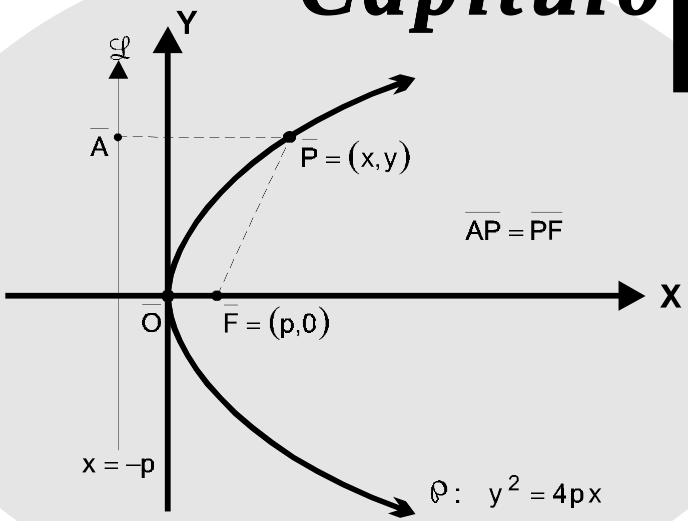
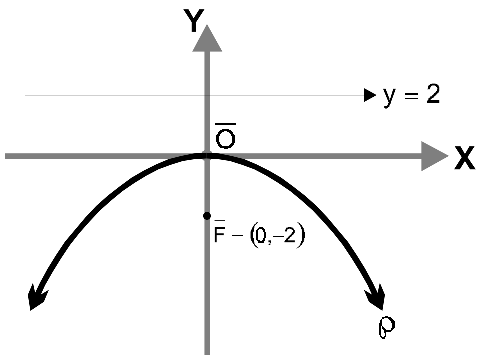
Capítulo 6



LA PARÁBOLA

46 Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es $y = 2$.

Solución:



Del gráfico, se tiene :

: $x^2 = -4py \longrightarrow$ ①

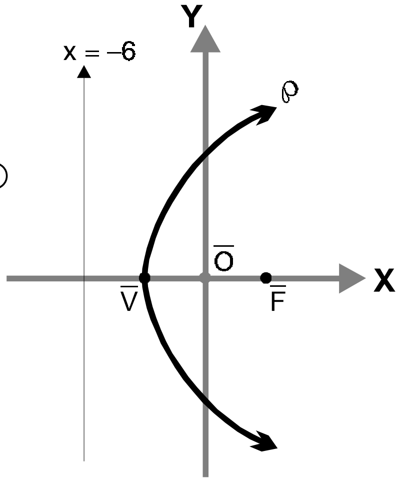
$p = 2$

En ① :

➡ $\boxed{:\ x^2 = -8y}$

47 Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $x = -6$ y su foco es $\overline{F} = (0,0)$.

Solución:



Del gráfico :

$$: \quad (y-k)^2 = 4p(x-h) \longrightarrow ①$$

Como : $\overline{V} = (-3,0)$ y $p = |\overline{FV}| = 3$

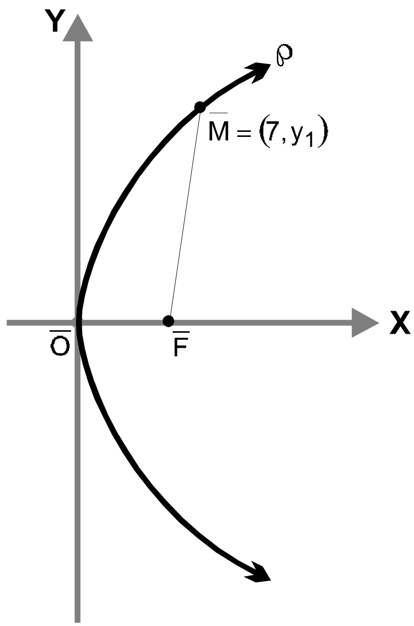
En ① :

➡ $: \quad y^2 = 12(x+3)$

$$\boxed{: \quad y^2 = 12x + 36}$$

48 Calcular el radio focal del punto $\overline{M}$ de la parábola $y^2 = 20x$ si la abscisa del punto $\overline{M}$ es igual a 7.

Solución:



$$: \quad y^2 = 20x \longrightarrow ①$$

De ① : $4p = 20$ ➡ $p = 5$

de donde : $\overline{F} = (5,0)$

$\overline{M} = (7, y_1) \in$

En ① :

➡ $y_1^2 = 20(7)$ ➡ $y_1 = \pm\sqrt{140}$

➡ $\overline{M} = \left(7, \pm\sqrt{140}\right)$

Por lo tanto :

$$|\overline{FM}| = \sqrt{\left(\sqrt{140} - 0\right)^2 + (7-5)^2}$$

$$\boxed{|\overline{FM}| = \sqrt{144} = 12}$$

49 Dada la ecuación de la parábola $x^2+8y-2x=7$. Hallar el vértice, eje, foco y directriz. Trazar la curva.

Solución:

$$: \quad x^2+8y-2x=7$$

Completando cuadrados

$$: \quad x^2+8y-2x=7 \quad \Rightarrow \quad : \quad x^2-2x+1=-8y+7+1$$

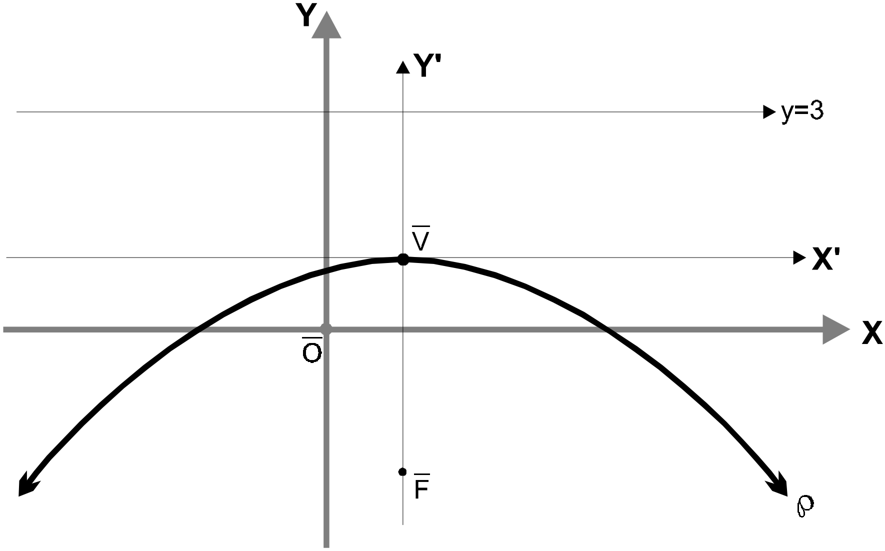
$$: \quad (x-1)^2=-8y+8 \quad \Rightarrow \quad : \quad (x-1)^2=-8(y-1)$$

Luego, las coordenadas del vértice de la parábola : $\overline{V}=(h,k)=(1,1)$

Seguidamente : $4p=-8 \Rightarrow p=-2$

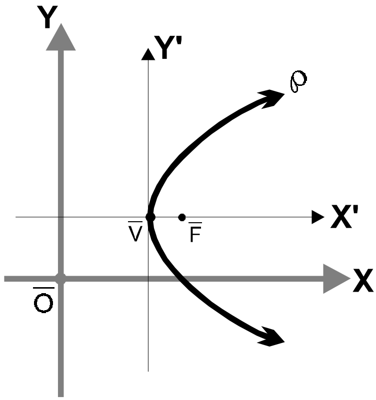
Ahora, las coordenadas del foco : $\overline{F}=(h,k+p)=(1,-1)$

- Ecuación del eje : $x=1$
- Ecuación de la directriz : $y=3$



50 Encontrar la ecuación de la parábola, cuyo vértice es el punto $\overline{V} = (3,2)$ y el foco es $\overline{F} = (4,2)$.

Solución:



$$: \ (y-k)^2 = 4p(x-h) \longrightarrow ①$$

Dado que se conoce el vértice y el foco :

$p = |VF| = 1$

Reemplazando los valores en ① :

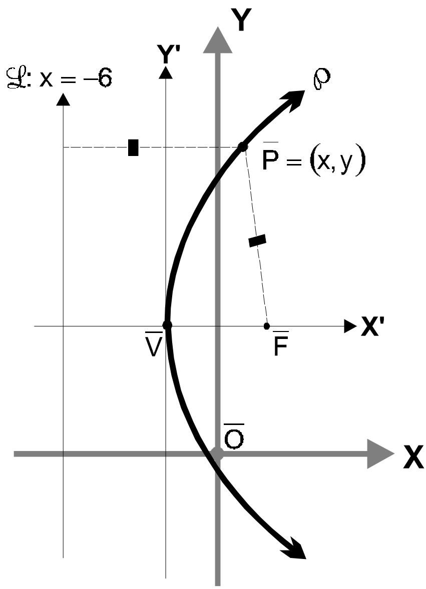
➨ $: \ (y-2)^2 = 4(1)(x-3)$

$(y-2)^2 = 4(x-3)$

$$\boxed{: \ y^2 = 4y + 4x - 16}$$

51 Obtener la ecuación de la parábola con foco en $\overline{F} = (2,3)$ y cuya ecuación de la directriz es $x = -6$.

Solución:



Del gráfico :

∘ $|FP|$ = Distancia de $\overline{P}$
a ‹ (definición)

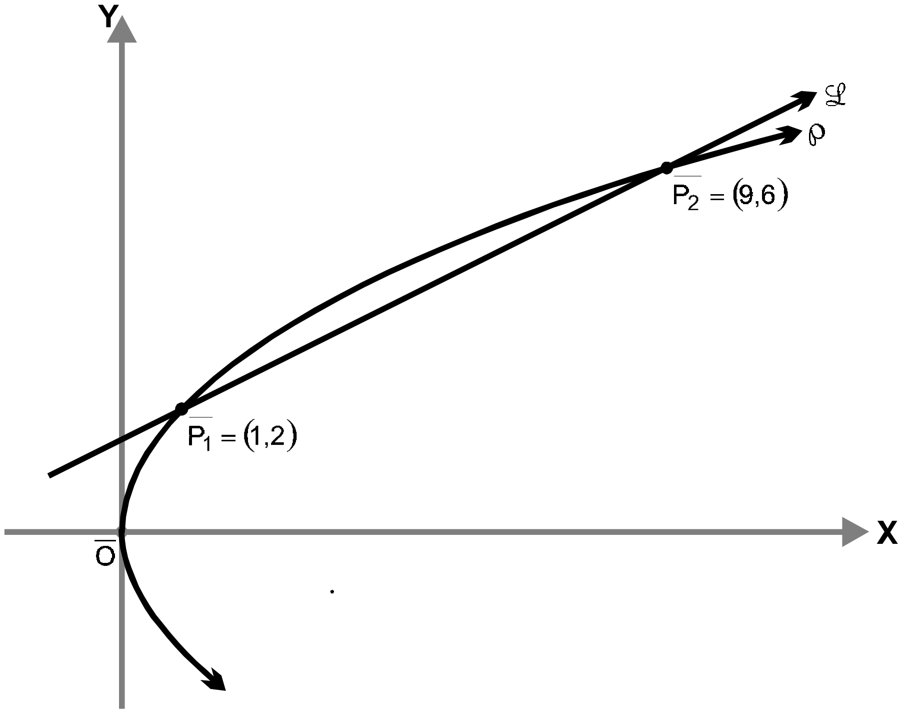
➨ $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = x + 6$

Efectuando operaciones :

➨ $\boxed{: \ y^2 - 16x - 6y - 23 = 0}$

52 Determinar la longitud del segmento determinado por la ecuación $y^2 = 4x$, con la recta de ecuación $x = 2y - 3$.

Solución:



Tenemos: $\begin{cases} \ : \ y^2 = 4x \longrightarrow ① \\ ‹ : \ x = 2y - 3 \longrightarrow ② \end{cases}$

De ① y ② obtenemos los puntos $\begin{cases} \overline{P_1} = (1,2) \\ \overline{P_2} = (9,6) \end{cases}$

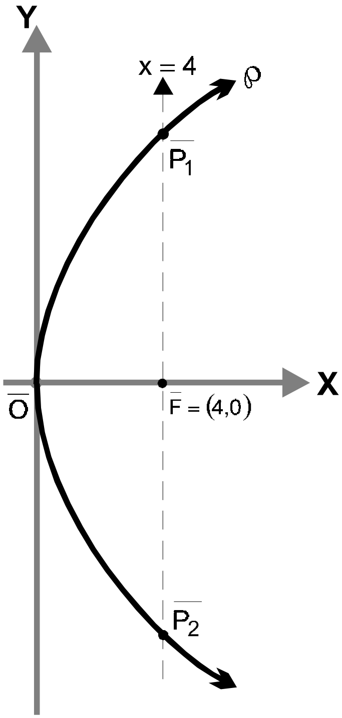
$\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ intersección de las dos gráficas:

Luego:

$$\left| P_1P_2 \right| = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64+16} \Leftrightarrow \boxed{\left| P_1P_2 \right| = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94}$$

53 Determinar la ecuación de una circunferencia que tiene por diámetro la cuerda normal de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = 16x$.

Solución:



$: \quad y^2 = 16x \longrightarrow$ ①

se deduce que el vértice $\overline{V} = (h,k) = (0,0)$

También: $\overline{F} = (h+p,k) = (4,0)$

Luego, la cuerda normal (lado recto)

➡ $CN: \quad x = 4 \longrightarrow$ ②

De ① y ②: ➡ $\begin{cases} \overline{P_1} = (4,8) \\ \overline{P_2} = (4,-8) \end{cases}$

◦ $r = |FP_1| = |P_2F| = 8 \Leftrightarrow r^2 = 64$

Siendo $\overline{C}$ centro de la circunferencia

➡ $\overline{C} = \overline{F} \Leftrightarrow \overline{C} = (4,0)$

Por lo tanto:

$\mathcal{C}: \quad (x-4)^2 + y^2 = 64$

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 - 8x - 48 = 0}$$

54 Una recta que pasa por el foco de una parábola con el vértice en el origen y con el eje horizontal, corta a la directriz en el punto $\overline{A} = (-3,8)$. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta.

Solución:

◦ $: \quad y^2 = 4px \longrightarrow$ ①

y su vértice $\overline{V} = (h,k) = (0,0)$

Además: $p = 3 \longrightarrow$ ②

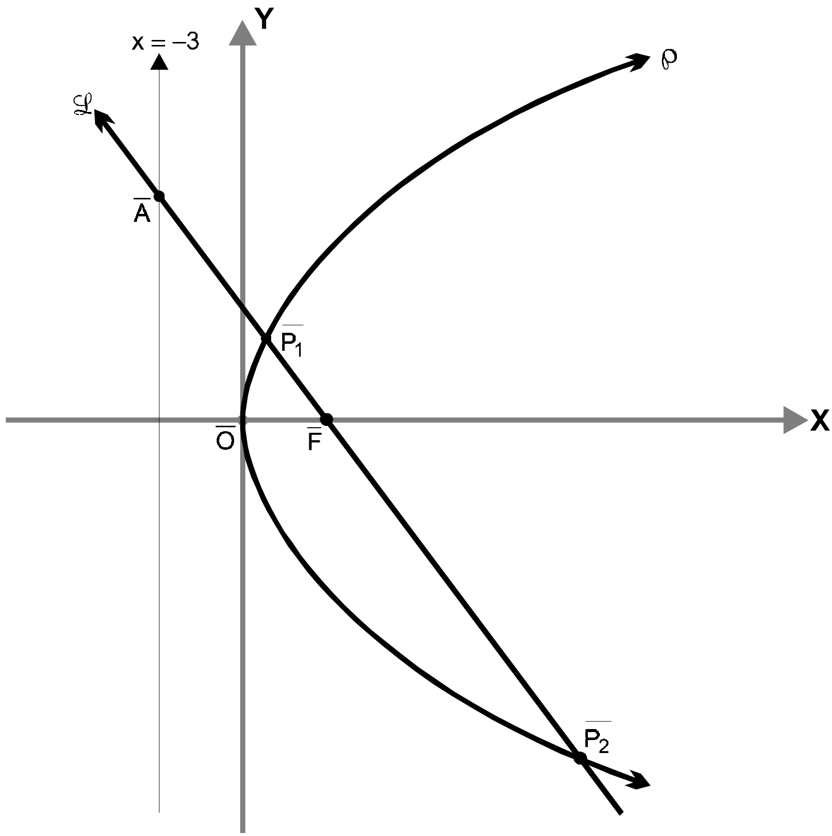
② en ①: $\quad : \; y^2 = 12x \longrightarrow$ ③

∘ ‹ : $\begin{cases} \overline{A} = (-3,8) \\ \overline{F} = (h+p,k) = (3,0) \end{cases} \Rightarrow m_{‹} = m_{\overline{AF}} = -\dfrac{4}{3}$

‹ : $y - 0 = m_{‹}(x-3)$

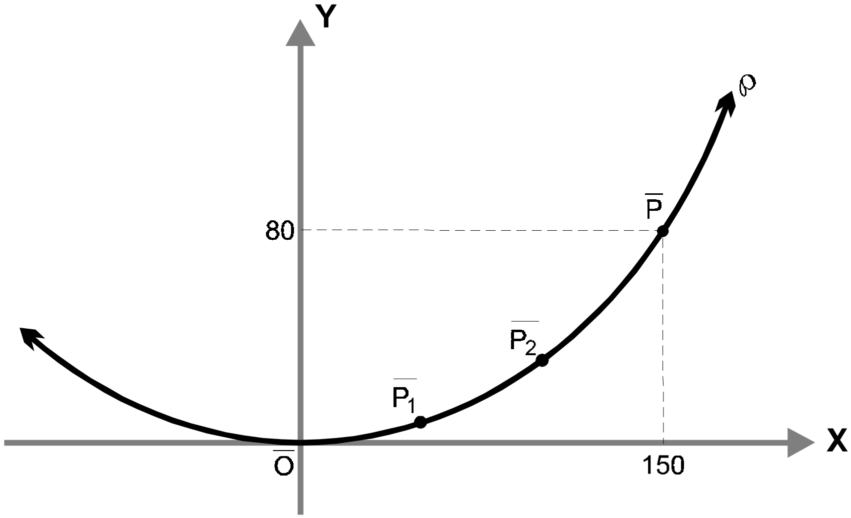
$y = -\dfrac{4}{3}(x-3) \Leftrightarrow$ ‹ : $4x + 3y - 12 = 0 \longrightarrow$ ④

De ③ y ④: $\overline{P}: \begin{cases} : y^2 = 12x \\ ‹ : 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \overline{P_1} = (3/4, 3) \\ \overline{P_2} = (12, -12) \end{matrix}}$



55 Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre sí 300 m. y se extienden 80 m por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m y también a 100 m del centro del puente. (Asumir que la pista es horizontal).

Solución:



Del gráfico, se observa que : $x^2 = 4py \longrightarrow$ ①

○ $\overline{P} = (150,80) \in$.

➡ $150^2 = 4p(80)$ ⬌ $4p = \dfrac{75\times 15}{4}$

En ①: : $x^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y$

Luego :

○ $\overline{P_1} = (50, y_1) \in$ ➡ $50^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y_1$ ➡ $\boxed{y_1 = \dfrac{80}{9} \approx 8{,}88 \text{ m}}$

○ $\overline{P_2} = (100, y_2) \in$ ➡ $100^2 = \dfrac{75\times 15}{4}y_2$ ➡ $\boxed{y_2 = \dfrac{320}{9} \approx 35{,}55 \text{ m}}$