

Como el destinatario también conoce la correspondencia original (1), el destinatario traduce los números en

SEND_THE_DOCUMENT_TODAY_.

donde hemos realzado los espacios en blanco con guiones bajos.

Observaciones Aquí se imponen varias observaciones. La correspondencia o asignación (1) es una de muchas de este tipo que pueden establecerse entre las letras del alfabeto (incluso, podríamos incluir signos de puntuación, como coma y punto) y enteros. Usando las 26 letras del alfabeto y el espacio en blanco ¡podemos establecer 27 de estas correspondencias! (véase la sección 15.6). Además, podríamos haber usado una matriz de 2×2 para codificar (2). El tamaño de la matriz del mensaje M habría tenido que ser por lo menos de 2×12 para contener las 23 entradas del mensaje. Por ejemplo, si las matrices de codificación y del mensaje son, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces el mensaje codificado es

$$B = AM = \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando la matriz de decodificación $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos como antes

$$M = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

No hay ninguna razón concreta por la que el mensaje numérico (2) deba dividirse en filas (vectores fila de 1×8) como en la matriz (3). Por otra parte, (2) podría dividirse en columnas (vectores columna de 3×1) como se muestra en la matriz

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 & 4 & 21 & 14 & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & 13 & 20 & 15 & 25 \\ 14 & 20 & 0 & 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por último, puede ser deseable enviar el mensaje codificado como letras del alfabeto en lugar de números. En el problema 13 de los ejercicios 14.8 mostramos cómo transmitir SEND THE DOCUMENT TODAY codificado como

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

14.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 6, ***a***) use la matriz A y la correspondencia (1) para codificar el mensaje dado, y ***b***) decodifique el mensaje codificado para comprobar su trabajo.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; SEND HELP

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; THE MONEY IS HERE

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; PHONE HOME

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; MADAME X HAS THE PLANS

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; GO NORTH ON MAIN ST

6. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; DR JOHN IS THE SPY

En los problemas 7 a 10, use la matriz A y la correspondencia (1) para decodificar el mensaje dado.

7. $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 152 & 184 & 171 & 86 & 212 \\ 95 & 116 & 107 & 56 & 133 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 46 & -7 & -13 & 22 & -18 & 1 & 10 \\ 23 & -15 & -14 & 2 & -18 & -12 & 5 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 31 & 21 & 21 & 22 & 20 & 9 \\ 19 & 0 & 9 & 13 & 16 & 15 \\ 13 & 1 & 20 & 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 36 & 32 & 28 & 61 & 26 & 56 & 10 & 12 \\ -9 & -2 & -18 & -1 & -18 & -25 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 23 & 41 & 26 & 43 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

11. Usando la correspondencia (1), se codificó un mensaje M usando una matriz de 2×2 para obtener

$$B = \begin{bmatrix} 17 & 16 & 18 & 5 & 34 & 0 & 34 & 20 & 9 & 5 & 25 \\ -30 & -31 & -32 & -10 & -59 & 0 & -54 & -35 & -13 & -6 & -50 \end{bmatrix}.$$

Decodifique el mensaje si las primeras dos letras son DA y las últimas dos letras son AY.

12. ***a***) Usando la correspondencia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	k	l	n	m	s	t	u	w	x	g	h	i	o

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
p	q	r	v	y	z	a	b	c	d	e	f	espacio

obtenga el equivalente numérico del mensaje

BUY ALL AVAILABLE STOCK AT MARKET.
(COMPRA TODAS LAS ACCIONES
DISPONIBLES EN EL MERCADO)

b) Codifique el mensaje *posmultiplicando* la matriz del mensaje M por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Decodifique el mensaje codificado en el inciso *b*) para comprobar su trabajo.

13. Considere las matrices A y B definidas en (4) y (5), respectivamente.

a) Vuelva a escribir B como la matriz B' usando enteros módulo 27.*

* Para los enteros a y b, escribimos $a = b \pmod{27}$ si b es el residuo $(0 \le b < 27)$ cuando a se divide entre 27. Por ejemplo, $33 = 6 \pmod{27}$, $28 = 1 \pmod{27}$, y así sucesivamente. Los enteros negativos se manejan de la siguiente manera: como $27 = 0 \pmod{27}$, entonces, por ejemplo, $25 + 2 = 0 \pmod{27}$, por lo que tenemos entonces que $-25 = 2 \pmod{27}$ y $-2 = 25 \pmod{27}$. Además, $-30 = 24$ (mod 27, puesto que $30 + 24 = 54 = 0 \pmod{27}$.

b) Compruebe que el mensaje codificado que se envíe en letras sea

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

c) Decodifique el mensaje codificado calculando $A^{-1}B'$ y rescribiendo el resultado usando enteros módulo 27.

Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Matriz:
- orden
- transpuesta
- producto escalar
- columna
- fila

Identidad aditiva
Inverso aditivo
Suma de matrices
Producto de matrices
Identidad multiplicativa

Determinante:
- menor
- cofactor

Desarrollo por cofactores
Inverso multiplicativo
Matriz no singular
Matriz singular
Matriz adjunta
Matriz aumentada:
- matriz de coeficientes

Operaciones elementales entre filas

Matrices equivalentes por filas
Forma escalonada por filas
Eliminación gaussiana:
- sustitución hacia atrás

Eliminación de Gauss-Jordan
Forma escalonada reducida por filas
Recta de mínimos cuadrados
Regla de Cramer
Criptografía:
- codificación
- decodificación

CAPÍTULO 14 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 12, responda verdadero o falso.

1. Si A es una matriz cuadrada tal que $\det A = 0$, entonces A^{-1} no existe. _________

2. Si A es una matriz de 3×3 para la cual el cofactor $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, entonces $\det A = 0$. _________

3. Si A, B y C son matrices tales que $AB = AC$, entonces $B = C$. _________

4. Toda matriz cuadrada A tiene una matriz inversa A^{-1}. _________

5. Si $AB = C$ y si C tiene dos columnas, entonces B necesariamente tiene dos columnas. _________

6. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es singular. _________

7. Si A y B son matrices singulares de 2×2, entonces $A + B$ también es singular. _________

8. Si A es una matriz no singular tal que $A^2 = A$, entonces $\det A = 1$. _________

9. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ad = bc$, entonces A^{-1} no existe. ____

10. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}^2 = a^2 I_2$. _________

11. La matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ está en forma escalonada reducida por filas. __________

12. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b \\ 1/a & 0 \end{bmatrix}. \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

B. Llene los espacios en blanco

En los problema 1 a 12, llene los espacios en blanco.

1. Si A tiene 3 filas y 4 columnas y B tiene 4 filas y 6 columnas, entonces el orden del producto AB es __________.

2. Si A es de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times m$, entonces el orden de AB es _________ y el de BA es __________.

3. Si $A = (a_{ij})_{4\times 5}$, donde $a_{ij} = 2i^2 - j^3$, entonces la entrada de la tercera fila y segunda columna es _________.

4. Suponga que A es una matriz cuadrada y B es una matriz que se formó al intercambiar las primeras dos columnas de A. Si $\det A = 12$, entonces $\det B =$ _________.

5. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ y $\det A = 2$, entonces $x =$ _________.

6. Si $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ y $K = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, el número λ para el cual $AK = \lambda K$ es _________.

7. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ y $A + B = O$, entonces $B =$ _____.

8. Si $A = (a_{ij})_{4\times 4}$, donde $a_{ij} = 0$, con $i \neq j$, entonces $\det A$ _________.

9. Un ejemplo de una matriz A de $2 \times 2 \neq I_2$ tal que $A^2 = I_2$ es __________.

10. El menor determinante M_{22} de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es _________.

11. El cofactor de 5 en la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es ____.

12. Si A y B son matrices de $n \times n$ cuyas entradas correspondientes en la tercera columna son iguales, entonces $\det(A - B) = 0$ porque _________.

C. Ejercicios de repaso

1. Resuelva las incógnitas $\begin{bmatrix} x - y & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 3 & x + y \end{bmatrix}$.

2. Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

obtenga $A + B$ y $(-2)A + 3B$.

3. Las corrientes de una red eléctrica satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ i_2R_1 = E \\ i_2R_1 - i_3R_2 = 0 \\ i_3R_2 - i_4R_3 = 0, \end{cases}$$

donde R_1, R_2, R_3 y E son constantes positivas. Use la regla de Cramer para demostrar que

$$i_1 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

4. Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **anticonmutativas** si $AB = -BA$. Obtenga dos pares de matrices de 2×2 diferentes que sean anticonmutativas.

5. Encuentre todos los cofactores A_{ij} de las entradas a_{ij} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

6. Demuestre que si A es una matriz no singular para la cual $\det A = 1$, entonces $A^{-1} = \operatorname{adj} A$.

En los problemas 7 a 10, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y $\det A = 2$. Determine el valor del determinante dado.

7. $\det(4A)$

8. $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -3a_{31} & -3a_{32} & -3a_{33} \end{bmatrix}$

En los problemas 11 y 12, evalúe el determinante de la matriz dada.

11. $\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ f & 0 & g \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 13 y 14, use los teoremas 14.4.1 y 14.4.2 para obtener A^{-1} para la matriz dada.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 15 y 16, ejecute operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para la matriz dada.

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 17 y 18, escriba el sistema como una matriz aumentada. Resuelva el sistema por eliminación gaussiana.

17. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

En los problemas 19 y 20, escriba el sistema como una matriz aumentada. Resuelva el sistema por eliminación de Gauss-Jordan.

19. $\begin{cases} x - y - 2z = 11 \\ 2x + 4y + 5z = -35 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y = 11 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}$

En los problemas 21 y 22, use una matriz inversa para resolver el sistema dado.

21. $\begin{cases} 5x + 6y - z = 4 \\ x + y + z = 10 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$

En los problemas 23 y 24, aplique la regla de Cramer para resolver el sistema dado.

23. $\begin{cases} 0.5x - 0.2y = 4 \\ 0.6x + 0.8y = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$

En los problemas 25 y 26, desarrolle el determinante dado por cofactores que no sean los de la primera fila.

25. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

27. Obtenga los valores de x para los cuales la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

es no singular. Obtenga A^{-1}.

28. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

es singular.

En los problemas 29 a 40, suponga que

$$A = [5 \quad -6 \quad 7], \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtenga la matriz indicada si está definida.

29. $A - B^T$

30. $-3C$

31. $A(2B)$

32. $5BA$

33. AD

34. DA

35. $(BA)C$

36. $(AB)C$

37. C^TB

38. B^TD

39. $C^{-1}(BA)$

40. C^2

41. Demuestre que no existe ninguna matriz de 2×2 con entradas reales tal que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

42. Demuestre que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

43. Sean A y B matrices de 2×2. En general, ¿es verdad que

$$(AB)^2 = A^2B^2?$$

44. Demuestre que si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $A^2 = A^{-1}$, donde $A^2 = AA$.

45. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

46. Suponga que A es la matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

***a*)** Demuestre que la matriz A satisface la ecuación $A^2 - A - 2I_2 = O$, donde O es la matriz cero de 2×2.

***b*)** Use la ecuación del inciso ***a*)** para demostrar que $A^3 = 3A + 2I_2$ y $A^4 = 5A + 6I_2$. [*Pista:* multiplique la ecuación por A].

***c*)** Use el miembro derecho de la ecuación que corresponda del inciso ***b*)** para calcular A^3 y A^4.

47. Demuestre que si X_1 y X_2 son soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = O$, entonces $X_1 + X_2$ también es una solución.

48. Use la matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ para codificar el mensaje

SATELLITE LAUNCHED ON FRI

Use la correspondencia (1) de la sección 14.8.

SUCESIONES, SERIES Y PROBABILIDAD

15

En este capítulo

Al lanzar un par de dados, ¿qué probabilidades hay de que salga 7? Véase el ejemplo 4 en la sección 15.7

Un poco de historia Este capítulo podría haberse titulado “Matemáticas discretas”, puesto que cada uno de los temas que consideraremos —sucesiones, series, inducción, teorema del binomio, conteo y probabilidad— dependen de manera especial sólo de un conjunto de números enteros. Por ejemplo, veremos en la seccion 15.1 que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos. Cuando estudiemos probabilidad en la seccion 15.7 dejaremos el mundo de la certeza. En la vida un acontecimiento puede suceder o no. Cuando lanzamos una moneda al aire hay la misma probabilidad de que caiga cara o sello. Si se nos preguntara “¿caerá cara si se lanza la moneda?”, nuestra mejor respuesta sería: “hay 50% de probabilidad de que aparezca cara”. En una terminología matemática más precisa, la probabilidad de que aparezca cara es de $\frac{1}{2}$ (una posibilidad entre dos).

El año 1654 marca el comienzo de la teoría de la probabilidad. Fue entonces cuando el Chevalier de Méré, miembro de la nobleza francesa, le envió algunas preguntas que se le habían ocurrido mientras apostaba al matemático y filósofo **Blaise Pascal** (1623-1662). A Pascal se le despertó el interés y, a su vez, escribió a **Pierre de Fermat** (1601-1665), el matemático francés más eminente de su tiempo. El resultado de este intercambio epistolar contenía las deducciones básicas sobre el tema.

15.1 Sucesiones

Introducción La mayoría de la gente ha escuchado las frases "sucesión de cartas", "sucesión de acontecimientos" y "sucesión de cuotas del auto". Intuitivamente podemos describir una **sucesión** como una lista de objetos, acontecimientos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido. Los meses del año se enumeran en el orden en que ocurren

$$\text{Enero, febrero, marzo, …, diciembre} \tag{1}$$

y

$$3, 4, 5, \ldots, 12 \tag{2}$$

son dos ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama **término** de la sucesión. Las listas (1) y (2) son **sucesiones finitas**: la sucesión (1) tiene 12 términos y la sucesión (2) tiene 10 términos. Una sucesión como

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \tag{3}$$

donde no se indica el último término, se conoce como **sucesión infinita**. Los tres puntos de (1), (2) y (3) se llaman *elipsis* e indican que los términos siguientes siguen la misma pauta que la establecida por los ya dados.

Nota ▶ En este capítulo, a menos que se especifique otra cosa, usaremos la palabra *sucesión* para referimos a una *sucesión infinita*.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de los números enteros positivos. Por ejemplo, una correspondencia natural para la sucesión en (3) es

$$\begin{array}{ccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos definir una sucesión matemáticamente.

Definición 15.1.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto N de los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Tenga en cuenta que, en algunos casos, conviene suponer que el dominio de una sucesión es el conjunto de los números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Una **sucesión finita** es también una función cuyo dominio es algún subconjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ del conjunto N.

Terminología Los elementos del **rango** de una sucesión son, simplemente, los términos de la sucesión. Supondremos, de aquí en adelante, que el rango de una sucesión es un conjunto de números reales. El número $f(1)$ se toma como primer término de la sucesión, el segundo término es $f(2)$ y, en general, el **término *n*-ésimo** es $f(n)$. Más que usar notación de funciones, representamos los términos de una sucesión usando subíndices: $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots$, y así sucesivamente. El término n-ésimo $f(n) = a_n$ se llama también **término general** de la sucesión. Simbolizamos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

con la notación $\{a_n\}$. Si identificamos el término general en (3) como $1/n$ la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ puede escribirse en forma compacta como $\{1/n\}$.

EJEMPLO 1 Tres sucesiones

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión dada.

a) $\{2^n\}$ ***b)*** $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ ***c)*** $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$

Solución Si n tiene los valores 1, 2, 3, 4 y 5, los primeros cinco términos de las sucesiones (infinitas) son:

a) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ o $2, 4, 8, 16, 32, \ldots.$

b) $\dfrac{1}{1^2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{4^2}, \dfrac{1}{5^2}, \ldots$ o $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots.$

c) $\dfrac{(-1)^1\cdot 1}{1+1}, \dfrac{(-1)^2\cdot 2}{2+1}, \dfrac{(-1)^3\cdot 3}{3+1}, \dfrac{(-1)^4\cdot 4}{4+1}, \dfrac{(-1)^5\cdot 5}{5+1}, \ldots$

o $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{5}{6}, \ldots.$ ≡

■ Sucesiones definidas recursivamente En vez de dar el término general de una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, podemos definirla usando una regla o fórmula en la que a_{n+1} se expresa usando los términos anteriores. Por ejemplo, podemos hacer $a_1 = 1$ y definir los términos sucesivos como $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 = \overset{\substack{\text{dado}\\ \downarrow}}{1} + 2 = 3,\\ a_3 &= a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,\\ a_4 &= a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Se dice que estas sucesiones se definen **recursivamente**. En este ejemplo, la regla $a_{n+1} = a_n + 2$ se llama **fórmula de recursión**.

EJEMPLO 2 Sucesión recursiva

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = (n+2)a_n$.

Solución Se nos da $a_1 = 2$. De la fórmula de recursión tenemos, respectivamente, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\begin{aligned} a_2 &= (1+2)a_1 = 3(\overset{\substack{\text{dado}\\ \downarrow}}{2}) = 6,\\ a_3 &= (2+2)a_2 = 4(6) = 24,\\ a_4 &= (3+2)a_3 = 5(24) = 120,\\ a_5 &= (4+2)a_4 = 6(120) = 720, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Incluido el término $a_1 = 2$, los primeros cinco términos de la sucesión son

$$2, 6, 24, 120, 720, \ldots$$ ≡

Por supuesto, si elegimos un valor diferente para a_1 en el ejemplo, obtendremos una sucesión totalmente distinta.

En el resto de esta sección examinaremos dos tipos especiales de sucesiones que se definen mediante fórmulas recursivas.

■ Sucesión aritmetica En la sucesión 1, 3, 5, 7,..., nótese que cada término después del primero se obtiene sumando el número 2 al término anterior. En otras palabras, los términos sucesivos de la sucesión difieren en 2. Una sucesión de este tipo se conoce como **sucesión aritmética**.

Definición 15.1.2 Sucesión aritmética

Una sucesión tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama **sucesión aritmética**. El número d se llama **diferencia común** de la sucesión.

De $a_{n+1} - a_n = d$ obtenemos la fórmula recursiva

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{4}$$

para una sucesión aritmética con diferencia común d.

EJEMPLO 3 Una sucesión aritmética

Los primeros términos de la sucesión recursiva definida por $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + 4$ son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 4 = 3 + 4 = 7, \\ a_3 &= a_2 + 4 = 7 + 4 = 11, \\ a_4 &= a_3 + 4 = 11 + 4 = 15, \\ a_5 &= a_4 + 4 = 15 + 4 = 19, \\ &\vdots \end{aligned}$$

o

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots.$$

Ésta es una sucesión aritmética cuya diferencia común es 4. ≡

Si tenemos a_1 como primer término de una sucesión aritmética, con una diferencia común d, encontramos mediante la fórmula recursiva (4) que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, una sucesión airtmética cuyo primer término es a_1 y diferencia común d está dado por

$$\{a_1 + (n-1)d\}. \tag{5}$$

EJEMPLO 4 Sucesión aritmética aplicando (5)

Una mujer decide trotar una distancia particular cada semana de acuerdo con este programa: la primera semana trotará 1 000 metros por día. Cada semana subsiguiente trotará 250 metros más por día de lo que trotó la semana anterior.

a) ¿Qué distancia recorrerá por día en la semana número 26?
b) ¿En cuál semana trotará 10 000 metros por día?

Solución En el ejemplo se describe una sucesión aritmética con $a_1 = 1\,000$ y $d = 250$.
a) Para hallar la distancia que la mujer trota por día en la semana número 26, establecemos $n = 26$ y calculamos a_{26} usando (5):

$$a_{26} = 1\,000 + (26 - 1)(250) = 1\,000 + 6\,250 = 7\,250$$

Así, ella trotará 7 250 metros por día en la semana número 26.

b) Aquí se nos da $a_n = 10\,000$ y necesitamos encontrar n. Con base en (5) se desprende que $10\,000 = 1\,000 + (n - 1)(250)$ o $9\,000 = (n - 1)(250)$; al despejar n queda:

$$n - 1 = \tfrac{9\,000}{250} = 36 \qquad \text{o} \qquad n = 37.$$

Por tanto, ella trotará 10 000 metros por día en la semana número 37. ≡

EJEMPLO 5 Cálculo del primer término

La diferencia común en una sucesión aritmética es -2 y el sexto término es 3. Calcule el primer término.

Solución Por (5), el sexto término de la sucesión es

$$a_6 = a_1 + (6 - 1)d.$$

Estableciendo $a_6 = 3$ y $d = -2$, tenemos $3 = a_1 + 5(-2)$ o $a_1 = 3 + 10$. Por ende, el primer término es $a_1 = 13$.

Comprobación La sucesión con $a_1 = 13$ y $d = -2$ es 13, 11, 9, 7, 5, 3,… El sexto término de esta sucesión es 3. ≡

Sucesión geométrica En la sucesión 1, 2, 4, 8,…, cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por el número 2. En este caso, observamos que la razón de un término con el término anterior es una constante: 2. Se dice que una sucesión de este tipo es una **sucesión geométrica**.

> **Definición 15.1.3 Sucesión geométrica**
>
> Una sucesión cuyos términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3,\ldots$ tienen una razón fija $a_{n+1}/a_n = r$ se llama **sucesión geométrica**. El número r se llama **razón común** de la sucesión.

De $a_{n+1}/a_n = r$, vemos que una sucesión geométrica con una razón común r se define mediante la fórmula recursiva

$$a_{n+1} = a_n r. \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Sucesión geométrica aplicando (6)

La sucesión definida recursivamente por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = -3a_n$ es

$$2, -6, 18, -54, \ldots$$

Se trata de una sucesión geométrica con razón común $r = -3$. ≡

Si tenemos $a_1 = a$ como primer término de una sucesión geométrica con razón común r, hallamos a partir de la fórmula recursiva (6) que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r = ar \\ a_3 &= a_2 r = ar^2 \\ a_4 &= a_3 r = ar^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} r = ar^{n-1} \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, una sucesión geométrica con primer término a y razón común r es

$$\{ar^{n-1}\}. \tag{7}$$

EJEMPLO 7 Cálculo del tercer término

Encuentre el tercer término de una progresión geométrica con razón común $\frac{2}{3}$ y sexto término $\frac{128}{81}$.

Solución Primero calculamos a. Puesto que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos de (7) que

$$\frac{128}{81} = a\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}.$$

Al despejar a encontramos

$$a = \frac{\frac{128}{81}}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2^7}{3^4}\left(\frac{3^5}{2^5}\right) = 12.$$

Aplicando (7) de nuevo con $n = 3$ obtenemos

$$a_3 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 12\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{3}.$$

El tercer término de la progresión es $a_3 = \frac{16}{3}$. ≡

Interés compuesto La cantidad inicial de dinero depositada en una cuenta de ahorro se llama **capital** y se representa por P. Suponga que la **tasa de interés** anual es r. Si el interés se *compone anualmente*, entonces al final del primer año el interés sobre P será Pr y la cantidad A_1 acumulada en la cuenta al final del primer año es el capital más el interés:

$$A_1 = P + Pr = P(1 + r).$$

El interés ganado sobre esta cantidad al final del segundo año es $P(1 + r)r$. Si esta cantidad se deposita, entonces al final del segundo año la cuenta contiene

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1 + r) + P(1 + r)r \\ &= P(1 + 2r + r^2) = P(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, podemos construir la tabla siguiente.

Año	Cantidad al final del año
1	$P(1 + r)$
2	$P(1 + r)^2$
3	$P(1 + r)^3$
4	$P(1 + r)^4$
⋮	⋮

Las cantidades de la segunda columna de la tabla forman una sucesión geométrica con el primer término $P(1 + r)$ y razón común $1 + r$. Así, podemos concluir de (7) que la cantidad en la cuenta de ahorro al final del año n-ésimo es $A_n = [P(1 + r)](1 + r)^{n-1}$ o

$$A_n = P(1 + r)^n. \tag{8}$$

EJEMPLO 8 Interés compuesto

El 1 de enero de 2010 se depositó un capital de $500 en una cuenta que paga 4% de interés compuesto anual. Calcule la cantidad que habrá en la cuenta el 1 de enero de 2024.

Solución Hacemos la identificación $P = 500$ y $r = 0.04$. Al 1o. de enero de 2024, el capital habrá devengado intereses durante 14 años. Usando (8) y una calculadora, obtenemos

$$\begin{aligned} A_{14} &= 500(1 + 0.04)^{14} \\ &= 500(1.04)^{14} \\ &\approx 865.84. \end{aligned}$$

Redondeando al número cerrado más próximo, la cuenta tendrá $866 después de 14 años. ≡

15.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 10, enumere los cinco primeros términos de la sucesión dada.

1. $\{(-1)^n\}$
2. $\left\{\dfrac{n}{n + 3}\right\}$
3. $\{\frac{1}{2}n(n + 1)\}$
4. $\left\{\dfrac{(-2)^n}{n^2}\right\}$
5. $\left\{\dfrac{1}{n^2 + 1}\right\}$
6. $\left\{\dfrac{n + 1}{n + 2}\right\}$
7. $\{n \cos n\pi\}$
8. $\left\{\dfrac{1}{n^3} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right\}$
9. $\left\{\dfrac{n + (-1)^n}{1 + 4n}\right\}$
10. $\{(-1)^{n-1}(1 + n)^2\}$

En los problemas 11 y 12, enumere los primeros seis términos de una sucesión cuyo término general se da.

11. $a_n = \begin{cases} -2^n, & n \text{ es impar,} \\ n^2, & n \text{ es par} \end{cases}$
12. $a_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ es impar,} \\ 1/n, & n \text{ es par} \end{cases}$

En los problemas 13 y 14, descubra una pauta para la sucesión dada y determine los tres términos que siguen al último dado.

13. $1, 2, \frac{1}{9}, 4, \frac{1}{25}, 6, \ldots$
14. $2, 3, 5, 8, 12, 17, \ldots$

En los problemas 15 a 22, enumere los cinco primeros términos de la sucesión definida por la fórmula recursiva dada.

15. $a_1 = 3,\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{a_{n-1}}$
16. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = (-1)^n(a_{n-1})^2$
17. $a_1 = 0,\ a_n = 2 + 3a_{n-1}$
18. $a_1 = 2,\ a_n = \frac{1}{3}na_{n-1}$
19. $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{1}{n}a_{n-1}$
20. $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$
21. $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + 2$
22. $a_1 = -6,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$

En los problemas 23 a 32, la sucesión dada es aritmética o geométrica. Encuentre la diferencia aritmética o la razón geométrica. Escriba el término general y la fórmula recursiva de la sucesión.

23. $4, -1, -6, -11, \ldots$
24. $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$
25. $4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{27}{16}, \ldots$
26. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$
27. $2, -9, -20, -31, \ldots$
28. $-\frac{1}{3}, 1, -3, 9, \ldots$
29. $0.1, 0.01y, 0.001y^2, 0.0001y^3 \ldots$
30. $4x, 7x, 10x, 13x \ldots$
31. $\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \ldots$
32. $\log_3 2, \log_3 4, \log_3 8, \log_3 16 \ldots$
33. Obtenga el vigésimo término de la sucesión $-1, 5, 11, 17, \ldots$
34. Obtenga el decimoquinto término de la sucesión $2, 6, 10, 14, \ldots$
35. Obtenga el quinto término de una sucesión geométrica cuyo primer término es 8 y cuya razón común es $-r = \frac{1}{2}$.

36. Obtenga el octavo término de la sucesión $\frac{1}{1\,024}, \frac{1}{128}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \ldots$ $\frac{1}{2}, \ldots$

37. Obtenga el primer término de una sucesión geométrica cuyos términos tercero y cuarto son 2 y 8, respectivamente.

38. Obtenga el primer término de una sucesión aritmética cuyos términos cuarto y quinto son 5 y -3, respectivamente.

39. Obtenga el séptimo término de una sucesión aritmética cuyos términos primero y tercero son 357 y 323, respectivamente.

40. Obtenga el décimo término de una sucesión geométrica cuyos términos quinto y sexto son 2 y 3, respectivamente.

41. Obtenga la sucesión aritmética cuyo primer término es 4 y tal que la suma de los términos segundo y tercero es 17.

42. Obtenga la sucesión geométrica cuyo segundo término es 1 tal que $a_5/a_3 = 64$.

43. Si se invierten \$1 000 a 7% de interés compuesto anual, ¿cuál es la cantidad que habrá en la cuenta después de 20 años?

44. Calcule la cantidad que debe depositarse en una cuenta que paga 5% de interés compuesto anual para tener \$10 000 en la cuenta después de 30 años.

45. ¿A qué tasa de interés compuesto anual deben depositarse \$450 para tener \$759 en 8 años?

46. A la tasa de 6% de interés compuesto anual, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la inversión inicial?

Aplicaciones diversas

47. **Ahorro en una alcancía** Una pareja decide guardar \$5 cada mes el primer año de su matrimonio, \$15 cada mes del segundo año, \$25 cada mes del tercer año, y así sucesivamente, aumentando la cantidad mensual en \$10 cada año. Calcule la cantidad que ahorrarán cada mes del decimoquinto año.

48. **Ahorro en una alcancía (continuación)** En el problema 47, halle una fórmula para la cantidad que la pareja debe ahorrar cada mes del año n-ésimo.

49. **Crecimiento demográfico** Se observa que la población de cierta comunidad crece geométricamente por un factor de $\frac{3}{2}$ cada año. Si al principio del primer año la población es de 1 000, ¿cuál será la población al principio del undécimo año?

50. **Utilidad** Una pequeña empresa espera que sus utilidades aumenten \$10 000 al año. Si la utilidad después del primer año es de \$6 000, ¿cuánta utilidad puede esperar la empresa después de 15 años de operación?

51. **Árbol genealógico** Todo el mundo tiene un padre y una madre. Determine cuántos tatara-tatarabuelos tendrá una persona.

52. **¿Cuántos conejos?** Además de la famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, también es célebre porque ahí nació **Leonardo Pisano**, también conocido como **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema decimal indoarábigo y el uso de los números arábigos. Su obra *Liber Abacci* (*Libro del ábaco*), publicado en 1202, es básicamente un texto sobre cómo hacer operaciones aritméticas con este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 Fibonacci plantea y resuelve el problema siguiente sobre la reproducción de los conejos:

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año comenzando con una sola pareja si, en cada mes, de cada pareja nace una nueva pareja que se vuelve productiva a partir del segundo mes?

Estatua de Fibonacci en Pisa, Italia

Discierna la pauta de la resolución de este problema y complete la tabla siguiente:

	Inicio	Después de cada mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas de adultos	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de bebés	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

53. Escriba cinco términos, después de los primeros dos, de la sucesión definida por medio de la fórmula recursiva $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Los elementos del rango de esta sucesión se llaman **números de Fibonacci**. Reexamine el problema 52.

Para la discusión

54. Compruebe que el término general de la sucesión definida en el problema 53 es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para ello, demuestre que este resultado satisface la fórmula recursiva.

55. Encuentre dos valores de x tales que $-\frac{3}{2}, x, -\frac{8}{27}, \ldots$ es una sucesión geométrica.

15.2 Series

Introducción En el análisis siguiente, nos ocuparemos de la suma de los términos de una sucesión. De especial interés son las sumas de los primeros n términos de las sucesiones aritméticas y geométricas infinitas. Para empezar, consideraremos una notación especial que se emplea como una forma práctica de abreviar una suma de términos indicada.

Notación sigma Suponga que nos interesa la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$. En lugar de escribir

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

los matemáticos han inventado una notación para representar tales sumas de manera concisa:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Puesto que $\sum$ es la letra mayúscula griega *sigma,* la notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se denomina **notación de suma** o **notación sigma** y se lee "la suma de $k = 1$ a $k = n$ de a subíndice k". El subíndice k se llama **índice de la suma** y asume los valores sucesivos 1, 2,…, n:

la suma termina con este número

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

la suma empieza con este número

EJEMPLO 1 Notación sigma

Escriba cada suma completa.

a) $\sum_{k=1}^{4} k^2$ ***b***) $\sum_{k=1}^{20} (3k + 1)$ ***c***) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

Solución ***a***) $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16,$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} (3k + 1) &= (3(1) + 1) + (3(2) + 1) + (3(3) + 1) + \cdots + (3(20) + 1)\\ &= 4 + 7 + 10 + \cdots + 61,\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k &= (-1)^{1+1}a_1 + (-1)^{2+1}a_2 + (-1)^{3+1}a_3 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\\ &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n.\end{aligned}$$

≡

La elección de la letra que se usa como índice de la suma es arbitraria. Aunque regularmente usamos la letra k, notamos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

y así sucesivamente. También, como veremos en el ejemplo que sigue, podemos permitir algunas veces que el índice de la suma empiece con un valor diferente de $k = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la notación sigma

Escriba $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$ en notación sigma.

Solución Observamos que el término k-ésimo de la sucesión $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ se puede escribir como $(-1)^k \frac{1}{2^k}$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nótese también que $\frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}.$$

≡

Propiedades En el teorema que se presenta a continuación se da una lista de algunas propiedades de la notación sigma.

Teorema 15.2.1 Propiedades de la notación sigma

Suponga que c es una constante (es decir, no depende de k), entonces

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, *ii)* $\sum_{k=1}^{n} c = nc$,

iii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, *iv)* $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$.

La propiedad *i*) del teorema 15.2.1 simplemente factoriza un término común de una suma:

$$\sum_{k=1}^{n} ca = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Para entender la propiedad *ii*), consideremos los siguientes ejemplos simples:

$$\overbrace{2 + 2 + 2}^{\text{tres } 2} = 3 \cdot 2 = 6 \qquad \text{y} \qquad \overbrace{7 + 7 + 7 + 7}^{\text{cuatro } 7} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Así, si $a_k = c$ es una constante real para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$a_1 = c, a_2 = c, \ldots, \qquad a_n = c.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{n \text{ términos}} = nc.$$

Por ejemplo, $\sum_{k=1}^{10} 6 = 10 \cdot 6 = 60$.

Series aritméticas Recuerde que en (5) de la sección 15.1 vimos que una sucesión aritmética podía escribirse como $\{a_1 + (n-1)d\}$. La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \tag{1}$$

se llama **serie aritmética**. Si representamos el último término de la serie en (1) con a_n, entonces S_n puede escribirse

$$S_n = (a_n - (n-1)d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n. \tag{2}$$

Invirtiendo los términos en (1), tenemos

$$S_n = (a_1 + (n - 1)d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1. \tag{3}$$

Sumando (2) y (3), obtenemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

Así,

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right). \tag{4}$$

En otras palabras, la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es el número de términos n multiplicado por el promedio del primer término a_1 y el n-ésimo término a_n de la sucesión.

EJEMPLO 3 Series aritméticas

Halle la suma de los primeros siete términos de la sucesión aritmética $\{5 - 4(n - 1)\}$.

Solución El primer término de la sucesión es 5 y el séptimo es -19. Si identificamos $a_1 = 5$, $a_7 = -19$ y $n = 7$, se desprende de (4) que la suma de los siete términos en la serie aritmética es

$$5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11) + (-15) - (-19)$$

es

$$S_7 = 7\left(\frac{5 + (-19)}{2}\right) = 7(-7) = -49.$$

≡

EJEMPLO 4 Suma de los primeros 100 enteros positivos

Halle la suma de los primeros 100 números enteros positivos.

Solución La sucesión de los números enteros positivos $\{k\}$,

$$1, 2, 3, \ldots,$$

es una sucesión aritmética con diferencia común de 1. Por consiguiente, con base en (4), el valor de $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ está dado por

$$S_{100} = 100\left(\frac{1 + 100}{2}\right) = 50(101) = 5\,050.$$

≡

Otra forma de la suma de una serie aritmética se obtiene sustituyendo $a_1 + (n - 1)d$ por a_n en (4). Entonces, tenemos

$$S_n = n\left(\frac{2a_1 + (n - 1)d}{2}\right), \tag{5}$$

que expresa la suma de una serie aritmética en términos del primer término, el número de términos y la diferencia común.

EJEMPLO 5 Pago total de un préstamo

Una mujer desea pagar un préstamo sin intereses de \$1 300, cancelando \$10 el primer mes y aumentando su pago en \$15 cada mes subsiguiente. ¿En cuántos meses pagará la totalidad del préstamo? Halle la cantidad del último pago.

Solución Los pagos mensuales forman una sucesión aritmética con el primer término $a_1 = 10$ y diferencia común $d = 15$. Puesto que la suma de la serie aritmética formada por la sucesión de pagos es \$1 300, establecemos que $S_n = 1\,300$ en (5) y resolvemos para n:

$$\begin{aligned} 1\,300 &= n\left(\frac{2(10) + (n-1)15}{2}\right) \\ &= n\left(\frac{5 + 15n}{2}\right) \\ 2\,600 &= 5n + 15n^2. \end{aligned}$$

Si dividimos entre 5 la última ecuación, se simplifica a $3n^2 + n - 520 = 0$ o $(3n + 40)(n - 13) = 0$. Así, $n = -\frac{40}{3}$ o $n = 13$. Puesto que n debe ser un entero positivo, concluimos que se necesitarán trece meses para pagar el préstamo en su totalidad. El pago final será

$$a_{13} = 10 + (13 - 1)15 = 10 + 180 = \$190.$$

≡

Series geométricas La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica $\{ar^{n-1}\}$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{6}$$

y se llama **serie geométrica finita**. Multiplicando (6) por la razón común r obtenemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{7}$$

Restando (7) de (6) y simplificando obtenemos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$$

o

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n).$$

Resolviendo esta ecuación para S_n obtenemos una fórmula para la suma de una serie geométrica que contiene n términos

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{8}$$

EJEMPLO 6 Suma de una serie geométrica

Calcule la suma $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$.

Solución Esta serie geométrica es la suma de los primeros seis términos de la sucesión geométrica $\{3(\frac{1}{2})^{n-1}\}$. Identificando el primer término $a = 3$, la razón común $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$ en (8), tenemos

$$S_6 = \frac{3\left(1 - (\frac{1}{2})^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 6\left(\frac{63}{64}\right) = \frac{189}{32}.$$

≡

EJEMPLO 7 Suma de una serie geométrica

Un urbanizador construyó una casa en 2002. Con sus utilidades pudo construir dos casas en 2003. Con las utilidades construyó cuatro casas en 2004. Suponga que puede continuar duplicando el número de casas que construye cada año y halle el número total de casas que habrá construido al final de 2012.

Solución El número total de casas que construye en los 11 años desde 2002 hasta 2012 es la suma de la serie geométrica con primer término $a = 1$ y razón común $r = 2$. De (8) tenemos que el número total de casas es

$$S_{11} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{1 - 2\,048}{-1} = 2\,047. \qquad \equiv$$

Retomaremos el tema de las series geométricas en la sección 15.3.

15.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 6, calcule la suma dada.

1. $\sum_{k=1}^{4} (k - 1)^2$

2. $\sum_{k=1}^{3} (-1)^k 2^k$

3. $\sum_{k=0}^{5} (k - k^2)$

4. $\sum_{k=1}^{15} 3$

5. $\sum_{k=2}^{6} (-1)^k \frac{30}{k}$

6. $\sum_{k=0}^{3} (1 - k)^3$

En los problemas 7 a 10, escriba los términos de la suma dada.

7. $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

8. $\sum_{k=1}^{5} k a_k$

9. $\sum_{k=0}^{3} (-1)^n$

10. $\sum_{k=0}^{4} k^2 f(k)$

En los problemas 11 a 16, escriba las series dadas en notación sigma.

11. $3 + 7 + 9 + 11$

12. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \frac{36}{7}$

13. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{48} - \frac{1}{96}$

14. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{7} + \frac{9}{8} + \frac{11}{9}$

15. $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32}$

16. $a_0 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{7}a_6 + \cdots + \frac{1}{2n + 1}a_{2n}$

En los problemas 17 a 22, halle la suma de las series aritméticas dadas.

17. $1 + 4 + 7 + 10 + 13$

18. $131 + 111 + 91 + 71 + 51 + 31$

19. $\sum_{k=1}^{12} [3 + (k - 1)8]$

20. $\sum_{k=1}^{20} [-6 + (k - 1)3]$

21. $12 + 5 - 2 - \cdots - 100$

22. $-5 - 3 - 1 + \cdots + 25$

En los problemas 23 a 28, encuentre la suma de las series geometricas dadas.

23. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

24. $7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224$

25. $60 + 6 + 0.6 + 0.06 + 0.006$

26. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243}$

27. $\sum_{k=1}^{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

28. $\sum_{k=1}^{5} 4\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

29. Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con $d = 2$, de modo que $S_{10} = 135$. Obtenga a_1 y a_{10}.

30. Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con $a_1 = 4$, de modo que $S_8 = 86$. Calcule a_8 y d.

31. Suponga que $a_1 = 5$ y $a_n = 45$ son los términos primero y n-ésimo, respectivamente, de una serie aritmética en la que $S_n = 2\,000$. Encuentre n.

32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica con $r = \frac{1}{2}$, de modo que $S_6 = \frac{65}{8}$. Obtenga el primer término a.

33. La suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $\{2^n\}$ es $S_n = 8\,190$. Obtenga n.

34. Obtenga la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética

$$y, \frac{x + 3y}{2}, x + 2y, \ldots .$$

35. Obtenga la suma de los primeros 15 términos de la sucesión geométrica

$$\frac{x}{y}, -1, \frac{y}{x}, \ldots .$$

36. ***a***) Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

b) Reexamine la fotografía de la primera página del capítulo 2. Suponga que el numerador de la fracción es la suma de los primeros 100 enteros positivos. Obtenga el valor de la fracción.

37. Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n números pares enteros.

38. Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n números impares enteros.

39. Use el resultado obtenido en el inciso *a*) del problema 36 para obtener la suma de los primeros 1 000 números enteros positivos.

40. Use el resultado obtenido en el problema 38 para obtener la suma de los primeros 50 números impares enteros.

Aplicaciones diversas

41. Ahorro en una alcancía Una pareja decide guardar \$5 cada mes el primer año de su matrimonio, \$15 cada mes del segundo año, \$25 cada mes del tercer año y así sucesivamente, aumentando la cantidad mensual en \$10 cada año. Calcule la cantidad total que habrán ahorrado al final del decimoquinto año.

42. Ahorro en una alcancía (continuación) En el problema 41, encuentre una fórmula para calcular la cantidad total que la pareja habrá ahorrado al final del n-ésimo año.

43. Distancia recorrida Un automóvil acelera a velocidad constante y recorre 2 metros en el primer segundo, 6 metros en el segundo, 10 metros en el tercero y así sucesivamente, recorriendo 4 metros adicionales cada segundo. Calcule la distancia total que el automóvil recorre después de 6 segundos.

44. Distancia total Halle la fórmula para la distancia total que recorre el automóvil del problema 43 después de n segundos.

45. Anualidad Si la misma cantidad de dinero P se invierte cada año durante n años a una tasa de interés compuesto anual r, entonces la cantidad acumulada después del n-ésimo pago está dada por

$$S = P(1 + r)^{n-1} + P(1 + r)^{n-2} + \cdots + P(1 + r) + P.$$

Este plan de ahorro se llama **anualidad**. Demuestre que el valor de la anualidad después del n-ésimo pago es de

$$S = P\left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right].$$

46. Rebotes de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de la altura inmediatamente anterior. ¿Qué altura alcanzará en el tercer rebote? ¿Y en el n-ésimo rebote? ¿Cuántas veces tiene que rebotar la pelota en el concreto para que la altura alcanzada sea menor que 1/1 pie? (**FIGURA 15.2.1**).

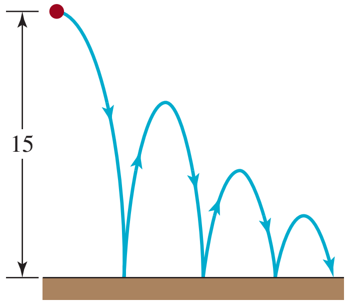


FIGURA 15.2.1 Rebotes de la pelota del problema 46

47. Distancia total En el problema 46, obtenga la distancia total que la pelota ha recorrido hasta el momento en que golpea la losa de concreto por séptima ocasión.

48. Desalinización Una solución de agua salada que contiene 10 kg de sal se pasa por un filtro que elimina 20% de la sal. La solución resultante se filtra de nuevo, con lo que se elimina 20% de la sal restante. Si se elimina 20% de la sal durante cada filtración, calcule la cantidad de sal que se elimina de la solución después de 10 filtraciones.

49. Acumulación de un medicamento Un paciente toma 50 mg de un medicamento todos los días y de la cantidad acumulada, 90% se elimina a diario por medio de las funciones corporales. Determine cuánto del medicamento se ha acumulado en el organismo inmediatamente después de la octava dosis.

50. Presentación en forma de pirámide Un comerciante de comestibles desea poner una exhibición de sopas enlatadas en forma de pirámide con 20 latas en la primera fila, 19 latas en la siguiente fila, 18 latas en la siguiente fila y así sucesivamente, hasta que quede una sola lata hasta arriba. ¿Cuántas latas de sopa necesita para la presentación?

Presentación de latas de sopa

Para la discusión

51. **Maestro de ajedrez** Cuenta la leyenda que el rey de un país del Medio Oriente quedó totalmente fascinado con el nuevo juego de ajedrez y preguntó al campesino que lo había inventado cómo podía premiarlo. La modesta petición del inventor fue que quería la suma de los granos de trigo que llenaran el tablero de ajedrez de acuerdo con esta regla: 1 grano en el primer cuadro, 2 granos en el segundo cuadro, 4 en el tercero, 8 en el cuarto y así sucesivamente hasta llenar los 64 cuadros. El rey accedió de inmediato a esta solicitud. Si un kilogramo contiene 10^6 granos de trigo, ¿cuántos kilogramos le debía el rey al inventor? ¿Cree usted que el campesino haya vivido para ver su premio?

Tablero de ajedrez

15.3 Convergencia de sucesiones y series

Introducción Las sucesiones y series son importantes y se estudian a profundidad en un curso típico de cálculo. En ese estudio, distinguimos entre las sucesiones que son convergentes y las que son divergentes. En el análisis que sigue examinaremos estos conceptos desde un punto de vista intuitivo.

Convergencia La sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ es un ejemplo de una sucesión **convergente**. Aunque es evidente que los términos de la sucesión,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

aumentan a medida que n crece, los valores $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ no se incrementan sin límite. Esto ocurre porque $n < n + 1$ y, por tanto,

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

para todos los valores de n. Por ejemplo, para $n = 100$, $a_{100} = \frac{100}{101} < 1$. Además, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a 1 a medida que los valores de n se vuelven progresivamente más grandes. Usando el símbolo $\rightarrow$ para representar las palabras *tiende a* esto se escribe

$$a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \qquad \text{cuando} \qquad n \rightarrow \infty.$$

Para entender mejor lo anterior, dividiremos el numerador y el denominador del término general $n/(n + 1)$ entre n:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}.$$

A medida que $n \to \infty$, el término $1/n$ del denominador se aproxima cada vez más a 0 y, por tanto,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ y decimos que la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **converge** en 1.

Notación En general, si el n-ésimo término a_n de una sucesión $\{a_n\}$ se puede aproximar arbitrariamente a un número L para n suficientemente grande, decimos que la sucesión $\{a_n\}$ **converge** en L. Para indicar que una sucesión es convergente en un número L, escribimos

$$a_n \to L \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Los conceptos "aproximar arbitrariamente" y "para n suficientemente grande" se definen con precisión en un curso de cálculo. Para los efectos de este curso, en la determinación de si la sucesión $\{a_n\}$ converge o no, trabajaremos directamente con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. El símbolo "lím" es la abreviatura de la palabra *límite*.

Resumimos el análisis a continuación.

Definición 15.3.1 Sucesión convergente

i) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{1}$$

Se dice que el número L es el **límite de la sucesión**.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe, entonces se dice que la sucesión es **divergente**.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, su límite L es un número único.

Si a_n aumenta o disminuye sin límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

En cada caso, los límites no existen.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

En el primer caso, decimos que $\{a_n\}$ **diverge al infinito** y en el segundo, $\{a_n\}$ **diverge al infinito negativo**. Por ejemplo, la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ diverge al infinito.

Para determinar si una sucesión converge o diverge, a menudo debemos depender de procedimientos analíticos (como los del álgebra) o de teoremas comprobados previamente. Por tanto, en esta breve exposición aceptaremos sin comprobación los tres resultados siguientes:

$$\lim_{n\to\infty} c = c, \text{ donde } c \text{ es cualquier constante real,} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0, \text{ donde } r \text{ es un número racional positivo,} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0, \text{ para } |r| < 1, \text{ con } r \text{ un número real diferente de cero} \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Tres sucesiones convergentes

***a*)** La sucesión constante $\{\pi\}$,

$$\pi, \pi, \pi, \pi, \ldots$$

converge en π por (2), $\lim_{n\to\infty} \pi = \pi$.

***b*)** La sucesión $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots \qquad \text{o} \qquad 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots$$

Cuando $n = 1\,000\,000$, las leyes de los exponentes muestran que $\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} = 0.001$.

converge en 0. Con la identificación $r = \frac{1}{2}$ en (3), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0.$$

***c*)** La sucesión $\{(\frac{1}{2})^n\}$,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \ldots$$

El vigésimo término de la sucesión es aproximadamente $a_{20} \approx 0.00000095$.

converge en 0. Con las identificaciones $r = \frac{1}{2}$ y $|\, r\,| = \frac{1}{2} < 1$ en (4), vemos que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. ≡

EJEMPLO 2 Sucesiones divergentes

***a*)** La sucesión $\{(-1)^{n-1}\}$,

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

es divergente. Cuando $n \to \infty$, los términos de la sucesión oscilan entre 1 y -1. Por consiguiente $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe, ya que $a_n = (-1)^n$ no se aproxima a una *sola* constante L para valores grandes de n.

***b*)** Los primeros cuatro términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$ son:

$$\tfrac{5}{2}, \tfrac{25}{4}, \tfrac{125}{8}, \tfrac{625}{16}, \ldots \qquad \text{o} \qquad 2.5, 6.25, 15.625, 39.0625, \ldots$$

Como el término general $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ aumenta sin límite cuando $n \to \infty$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; en otras palabras, la sucesión diverge al infinito. ≡

El vigésimo término de la sucesión aproximadamente $a_{20} \approx 90\,949\,470.2$.

Desarrollando en (4) y el inciso *b*) del ejemplo 2 se puede probar que

- *La sucesión $\{r^n\}$ converge en 0 para $|r| < 1$, y diverge para $|r| > 1$.* (5)

Suele ser necesario manipular el término general de una sucesión para demostrar su convergencia.

EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Determine si la sucesión $\left\{\sqrt{\dfrac{n}{9n+1}}\right\}$ converge.

Solución Si dividimos el numerador y el denominador entre n se deduce que

$$\frac{1}{9+\dfrac{1}{n}} \to \frac{1}{9}$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{9+\dfrac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge en $\frac{1}{3}$. ≡

EJEMPLO 4 Sucesión convergente

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{12e^n - 5}{3e^n + 2}\right\}$ converge.

Solución Puesto que $e > 1$, una rápida inspección del término general podría inducirlo a la falsa conclusión de que la sucesión diverge porque $12e^n - 5 \to \infty$ y $3e^n + 2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Pero si dividimos el numerador y el denominador entre e^n y luego utilizamos $12 - 5e^{-n} \to 12$ y $3 + 2e^{-n} \to 3$ cuando $n \to \infty$, podemos escribir

Note que $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Puesto que $1/e < 1$, se desprende de (4) que $\left(\frac{1}{e}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12e^n - 5}{3e^n + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{12 - 5e^{-n}}{3 + 2e^{-n}} = \frac{12 - 0}{3 + 0} = 4.$$

La sucesión converge en 4. ≡

Series infinitas En ciertas circunstancias es posible asignar un valor numérico a una **serie infinita**. En la sección 15.2 vimos que se pueden sumar los términos de una sucesión usando notación sigma. Relacionada con toda sucesión $\{a_n\}$ hay otra sucesión llamada **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$, donde S_1 es el primer término, S_2 es la suma de los primeros dos términos, S_3 es la suma de los primeros tres términos, etcétera. En símbolos:

sucesión: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

sucesión de sumas parciales: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \ldots$

En otras palabras, la sucesión de sumas parciales para $\{a_n\}$ es la sucesión $\{S_n\}$, donde el término general se escribe $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Igual que podemos preguntar si una sucesión $\{a_n\}$ converge, ahora podemos preguntar si una sucesión de sumas parciales converge.

Esta pregunta se responde en la definición siguiente.

Definición 15.3.2 Serie infinita convergente

i) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión infinita**, decimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una **serie infinita**.

ii) Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número S se conoce como la **suma** de las series infinitas.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, se dice que la serie infinita es **divergente**.

Aunque el sitio más adecuado para seguir profundizando en los conceptos anteriores es un curso de cálculo, de inmediato podemos ilustrar la noción de convergencia de una serie infinita por medio de series geométricas.

Todo estudiante de matemáticas sabe que

$$0.333\ldots \tag{6}$$

Suponga, con meros fines de ilustración, que no conoce este número racional.

es la representación decimal de un número racional bien conocido. Los decimales en (6) son iguales a la serie infinita

$$\begin{aligned} 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{3}{1\,000} + \cdots \\ &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{3}{10^k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Si consideramos la sucesión geométrica

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots,$$

es posible hallar una fórmula para el término general de sucesión de sumas parciales asociada:

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + \cdots + \tfrac{3}{10^n} = \overbrace{0.333\ldots3}^{n \text{ números } 3}. \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8}$$

En vista de que (8) de la sección 15.2 tiene las identificaciones $a = \frac{3}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$, podemos escribir el término general S_n de la sucesión (8) así:

$$S_n = \frac{3}{10}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}. \tag{9}$$

Ahora dejamos que n aumente sin límite, es decir, $n \to \infty$. A partir de (4) y (5), sabemos que $\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$ a medida que $n \to \infty$ y, por tanto, el límite de (9) es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Así, $\frac{1}{3}$ es la suma de la serie infinita en (7):

$$\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{3} = 0.333\ldots.$$

■ **Series geométricas** En general, la suma de una **serie geométrica infinita**

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \tag{10}$$

está definida siempre que $|r| < 1$. Para entender por qué ocurre así, recuerde que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{11}$$

Si $n \to \infty$ y usando $r^n \to 0$ siempre que $|r| < 1$, se observa que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

Por consiguiente, para $|r| < 1$, definimos la suma de la serie geométrica infinita en (10) como $a/(1-r)$.

Teorema 15.3.1 Suma de una serie geométrica

i) Una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ **converge** para $|r| < 1$. La suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}. \tag{12}$$

ii) Una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ **diverge** para $|r| \geq 1$.

Una serie geométrica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ no tiene suma.

La fórmula (12) brinda un método para convertir un decimal periódico en un cociente de enteros. Aceptamos el hecho de que

Todo decimal periódico es la suma de una serie geométrica infinita.

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que un **número racional** es el que tiene un número decimal exacto o periódico. Un **número irracional** es el que no tiene expansión decimal exacta ni periódica.

Antes de dar otro ejemplo de esto, es preciso aclarar que un **decimal periódico** es un número decimal que después de un número finito de posiciones decimales tiene una sucesión de uno o más dígitos que se repiten indefinidamente.

EJEMPLO 5 Decimal periódico

Escriba 0.232323. . . como un cociente de enteros.

Solución Escrito como una serie geométrica infinita, el decimal periódico es lo mismo que

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{23}{100^k}.$$

Con las identificaciones $a = \frac{23}{100}$ y $|r| = \left|\frac{1}{100}\right| < 1$, se deduce de (12) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{23}{100^k} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}.$$

≡

EJEMPLO 6 Decimal periódico

Escriba 0.72555 . . . como un cociente de enteros.

Solución El dígito periódico 5 no aparece sino hasta la tercera posición decimal, por lo que escribimos el número como la suma de un decimal exacto y un decimal periódico:

$$\begin{aligned}
0.72555\ldots &= 0.72 + \overbrace{0.00555}^{\text{serie geométrica}}\ldots \\
&= \tfrac{72}{100} + \left(\tfrac{5}{1\,000} + \tfrac{5}{10\,000} + \tfrac{5}{100\,000} + \cdots\right) \\
&= \tfrac{72}{100} + \left(\tfrac{5}{10^3} + \tfrac{5}{10^4} + \tfrac{5}{10^5} + \cdots\right) \qquad \leftarrow a = \tfrac{5}{10^3},\ r = \tfrac{1}{10} \\
&= \tfrac{72}{100} + \frac{\frac{5}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} \qquad \leftarrow \text{por (12)} \\
&= \tfrac{72}{100} + \tfrac{5}{900}.
\end{aligned}$$

Combinando los últimos dos números racionales por un común denominador obtenemos

$$0.72555\ldots = \frac{653}{900}.$$ ≡

Todo número decimal periódico (número racional) es una serie geométrica, pero no se quede con la impresión de que la suma de toda serie geométrica convergente es necesariamente un cociente de enteros.

EJEMPLO 7 Suma de series geométricas

La serie infinita $1 - \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^3} + \cdots$ es una serie geométrica convergente porque $|r| = |-1/e| = 1/e < 1$. Por (12), la suma de la serie es el número

$$\frac{1}{1 - (-1/e)} = \frac{e}{e + 1}.$$ ≡

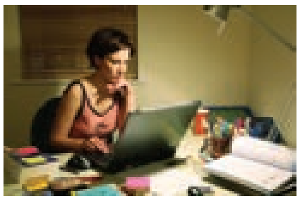
EJEMPLO 8 Serie geométrica divergente

La serie infinita

$$2 - 3 + \tfrac{3^2}{2} - \tfrac{3^3}{2^2} + \cdots$$

es una serie geométrica divergente porque $|r| = |-\tfrac{3}{2}| = \tfrac{3}{2} > 1$. ≡

Notas del aula



i) Cuando una serie geométrica se escribe en notación sigma, es posible que no sea reconocible de inmediato, o si lo es, los valores de a y r pueden no ser evidentes. Por ejemplo, para darse cuenta de si $\sum_{n=3}^{\infty} 4(\tfrac{1}{2})^{n+2}$ es una serie geométrica, es buena idea ampliar dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}^{a} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^6}^{ar} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^7}^{ar^2} + \cdots.$$

En el miembro derecho de la última igualdad podemos hacer las identificaciones $a = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$ y $|r| = \tfrac{1}{2} < 1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}$.

Si se desea, aunque no hay necesidad de hacerlo, podemos expresar $\sum_{n=3}^{\infty} 4(\frac{1}{2})^{n+2}$ en la forma más conocida $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, donde $k = n - 2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4} = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

ii) En general, es muy difícil obtener la suma de una serie infinita convergente con la sucesión de sumas parciales. En la mayoría de los casos es imposible obtener una fórmula para el término general $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de esta sucesión. La serie geométrica es, desde luego, una excepción importante. Sin embargo, hay otro tipo de serie infinita cuya suma se obtiene encontrando el límite de la sucesión $\{S_n\}$. Si le interesa, véanse los problemas 37 y 38 de los ejercicios 15.3.

15.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 20, determine si la sucesión dada converge.

1. $\left\{\dfrac{10}{n}\right\}$

2. $\left\{1 + \dfrac{1}{n^2}\right\}$

3. $\left\{\dfrac{1}{5n + 6}\right\}$

4. $\left\{\dfrac{4}{2n + 7}\right\}$

5. $\left\{\dfrac{3n - 2}{6n + 1}\right\}$

6. $\left\{\dfrac{n}{1 - 2n}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{3n(-1)^{n-1}}{n + 1}\right\}$

8. $\{(-\frac{1}{3})^n\}$

9. $\left\{\dfrac{n^2 - 1}{2n}\right\}$

10. $\left\{\dfrac{7n}{n^2 + 1}\right\}$

11. $\left\{\sqrt{\dfrac{2n + 1}{n}}\right\}$

12. $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n + 1}}\right\}$

13. $\{\cos n\pi\}$

14. $\{\operatorname{sen} n\pi\}$

15. $\left\{\dfrac{5 - 2^{-n}}{6 + 4^{-n}}\right\}$

16. $\left\{\dfrac{2^n}{3^n + 1}\right\}$

17. $\left\{\dfrac{10e^n - 3e^{-n}}{2e^n + e^{-n}}\right\}$

18. $\left\{4 + \dfrac{3^n}{2^n}\right\}$

19. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

20. $1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \ldots$

En los problemas 21 a 26, escriba el decimal periódico como un cociente de enteros.

21. 0.222…

22. 0.555…

23. 0.616161…

24. 0.393939…

25. 1.314314…

26. 0.5262626…

En los problemas 27 a 36, determine si la serie geométrica infinita converge. Si es convergente, obtenga la suma.

27. $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots$

28. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots$

29. $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \cdots$

30. $1 + 0.1 + 0.01 + \cdots$

31. $9 + 2 + \frac{4}{9} + \cdots$

32. $\frac{1}{81} - \frac{1}{54} + \frac{1}{36} - \cdots$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{k-1}}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^{k-1}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-3)^k 7^{-k}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

37. La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es un ejemplo de una **serie telescópica**. Para tal serie, es posible encontrar una fórmula para el término general S_n de la sucesión de sumas parciales.

a) Aplique la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

como ayuda para encontrar una fórmula para S_n. Esto también explica el significado de la palabra *telescópica.*

b) Siga el procedimiento del inciso *a*) del problema 37 para obtener la suma de la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Aplicaciones diversas

39. **Distancia recorrida** Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, la pelota alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de la altura inmediatamente anterior. Use una serie geométrica infinita para determinar la distancia que la pelota recorre antes de llegar al punto de reposo.

40. **Acumulación de un medicamento** Un paciente toma 15 mg de un medicamento a la misma hora todos los días. Si 80% del medicamento acumulado se elimina a diario por medio de las funciones corporales, ¿qué cantidad de medicamento se habrá acumulado en el organismo del paciente tras un periodo largo, es decir, cuando $n \to \infty$? (Suponga que la medida de la acumulación se toma inmediatamente después de cada dosis.)

Problemas para calculadora/computadora

41. Se puede demostrar que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ definida en términos recursivos por la fórmula

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right), \qquad \text{con } r > 0$$

converge cuando $a_1 = 1$ y $r = 3$. Use una calculadora para obtener los primeros 10 términos de la sucesión. Conjeture cuál es el límite de ésta.

42. Se sabe que la sucesión

$$\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \ln n\}$$

converge en un número γ, llamado **constante de Euler**. Calcule por lo menos los primeros 10 términos de sucesión. Conjeture cuál es el límite de ésta.

Para la discusión

43. Use álgebra para demostrar que la sucesión $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$ converge.

44. Use la gráfica de la función tangente inversa para demostrar que la sucesión $\left\{\frac{\pi}{4} - \arctan(n)\right\}$ converge.

45. Se sabe que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k}$ es convergente. Explique cómo se encuentra la suma de la serie. Plantee todos los supuestos que haga.

46. Obtenga los valores de x para los que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$ es convergente.

47. La serie infinita

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

es una serie geométrica divergente con $r = 1$. Tenga en cuenta que la fórmula (5) no produce el término general de la sucesión de sumas parciales. Encuentre una fórmula para S_n y úsela para sostener que la serie infinita es divergente.

48. Considere la función racional $f(x) = 1/(1 - x)$. Demuestre que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

¿Para qué valores de x es verdadera esta igualdad?

49. Explique si la igualdad $1 = 0.999\ldots$ es verdadera o falsa.

50. **Los trenes y la mosca** A una hora específica, dos trenes, T_1 y T_2, separados por una distancia de 20 millas en la misma vía, inician una ruta de colisión a la velocidad de

10 mi/h. Suponga que en el preciso instante en que los trenes se ponen en marcha, una mosca levanta el vuelo desde el frente del tren T_1 y vuela a una velocidad de 20 mi/h en línea recta hacia el frente del motor del tren T_2; en seguida, vuela de regreso al tren T_1 a 20 mi/h y de nueva cuenta a T_2, y así sucesivamente. Use una serie geométrica para calcular la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y aplastan a la mosca). Luego aplique el sentido común para obtener la distancia total que vuela la mosca (**FIGURA 15.3.1**).

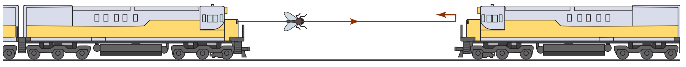


FIGURA 15.3.1 Los trenes y la mosca para el problema 50

51. Cuadrados inscritos En la **FIGURA 15.3.2** el cuadrado rojo mide una unidad por lado. Se inscribe un segundo cuadrado azul dentro del primero conectando los puntos medios del primero. Se inscribe un tercer cuadrado verde conectando los puntos medios del segundo, y así sucesivamente.

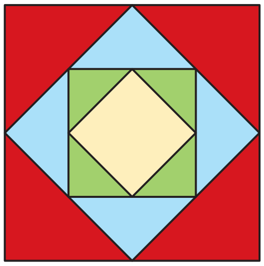


FIGURA 15.3.2 Cuadrados inscritos unos dentro de otros para el problema 51

a) Obtenga una fórmula del área A_n del n-ésimo cuadrado inscrito.

b) Haga una conjetura sobre la convergencia de la sucesión $\{A_n\}$.

c) Considere la sucesión $\{S_n\}$, con $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros 10 términos de esta sucesión.

d) Haga una conjetura sobre la convergencia de la sucesión $\{S_n\}$.

52. Longitud de un trayecto poligonal En la **FIGURA 15.3.3** hay doce rayos azules que emanan del origen, y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es de 30°. El segmento de recta AP_1 es perpendicular al rayo L_1, el segmento de recta P_1P_2 es perpendicular al rayo L_2, y así sucesivamente.

a) Demuestre que la longitud del trayecto poligonal rojo $AP_1P_2P_3\ldots$ es la serie infinita

$$AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \cdots =$$
$$\text{sen } 30° + (\cos 30°) \text{ sen } 30° + (\cos 30°)^2$$
$$\text{sen } 30° + (\cos 30°)^3 \text{ sen } 30° + \cdots$$

b) Obtenga la suma de la serie infinita del inciso ***a***).

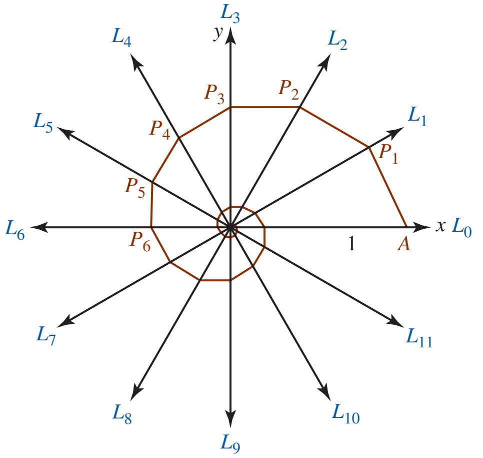


FIGURA 15.3.3 Trayecto poligonal para el problema 52

15.4 Inducción matemática

Introducción Con frecuencia una afirmación o proposición que depende de los números naturales o enteros positivos $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se puede demostrar usando el **principio de inducción matemática**. Suponga que podemos demostrar dos cosas:

- *Una proposición es verdadera para el número 1*
- *Siempre que la proposición es verdadera para el número entero positivo k, entonces es verdadera para el siguiente entero positivo k + 1.*

En otras palabras, supongamos que podemos demostrar que

$$\boxed{\text{la proposición es verdadera para 1}} \tag{1}$$

y que la

$$\boxed{\text{la proposición es verdadera para } k} \text{ e implica que } \boxed{\text{la proposición es verdadera para } k + 1.} \qquad (2)$$

¿Qué podemos concluir de esto? Por (1) tenemos que

la proposición es verdadera para el número 1,

y por (2), la *proposición es verdadera para el número* $1 + 1 = 2$.

Además, se deduce ahora de (2) que

la proposición es verdadera para el número $2 + 1 = 3$,
la proposición es verdadera para el número $3 + 1 = 4$,
la proposición es verdadera para el número $4 + 1 = 5$,

y así sucesivamente. Simbólicamente, podemos representar esta sucesión de implicaciones mediante

$$\boxed{\text{la proposición es verdadera para 1}} \Rightarrow \boxed{\text{la proposición es verdadera para 2}} \Rightarrow \boxed{\text{la proposición es verdadera para 3}} \Rightarrow \cdots$$

Parece claro que la proposición debe ser verdadera para *todos* los enteros positivos n. Esta es precisamente la afirmación del principio siguiente.

Teorema 15.4.1 Principio de inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición que contiene un número entero positivo n tal que

i) $S(1)$ es verdadera, y
ii) siempre que $S(k)$ es verdadera para un número entero positivo k, entonces $S(k + 1)$ también es verdadera.

Entonces, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo.

Aunque hemos planteado el principio de inducción matemática como teorema, en realidad se considera que es un *axioma* de los números naturales.

A manera de analogía del principio anterior con la física, imagine que tenemos una fila interminable de fichas de dominó espaciadas correctamente y cada una en posición vertical. Suponga que podemos demostrar que siempre que una ficha de dominó (por ponerle un nombre, la k-ésima ficha de dominó) cae, la ficha que tiene al lado [la ficha $(k + 1)$] también cae. Entonces concluimos que todas las fichas de dominó deben caer siempre que podamos demostrar algo más, es decir, que la primera ficha de dominó cae.


Fichas de dominó

Ilustraremos ahora el uso de la inducción con varios ejemplos. Comencemos con uno de aritmética.

EJEMPLO 1 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre que la suma de los primeros números enteros positivos n está dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \qquad (3)$$

Solución Aquí la proposición $S(n)$ es la fórmula que vimos en (3). El primer paso consiste en demostrar que $S(1)$ es verdadera, donde $S(1)$ es la proposición

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Puesto que esto es claramente verdadero, la condición *i*) se satisface.

El paso siguiente consiste en comprobar la condición *ii*). Esto requiere que, con base en la hipótesis "$S(k)$es verdadera", demostremos que "$S(k + 1)$ es verdadera". Así, suponemos que la proposición $S(k)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{4}$$

es verdadera. De esta suposición necesitamos probar que $S(k + 1)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{[(k+1)(k+1)+1]}{2}, \tag{5}$$

es también verdadera. Ahora, con base en (4) y en el álgebra podemos obtener una fórmula para la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos

$$\begin{aligned}
\overbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}^{\text{por (4), esto es igual a } \frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \quad \leftarrow \text{esto es (5)}
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la proposición $S(k + 1)$ es verdadera. Se deduce del principio de inducción matemática que $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n. ≡

En algebra básica aprendimos a factorizar. En particular, de las factorizaciones

$$\begin{aligned}
x - y &= x - y, \\
x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y), \quad \leftarrow \text{véase (4) de la sección 2.7} \\
x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2), \quad \leftarrow \text{véase (5) de la sección 2.7} \\
x^4 - y^4 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2),
\end{aligned}$$

una conjetura razonable es que $x - y$ siempre es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n. Ahora demostraremos que esto es así.

EJEMPLO 2 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre por inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n.

Solución Para la proposición $S(n)$,

$$x - y \text{ es factor de } x^n - y^n,$$

debemos demostrar que las dos condiciones, *i*) y *ii*) del principio de inducción matemática se cumplen. Para $n = 1$ tenemos la proposición verdadera $S(1)$

$$x - y \text{ es un factor de } x^1 - y^1.$$

Ahora suponemos que $S(k)$,

$$x - y \text{ es factor de } x^k - y^k,$$

es verdadera. Usando esta suposición, debemos demostrar que $S(k+1)$ es verdadera; o sea, $x-y$ es un factor de $x^{k+1}-y^{k+1}$. Para ello, *restamos* y *sumamos* xy^k a $x^{k+1}-y^{k+1}$:

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x^{k+1}\overbrace{-xy^k+xy^k}^{0}-y^{k+1}=x\overbrace{(x^k-y^k)}^{\substack{\text{se supone que}\\ x-y \text{ es un factor}\\ \text{de este término}}}+y^k\overbrace{(x-y)}^{\substack{\text{aquí hay un}\\ \text{factor de}\\ x-y}}. \tag{6}$$

Pero, por hipótesis, $x-y$ es un factor de x^k-y^k. Por tanto, $x-y$ es un factor de *cada* término del miembro derecho de la ecuación (6). Se deduce que $x-y$ es un factor del lado derecho, y así hemos demostrado que la proposición $S(k+1)$,

$$x-y \text{ es un factor de } x^{k+1}-y^{k+1},$$

es verdadera. Se deduce del principio de inducción matemática que $x-y$ es un factor de x^n-y^n para cualquier número entero positivo n. ≡

EJEMPLO 3 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre que 8^n-1 es divisible por 7 para todos los enteros positivos n.

Solución $S(n)$ representa la proposición "8^n-1 es divisible entre 7 para todos los enteros positivos n". Con $n=1$, vemos que $8^1-1=7$, como es evidente, es divisible entre 7.

Por tanto, $S(1)$ es verdadera. Supongamos ahora que $S(k)$ es verdadera; es decir, 8^k-1 es divisible entre 7 para algún número entero positivo k. Con base en esta suposición, debemos demostrar que $8^{k+1}-1$ es divisible entre 7. Considere

$$\begin{aligned}8^{k+1}-1&=8^k8-1\\ &=8^k(1+7)-1 \qquad \leftarrow \text{reacomodando los términos}\\ &=\underbrace{(8^k-1)}_{\substack{\text{se supone que es}\\ \text{divisible entre 7}}}+\underbrace{7\cdot 8^k}_{\text{divisible entre 7}}.\end{aligned}$$

La última igualdad demuestra que $S(k+1)$ es verdadera, ya que tanto 8^{k-1} como $7\cdot 8^k$ son divisibles entre 7. Se deduce del principio de inducción matemática que $S(n)$ es verdadera para todo número entero positivo n. ≡

15.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 20, use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición dada es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$

2. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^n}=1$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5)=n(2n-3)$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

8. $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
$=\dfrac{n}{2n+4}$

9. $1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$

10. $10+10^2+10^3+\cdots+10^n=\frac{1}{9}(10^{n+1}-10)$

11. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3

12. $n^2 + n$ es divisible entre 2

13. 4 es un factor del $5^n - 1$

14. 6 es un factor de $n^3 - n$

15. 7 es un factor de $3^{2n} - 2^n$

16. $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$

17. Si $a \geq -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$

18. $2n \leq 2^n$

19. Si $r > 1$, entonces $r^n > 1$

20. Si $0 < r < 1$, entonces $0 < r^n < 1$

≡ Para la discusión

21. Si suponemos que

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$$

es verdadera para $n = k$, demuestre que la fórmula es verdadera para $n = k + 1$. Sin embargo, demuestre que la fórmula misma es falsa. Explique por qué esto no infringe el principio de inducción matemática.

15.5 Teorema del binomio

Introducción Cuando $(a + b)^n$ se desarrolla para un entero positivo arbitrario n, los exponentes de a y b siguen un patrón definido. Por ejemplo, de

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\end{aligned}$$

vemos que los exponentes de *a disminuyen* en 1, comenzando con el primer término, mientras que los exponentes de *b aumentan* en 1, comenzando con el segundo término. En el caso de $(a + b)^4$, tenemos

$$(a + b)^4 = \overset{\text{disminuyen en 1}}{\overset{\downarrow}{a^4}} + 4a^3b^{\underset{\text{aumentan en 1}}{\underset{\uparrow}{1}}} + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4.$$

Para desarrollar este patrón consideramos que el primero y el último términos deben multiplicarse por b^0 y a^0, respectivamente; es decir,

$$(a + b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4. \tag{1}$$

También notamos que la suma de los exponentes de cada término en el desarrollo de $(a + b)^4$ es 4. Por ejemplo, en el segundo término tenemos $4\overbrace{a^3b^1}^{4\,=\,3\,+\,1}$.

EJEMPLO 1 Aplicación de (1)

Desarrolle $(y^2 - 1)^4$.

Solución Con $a = y^2$ y $b = -1$, se deduce de (1) y de las leyes de los exponentes que

$$\begin{aligned}(y^2 - 1)^4 &= (y^2 + (-1))^4\\ &= (y^2)^4 + 4(y^2)^3(-1) + 6(y^2)^2(-1)^2 + 4(y^2)(-1)^3 + (-1)^4\\ &= y^8 - 4y^6 + 6y^4 - 4y^2 + 1.\end{aligned}$$

≡

Coeficientes Los coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^n$ también siguen un patrón. Para ilustrarlo, disponemos los coeficientes en los desarrollos de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ y $(a+b)^4$ en forma triangular

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \tag{2}$$

Observe que cada número del interior de este esquema es la *suma* de los dos números que se hallan directamente encima de él. Así, el renglón siguiente en el esquema se puede obtener como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1. \end{array}$$

Como se espera, estos números son los coeficientes de las potencias de a y b en el desarrollo de $(a+b)^5$, que es,

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5. \tag{3}$$

El arreglo que se obtiene continuando de esta manera se conoce como **triángulo de Pascal**, por el filósofo y matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662).

EJEMPLO 2 Aplicación de (3)

Desarrolle $(3-x)^5$.

Solución Del análisis anterior, con $a = 3$ y $b = -x$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(3-x)^5 &= (3+(-x))^5 \\ &= 1(3)^5 + 5(3)^4(-x) + 10(3)^3(-x)^2 + 10(3)^2(-x)^3 + 5(3)(-x)^4 + 1(-x)^5 \\ &= 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5.\end{aligned}$$

≡

Notacion factorial Antes de dar una fórmula general para el desarrollo de $(a+b)^n$, será útil introducir la **notación factorial**. El símbolo $r!$ se define para cualquier entero positivo r como el producto

$$r! = r(r-1)\cdot(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1, \tag{4}$$

Véase el problema 57 de los ejercicios 5.1.

y se lee "r factorial". Por ejemplo, $1! = 1$ y $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. También es conveniente definir

$$0! = 1.$$

EJEMPLO 3 Una simplificación

Simplifique $\dfrac{r!(r+1)}{(r-1)!}$, donde r es un número entero positivo.

Solución Usando la definición de $r!$ en (4) podemos escribir el numerador como

$$r!(r+1) = (r+1)r! = (r+1)r(r-1)\cdots 2\cdot 1 = (r+1)r(r-1)!$$

Así,
$$\frac{r!(r+1)}{(r-1)!} = \frac{(r+1)r(r-1)!}{(r-1)!} = (r+1)r.$$

≡

■ **Teorema del binomio** La fórmula general para el desarrollo de $(a + b)^n$ se da en el resultado siguiente, conocido como **teorema del binomio**.

Teorema 15.5.1 Teorema del binomio

Para cualquier número entero positivo n,

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n. \tag{5}$$

Si prestamos atención a las potencias crecientes de b en (5) vemos que la expresión

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r \tag{6}$$

es el $(r + 1)$-ésimo término en el desarrollo de $(a + b)^n$. Para $r = 0, 1, \ldots, n$, los números

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{7}$$

se llaman **coeficientes binomiales** y son, por supuesto, los mismos que los obtenidos del triángulo de Pascal. Antes de demostrar el teorema del binomio mediante inducción matemática, consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4 Aplicación de (5)

Desarrolle $(a + b)^4$.

Solución Usamos el teorema del binomio (5) con los coeficientes dados por (7). Con $n = 4$, obtenemos:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + \frac{4}{1!}a^{4-1}b + \frac{4\cdot 3}{2!}a^{4-2}b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}a^{4-3}b^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + \frac{12}{2}a^2b^2 + \frac{24}{6}ab^3 + \frac{24}{24}b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Obtención del sexto término

Encuentre el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$.

Solución Puesto que (6) da el $(r + 1)$-ésimo término en el desarrollo de $(a + b)^n$, el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$ corresponde a $r = 5$ (es decir, $r + 1 = 5 + 1 = 6$). Identificando $n = 7$, $r = 5$, $a = x^2$ y $b = -2y$, se deduce que el sexto término es

$$\begin{aligned}\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!}(x^2)^{7-5}(-2y)^5 &= 21x^4(-32y^5)\\ &= -672x^4y^5.\end{aligned}$$

≡

Una forma alternativa Los coeficientes binomiales pueden escribirse de una forma más compacta usando notación factorial. Si r es cualquier número entero tal que $0 \le r \le n$, entonces

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-r+1) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1}\cdot\overbrace{\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}}^{\text{esta fracción es 1}} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

Así, los coeficientes binomiales de $a^{n-r}b^r$ para $r = 0, 1, \ldots, n$ dados en (7) son los mismos que $n!/r!(n-r)!$ Este último cociente se denota generalmente con el símbolo $\binom{n}{r}$. Es decir, los **coeficientes binomiales** son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{8}$$

Por tanto, el teorema del binomio (5) se puede escribir en la forma alternativa

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \tag{9}$$

Usaremos esta forma para demostrar (5).

Notación sigma El teorema del binomio puede expresarse de manera compacta con la notación sigma. Usando (6) y (8), las sumas en (5) y (9) se pueden escribir así:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

respectivamente. En estas formas es evidente que como el índice de suma empieza en 0 y termina en n, el desarrollo del binomio contiene $n + 1$ términos.

La siguiente propiedad del coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ tiene una función central en la demostración del teorema del binomio. Para cualquier número entero r, $0 < r \le n$, tenemos

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}. \tag{10}$$

Dejamos la comprobación de (10) como un ejercicio (véase problema 63 de los ejercicios 15.5).

Demostración del teorema 15.5.1 Ahora demostraremos el teorema del binomio mediante inducción matemática. Sustituyendo $n = 1$ en (9) obtenemos una expresión verdadera,

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b,$$

puesto que $$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!1!} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!0!} = 1.$$

Con esto se completa la comprobación de la primera condición del principio de inducción matemática.