Efrén Giraldo Toro

# MATEMÁTICAS BÁSICAS

# CLASE 3

# ÚMEROS REALES, PROPIEDADES, BASES ALGEBRAICAS

## ELABORÓ EFRÉN GIRALDO

## MEDELLÍN ENERO 2018

# Objetivos - Competencias

Al final de este capítulo Ud. debe:

- Conocer los números, sus propiedades, los distintos subconjuntos de números y sus operaciones.
- Conocer la recta real y la relación con el conjunto de los reales
- **Entender, aprender y trabajar con las operaciones algebraicas y tener un <u>completo dominio de ellas.</u>**

# RECOMENDACIÓN IMPORTANTE


- Amigo estudiante:

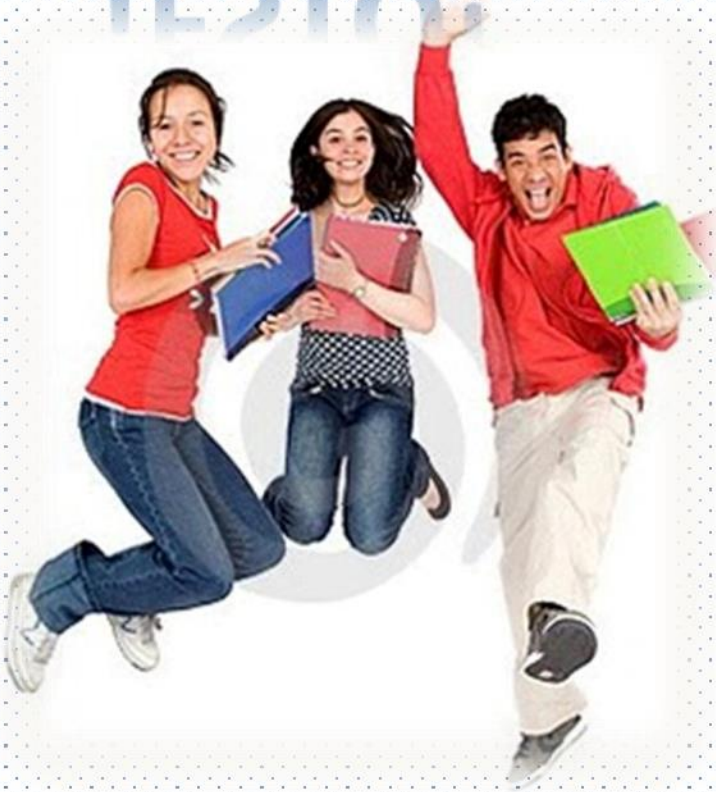
- Este es el primer peldaño de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no, consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

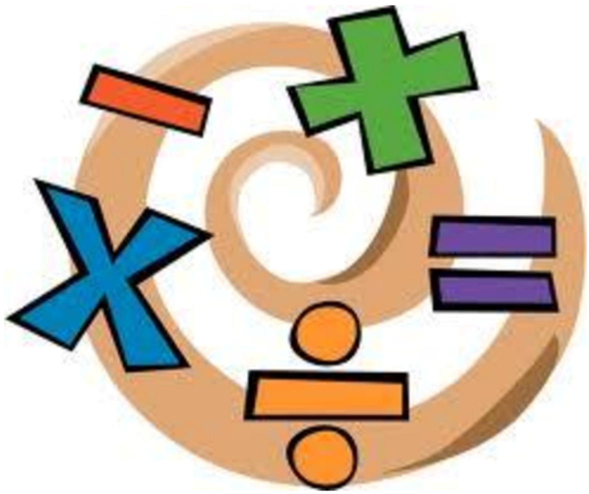
**¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar. No valen disculpas!.**

***¡No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!***

# QUÉ PREFIERE:

## ¡ESTO! O ¡ESTO!





# Propiedades de los reales
# Bases algebraicas


# Propiedad distributiva



**EJEMPLO** | Uso de la Propiedad Distributiva

| | | |
|---|---|---|
| (a) | $2(x+3) = 2\cdot x + 2\cdot 3$ | Propiedad Distributiva |
| | $= 2x + 6$ | Simplifique |
| (b) | $(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$ | Propiedad Distributiva |
| | $= (ax+bx) + (ay+by)$ | Propiedad Distributiva |
| | $= ax + bx + ay + by$ | Propiedad Asociativa de la Adición |

- **Debe entender esta propiedad profundamente.**



- Se usará **mucho** en el curso.

(STEWART.2007)


**Ejemplo 1** **Uso de la propiedad distributiva**



a) $2(x+3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ Propiedad distributiva



$= 2x + 6$ Simplificación

Se multiplica el número o la letra por cada uno de los de la suma y se suman



a(b+c+d)= ab+ac+ad **5(x-y+z)= 5x-5y+5z**

(STEWART.2007)

# Suma por suma ( )( )


- $(a+b)(c+d)= ac+ad + bc+bd$
- Se multiplica <u>cada uno</u> de los primeros por <u>cada uno</u> de los segundos respetando la ley de signos.





- Luego se suman todos.



- **<u>Es de vital importancia dominar esta propiedad</u>**

- $(-d + e)(f - g) = -df + dg + ef - eg$

Efrén Giraldo Toro

- **¡Ojo con la ley de los signos!**

### EJEMPLO 7 La sustracción no es asociativa

Puesto que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$, observamos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3.$$

Por consiguiente, la sustracción no es asociativa. ≡

## EJEMPLO 6 Reconocimiento de las propiedades

Exprese una propiedad algebraica básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados siguientes, donde $x$, $y$ y $z$ son números reales.

*a*) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$

*b*) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$

*c*) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$

*d*) $(x + y) \cdot 1 = x + y$

*e*) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$

*f*) $(y + z)\dfrac{1}{y + z} = 1$, si $y + z \neq 0$

### Solución

*a*) Propiedad conmutativa de la multiplicación ← propiedad 2*ii*)

*b*) Propiedad asociativa de la adición ← propiedad 3*i*)

*c*) Propiedad distributiva ← propiedad 6*ii*)

*d*) Propiedad de identidad de la multiplicación ← propiedad 4*ii*)

*e*) Propiedad del inverso de la adición ← propiedad 5*i*)

*f*) Propiedad del inverso de la multiplicación ← propiedad 5*ii*)

≡

# 0

- El 0 es elemento idéntico para la suma porque  al sumar 0 a cualquier letra o número no se altera $a + 0 = a$ $2000+0=2000$



- Pero es nulo para la multiplicación $a.0=0$ $5.0=0$
    - **La división por 0 no está permitida**

(STEWART.2007)

### Definición 2.1.1 Diferencia y cociente

Para los números reales $a$ y $b$, la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, $a \div b$, se define como

$$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

# Negativos y resta

- Todo número real *a* tiene un negativo *−a* que es diferente a el, 5 diferente de -5

Efrén Giraldo Toro.

- La suma de un real con su negativo es 0

- $a + (-a) = 0$
- $5 + (-5) = 0$

Efrén Giraldo Toro.

- Restar es sumar con el negativo del que se va a restar

Efrén Giraldo Toro.

- 10 menos 5 es $10 + (-5) = 10 - 5 = 5$

# Sumas con el mismo signo mas + ó menos -

## ¡Muy importante!

- Si va a sumar dos números, ambos con el mismo signo, sea + o - :



Se olvida del signo y suma normalmente, luego coloque el signo con el que está trabajando



| | | |
|---|---|---|
| +3 | -4 | 1000 |
| +5 | -5 | 2000 |
| +8 | -9 | 3000 |
| -1000 | | |
| -2000 | | |
| -3000 | | |


# • Sumas con signos diferentes

## • ¡Fundamental dominar esto!

- Si dos números: uno es + y el otro negativo -, coloque el de mayor valor absoluto arriba y el otro abajo, olvide el signo por el monento y proceda a restar normalmente, luego coloque el signo del de arriba




- 9- 14 14-9 10.000- 50.000 50.000-10.000

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 14 | 14 | - 50.000 | 50.000 |
| 9 | - 9 | 10.000 | -10.000 |
| -5 | 5 | - 40.000 | 40.000 |

# 1

- El 1 es idéntico para la multiplicación:



Cualquier número o expresión multiplicada por 1 da el mismo número o la expresión misma.





$1000\times1= 1000$ $\quad$ $(a+b).1= 1(a+b)= (a+b)= a+b$

$1.a= a.1= a$



**<u>El 1 siempre va incluido para</u> $\times$ $\boldsymbol{y}$ <u>$\boldsymbol{para}$</u> $\div$ Por tanto si una letra o número no lo lleva, <u>siempre va implícito</u>**



$-500= -1\times500 =-500$ $\quad$ $1000= 1\times1000$ $\quad$ $\frac{a+b}{1} = a+b$

$a= \frac{a}{1}$ $\quad$ $1000=\frac{1000}{1}$ $\quad$ $a= 1a$

En el cociente $a/b$, $a$ se llama **numerador** y $b$ **denominador**. Con frecuencia, el cociente de dos números reales $a/b$ se denomina **fracción**. Tenga en cuenta que $a \div b$ o $a/b$ no está definido cuando $b = 0$. Por tanto, $a/0$ no está definido para ningún número real $a$. Como se muestra en el ejemplo 7, no todas las propiedades de la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división.

# Recíproco. Fracciones

- El reciproco de un número o de una expresión es sencillamente el 1 sobre el número o la expresión y viceversa



- 5 es reciproco de $\frac{1}{5}$ reciproco de 5



- *1000* su inverso es $\frac{1}{1000}$ inverso es 1000
- a reciproco de $\frac{1}{a}$ reciproco de a

- Reciproco de *una fracción:*



- $\frac{a}{b}$ reciproco de $\frac{b}{a}$ *se pasa numerador a denominador y vs.*



- ***Por supuesto que un número y su*** reciproco ***no son iguales***

# División

- Dividir un numerador (número o expresión) por un denominador (número o expresión) es sencillamente multiplicar por el Reciproco del *denominador*.
- a÷b= $= a \times \frac{1}{b} = \frac{a.1}{b} = \frac{1a}{b} = \frac{a}{b}$ ¡El 1 va implícito!
- $\frac{a}{b}$ se llama también la fracción de *a* sobre *b*
- *a es el numerador y b el denominador*



- (a+b) ÷ (c+d) = $=(a+b) \times \frac{1}{(c+d)} = \frac{(a+b)}{(c+d)}$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como $a/b$. Nos referimos a $a/b$ como el **cociente** entre $a$ y $b$ o como la **fracción** de $a$ sobre $b$; $a$ es el **numerador** y $b$ es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

## PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ | $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$ | Para **multiplicar fracciones,** multiplique numeradores y denominadores. |
| **2.** $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ | $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$ | Para **dividir fracciones,** multiplique por el recíproco del divisor. |
| **3.** $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ | $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2+7}{5}=\frac{9}{5}$ | Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores.** |
| **4.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ | $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{35}=\frac{29}{35}$ | Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes,** encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores. |
| **5.** $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ | $\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{2}{3}$ | **Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador. |
| **6.** Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $ad=bc$ | $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, así que $2\cdot 9=3\cdot 6$ | **Multiplicación cruzada.** |

# Multiplicación de fracciones


Se multiplica numerador por numerador y

**denominador por denominador**

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| 1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ | $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$ | Cuando se **multiplican fracciones**, se multiplican los numeradores y los denominadores. |



- Si son letras quite sencillamente el punto ó el $\times$
- **¡No confundir con la suma de fracciones!** $\frac{a}{c}+\frac{c}{d}$

No confundir división, multiplicación, suma y resta.



- $x \div y = \frac{x}{y} = x/y$ *significan lo mismo*
- División de fracciones
- La división entre fracciones también se puede expresar de varias formas y todas significan lo mismo:





- $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} / \frac{z}{w}$ $\quad = \frac{x}{y} * \frac{w}{z}$

- Ejecutar $\dfrac{x}{y} \div \dfrac{z}{w} =$


- **Forma 1 de resolver por el inverso del denominador**

Numerador $\dfrac{x}{y}$



Denominador $\dfrac{z}{w}$ inverso $\dfrac{w}{z}$

En la diapositiva se dijo que dividir era **multiplicar** el numerador por **el inverso** del denominador, por tanto:





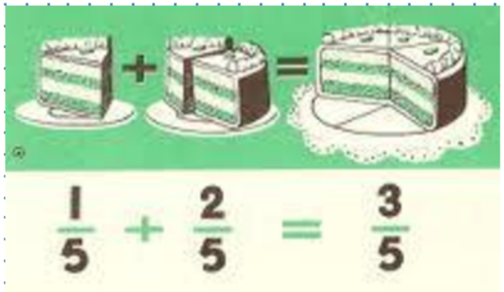
$$\frac{x}{y} \times \frac{w}{z} = \frac{x}{y}\frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}$$

- **Forma 2 Ley de la oreja**

Efrén Giraldo Toro

- $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} =$ $\qquad \dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \dfrac{x\ w}{y\ z}$

Efrén Giraldo Toro




# Suma de dos fracciones Sencillas

## ¡Importantísimo!


- *Aplicar la ley de la equis raya* $\underline{X}$
- $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{x}{y}+\frac{z}{w}$
- Se multiplica x por w $xw$



- Se multiplica y por z $yz$

- Se suman $xw+yz$ como numerador



- Se multiplica y por w yw y se pone de denominador



- $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{xw+yz}{yw}$


# X

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{35}=\frac{29}{35}$$

Efrén Giraldo Toro

- **Otra vez: ¡no confundir suma de fracciones, con producto o división!**

- **Si aparece un signo menos** $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} =$



- Se supone el signo – en el numerador respectivo (-z) y se procede según ley de signos.



- Se multiplica x por w $xw$
- Se multiplica y por -z $-yz$



- Se suman $xw - yz$



- Se multiplica y por w yw
- $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw-yz}{yw}$

- **Si aparecen dos signos menos** $-\frac{x}{y} - \frac{z}{w} =$



- Se supone el signo – en el numerador -x , –z



y se procede según ley de signos

- Se multiplica - x por w $-xw$



- Se multiplica y por -z -$yz$
- Se suman - $xw - yz$



- Se multiplica y por w yw
- $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{-xw-yz}{yw}$

- **Si aparece dos signos menos en el denominador**
- $\frac{x}{-y}+\frac{z}{-w}$



- Se multiplica x por -w $\quad -xw$

- Se multiplica -y por z $\quad -yz$

- Se suman $\quad -xw-yz$

- Se multiplica - y por -w $\quad$ yw
- $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{-xw-yz}{yw}$

- Otra manera $\frac{x}{-y}+\frac{z}{-w}=$



- Se divide el signo + de x sobre – de y, da –



- Se divide el signo + de z sobre – de w y da -



- Y queda como el caso de la diapositiva anterior

- $-\frac{x}{y}-\frac{z}{w}=$


# Factor

- Factor significa dos números o letras que se multiplican:



ab  a es factor de b  b es factor de a



$3\times 4$  3 y 4 son factores.



$3\times 4 = 12$  3 y 4 son factores de 12 porque 3 por 4 da 12.

**Factor y multiplicar es lo mismo**


# Factor común de una fracción

- Factor común de una fracción: es aquel **mismo número o letra que se repite en la fracciones** (y que está multiplicando obviamente).



- $\frac{ab}{cb}$ b es el factor común de esta fracción.
- Como el factor **b** está **multiplicando en el numerador y en el denominbador** se puede simplificar



- $\frac{a\cancel{b}}{c\cancel{b}} = \frac{a}{c}$ Esto si se puede hacer.


# Operación no permitida, fatal.

- $\frac{a-b}{c-b}$ b no es factor, no está multiplicando.



- No se puede simplificar
- $\frac{a-\cancel{b}}{c-\cancel{b}}$  Ojo, esto no se puede hacer.

- **No olvide esto. Es un error muy común en los ejercicios y exámenes.**



- **¡Se llama machetazo! Y lo puede matar en su materia.**

# Factor común de dos fracciones

- *Es el número , letra o expresión que está a la vez en las dos fracciones (y que está multiplicando en ambas)*



- $\frac{ab}{c}$ , $\frac{db}{e}$

El factor común de las dos fracciones es b

- (a+b)c, (e +d)(a+b)

El factor común es (a+b).



(a+c) y (b+c) no tienen factor común. c no multiplica

# Diferencia entre Término e Igualdad

- En un término no aparece el operador igual =



Ejemplos de términos abc, $\frac{a}{b}$, 5c, a+b+c

- Puede ser uno o varios números, una o varias letras o expresiones.



- Pueden ser fracciones

- En una igualdad necesariamente aparece el operador = entre términos



Una igualdad entre dos fracciones sencillas



$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se aplica la ley de la X (sin ralla)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $ad$=cb

## PROPIEDADES ADICIONALES

**7. Propiedades de igualdad:**

*i*) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para todo número real $c$.

*ii*) Si $a = b$, entonces $ac = bc$ para todo número real $c$.

**8. Propiedades de la multiplicación por cero:**

*i*) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

*ii*) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambas.

**9. Propiedades de cancelación:**

*i*) Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

*ii*) $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, siempre que $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

## EJEMPLO 9 Simplificación

Simplifique $-(4 + x - y)$

**Solución** En vista de la propiedad 10*iii*), escribimos

$$-(4 + x - y) = (-1)(4 + x - y)$$

Entonces, por la ley distributiva, propiedad 6*i*),

$$\begin{aligned} -(4 + x - y) &= (-1)(4 + x - y) \\ &= (-1)4 + (-1)x + (-1)(-y) && \leftarrow \text{por las propiedades } 10iii) \text{ y } 10iv) \\ &= -4 - x + y \end{aligned}$$

≡

## PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

**11. Fracciones equivalentes:**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

**12. Regla de los signos:**

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

**13. Adición o sustracción con denominadores comunes:**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

**14. Multiplicación:**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

**15. División:**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, c \neq 0$$

## EJEMPLO 11 Productos y cocientes

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

*a*) $(-x)(-y)$ *b*) $\dfrac{-(-a)}{-b}$ *c*) $\dfrac{2(u+v)}{2v}$

*d*) $\dfrac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}$ *e*) $z \cdot \dfrac{0}{5}$ *f*) $\dfrac{w}{2-(5-3)}$

### Solución

*a*) $(-x)(-y) = xy$ ← por la propiedad 10*iv*)

*b*) $\dfrac{-(-a)}{-b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$ ← por las propiedades 10*i*) y 12

*c*) $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$ ← por la propiedad 9*ii*)

*d*) Para evaluar $y/(1/4 + 3/5)$, primero evaluamos el denominador:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5} = \frac{(1)(5)+(4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}. \quad \leftarrow \text{común denominador}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \frac{y}{\frac{17}{20}} = \frac{y}{1}\cdot\frac{20}{17} = \frac{20y}{17}. \quad \leftarrow \text{por la propiedad 15}$$

*e*) $z \cdot \dfrac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$ ← por la propiedad 8*i*)

*f*) La expresión $w/[2-(5-3)]$ es indefinida, ya que su denominador es cero; es decir, $2-(5-3) = 2-2 = 0$ [véase la propiedad 16*ii*)].

# ¡URGENTE!


- LUEGO DE ESTA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE.

- **SI NO LO HACE COMIENZA A TENER PROBLEMAS ES SU MATERIA Y ESTÁ DANDO EL PRIMER PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA Y HASTA ARRUINAR SU VIDA.**

# Tareas para la casa

- Repasar notas de clase y problemas vistos.
- Repasar Stewart páginas 1 a11
- Hacer ejercicios Stewart  Sección 1.1 página 10
- Lectura previa en casa a clase # 3

# Bibliografía


- Stewart, J. Redlin, L., Watson, S. (2007). Precálculo 5 edición. Editorial Thonson. México.