MATEMÁTICAS BÁSICAS

EXPRESIONES ALGEBRAICAS
FÓRMULAS ESPECIALES

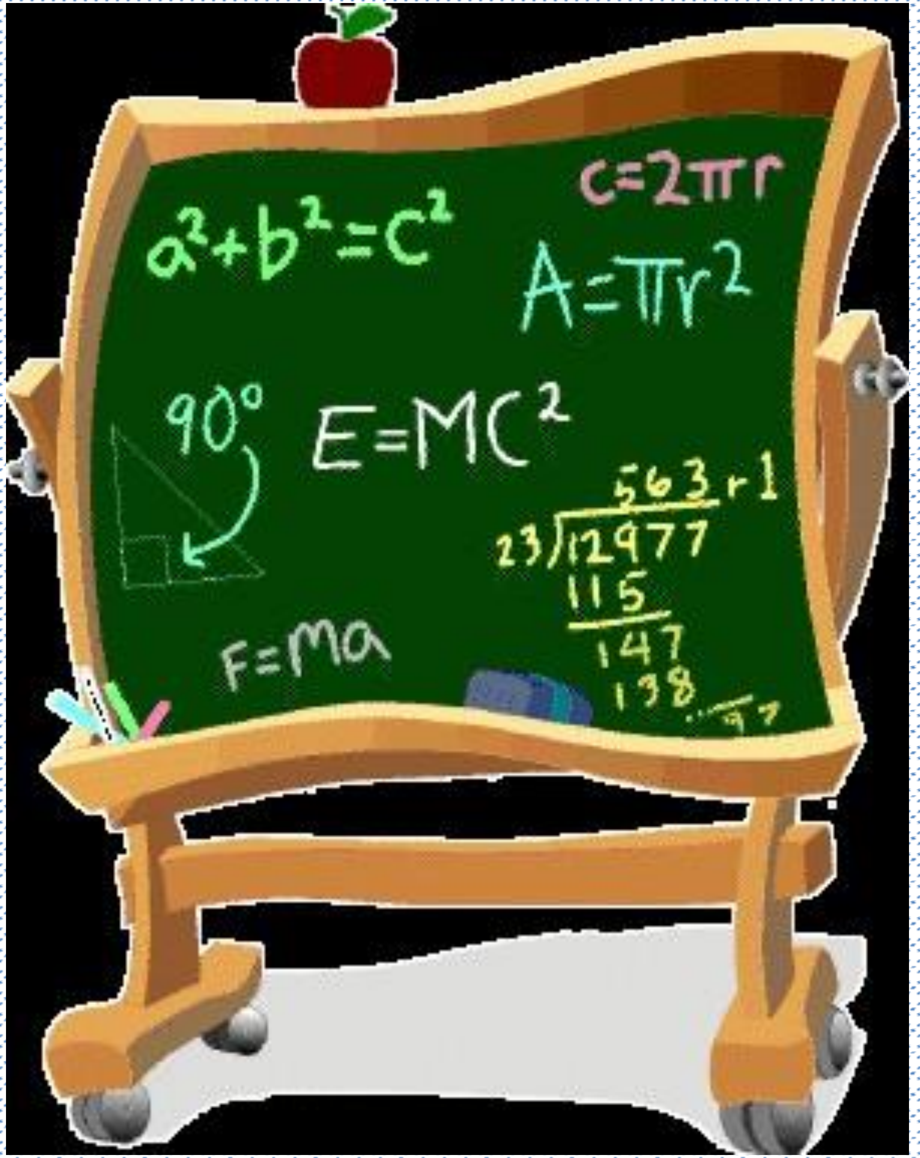
ELABORÓ ING. EFRÉN GIRALDO TORO

Objetivos-Competencias

Al finalizar esta clase Ud. debe:

- ❑ Tener un dominio amplio de las expresiones algebraicas básicas como también de los polinomios.
- ❑ Combinación de expresiones algebraicas: Suma, resta, multiplicación.
- ❑ Dominar los productos notables y especiales.

¡Recuerde que esto es básico para las clases siguientes!


$c=2\pi r$
$a^2+b^2=c^2$
$A=\pi r^2$
90°
$E=MC^2$
563 r1
23 | 12977
115
147
138
F=ma

Contenidos a estudiar

- ❑Expresiones algebraicas.
- ❑Polinomios.
- ❑Combinación de expresiones algebraicas: Suma, resta, multiplicación
- ❑Productos especiales
- ❑Productos notables

RECOMENDACIÓN IMPORTANTE

- Amigo estudiante:
- Este es el cuarto peldaño de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no, consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar matemáticas. No valen disculpas!.

¡*No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!*

- **Variable:** letra que representa a cualquier número o a cualquier letra o a combinaciones de letras y números

- Al contrario de la aritmética donde un número es siempre el mismo número, en algebra se usan letras para las **variables que pueden representar tanto a números, otras variables o a incógnitas**. O también a combinación de todas ellas.
- Esto permite generalizar expresiones algebraicas, fórmulas, ecuaciones y programar fórmulas complejas a partir de fórmulas sencillas.

- Obviamente que el algebra se basa en la aritmética y debe cumplir sus leyes básicas.

- Así, X puede **representar o ser** cualquier número, la misma x, ó a Y, Z, H…

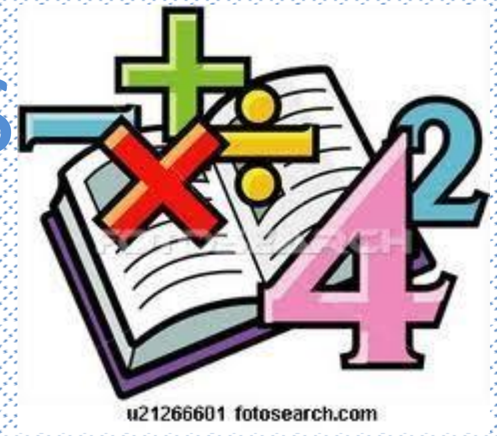
- X puede ser 1,2,3…1000, 100.000…..

- X= $(H+Y+Z)^2$

- O también X= Y + Z+ H ….. O lo que Ud. Requiera.
- **Esto es importante a la hora de entender fórmulas como las de los productos notables.**

- Claro está que después que Ud. le da algún valor o asignación, debe respetarla en ese caso específico.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS



- Expresión algebraica:
- combinación de números, variables y operadores

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Cada una de las distintas letras de una expresión algebraica se denominan **variables**

Cuando una expresión algebraica designa la medida de una magnitud se le llama **fórmula. Por ejemplo el volumen de un cubo cuyo lado vale *a viene dado por la fórmula V = a3***

Toda expresión algebraica tendrá un valor numérico concreto cuando sustituyamos la variable por un cierto valor

POLINOMIOS

- Monomio: expresión de la forma $\boldsymbol{ax^n}$ siendo a una constante, y n es un número entero positivo.
- Binomio: combinación de dos monomios
- Trinomio: combinación de tres monomios
- Polinomios: combinación de varios monomios

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de **grado n**. Los polinomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio son los **términos** del polinomio.

(STEWART, 2007)

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

(STEWART, 2007)

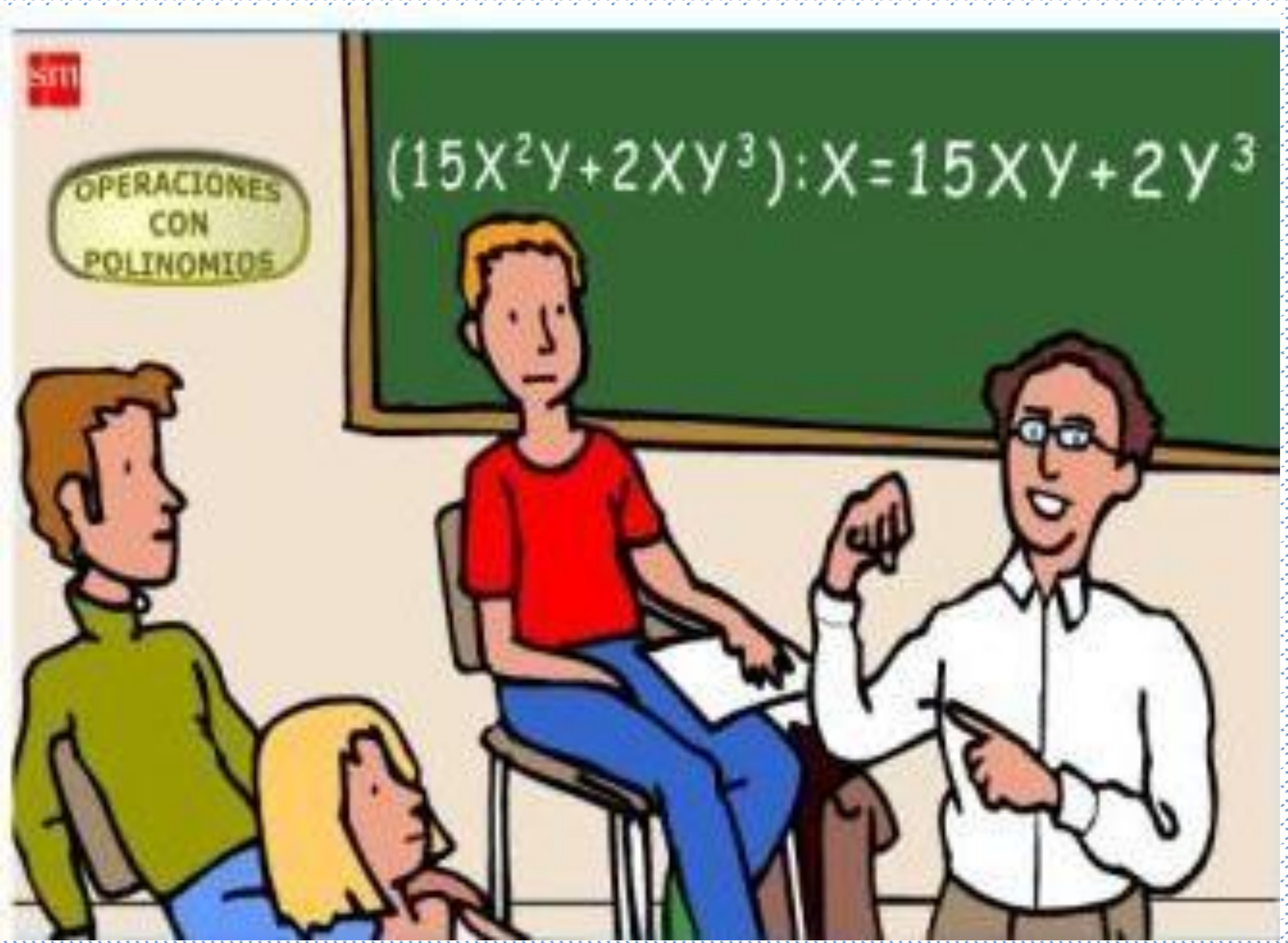
- Dos polinomios son iguales si y sólo si los **<u>coeficientes</u> de los <u>términos de igual grado</u> lo son.**

- Recuerde que coeficiente por ejemplo de x es todo lo que esta multiplicando o es factor de la x.

- $5x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

A=5, B=3, C=4, D=2

Si no aparece algún término en cualquiera de los lados entonces su coeficiente es cero.


sm
OPERACIONES CON POLINOMIOS
$(15X^2Y+2XY^3):X=15XY+2Y^3$

Combinar expresiones algebraicas

- Se trata de combinar **términos semejantes (los que tienen la *misma base al mismo exponente*, aunque su coeficiente sea diferente). 3**X^4, $5X^4$
- **Se aplican** las leyes aritméticas y las leyes de los exponentes ya vistas, que tienen la misma base. O utilizar algún factor común que tengan la diferentes expresiones algebraicas.

Suma y Resta de polinomios

Para sumar dos polinomios se agrupan los términos del mismo grado o semejantes y se suman sus coeficientes. (Se saca el factor común y se suman los coeficientes)

$$\mathbf{3}X^4 + 5X^4 = (\mathbf{3}+5)X^4 = 8X^4$$

Resta

- Para restar del polinomio P(x) el polinomio Q(x), se debe sumar a P(x) el opuesto de Q(x). O sea se le cambia de signo a Q(x)

- $4X^2$- ($5X^2$+6 X^2)= $4X^2$- $5X^2$-6 X^2)=
- (4- 5+6) X^2= $5X^2$

- También destruir paréntesis aplicando ley de multiplicación se signos (- por + en este caso)

Ejemplo 1 **Adición y sustracción de polinomios**

a) Efectúe la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

(STEWART, 2007)

a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ Propiedad distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ Combinación de términos semejantes

(STEWART, 2007)

Productos de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada **monomio** del primer polinomio por **cada uno de los términos del otro** y luego se suman los términos de igual grado.

Propiedad distributiva del producto

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

(STEWART, 2007)

Multiplicación de expresiones algebraicas

a) $(2x+1)(3x-5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$ Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^2-3)(x^3+2x+1) = x^2(x^3+2x+1) - 3(x^3+2x+1)$ Propiedad distributiva

$= x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$ Propiedad distributiva

$= x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$ Combinación de términos semejantes

c) $(1+\sqrt{x})(2-3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2$ Propiedad distributiva

$= 2 - \sqrt{x} - 3x$ Combinación de términos semejantes ■

(STEWART, 2007)

EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la Propiedad Distributiva

$$
\begin{aligned}
(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\
&= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN 2: Usando forma de tabla

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & x^2 & -\ 5x & +\ 4 & \\
 & & 2x & +\ 3 & \\
\hline
 & 3x^2 & -\ 15x & +\ 12 & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 3 \\
2x^3 & -\ 10x^2 & +\ 8x & & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x \\
\hline
2x^3 & -\ 7x^2 & -\ 7x & +\ 12 & \text{Sume términos}
\end{array}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**


B
C
A
Productos notables

- Son polinomios que se obtienen de la multiplicación entre 2 o mas polinomios que poseen características especiales o expresiones particulares, y cumplen ciertas reglas fijas.

- Su resultado puede ser escrito por simple inspección sin necesidad de efectuar la multiplicación paso por paso.

- Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización. Y se deben aprender.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ — Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ — Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ — Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ — Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ — Cubo de una diferencia

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Una suma al cuadrado

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

http://matesepc2eso.blogspot.com/p/identidades-notables.html

1. $(a^5+7b^4)^2$

<u>**Solución**</u>:

$$(a^5+7b^4)^2=(a^5)^2+2(a^5)(7b^4)+(7b^4)^2,$$

$$\Rightarrow \quad (a^5+7b^4)^2=a^{10}+14a^5b^4+49b^8.$$

2. $(3x^4-5xy^3)^2$

<u>**Solución**</u>:

$$(3x^4-5xy^3)^2=(3x^4)^2-2(3x^4)(5xy^3)+(5xy^3)^2,$$

$$\Rightarrow \quad (3x^4-5xy^3)^2=9x^{4\times 2}-30x^{4+1}y^3+25x^2y^{2\times 3};$$

$$\therefore \quad (3x^4-5xy^3)^2=9x^8-30x^5y^3+25x^2y^6.$$

Una diferencia al cuadrado

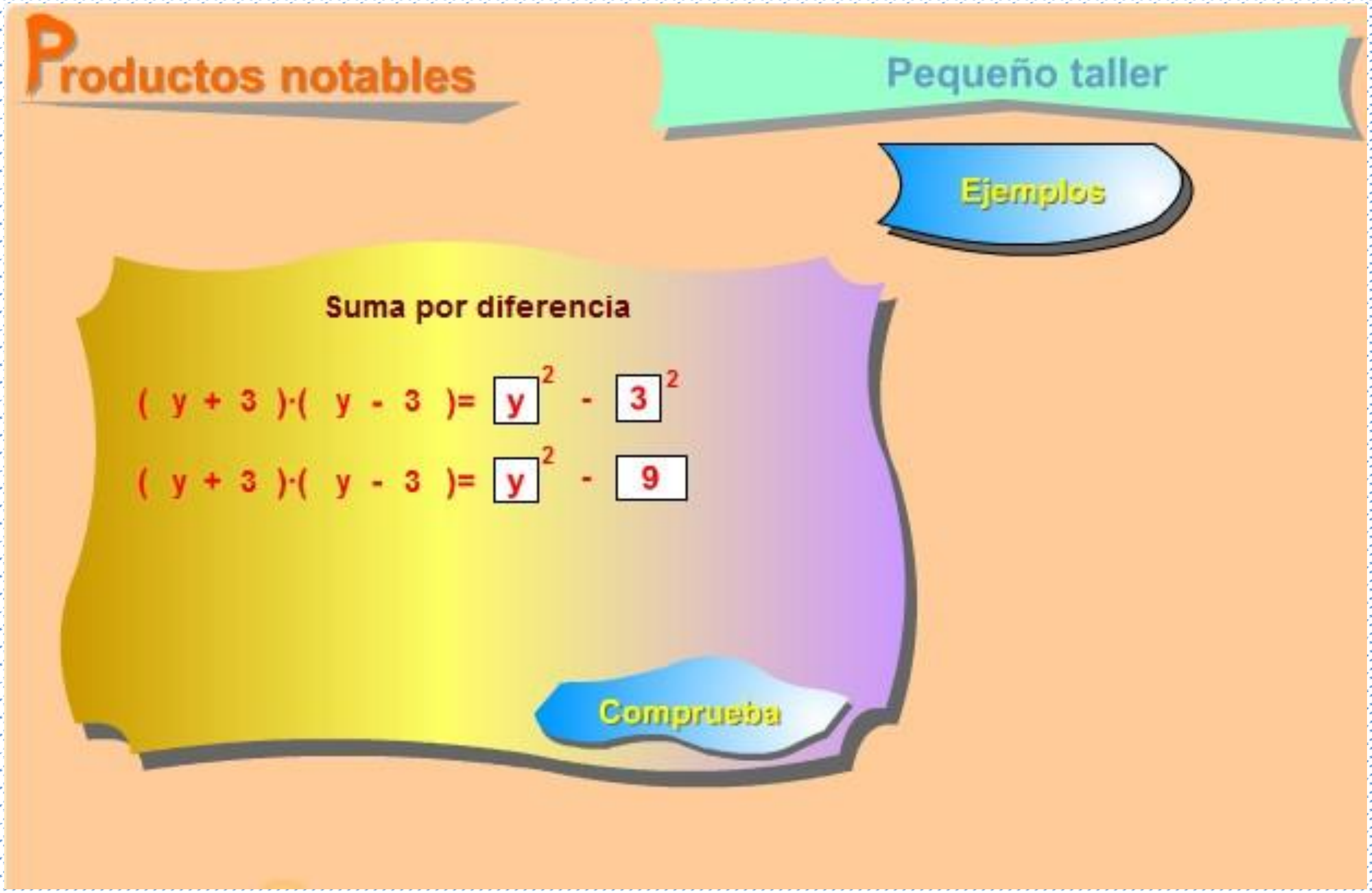
$$(a-b)^2=a^2-2ab+\ b^2$$

http://matesepc2eso.blogspot.com/p/identidades-notables.html

- Note que hablamos de una suma por una diferencia si los primeros términos **(a+b)** sólo difieren de los segundos **(a-b)** en un signo –

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.



http://matesepc2eso.blogspot.com/p/identidades-notables.html

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(X^2 + Y^2)^2 = X^4 + 2X^2Y^3 + Y^6$$

(STEWART, 2007)

EJEMPLO | Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ **(b)** $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1]\\ &= (x + y)^2 - 1^2\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1\end{aligned}$$

.- Binomio al cubo

El CUBO DE LA SUMA DE UN BINOMIO

Una suma al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Un binomio al cubo (**suma**)**(El cubo de la suma de un binomio)** es igual a **"el cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo".**

http://tiempodeexito.com/algebra/24.html

El CUBO DE LA DIFERENCIA DE UN BINOMIO

Una diferencia al cubo

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Un binomio al cubo (**resta**)**(El cubo de la diferencia de un binomio)** es igual a **"el cubo del primero, menos el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo".**

http://tiempodeexito.com/algebra/24.html

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS QUE TIENEN UN TÉRMINO COMÚN

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Efrén Giraldo

El producto de dos binomios de esta forma que tienen un término común es igual al cuadrado del término común más la suma de los términos no comunes multiplicado por el término común más el producto de los términos no comunes.

Efrén Giraldo

Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = \underline{a^2 + b^2 + c^2} + \underline{2 \cdot a \cdot b + + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c}$$

Es igual a la suma de los posibles cuadrados más la suma de todas las posibles <u>combinaciones entre a, b y c</u> multiplicadas por 2

Fórmulas de factorización especial

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Resumen

- $(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$
- $(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$
- $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$
- $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$
- $(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$

42

FACTOR COMÚN MÁXIMO

- El factor común máximo FCM es lo mismo que el máximo común divisor MCD

- El nombre **Máximo factor común** tiene tres partes: ***Factor*, *Común* y *Máximo*.**

- **¿Qué es un "Factor común" ?**
- Factor *común* de dos o más números es el **factor que pertenece a la vez a esos números** –por eso se le llama "factor *común*'

Los factores de 12 son 1, 2, 3, **4,** 6 y **12**

Los factores de 30 son 1, 2, 3, **5,** 6, **10, 15** y **30**

Se observa que 1,2,3 y 6 aparecen en las dos listas

Entonces, los factores comunes de 12 y 30 son: **1, 2, 3** y **6**

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/maximo-factor-comun.html

- ¿Qué es el "Máximo factor común o fcm"?
- Es el **máximo** de los factores comunes.
- El mayor de los factores comunes a 12 y 30 es 6, así que el *Máximo* factor común es **6**.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/maximo-factor-comun.html

Dos números	Todos los factores	Factores comunes	El mayor factor común
9 y 12	9: 1,3,9 12: 1,2,3,4,6,12	1,3	**3**
6 y 18	6: 1,2,3,6 18: 1,2,3,6,9,18	1,2,3,6	**6**

- Otra manera de hallar el FCM o MCD es:

1. Descomponer los números en sus factores primos.
2. Sacar los números comunes con su menor exponente.
3. El FCM o MCD es el producto de los <u>factores comunes con su menor exponente.</u>

6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

$6 = 2.3$ $\quad 18 = 2.3.3 = 2.3^2$, *los factores comunes con menor exponente son* $2.3 = 6$ *este es FCM o MCD*

De las factorizaciones de 48 y 60:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

El MCD son los factores comunes con su menor exponente, esto es:

$$\mathrm{mcd}(48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

40	2		60	2
20	2		30	2
10	2		15	3
5	5		5	5
1			1	

MCD = 2x2x5= **20**	
M.C.D. 40 = 2x2x2x5	M.C.D. 60 = 2x2x3x5

5 2^2

2º De los resultados, se cogen los números repetidos de menor exponente y se multiplican y ese es el M.C.D.

- 2^2 es factor común con exponente menor
- 5 es factor común de ambos

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m. c. d. $(72, 108, 60) = 2^2 \cdot 3 =$ **12**

12 es el mayor número que divide a 72, 108 y 60.

- **El máximo factor común o fcm** de una serie de términos algebraicos es el producto de las **variables que están a la vez en todo los términos algebraicos o que se repiten, tomadas al <u>exponente menor</u>**

- Hallar el fcm de $4x^3 - 12x^2 + 6x$
- Primero se halla el fcm de 4, 12 y 6
- luego el fcm de $x^3 - x^2 + 6x$ (de las expresiones solas)

- Factor común máximo de 4, 12, 6
- Factores comunes de 4 son **1, 2, 4**
- fc de 12 son **1,2,3,4,6 y 12**
- fc de 6 son **1,2,3,6**

- Por tanto el fcm de 4,12,6 es 2

- El FCM de x^3,-x^2, x es x
- Por tanto el Fcm de $4x^3$-$12x^2 + 6x$ es 2x

Uso del FCM
Es útil para factorizar expresiones

- Se divide la expresión por el Fcm y se tiene el otro factor.
- $4x^3$-$12x^2 + 6$x dividido entre 2x
- $\frac{4x^3}{2}$=$2x^2$
- $\frac{-12x^2}{2x}$=-6x
- $\frac{6x}{2x}$=3
- El otro factor es $2x^2$-6x+3

- Como el fcm de $4x^3 - 12x^2 + 6x$ es $2x$ entonces:

$$4x^3 - 12x^2 + 6x = 2x\,(2x^2 - 6x + 3)$$

- $2x\,(2x^2 - 6x + 3)$
- porque $2x\,.2x^2 = 4x^3$
- porque $2x\,(-6x) = -12x^2$
- porque $2x.3 = 6x$

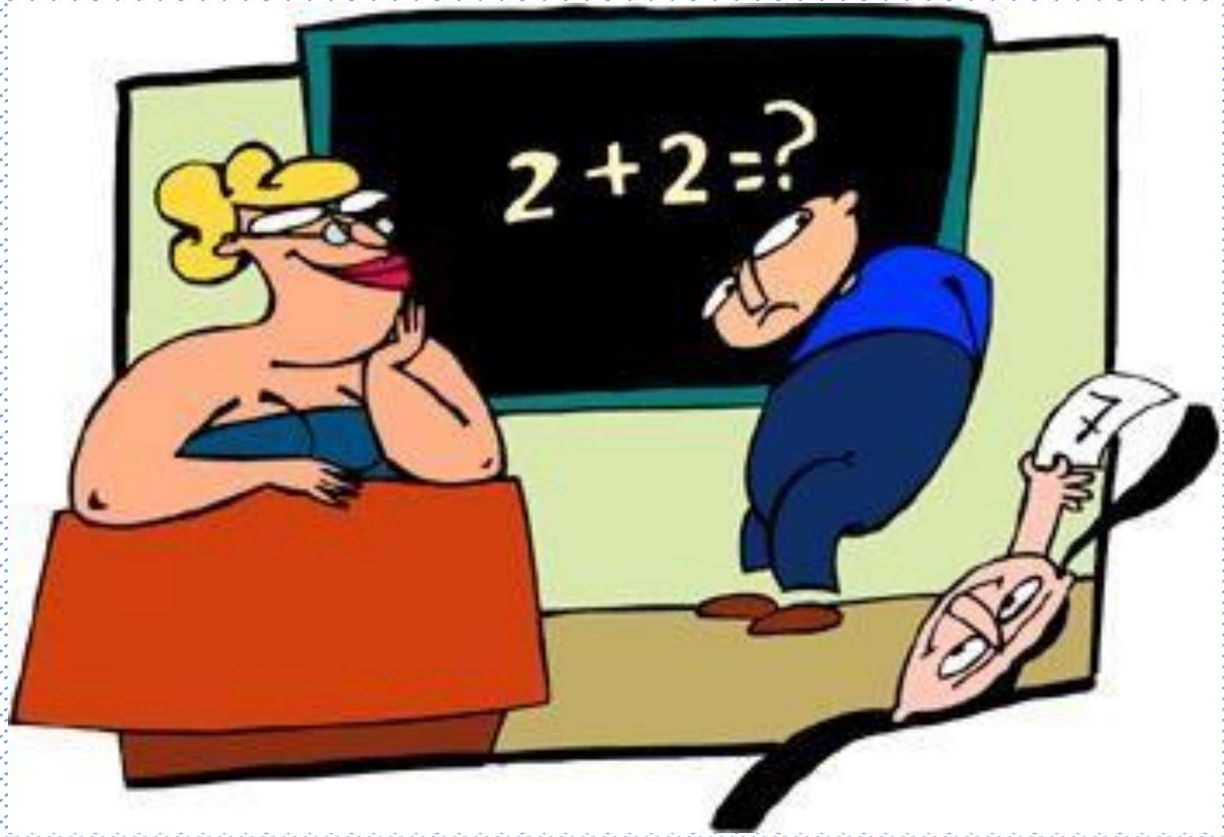
Tarea

- Factorizar $6x^5 - 8x^4 - 10x^3$
- Factorizar $3x^2 - 9x$
- Factorizar $y^3 + 6y^2$

Trabajo en casa

- Repasar Stewart páginas 24 a 27
- Hacer ejercicios Stewart Sección 1.3 del 1 al 42
- Repasar la teoría y problemas vistos en clase
- Aprender mcm de expresiones algebraicas
- Vista previa a lo de la próxima clase número 3

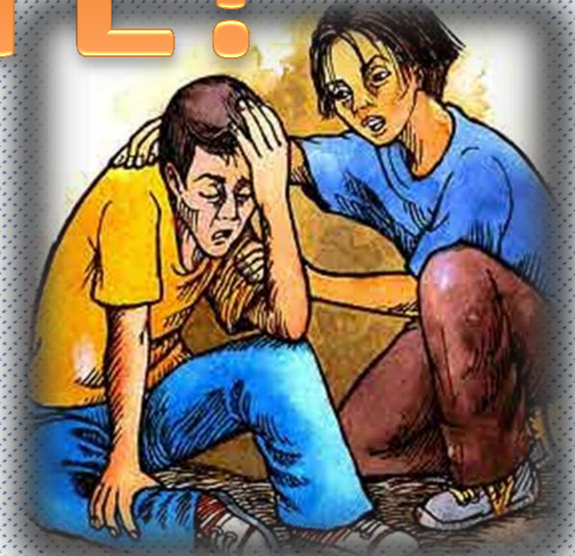
- Estudie para que no le pase esto



¡URGENTE!

¡ESTO! O ¡ESTO!

UD. DECIDE



- LUEGO DE ESTA CUARTA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE DE LA 1,2,3 y 4 CLASE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE,REÚNASE, INVESTIGUE. HAGA ALGO.

- **SI NO LO HACE TIENE PROBLEMAS EN SU MATERIA Y ESTÁ DANDO OTRO PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA Y HASTA ARRUINAR SU VIDA.**

Bibliografía base:

- Stewart. (2007). Precálculo
- http://tiempodeexito.com/algebra/24.html
- http://matesepc2eso.blogspot.com/p/identidades-notables.html