Teorema fundamental del algebra

Estudia más inteligentemente, no más duro.

Tomado de Khanacademy

Introducción a los números imaginarios

En tu estudio de las matemáticas, puedes haber observado que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución en los *números reales*.

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/introduction-to-complex-numbers-algebra-2/modal/a/intro-to-the-imaginary-numbers

Por ejemplo, por más que lo intentes, nunca encontrarás un *número real* que sea solución de la ecuación $x^2 = -1$. Esto se debe a que es imposible elevar un número real al cuadrado y ¡obtener un número negativo!

Sin embargo, sí existe una solución de la ecuanción $x^2 = -1$ en un nuevo sistema de números, que se llama el **sistema de números complejos.**

La unidad imaginaria

La columna vertebral de este nuevo sistema de números es la **unidad imaginaria**, o sea el número i.

Las siguientes propiedades son verdaderas para el número i:

- $i = \sqrt{-1}$
- $i^2 = -1$

La segunda propiedad demuestra que el número i sí es una solución de la ecuación $x^2 = -1$. La ecuación que previamente era insoluble, ¡ahora tiene una solución, al agregar la unidad imaginaria!

Números imaginarios puros

A saber, $3i$, $i\sqrt{5}$, y $-12i$, son ejemplos de números imaginarios puros; o sea, números de la forma bi, donde b es un número real diferente de cero.

Simplificar números imaginarios puros

La siguiente tabla muestra ejemplos de números imaginarios puros, en sus formas no simplificadas y simplificadas.

Forma no simplificada	Forma simplificada
$\sqrt{-9}$	$3i$
$\sqrt{-5}$	$i\sqrt{5}$
$-\sqrt{-144}$	$-12i$

Equivalencia	Razonamiento
$\sqrt{-9} = 3i$	La raíz cuadrada de -9 es un número imaginario. La raíz cuadrada de 9 es 3, así que la raíz cuadrada de 9 *negativo* es $\mathit{3}$ *unidades imaginarias*, o sea $3i$.

La siguiente propiedad explica el "razonamiento" anterior en términos matemáticos.

Para $a > 0$, $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

Juntando esto con lo que sabemos sobre la simplificación de radicales, podemos simplificar todos los números imaginarios puros. Veamos un ejemplo.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-18} &= i\sqrt{18} && \text{Para } a>0,\ \sqrt{-a}=i\sqrt{a} \\
&= i\cdot\sqrt{9\cdot 2} && \text{9 es cuadrado perfecto y factor de 18} \\
&= i\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} && \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ cuando } a,b\geq 0 \\
&= i\cdot 3\cdot\sqrt{2} && \sqrt{9}=3
\end{aligned}
$$

¿Para qué tenemos números imaginarios?

La respuesta es simple. La unidad imaginaria i nos permite encontrar soluciones de muchas ecuaciones que no tienen solución en los números reales.

Esto puede parecer extraño, pero de hecho es muy común que haya ecuaciones insolubles en un sistema de números que sean solubles en otro sistema más general de números.

Así que, con los números reales únicamente, no podemos resolver $x^2 = -1$.

¡Necesitamos a los números imaginarios para ello!

$$(3i)^2 = 3^2 i^2 \quad = 9i^2$$

Por el hecho de que $i^2 = -1$, podemos simplificar esto aún más como sigue

$$= 9i^2 \qquad = 9(-1) \quad = -9$$

El hecho que $(3i)^2 = -9$ significa que $3i$ es una raíz cuadrada de -9.

De esta manera vemos que los números imaginarios puros ¡son raícces cuadradas de números negativos!

La columna vertebral de este nuevo sistema numérico es el número i.

$$i = \sqrt{-1}$$

Al tomar múltiplos de esta unidad imaginaria podemos crear infinidad de nuevos números. Por ejemplo: $3i$, $i\sqrt{5}$ y $-12i$, son todos ejemplos de **números imaginarios puros**, es decir números de la forma bi, donde b es un número real distinto de cero.

$$2 + 7i$$

Al sumar números reales a estos números imaginarios puros, se crean aún más números, tales como $2 + 7i$ y $3 - \sqrt{2}i$. Si bien estos no son números imaginarios puros, tampoco son números reales. Más bien pertenecen a un conjunto de números que se llaman los **números complejos**.

Definir números complejos

Un **número complejo** es cualquier número que puede escribirse como $a + bi$, donde i es la unidad imaginaria y a y b son números reales.

$$\underset{\text{Parte real}}{\underset{\uparrow}{a}} + \underset{\text{Parte imaginaria}}{\underset{\uparrow}{b}}\, i$$

Número complejo	Forma estándar $a+bi$	Descripción de las partes
$7i-2$	$-2+7i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 7.
$4-3i$	$4+(-3)i$	La parte real es 4 y la imaginaria es -3
$9i$	$0+9i$	La parte real es 0 y la imaginaria es 9
-2	$-2+0i$	La parte real es -2 y la imaginaria es 0

Clasificar números complejos

Quizá observaste que $9i$ y -2 se dieron como ejemplos de números complejos, aunque se pueden clasificar como imaginario puro y real, respectivamente.

$9i$ es un número imaginario puro. Sin embargo, también podemos expresar este número como $0 + 9i$. Así que $9i$ es ¡un número imaginario puro y un número complejo a la vez! De hecho, ***todo número imaginario puro es también un número complejo***.

Similarmente, -2 es un número real. Sin embargo también podemos expresar -2 como $-2 + 0i$. Así que -2 es ¡un número real y un número complejo a la vez! De hecho, ***todo número real es también un número complejo***.

¿Por qué son importantes estos números?

¿Y para qué estudiamos números complejos? Créelo o no, los números complejos tienen muchas aplicaciones: ¡en ingeniería eléctrica y en mecánica cuántica, por nombrar solo dos!

Desde un punto de vista puramente matemático, una cosa interesante que podemos hacer con números complejos es resolver ***cualquier*** ecuación polinomial.

Por ejemplo, la ecuación polinomial $x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene soluciones reales ni imaginarias puras. Sin embargo sí tiene soluciones en los números complejos, que son $1 + 2i$ y $1 - 2i$.

Mientras continuamos nuestro estudio de las matemáticas, aprenderemos más acerca de estos números y donde se utilizan.

Todo polinomio de cualesquiera coeficientes numéricos, cuyo grado no sea menor que la unidad, tiene por lo menos una raíz, cero o solución, generalmente, compleja.

Si un polinomio, f(x), es de grado uno o mayor de uno y tiene coeficientes complejos, entonces f(x) tiene al menos una raíz o cero complejo.

https://www.youtube.com/watch?time_continue=184&v=sMbU09O9ODs

Del Teorema anterior se deriva que todo polinomio *p(x)* de una variable (no constante) tiene la misma cantidad de raíces reales o complejas que su grado *n*.

Todo polinomio de grado n, con coeficientes complejos, tiene exactamente n raíces lineales, es decir contadas con su orden de multiplicidad.

Los números reales son un subconjunto de los números complejos porque cada número real puede ser escrito en la forma $a + bi$.

Los ceros de un polinomio f(x) son las soluciones de la ecuación f(x) = 0 y geométricamente corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.

Teorema (Teorema de factorización completa para polinomios). *Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que*

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$.

file:///D:/SUBUD/Downloads/Taller-9-teorema-fund-algebra%20(1).pdf

https://www.youtube.com/watch?time_continue=31&v=pyPBjXKU5UA

Observemos que cada número z_k en el teorema de factorización completa es un cero de $f(x)$ y cada uno de estos ceros puede repetirse, por ejemplo $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene dos ceros iguales: $z_1 = z_2 = 1$, pues $f(x) = (x - 1)^2$. Otros ejemplos son los siguientes:

Teorema 1.3 (Número máximo de ceros de un polinomio). *Un polinomio de grado n tiene a lo sumo (como máximo) n ceros complejos diferentes.*

Definición 1.1. Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo 1.1. Para el polinomio $f(x) = x(x-1)^2(x-4)^3$ tenemos que 4 es un cero de multiplicidad 3, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 0 es un cero de de multiplicidad 1.

Teorema 1.4 **(Número exacto de ceros de un polinomio).** *Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y si cada cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.*

Ejercicio 1.1. Exprese $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$ como producto de factores y encuentra sus ceros.

Solución. Observemos que $f(x) = x^3(x^2 - x - 2) = x^3(x+1)(x-2)$ luego los ceros de $f(x)$ son $0, 0, 0, -1, 2$.

Ejercicio 2.1. Halla todos los ceros de $f(x)=x^6+3x^5-13x^4-25x^3+50x^2+24x$.

Solución. Primero observemos que $f(x) = x \cdot (x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$ y por tanto 0 es una raíz de $f(x) = 0$. Descartando esta raíz obtenemos la ecuación

$$x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24 = 0.$$

Como $a_5 = 1$ y $a_0 = 24$, las posible raíces racionales son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12 \text{ y } \pm 24.$$

Probamos con 1 (no hay un orden específico para hacer esto), utilizando división sintética:

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 \\ & \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 \end{array} \implies f(x) = (x-2)\underbrace{\left(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 31x - 12\right)}_{q_1(x)}$$

Repetimos el procedimiento con el polinomio $q_1(x)$ y probamos con -3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 5 & -3 & -31 & -12 \\ & \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -9 & -4 & 0 \end{array} \implies f(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{\left(x^3+2x^2-9x-4\right)}_{q_2(x)}$$

Para el polinomio $q_2(x)$ probamos con -4:

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 2 & -9 & -4 \\ & \downarrow & -4 & 8 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \implies f(x) = (x-2)(x+3)(x+4)\underbrace{\left(x^2-2x-1\right)}_{q_3(x)}$$

Para el polinomio $q_3(x) = x^2 - 2x - 1$ tenemos que sus raíces están dadas por

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Por tanto, f es un polinomio de grado 5 que tiene 3 ceros racionales y 2 ceros irracionales:

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x+4)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right). \qquad \square$$

Observación 1. El polinomio anterior tiene dos ceros irracionales que se presentan en "pares conjugados". En general, se presenta la siguiente situación

Ejemplo:

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$

Iguale $g(x) = 0$ y factorice para encontrar los ceros.

$0 = x^2(x - 2) + 9(x - 2)$

$0 = (x - 2)(x^2 + 9)$

$0 = (x - 2)(x + 3i)(x - 3i)$

$x = 2$ o $x = -3i$ o $x = 3i$

Los ceros de la función son 2, $3i$, $-3i$

Otros tipos de ecuaciones

Hasta este momento, hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. En seguida se tratan otros tipos de ecuaciones, incluso aquellos en los que hay potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

Ejemplo 10 **Una ecuación con expresiones fraccionarias**

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

Solución Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común denominador.

$$\frac{3(x+2)+5x=2.}{x(x+2)}$$

$3(x+2)+5x=2x^2+4x$		Desarrollo
$8x+6=2x^2+4x$		Desarrollo del PM
$0=2x^2-4x-6$		Resta de $8x+6$
$0=x^2-2x-3$		Ambos miembros se dividen entre 2
$0=(x-3)(x+1)$		Factorización
$x-3=0$ o	$x+1=0$	Propiedad del producto nulo
$x=3$	$x=-1$	Solución

Ejemplo 11 **Una ecuación que involucra un radical**

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un miembro,
luego elevamos al cuadrado.

$2x - 1 = -\sqrt{2 - x}$	Resta 1
$(2x - 1)^2 = 2 - x$	Elevamos al cuadrado ambos miembr
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Desarrollo del primer miembro
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	Suma de $-2 + x$
$(4x + 1)(x - 1) = 0$	Factorización
$4x + 1 = 0 \quad$ o $\quad x - 1 = 0$	Propiedad del producto nulo
$x = -\frac{1}{4} \qquad x = 1$	Solución

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución, pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$. ■

Ejemplo 12 **Una ecuación de cuatro grado de tipo cuadrático**

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

Solución Si hacemos que $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación en donde la nueva variable W es cuadrática:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Se escribe } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Se hace } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4-2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4+2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$. ∎

Ejemplo 13 **Una ecuación que contiene potencias fraccionarias**

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos que $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$		
$W^2 + W - 2 = 0$		Se hace $W = x^{1/6}$
$(W - 1)(W + 2) = 0$		Factorización
$W - 1 = 0$	o bien $W + 2 = 0$	Propiedad del producto nulo
$W = 1$	$W = -2$	Solución
$x^{1/6} = 1$	$x^{1/6} = -2$	$W = x^{1/6}$
$x = 1^6 = 1$	$x = (-2)^6 = 64$	Obtención de la sexta potencia

De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = 1$ es una solución, pero $x = 64$ no lo es. La única solución es $x = 1$. ∎