Simplificación de expresiones racionales complejas
Tomadas del libro de Stewart

Memorizar términos matemáticos o ejercicios y no tener la mínima idea de lo que significan, es equivalente a no saberlos..”

“Las matemáticas no se memorizan… se deben razonar!!”

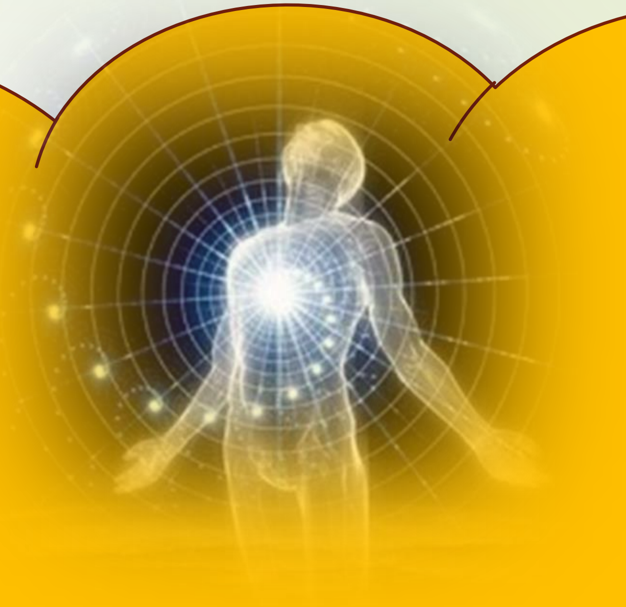
❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia



❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

Escriba aquí la ecuación.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar factores comunes** del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

No podemos cancelar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque x^2 no es un factor.

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

Ahora haga el ejercicio # 17 y 18.

17. $$\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 5x + 4}$$

18. $$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$$

▼ Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 8x + 16)} \cdot \dfrac{(3x + 12)}{(x - 1)}$

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{(x^2+2x-3)}{(x^2+8x+16)}\cdot\dfrac{(3x+12)}{(x-1)}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{(x^2+2x-3)}{(x^2+8x+16)}\cdot\frac{(3x+12)}{(x-1)}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2}\cdot\frac{3(x+4)}{(x-1)}$$ Factorice

$$=\frac{3(x-1)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+4)^2}$$ Propiedad de fracciones

$$=\frac{3(x+3)}{x+4}$$ Cancele factores comunes

25. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{x - 5}$

26. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 3} \cdot \dfrac{3 - x}{3 + x}$

división de expresiones racionales

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x - 4}{x^2 - 4} \div \frac{(x^2 - 3x - 4)}{(x^2 + 5x + 6)}$$

$$\frac{(x-4)}{(x^2-4)} \cdot \frac{(x^2+5x+6)}{(x^2-3x-4)}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}$$ Factorice

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$ Cancele factores comunes

▼ Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$

$$\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+2}=\frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$$

▼ Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}$$

x

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}}=\frac{x+y}{y}\cdot\frac{x}{x-y}$$

$$=\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$

59. $$\frac{x + \dfrac{1}{x+2}}{x - \dfrac{1}{x+2}}$$

61. $$\frac{\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x-2}}{x+2}$$

Simplificación de una fracción compuesta

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones en cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

¡OJO¡

$$\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$ Combine fracciones del numerador

$$=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)

$$=\frac{a-a-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad Distributiva

$$=\frac{-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Simplifique

$$=\frac{-1}{a(a+h)}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1 + x^2)^{-1/2}$ del numerador.

fcm

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)^{-1/2}[(1 + x^2) - x^2]}{(1 + x^2)}$$

$$= \frac{(1 + x^2)^{-1/2}}{(1 + x^2)} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (1 + x^2)$$

77. $$\frac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$$

78. $$\frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$$

▼ Racionalización del denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador al multiplicar numerador y denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto funciona bien, por la fórmula 1 de productos notables de la Sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de $1+\sqrt{2}$, que es $1-\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$$

Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

81. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

83. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h}+2$.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$

Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{\left(\sqrt{4+h}\right)^2-2^2}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$

Fórmula 1 de Productos Notables

$$= \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$

$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

87. $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{3}$

88. $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$

Evitar errores comunes

No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \cancel{=} a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \cancel{=} a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \cancel{=} \dfrac{1}{a + b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a + b}{a} \cancel{=} b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \cancel{=} (a + b)^{-1}$