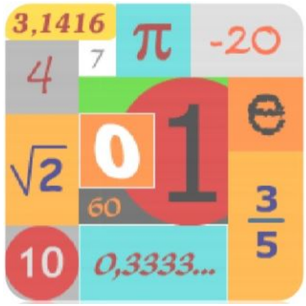
INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Matemáticas Básicas

Grupo de docentes de Matemáticas Básicas



1. Conjuntos Numéricos

Introducción Los conjuntos conformados por números ocupan un lugar de especial importancia en el mundo de las matemáticas.

Seguramente ha escuchado, o incluso trabajado, con distintos tipos de números como por ejemplo $2, -6, \frac{-5}{8}, \sqrt{7}$, todas estas expresiones hacen parte de diferentes conjuntos de números, llamamos a estos **conjuntos numéricos**.

Los conjuntos de números han ido apareciendo a medida que la humanidad se ha visto en la necesidad de solucionar problemas y retos cada vez más complejos y más profundos.

Definición 1.1 ***Los números Naturales*** $\mathbb{N}$. *Este conjunto surge de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Definición 1.2 *Dados 2 números naturales a y b, decimos que b es un divisor de a, o que b divide a a, si existe un número natural c tal que $bc = a$, también que $\frac{a}{b} = c$*

En los números naturales sobresalen 2 subconjuntos:

Definición 1.3 .

1. ***Los números primos***. *Un número p es primo si tiene exactamente 2 divisores.*
2. ***Los números compuestos***. *Un número es compuesto si tiene más de 2 divisores.*

Ejemplo 1.4 1. *Los números primos menores que* 100 *son:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89 \text{ y } 97$$

2. *Los números* $6, 15, 60, 341, 1001$ *son números compuestos*

Observación:

1. El único número primo par es el 2, o en otras palabra, todo número par, diferente de 2 es compuesto.

2. Existen infinitos números primos.

3. El número 1 no se considera ni primo, ni compuesto.

4. Existe un teorema (Teorema Fundamental de la Aritmética) que garantiza que todo número natural es primo ó se puede descomponer como producto de números primos.

Definición 1.5 ***Los números Enteros*** $\mathbb{Z}$. *Los números enteros surgen como extensión de los naturales cuando se necesita considerar cantidades negativas, es decir, ante la imposibilidad de resolver en* $\mathbb{N}$ *ecuaciones como* $x + 1 = 0$*, donde aparecen las restas*
Los números enteros son la unión de los números naturales, sus negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup \{0\} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Donde $\mathbb{N}^-$ *denota los negativos de los naturales, también llamados enteros negativos*

Observación: El número 0 no se considera ni positivo, ni negativo

Definición 1.6 ***Los números Racionales*** $\mathbb{Q}$. *Puesto que, por ejemplo, la ecuación* $2x = 1$ *no admite solución en el conjunto de los enteros, es necesario definir nuevamente otro conjunto numérico que, conteniendo a todos los enteros, permita resolver ecuaciones como la anterior.*
El conjunto de los números racionales es el conjunto formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$ *donde* $a, b \in \mathbb{Z}$ *y* $b \neq 0$.
a se llama el numerador, y b el denominador

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$$

Definición 1.7 .

1. *Una fracción* $\frac{a}{b}$ *decimos que es propia, si* $a < b$.
2. *Una fracción* $\frac{a}{b}$ *decimos que es impropia, si* $a \geq b$.

Observación: Al expresar un número racional, en forma decimal (realizar la división) se pueden presentar dos posibilidades: a) Que el número no tenga o tenga finitas cifras decimales, o b) Que el número tenga infinitas cifras decimales pero periódicas.

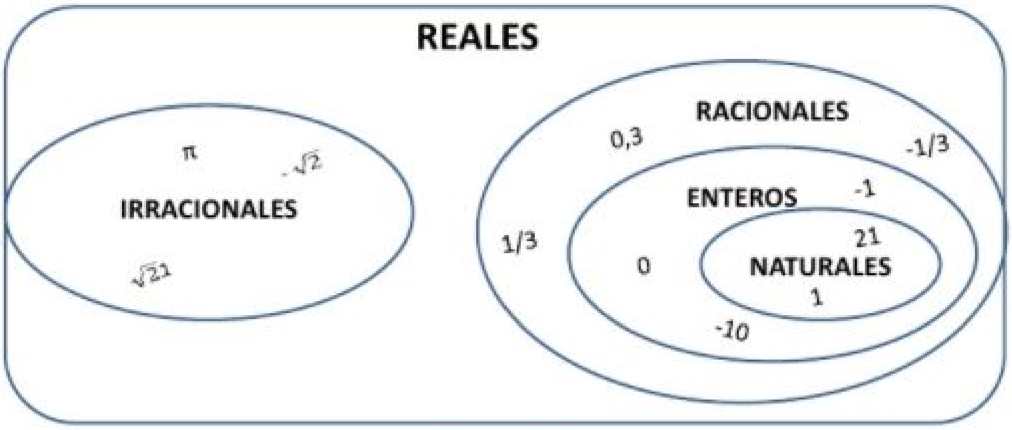
Ejemplo 1.8
1. $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{65}{5} = 13$, $\frac{1001}{11} = 91$ *no tienen cifras decimales*
2. $\frac{37}{4} = 9{,}25$, $\frac{133}{8} = 16{,}625$, $\frac{91}{5} = 18{,}2$ *tienen finitas cifras decimales*
3. $\frac{16}{3} = 5{,}333\cdots = 5.\overline{3}$, $\frac{523}{11} = 47{,}5454\cdots = 47.\overline{54}$, $\frac{143}{7} = 20{,}428571428571\cdots = 20.\overline{428571}$ *tienen infinitas cifras decimales periódicas.*

Definición 1.9 ***Los números Irracionales*** $\mathbb{Q}^*$. *El conjunto de los números racionales, no contiene todos los números "necesarios" para resolver ciertas ecuaciones, como por ejemplo* $x^2 - 2 = 0$, *es aquí donde aparece este nuevo conjunto*
El conjunto de los números irracionales es el conjunto formado por los números cuya representación en forma decimal, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

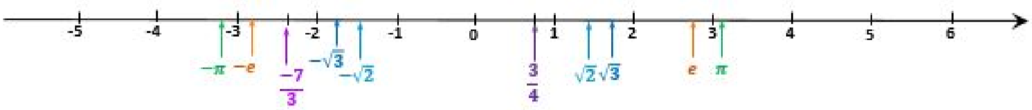
Ejemplo 1.10 $\pi, \sqrt{3}, e, \sqrt[5]{7}$, *además* $\sqrt{p}$ *donde* p *es un número primo, son números irracionales*

Definición 1.11 ***Los números Reales*** $\mathbb{R}$. *Es el conjunto formado por la unión de los números racionales y los números irracionales.*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$$



Observación: Existe una correspondencia 1 a 1 entre la linea recta y el conjunto de los números reales, es decir, a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa. A esta recta se le conoce como la **recta real**



Ejemplo 1.12

Completar la siguiente tabla usando $\in$ *o* $\notin$ *según el número pertenezca o no al conjunto dado*

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{R}$
-7					
$-11/3$					
$-\sqrt{7}$					
$\sqrt{-25}$					
$\sqrt[3]{-125}$					
$23,81$					
$182/13$					
$\pi/2$					

Solución:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{R}$
-7	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$-11/3$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$-\sqrt{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{-25}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\sqrt[3]{-125}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$23,81$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$182/13$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\pi/2$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$

2. Propiedades de los números reales

El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de los números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para dar respuestas a preguntas matemáticas. Las propiedades básicas del sistema de los números reales respecto de las operaciones de adición (simbolizada con $+$) y multiplicación o producto (simbolizada con los signos $\cdot$ o $\times$) se presentan a continuación: Sean a, b y c números reales, se cumple que:

1. Cerradura $\begin{cases} a + b \in \mathbb{R} \\ a \cdot b = ab \in \mathbb{R} \end{cases}$

2. Conmutativa $\begin{cases} a + b = b + a \\ ab = ba \end{cases}$

3. Asociativa $\begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a(bc) = (ab)c \end{cases}$

4. Existencia del neutro (Identidad) $\begin{cases} \text{Existe el 0, tal que } a+0=0+a=a \text{ para todo } a\in\mathbb{R} \\ \text{Existe el 1, tal que } a1=1a=a \text{ para todo } a\in\mathbb{R} \end{cases}$

Definición 2.1 0 *se llama el neutro o módulo para la suma*

1 *se llama el neutro o módulo para el producto*

5. Existencia de inverso $\begin{cases} \text{para cada } a\text{, existe } -a \text{ tal que } a+(-a)=(-a)+a=0 \\ \text{para cada } a\neq 0\text{, existe } \dfrac{1}{a} \text{ tal que } a\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}a=1 \end{cases}$

Definición 2.2 $-a$ *se llama el inverso aditivo (para la suma) de* a

$\frac{1}{a}$ *se llama el inverso multiplicativo (para el producto) o recíproco de* a

6. Distributiva $\begin{cases} a(b+c)=ab+ac \\ (a+b)c=ac+bc \end{cases}$

Ejemplo 2.3 *Enuncie la(s) propiedad(es) de los números reales que se aplicada(n) en cada una de las expresiones dadas, donde* x, y, z *representan números reales.*

1. $3+(x+4)=(3+x)+4$
2. $y(z-2)=(z-2)y$
3. $-\pi+\pi=0$
4. $(2x-5)\cdot 1=(2x-5)$
5. $3(x+0)=3x+3(0)=3x$
6. $(x+2)+3z=(3z+x)+2$

Solución

1. *Propiedad Asociativa de la suma*
2. *Propiedad Conmutativa del producto*
3. *Propiedad de inverso para la suma*
4. *Propiedad del módulo para el producto*
5. *Propiedades distributiva y módulo para la suma*
6. *Propiedades conmutativa y asociativa para la suma*

Definición 2.4 *Dados dos números reales* a, b *se definen:*
La resta: $a-b=a+(-b)$
La división: Si $b\neq 0$, $\frac{a}{b}=a\div b=a*\frac{1}{b}$

Observación: Cuando se tienen varias operaciones matemáticas y/o símbolos de agrupación, existe un orden (de prioridad) en el que se debe operar, como sigue:
PRIMERO: Si hay paréntesis ( ), [ ], o { } se efectúan primero las operaciones internas
SEGUNDO: Si no hay estos símbolos, se realizan las multiplicaciones (divisiones)
TERCERO: Por último se realizan las sumas (restas)

Ejemplo 2.5 *Encontrar el valor de:*

$$5 + 2\{2(4-3) - 2[(2-5)(4+1)]\} - 2 + 6[4 - 3(2+1)]$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&5 + 2\{2(4-3) - 2[(2-5)(4+1)]\} - 2 + 6[4 - 3(2+1)] \\
&= 5 + 2\{2(1) - 2[(-3)(5)]\} - 2 + 6[4 - 3(3)] \\
&= 5 + 2\{2 - 2[-15]\} - 2 + 6[4 - 9] \\
&= 5 + 2\{2 + 30\} - 2 + 6[-5] \\
&= 5 + 2\{32\} - 2 - 30 \\
&= 5 + 64 - 2 - 30 \\
&= 37
\end{aligned}$$

Otras propiedades

1. Igualdad: Si $a = b$ entonces $\begin{cases} a \pm c = b \pm c \text{ y} \\ ac = bc \end{cases}$

2. Multiplicación por cero $\begin{cases} a0 = 0a = 0 \\ \text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0, \text{o } b = 0 \\ \text{Si } \dfrac{a}{b} = 0, \text{ y } b \neq 0 \text{ entonces } a = 0 \end{cases}$

3. División de y por cero $\begin{cases} \dfrac{0}{b} = 0, \text{ si } b \neq 0 \\ \text{Si } a \neq 0, \dfrac{a}{0} = Indefinido(\pm\infty) \\ \dfrac{0}{0} = Indeterminado \end{cases}$

4. Cancelación $\begin{cases} \text{Si } a \pm c = b \pm c \text{ entonces } a = b \\ \text{Si } ac = bc \text{ y } c \neq 0 \text{ entonces } a = b \\ \dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}, \text{ si } b \neq 0, c \neq 0 \end{cases}$

5. Propiedades de negativos (ley de signos)

   a) $(-1)a = -a$

   b) $-(-a) = a$

   c) $-a(b) = a(-b) = -(ab)$

   d) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

   e) $(-a)(-b) = ab$

   f) $-(a+b) = -a - b$

g) $-(a-b) = -a+b = b-a$

6. Fracciones equivalentes
   Si $b \neq 0, d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$

Observación: Cuidado Estos son algunos errores muy comunes

1. $ab + c \neq a(b+c)$
2. $a + bc \neq (a+b)c$
3. $\dfrac{a+b}{b} \neq a+1$
4. $\dfrac{a+b}{b} \neq a$
5. $-a$ no significa que el número sea negativo, solo significa el inverso aditivo de a

Leyes de los signos

Suma:

*Cuando se suman dos números de igual signo, los números se suman y se conserva el signo

*Cuando se suman dos números de diferente signo, los números se restan y se conserva el signo del mayor (en valor absoluto)

Multiplicación:

*Cuando se multiplican (dividen) dos números de igual signo, el resultado es un número positivo

*Cuando se multiplican (dividen) dos números de diferente signo, el resultado es un número negativo

Ejemplo 2.6 *1. Al decir que si $2x-3 = y-3$ entonces $2x = y$ se aplicó la propiedad de cancelación.*

2. Por las propiedades de negativos se puede afirmar que $-(3x-2y) = 2y-3x$

3. Dado que $8(2x+5) = 0$ Por la propiedad de la multiplicación por cero podemos afirmar que $2x-5 = 0$

3. Operaciones con Naturales

3.1. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son muy útiles ya que nos permites encontrar los factores primos de un número natural y así poderlo descomponer es sus factores primos.

Algunos criterios de divisibilidad son:

Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 si su último dígito es $0, 2, 4, 6$, o 8

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltipo de 3

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 si su último dígito es 0 o 5

Divisibilidad por 11: Un número es divisible por 11 si al sumar los dígitos de las posiciones pares, y restarle la suma de los dígitos de las posiciones impares dá 0 o múltiplo de 11

3.2. Máximo Común Divisor (mcd) y Mínimo Común Múltiplo (mcm)

Dados dos o más números naturales, se definen:

Definición 3.1 *El máximo común divisor (mcd) es el mayor número natural que es divisor común de todos ellos.*

Para calcularlo, se descomponen los números en factores primos y el mcd es el producto de los factores comunes a todos los números con el menor exponente.

Definición 3.2 *El mínimo común múltiplo (mcm) es el menor número natural que es múltiplo común de todos ellos.*

Para calcularlo, se descomponen los números en factores primos y el mcm es el producto de los factores comunes y los no comunes a los números con el mayor exponente.

Ejemplo 3.3 *Determinar el mcd y el mcm de* 3960 *y* 6300

Solución: *Lo primero es descomponer los números en factores primos Se tiene que* $3960 = 2^3 * 3^2 * 5 * 11$, $6300 = 2^2 * 3^2 * 5^2 * 7$

De donde el mcd$(3960, 6300) = 2^2 * 3^2 * 5 = 180$

y el mcm$(3960, 6300) = 2^3 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11 = 138{,}600$

4. Operaciones con fraccionarios

Sean a, b, c, d números reales, suponemos los denominadores diferentes de 0 en cada caso:

1. Multiplicación (producto): $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
2. División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, o también $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ (producto de extremos en el numerador, y producto de medios en el denominador)
3. Suma (resta) con igual denominador: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
4. Suma (resta) con diferente denominador (forma general): $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
5. Suma (resta) usando mínimo común múltiplo: si $m = mcm\{b, d\}$ entonces $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a(m/b) \pm c(m/d)}{m}$

Ejemplo 4.1 *Dadas las fracciones* $\frac{77}{360}$ *y* $\frac{55}{252}$ *se tiene que:*

Multiplicación: $\frac{77}{360} * \frac{55}{252} = \frac{77 * 55}{360 * 252} = \frac{11 * 11}{72 * 36} = \frac{121}{2592}$

División: $\frac{77}{360} \div \frac{55}{252} = \frac{77}{360} * \frac{252}{55} = \frac{77 * 252}{360 * 55} = \frac{7 * 7}{10 * 5} = \frac{49}{50}$

Suma forma general: $\dfrac{77}{360}+\dfrac{55}{252}=\dfrac{77*252+360*55}{252*360}=\dfrac{39204}{90720}=\dfrac{121}{280}$

Suma usando el mínimo común múltiplo: $\dfrac{77}{360}+\dfrac{55}{252}$

el $mcm(360,252)=2520$*, luego*

$\dfrac{77}{360}+\dfrac{55}{252}=\dfrac{77*(2520/360)+55*(2520/252)}{2520}=\dfrac{1089}{2520}=\dfrac{121}{280}$

Resta usando el mínimo común múltiplo: $\dfrac{77}{360}-\dfrac{55}{252}=\dfrac{77*(2520/360)-55*(2520/252)}{2520}=\dfrac{-11}{2520}$

5. Orden en los Reales

Los números reales son ordenados. Decimos que a es menor que b y escribimos $a<b$, si $b-a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y escribimos $b>a$, por ejemplo $5<13$, o bien, $13>5$. El símbolo $a\leq b$ quiere decir que $a<b$ o que $a=b$ y se lee "a es menor o igual a b", de igual forma y $b\geq a$ quiere decir que $b>a$ o que $a=b$ y se lee "b es mayor o igual a a"

Terminología: Los símbolos $<,>,\leq,\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad** y las expresiones como $a<b$ o $b\geq a$ se denominan **desigualdades**.

La desigualdad $a>0$ significa que el número a está a la derecha del número 0 en la recta numérica y, en consecuencia, a es positivo. Indicamos que un número a es negativo por medio de la desigualdad $a<0$.

Observación: Dados dos números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes opciones

$$a<b,\ a=b \text{ ó } a>b$$

La propiedad anterior se llama **ley de tricotomía**

6. Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a<b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a,b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a,b]$. Usando la notación de conjuntos, podemos escribir

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\} \text{ y } [a,b]=\{x\mid a\leq x<\leq b\}$$

Los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica indican que los puntos extremos están excluidos del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares y los círculos sólidos de la indican que los puntos extremos están incluidos. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos

Ejemplo 6.1 *Pendientes*

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

7. Valor Absoluto

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales. La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \geq 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

Definición 7.1 *Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a es:*

$$\text{—}a\text{—}= \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7.2 *De la definición de valor absoluto se tiene:*

1. $|31| = 31$
2. $|-6| = -(-6) = 6$
3. $|2-e| = -(2-e) = e-2$
4. $|0| = 0$

7.1. Propiedades

Sean a, b números reales, se tiene:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0$, si y solo si, $a = 0$
3. $|-a| = |a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $|a/b| = |a|/|b|$
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$ Esta propiedad es conocida como la **desigualdad triangular**