MATEMÁTICA BÁSICA
DIVISION LARGA Y SINTÉTICA

TEOREMA DEL RESIDIO
Y DEL FACTOR
PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

1. DIVISIÓN LARGA

$P_{(x)}$ (dividendo) $Q_{(x)}$ (divisor)

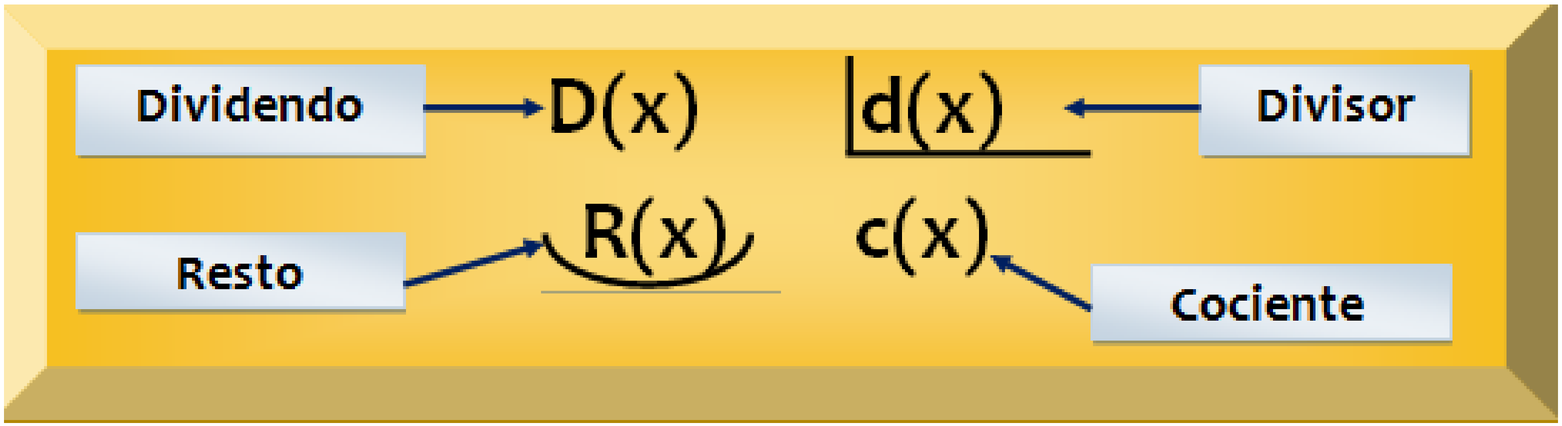
$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline -12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$C_{(x)}$ (cociente)

1 R(x) (residuo)

$P_{(x)} = Q_{(x)} C_{(x)} + R(x)$ (residuo)

Dividendo = Divisor . Cociente + Residuo



$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

$P_{(x)}$ (dividendo   (cociente)   R(x) (residuo)

Efrén Giraldo T.

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

$R_{(x)}$ (residuo9

$Q_{(x)}$ (divisor)

Efrén Giraldo T.

$Q_{(x)}$ (divisor)

Efrén Giraldo T.

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

- 12 4
- -12 3
- o
- 12= 4*3 +0 como el residuo es 0
- 12 es factorizable.
- En cambio 13 no es factorizable.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Pasos división larga algebraica.

1. Ordenar el dividendo P(x) en estricto orden descendente respecto al coeficiente de la X.
2. Dividir
3. Multiplicar
4. Cambiar el signo
5. Sumar

Repetiremos el proceso hasta que el grado del primer monomio del dividendo sea menor que el grado del primer monomio del divisor.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

División: Sean dos polinomios $P_{(x)}$ (dividendo) y $Q_{(x)}$ (divisor) tales que el grado del primero es mayor que el del segundo , buscamos el polinomio $C_{(x)}$ (cociente) tal que $P_{(x)}=Q_{(x)}C_{(x)} + R(x)$ (residuo)

$$7X^3+5X^4+10-4X \;\Big|\; \underline{X^2+5}$$

- 1.Se ordena el dividendo P(x) en estricto orden descendente respecto al coeficiente de la X.
- (Si no aparece un término se coloca 0)

$$5X^4+7X^3+0X^2-4X+10$$

Se halla el primer término del cociente así:

$$5X^4+7X^3+0X^2-4X+10 \;\big|\; \underline{X^2+5}$$

$$\frac{5X^4}{x^2}=5X^2 \longrightarrow 5X^2$$

O así:

Hallar un término tal que al Multiplicarlo por X^2 de $5X^4$ $\longrightarrow$

Procedimiento

-Se dividen los coeficientes 5/1

-Se restan los exponentes 4-2=2

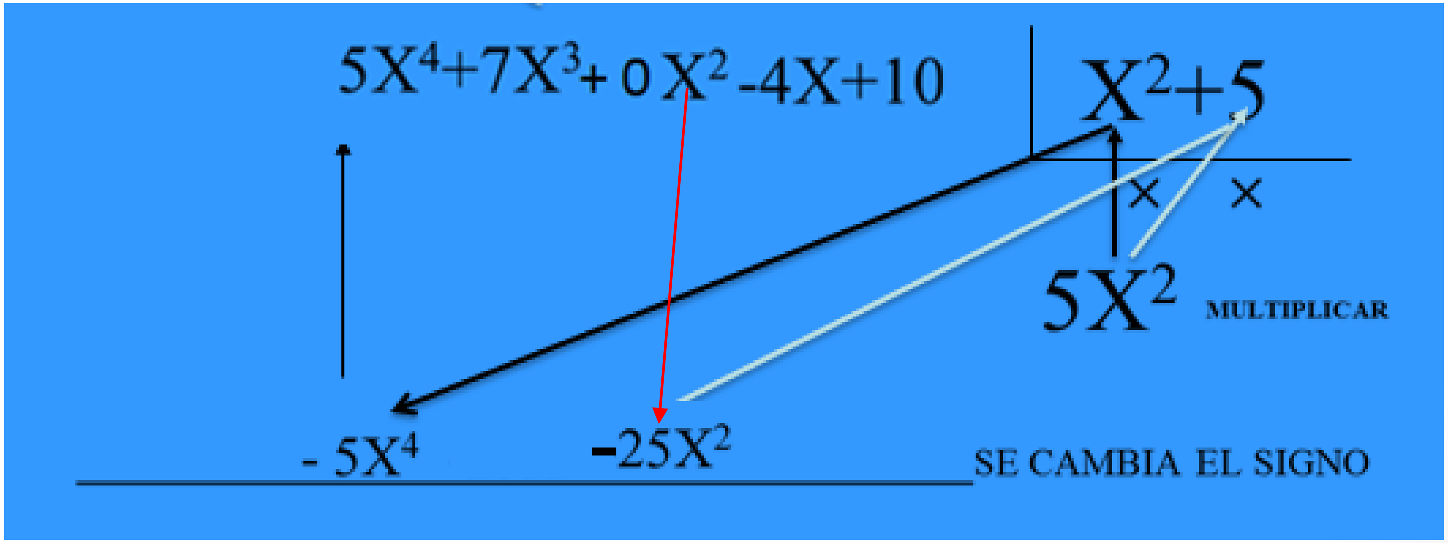
No olvide que en general para hallar el cociente :

1. Se ordena el dividendo P(x) en estricto orden descendente respecto al coeficiente de la X.
2. Se dividen los signos del primer término del dividendo y del divisor.
3. Luego se dividen los coeficientes.
4. Y después se restan los exponentes.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Se multiplica el término hallado $(5x^2)$ $por\ el\ primer\ término\ del\ divisor$ (x^2) y se le cambia de signo.

Luego el mismo término $5x^2$ por los otros términos del divisor y se repite el proceso. Todos estos términos se colocan debajo de los respectivos términos del dividendo.



ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

LUEGO SE **SUMA TODO**

$$
\begin{array}{lllll|l}
 & 5X^4 & +7X^3 & +0X^2 & -4X+10 & X^2+5 \\ \cline{6-6}
 & -5X^4 & & -25X^2 & & 5X^2 \\ \cline{1-5}
 & 0+ & 7X^3 & -25X^2 & -4X+10 &
\end{array}
$$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

SE VUELVE A DIVIDIR EL PRIMER TÉRMINO DEL NUEVO DIVIDENDO($7X^3$) POR X^2, LO CUAL DA 7X Y A MULTIPLICARLO POR X^2+5 Y CAMBIAR EL SIGNO, COLOCAR DEBAJO Y A SUMAR

$$5X^4 + 7X^3 + 0X^2 - 4X + 10 \quad \Big| \quad X^2+5$$

$$-5X^4 \qquad -25X^2 \qquad\qquad 5X^2+7X-25$$

Nuevo dividendo $\quad / \quad +7X^3 \quad -25X^2 \quad -4X +10$

$$-7X^3 \qquad\qquad -35X$$

$$/ \quad / \quad -25X^2 \; -39X+10$$

$$+25X^2 \qquad\qquad +125$$

$$/ \quad -39X+135$$

SE VUELVE A DIVIDIR Y A MULTIPLICAR Y CAMBIAR EL SIGNO HASTA QUE EL GRADO DEL RESIDUO SEA MENOR QUE EL GRADO DEL DIVISOR- El grado de -39X(1) es menor que el grado de X^2+5.

- $P_{(x)}$ (dividendo) $Q_{(x)}$(divisor)

$5X^4+7X^3 \;\; -4X+10 \quad | \; X^2+5$

$-39X+135 \qquad 5X^2+7X-25$

R(x) (residuo **$C_{(x)}$ (cociente)**

$$5X^4+7X^3 \ -4X+10 = (X^2+5)\,(5X^2+7X-25) \ + (-39X+135)$$

$$P_{(x)} \ = \ Q_{(x)}C_{(x)} \ + R(x) \text{ (residuo)}$$

Dividendo = Divisor . Cociente + Residuo

$$
\begin{array}{l|l}
5x^3 + 7x^2 + 0X - 3 & \underline{x^2 + 2x - 1} \\
\underline{-5x^3 - 10x^2 + 5x} & \quad 5x - 3 \\
\; / \qquad -3x^2 + 5x - 3 & \\
\qquad\quad \underline{3x^2 + 6x - 3} & \\
\qquad\qquad / \quad 11x - 6 &
\end{array}
$$

El cociente es $C_{(x)} = 5x - 3$,

y el residuo $R_{(x)} = 11x - 6$.

http://www.slideshare.net/nelsonslm2011/polinomios-6938646?src=related_normal&rel=2700548

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\
\hline
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
-5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
5x^3 + 15x^2 - 10x & \\
\hline
6x^2 + 20x - 20 & \\
-6x^2 - 18x + 12 & \\
\hline
2x - 8 &
\end{array}
$$

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

$$D(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (x^2 - 5x + 6) + (2x - 8) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\
\cline{1-3}
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \\
 & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & -6x^2 & -18x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -8 &
\end{array}
$$

2. DIVISIÓN SINTÉTICA DE POLINOMIOS

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

- DIIVISIÓN SINTÉTICA

CARACTERÍSTICAS:

- La división sintética es un método que simplifica las divisiones de polinomios muy largos.
- Desafortunadamente sólo puede usarse con un divisor de la forma $(x - \text{a})$ donde a es un número real.

- La división sintética es un procedimiento por medio del cual se puede dividir un polinomio de solo una incógnita o variable, de exponente o grado n, entre un polinomio de grado 1 de la forma $x - a$ donde a es un número.

- Este procedimiento es puramente numérico (no se requiere manejo de letras) y resulta más fácil que la división larga de polinomios . Después de realizada la división se obtiene como cociente un polinomio de orden $n - 1$ y el residuo es un número.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

- $2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6$ entre el polinomio $x - 3$.

1. **Se escriben los coeficientes horizontalmente del polinomio en estricto orden decreciente y se escriben separados por espacios. Si falta el término correspondiente a algún orden, se coloca cero en su lugar.**

2. **Se escribe a la izquierda separado por una línea vertical el valor de *a* (que es el término independiente del divisor con signo contrario a como aparece).**

3. **Se dibuja una línea horizontal por debajo de *a*. Con esto queda planteada la división sintética, como se muestra en la figura.**

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & -15 & -10 & 6 \\ 3 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

2. El primer término del polinomio se escribe tal cual debajo de la línea horizontal.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & -15 & -10 & 6 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

3.Se multiplica el divisor por el número que se acaba de bajar a línea horizontal. El producto se escribe arriba de la línea horizontal en la fila correspondiente al orden siguiente (segunda columna).

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & -15 & -10 & 6 \\ 3 & & 6 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

•4.Se suma el número que se acaba d e obtener con el de arriba .
El resultado se escribe debajo de la línea horizontal.

	2	−3	−15	−10	6
3	+	6			
	2	3			

5.Se multiplica el divisor a o sea 3 por el número obtenido de la suma anterior o sea 3, nos da 9, y se coloca en la parte superior de línea, y así hasta terminar si olvidar en cada caso hacer la suma correspondiente.

	2	−3	−15	−10	6
3		6	9	−18	−84
×	2	3	−6	−28	−78

6.Se interpreta el resultado de la división. El último número es el residuo y los números anteriores son los coeficientes del cociente de orden *n - 1*.

		2	−3	−15	−10	6
	3		6	9	−18	−84
coeficientes del cociente de orden *n - 1*.		2	3	−6	−28	−78 residuo

Cociente: $2x^3 + 3x^2 - 6x - 28$. Residuo: $- 78$

$$2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6 = (x - 3)(2x^3 + 3x^2 - 6x - 28) - 78$$

EJEMPLO | División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
\hline
3 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

Dividendo $2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$

Divisor $x - 3$

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación, sumamos.

	2	−7	0	5
3		6		
	$\boxed{2}$	−1		

Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$

Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

	2	−7	0	5
3		6	−3	
	2	$\boxed{-1}$	−3	

Multiplique: $3(-1) = -3$

Sume: $0 + (-3) = -3$

	2	−7	0	5
3		6	−3	−9
	2	−1	$\boxed{-3}$	−4

Multiplique: $3(-3) = -9$

Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente
$2x^2 - x - 3$

Residuo
-4

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Ejemplo.

Dividir el polinomio x^4 - $11x^3$ + $26x^2$ + $44x$ - 120 entre el polinomio $x + 2$.

Los coeficientes del polinomio son [*1 -11 26 44 120*] y $a = -2$ porque $x + 2 = x - (-2) = x + a$.

La división sintética queda así

	1	−11	26	44	−120
−2		−2	26	−104	120
	1	−13	52	−60	$\boxed{0}$

Cociente: $x^3 - 13x^2 + 52x - 60$.

Residuo: *0*.

la división es exacta, por eso el residuo es cero.

Ejemplo. Dividir el polinomio $x^3 + 1$ entre el polinomio $x - 1$.

Los coeficientes del polinomio son [$1\ 0\ 0\ 1$] (observar como se insertan ceros en las posiciones de los

términos con x^2 y x) y $a = 1$. La división sintética queda así:

	1	0	0	1
1		1	1	1
	1	1	1	$\boxed{2}$

Cociente: $x^2 + x + 1$.

Residuo:*2*.

Evaluación de un polinomio P(x) en un valor dado a

-

- Es simplemente reemplazar el valor dado *a en el polinomio, o sea hacer P(a)*

- Si P*(x)= $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ evaluar el polinomio en $a = 3$ es*

  P( )= $\mathbf{2(\ \ )^3 - 4(\ \ )^2 - 3(\ ) + 2}$

- P*(2)= $2.3^3 - 4.3^2 - 3.3 + 2 = 11$*
- *Evalúe P(x) en c $\longrightarrow$ P(c)*
- *P(c)* $=2c^3 - 4c^2 - 3c + 2$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

3.Teorema del residuo

Teorema del residuo

Si se divide un polinomio P*(x)* entre *x - a* donde *a* es un número real, el residuo es igual a P*(a)*.
Note que el signo – es de la fórmula (contrario al de x-*a*).

El teorema del residuo indica que el resultado de evaluar numéricamente un polinomio en un valor *a* es igual al residuo que resulta de dividir el polinomio entre *x - a*.

El teorema del residuo dice que no necesito hacer la división por x-a, sencillamente hallo P*(a) y ese es el residuo*.

Obviamente también puedo hallar el residuo haciendo la división sintética

- Si dividimos el polinomio

P(x)= $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ entre el polinomio $x - 3$

	2	–4	–3	2
3		6	6	9
	2	2	3	11

Encontramos que el cociente es $2x^2 + 2x + 3$ y que el residuo es 11.

Por otra parte, si evaluamos numéricamente el polinomio P$(x)= 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ para el valor de $x = 3$, se obtiene:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$$
$$P(3) = 2(3)^3 - 4(3)^2 - 3(3) + 2$$
$$P(3) = 2(27) - 4(9) - 9 + 2$$
$$P(3) = 54 - 36 - 9 + 2$$

P$(3) = 11$ este será el residuo de dividir P(x) entre (x-3)

No es ninguna casualidad que el residuo de la división anterior entre $x - 3$ y la evaluación numérica para $P(3)$ ambas den como resultado respectivamente residuo y valor numérico igual a 11.

	2	−4	−3	2
3		6	6	9
	2	2	3	$\boxed{11}$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Si $P(x) = x^2 + x – 2$ se divide por división larga o sintética entre $(x-2)$ el residuo es 4 y el cociente es $(x+3)$.

Ahora el residuo también se puede hallar valorando el polinomio en 2 o sea $P(2) = 2^2 + (2) - 2 = 4$.

Este resultado es obvio si aplicamos el algoritmo de la división:

$P(x) = (x-2)(x+3) + 4$

La expresión anterior dice que 4 es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $(x-2)$.

- El teorema del residuo nos puede también ayudar a encontrar los factores de un polinomio cuando el residuo es 0

- Para **P(x)=** $x^2 + x - 2$, $P(1) = 1^2 + (1) - 2 = 0$. Por lo tanto, si al dividir entre (x-1) no existe residuo, (x-1) es un factor.

- El otro factor lo puedo hallar al dividir el polinomio por división sintética por (x-1), lo que da (x+2)

-

- Por tanto al aplicar el algoritmo de la división

$$P(x) = Q(x).\,C(x) + 0$$

$P(x) = Q(x).\,C(x)$ P(x), sólo hay multiplicandos o sea sólo factores.

$P(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

- Como se observa, (x-1) y (x+2) son factores y por tanto el polinomio es factorizable porque no tiene residuo.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Cero o raíz de un polinomio es un concepto diferente a lo que conocemos como 0 (número)

- La raíz de un polinomio P(x) es un número ***a*** que hace que todo el polinomio valga cero al reemplazar ***a*** en P(x) .

- Por tanto si a es una raíz de P(x) P(a)=0

Al reemplazar a en el polinomio(valorar en a), este se vuelve cero

- Es decir que, cuando igualamos el polinomio a cero, los resultados son los ceros, raíces o soluciones del polinomio.
- $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ $x=-2$ y $x=1$

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

41

Raíces de un polinomio

- Un número real a es **raíz de un polinomio** P(x) si y solo si P(a) = 0

Repaso

- Como se vio, una conclusión muy importante del teorema del residuo es que se puede evaluar numéricamente un polinomio valorándolo en **a** y **la evaluación da el residuo que resulta de dividir el polinomio entre (x-a).**

- **Si al evaluarlo en a da 0 o sea P*(a) = 0*, deducimos que el residuo es 0 y por tanto (*x* – *a)* es un factor del polinomio.**

- **Cuando se encuentra un valor de *a* para el cual P(a*) = 0* se ha encontrado, un cero, raíz o solución del polinomio.**

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Ejemplo 4 Uso del teorema del residuo para hallar el valor de un polinomio

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

a) Encuentre el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

b) Use el teorema del residuo para hallar $P(-2)$.

Solución

a) Puesto que $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\
 & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\
\hline
 & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5
\end{array}
$$

El residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$.

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y el residuo es 5.

b) Por el teorema del residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. Del inciso a) el residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$. ■

(Stewart,2007)

4.Teorema del factor

TEOREMA DEL FACTOR

c es cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

TEOREMA DEL FACTOR

- Del teorema del residuo se desprende el teorema del factor que dice así:
- **Si el residuo es cero al evaluar en P(a) ($P(a) = 0$), entonces ($x - a$) es un factor (un multiplicando) del polinomio y a es una raíz, cero o solución del polinomio P(x) porque:**
- $P(x) = Q(x).C(x) + 0 = (x - a)C(x)$

Otra manera del teorema del factor:

(x-*a*) es un factor de P(x) implica que *a* es un cero de P(x)

El teorema del factor indica que hallar los ceros de un polinomio es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección se estudian algunos métodos algebraicos que ayudan a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por lo tanto, a factorizar el polinomio. Se comienza con los ceros *racionales* de un polinomio.

Si $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ implica que a, b, c son ceros del polinomio.

Basta factorizar linealmente el polinomio para hallar sus ceros, raíces o soluciones.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

47

- Implicaciones del teorema del residuo y del factor

Si P(x) es un polinomio y *a* es un número real y P(*a*) =0 todo lo siguiente se puede decir o es equivalente

- (x-a) es un factor de P(x)
- a es un cero de P(x)
- a es una raíz de P(x)
- a es una solución de P(x)

P(a) =0 ⟷ el Residuo de P(x) ÷ (x-a) es 0

- P(x)= (x-a)C(x)
- Si dibujo la gráfica de P(x), x=a es el
- intercepto de la gráfica con el eje x

Factorizar aplicando el teorema del factor y hallar los ceros, raíces o soluciones reales de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Muestre que $P(1) = 0$, y use este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

Solución Sustituyendo, se ve que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el teorema del factor, esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

- Ahora supongamos que no sabemos como factorizar el segundo término Podemos volver a aplicar el teorema del residuo y del factor para factorizarlo.

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

50

$x^2 + x - 6$

- Al tanteo podemos observar que si reemplazamos en el polinomio por 1 o por -1 no se anula o sea P(1) o P(-1) no es 0
- Pero si reemplazo por 2 da:
- $x^2 + x - 6 = \ 2^2 + 2 - 6$=0 por tanto es factor de

$P(x) = x^3 - 7x + 6$= (x-1)($x^2 + x - 6$)= =(x-1)(x-2)(x+3)

Por tanto los ceros, raíces o soluciones de P(x) son 1,2,-3

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc

Hallar un polinomio a partir de sus ceros, raíces o soluciones

Hallar un polinomio de grado 4 que tiene ceros $-3, 0, 1$ y 5.

Solución Por el teorema del factor, $x-(-3)$, $x-0$, $x-1$ y $x-5$ deben ser factores del polinomio deseado, así que

$$P(x) = (x+3)(x-0)(x-1)(x-5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $P(x)$ es de grado 4 es una solución del problema. Cualquier otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, ya que sólo la multiplicación por una constante no cambia el grado. ■

52

Bibliografía

1. Álvaro Alcázar (2º ESO): http://www.google.com.co/search?hl=es&biw=1024&bih=470&gbv=2&q=DIIVISION+POLINOMIOS+PPT&btnG=Buscar&oq=DIIVISION+POLINOMIOS+PPT&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=s&gs_upl=6689l19874l0l21177l26l26l0l10l0l2l362l3322l0.1.3.7l11l0

2. Román Cisneros,. (2011). **Schollaris la web que resuelve tus problemas.** **http://schollaris.com.mx/010106divsintetica.php**

3. http://www.slideshare.net/nelsonslm2011/polinomios-6938646?src=related_normal&rel=2700548

4. (Stewart,2007)

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO T. MSc