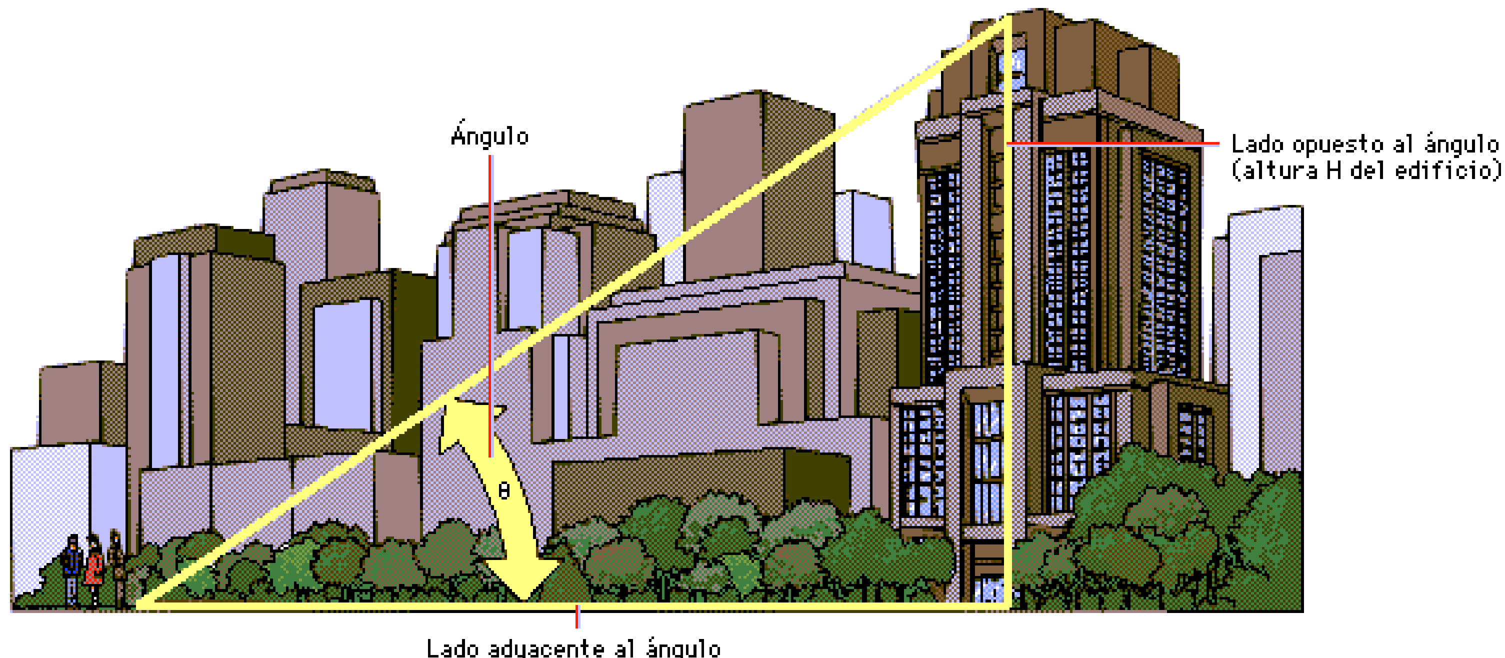
TRIGONOMETRÍA



MATEMÁTICA BÁSICA: TRIGONOMETRÍA

MEDIDA DE ÁNGULOS y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

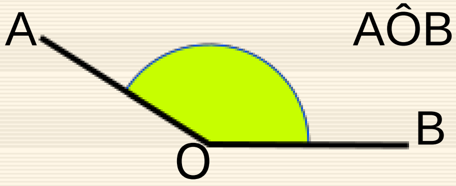
INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITAN0 ITM

NOVIEMBRE 2011

- Básicamente la trigonometría es la relación matemática entre los ángulos y los lados de un triángulo.

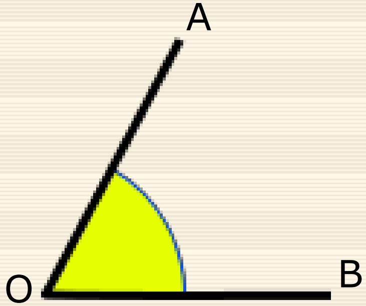
- La trigonometría tiene que ver principalmente con las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

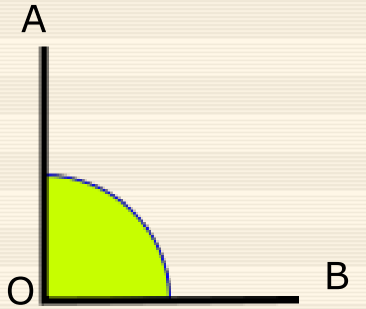
ÁNGULO: es la figura formada por 2 semirrectas que se unen en un O llamado vértice

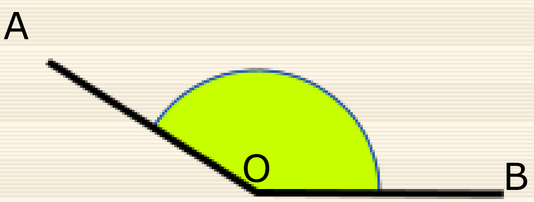


CLASIFICACIÓN DE ÄNGULOS

1 – Según su medida







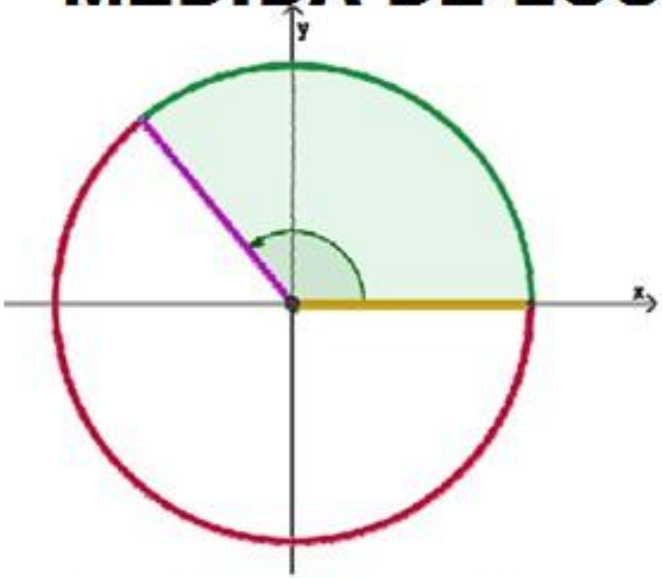
Agudo: AÔB< 90º

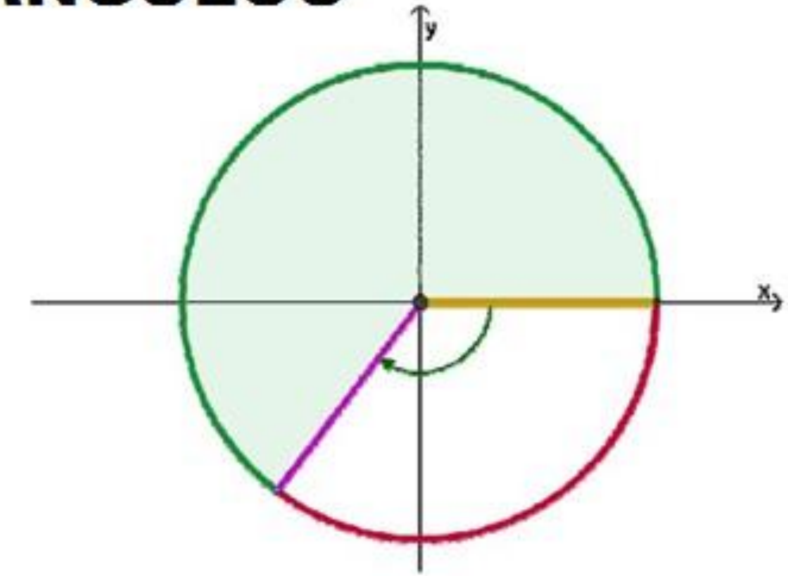
Recto: AÔB = 90º =π/2

Obtuso: AÔB > 90º

A

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS





ÁNGULO POSITIVO

La medida de un ángulo será un número positivo si su lado inicial fijo está en el eje horizontal positivo y su lado terminal que se ha movido **en contra** de las manecillas del reloj.

ÁNGULO NEGATIVO

La medida de un ángulo será un número negativo si su lado inicial fijo está en el eje horizontal positivo y su lado terminal que se ha movido **a favor** de las manecillas del reloj.

Aquí el signo del ángulo sólo representa la dirección del mismo

http://es.scribd.com/doc/12731979/CIRCULO-UNITARIO

Unidades de medidas de ángulos

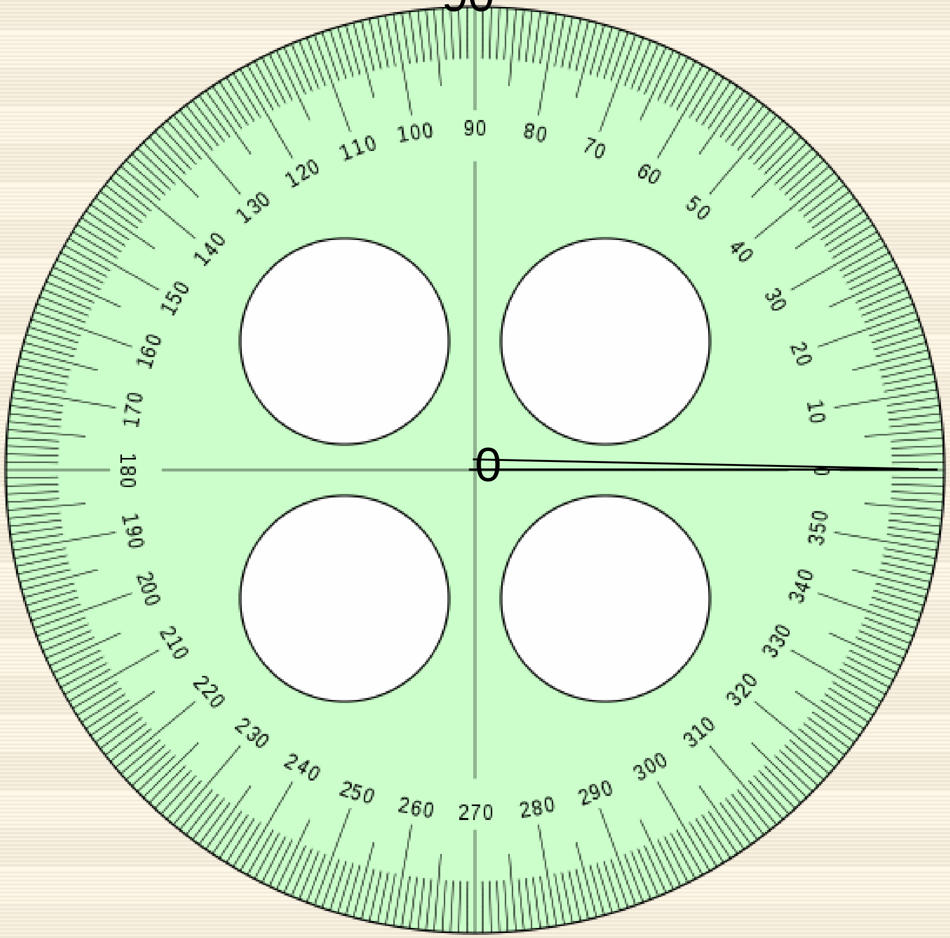
En trigonometría, se emplean tres unidades:

1.La más utilizada en la vida cotidiana es el **Grado sexagesimal**. Divide una circunferencia en 360 partes iguales o grados°. Por tanto 1/360 es 1° (un grado).

1.En matemáticas es el **Radián** la más usada. Se basa en la idea de colocar la longitud *del radio a lo largo de la circunferencia, se trabaja en realidad es con partes de la longitud de la circunferencia.*

2.El Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, se usa en topografía, arquitectura o en construcción” y se divide la circunferencia en 400 partes.

Sistema Sexagesimal



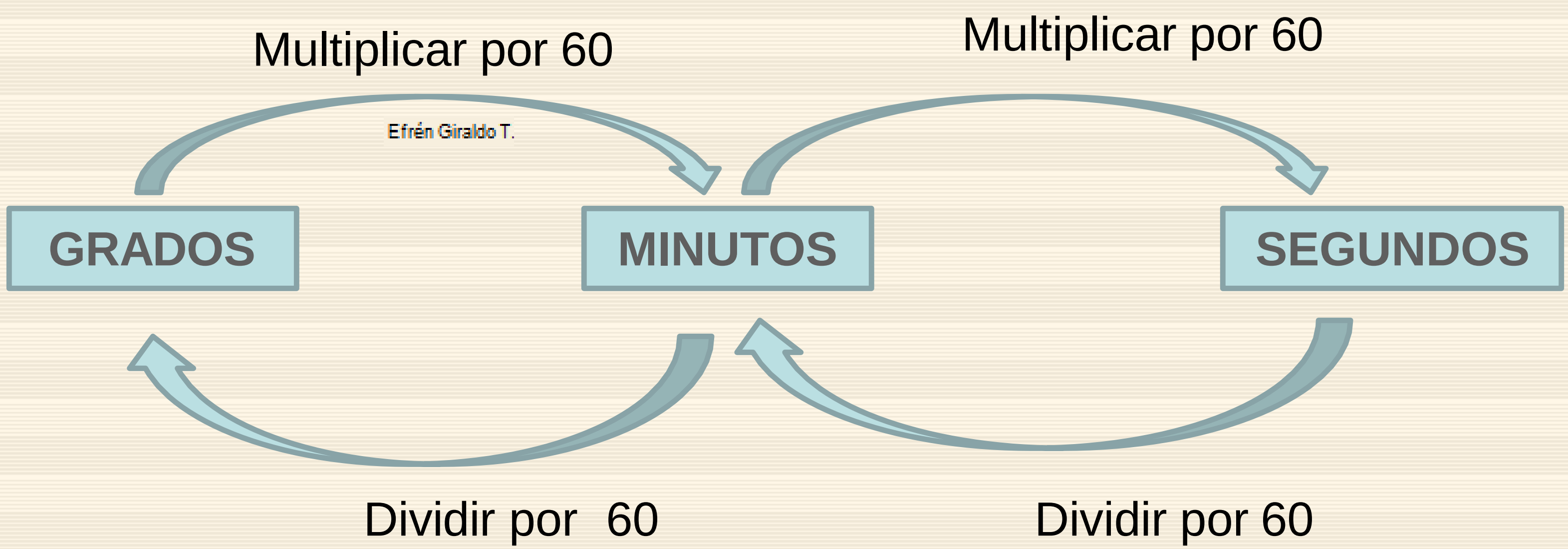
Este ángulo en particular, se dice que mide 1º (un grado), y que corresponde a un ángulo entre los 360 que se pueden dividir la circunferencia. Un grado corresponde a dos líneas rectas pequeñas tomadas desde el centro 0

(Ruben Álbarez Cabrera,Trigonometría contemporanea).

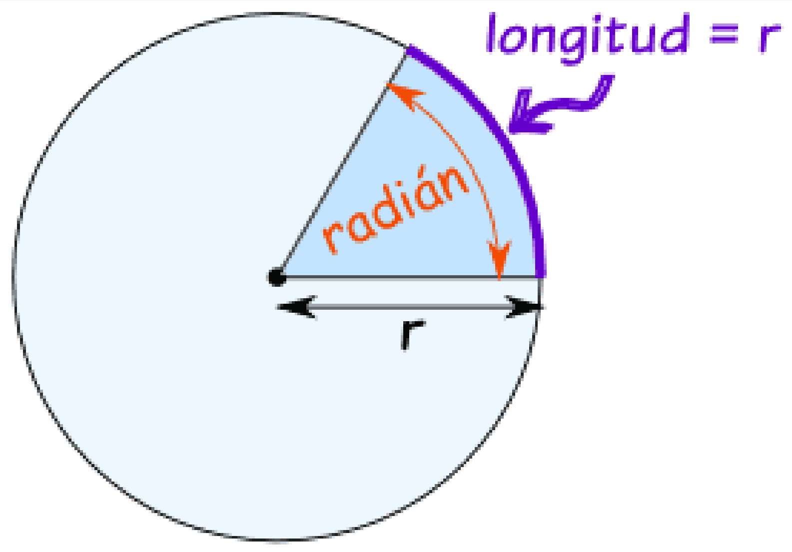
Se llama sexagesimal porque 1° grado se divide en 60 partes lo cual da un minuto 1´ y a su vez el minuto se divide en 60 lo cual da un segundo o 1”

1º = 60´
1´ = 60”
1º = 3600”

CONVERSIÓN DE MEDIDAS.



- 2. Un Radian: es un ángulo que sostiene un arco de longitud igual al radio r. Ese ángulo diremos que mide **1 *radián***



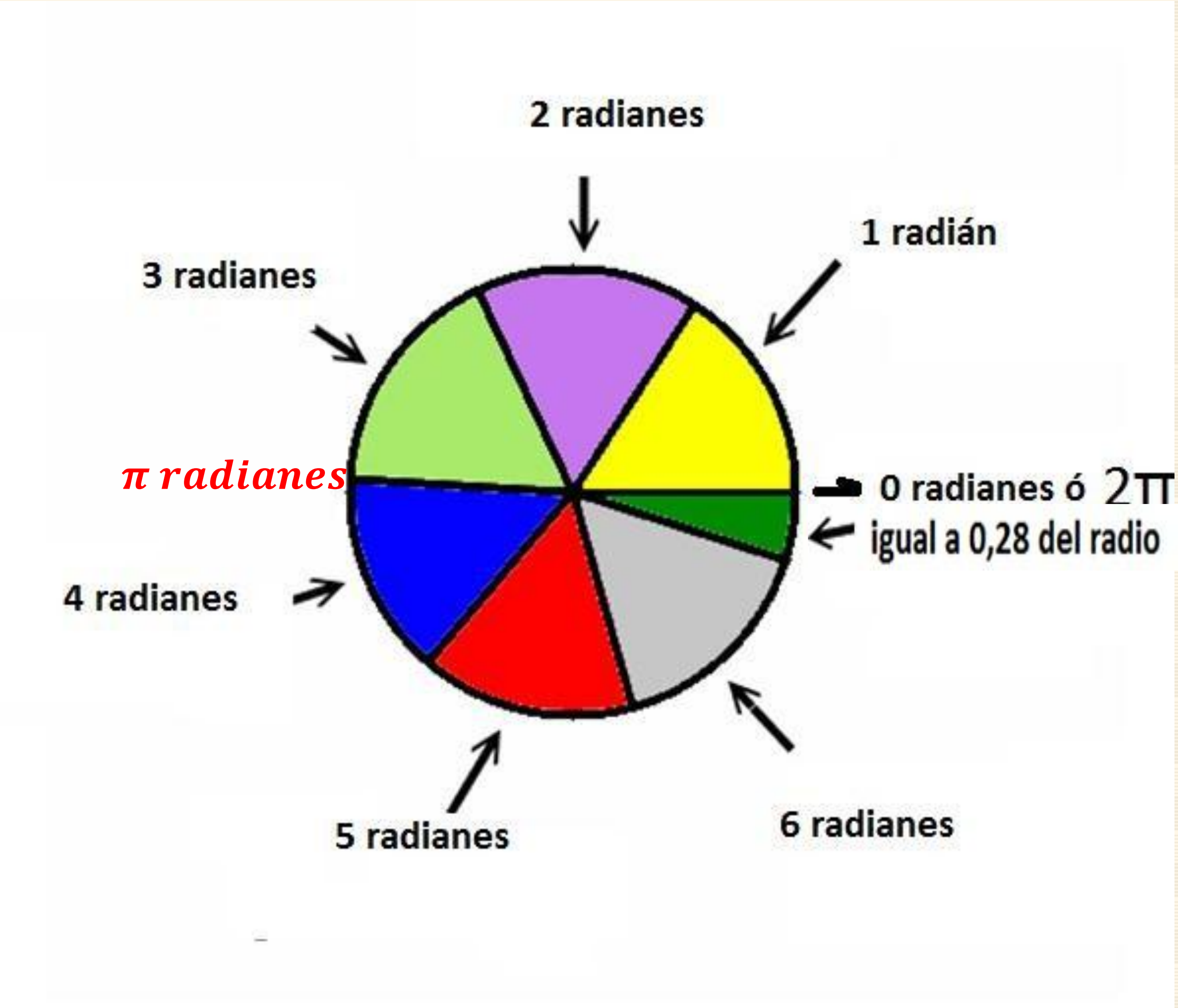
- En una circunferencia esto se puede hacer un 6 veces y un pedacito = 6.28

https://www.geogebra.org/m/WextNs4f

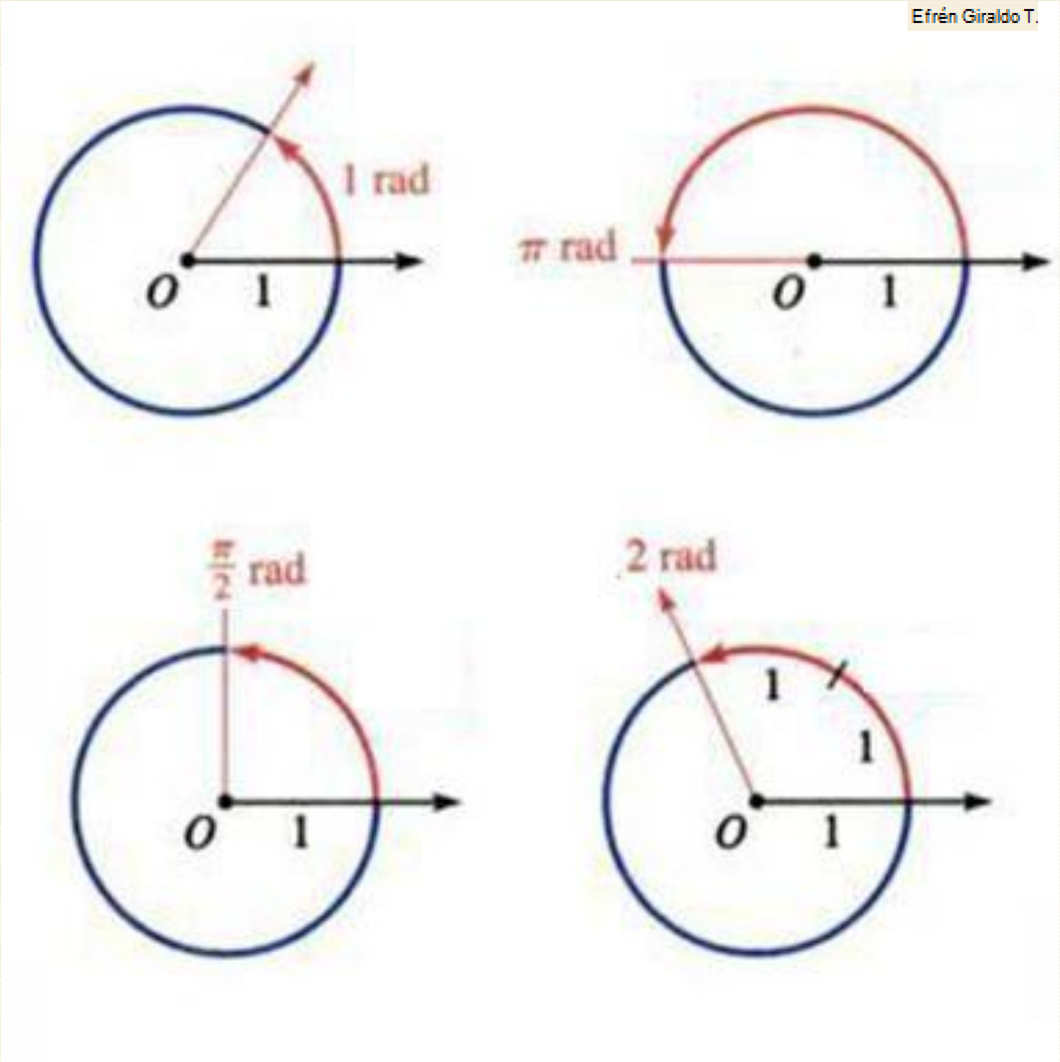
- Es decir, si se corta un pedazo de cuerda de longitud exactamente igual al radio, ¿cuántos trozos harían falta para **dar una vuelta** completa alrededor de la circunferencia?
- Más o menos una cuerda de longitud = **6.28** o $2*3.14= 2\pi= 6.28\ldots$

- La longitud de una circunferencia completa es 2π radianes o 6.28.
- 6.28 qué?
- De pende de la unidad de medida usada:
- Si el radio es 1 m será 6.28m
- Si el radio es 1km será 6.28km
- Si r= 1 pulgada será 6.28 pulg.
- Si el radio r no es unitario, $L = 2\pi r$

(la unidad de medida usada)

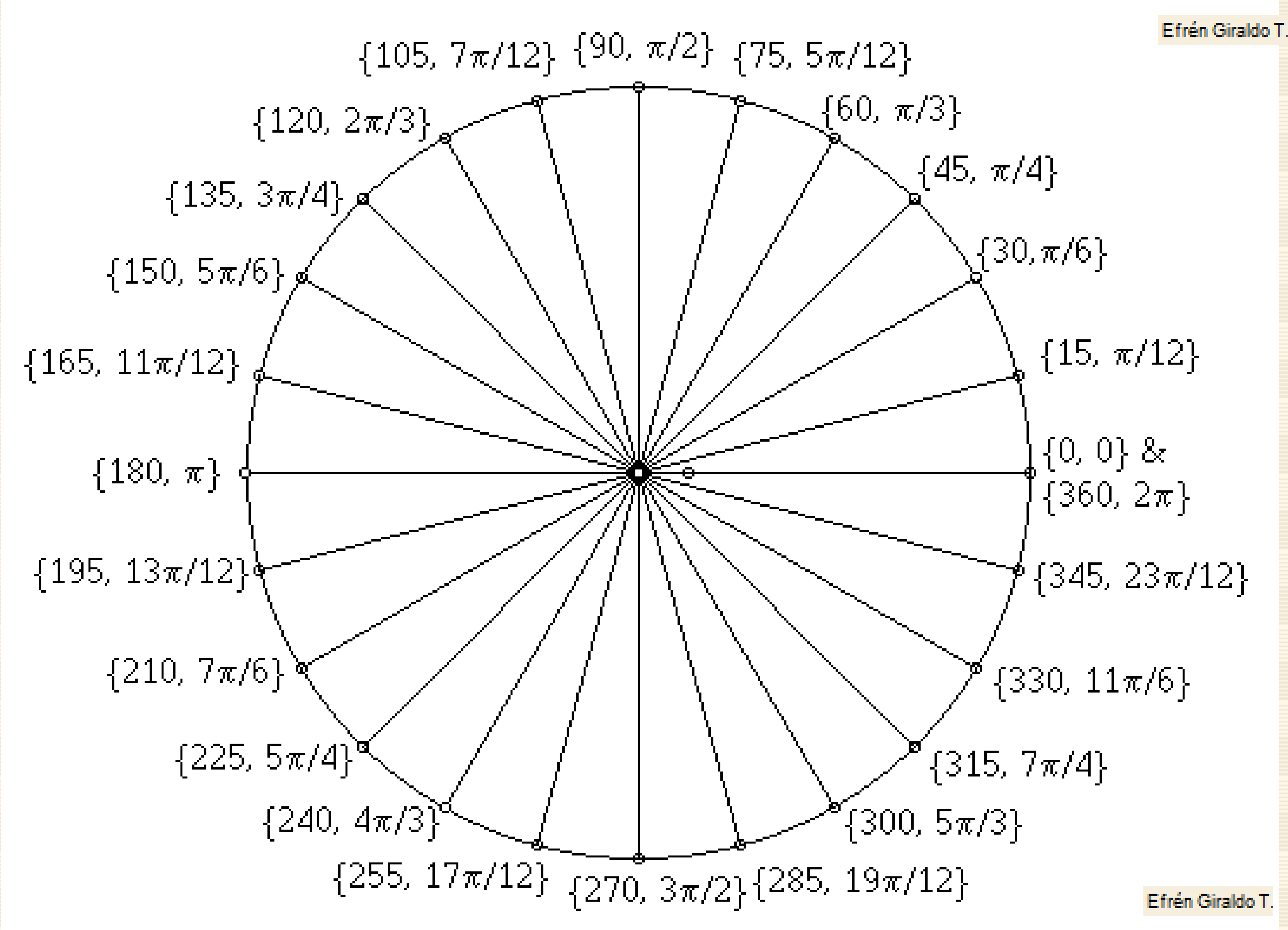


Se toma como referencia el eje x



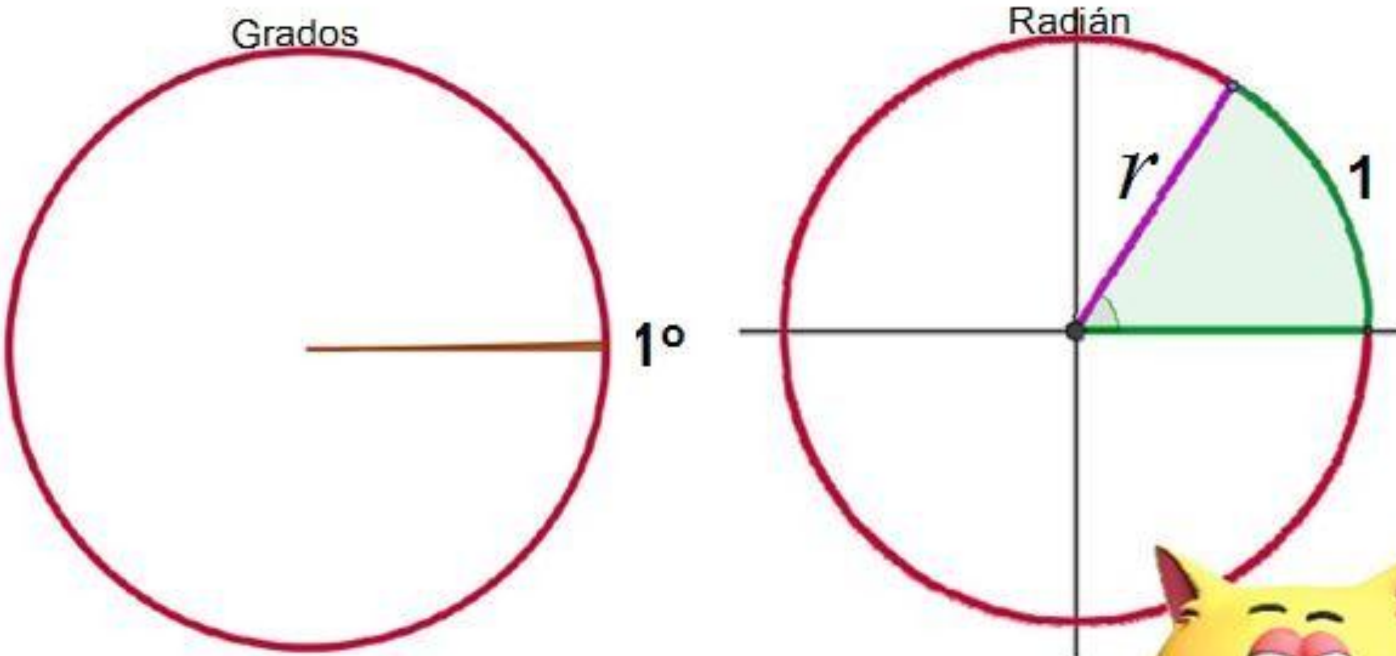
Ángulos en radianes

(Stewart, 2007)



Grados y los radianes correspondientes

Compara el tamaño de 1 radian con 1º.



La medida de un radián es mucho más grande que la medida de un grado.

http://es.scribd.com/doc/12731979/CIRCULO-UNITARIO

Relación entre grados y radianes

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.

(Stewart, 2007)

Ejemplo 1 **Convertir entre radianes y grados**

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\frac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

a) $60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{rad}$ b) $\frac{\pi}{6} \text{rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 30°$

(Stewart, 2007)

Ejemplo 1 **Convertir entre radianes y grados**

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\frac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

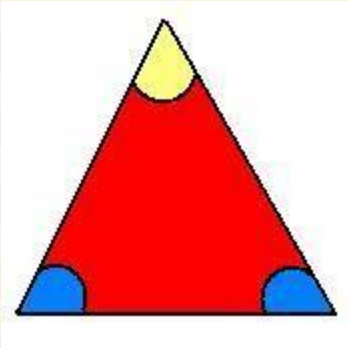
a) $60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{rad}$ b) $\frac{\pi}{6} \text{rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 30°$

(Stewart, 2007)

Triángulos

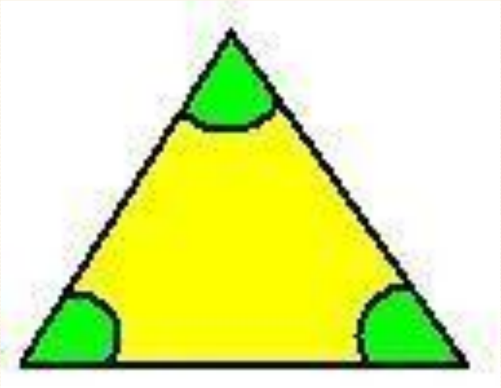
- **El triángulo es el polígono más simple y el más fundamental, ya que cualquier polígono puede resolverse en triángulos**

- ***Triángulo Isósceles***
- **Se llama triángulo *isósceles* al que tiene dos lados iguales; el tercer lado es la *base*. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales;**
- **Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a dichos ángulos también serán iguales y viceversa .**

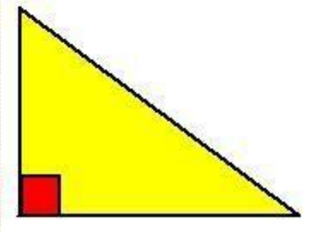


http://trigonometria.galeon.com/

Se llama triángulo *equilátero* al que tiene los tres lados iguales. Por tanto los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales; recíprocamente, si los tres ángulos de un triángulo son iguales, el triángulo es equilátero.



http://trigonometria.galeon.com



Cuando uno de los ángulos es recto (igual a 90º), se llama triángulo *rectángulo*.

Y este triangulo es la base de mucha parte de la trigonometría.

Recordar que la suma de los 3 ángulos de un triángulo cualquiera suman 180º.

Si se conoce un ángulo ∝ de un triángulo rectángulo, el otro ángulo se conoce fácilmente:90-∝

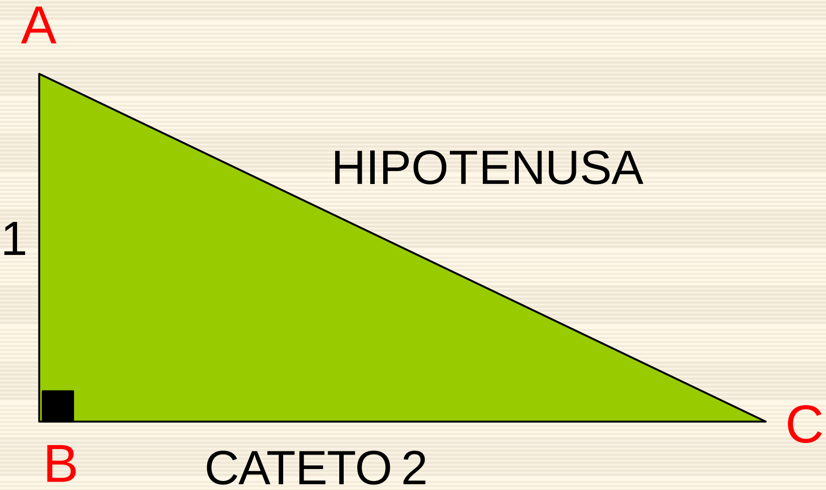
Así, si un ángulo es 30º el otro será 90º-30º= 60º

http://trigonometria.galeon.com

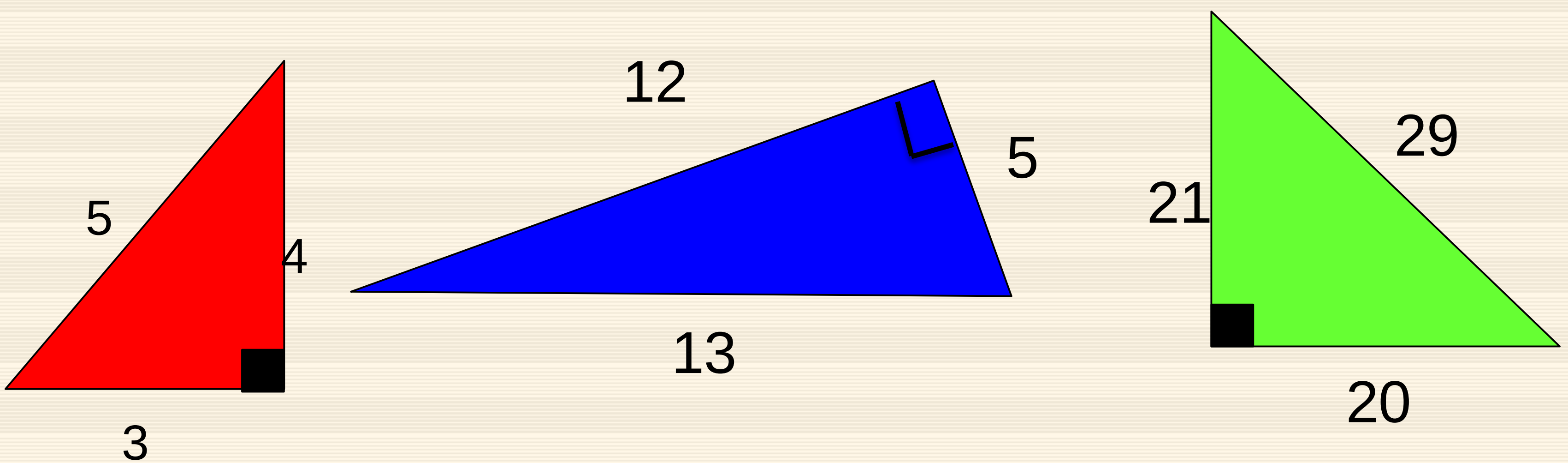
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$(\textbf{HIPOTENUSA})^2 = (\textbf{CATETO}_1)^2 + (\textbf{CATETO}_2)^2$$

CATETO 1



http://trigonometria.galeon.com

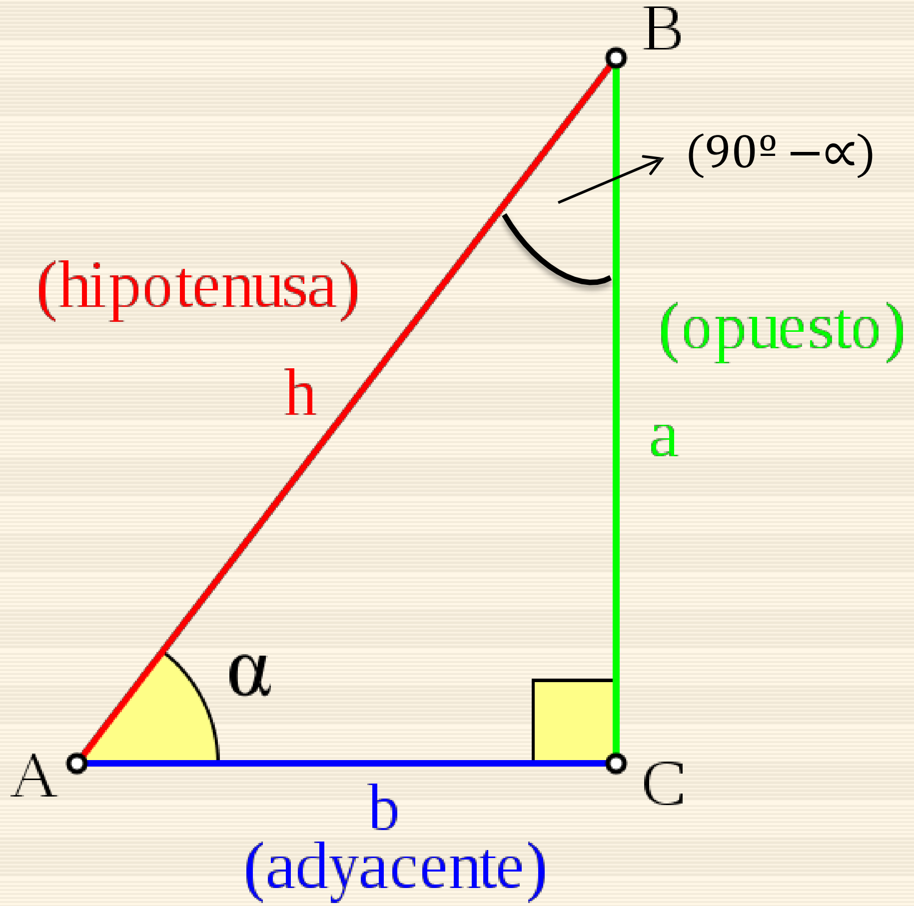


http://trigonometria.galeon.com

TRIGONOMETRÍA DE TRÍÁNGULOS RECTOS

FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

48



http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Trigono_a10.svg

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

Efrén Giraldo T.

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

Efrén Giraldo T.

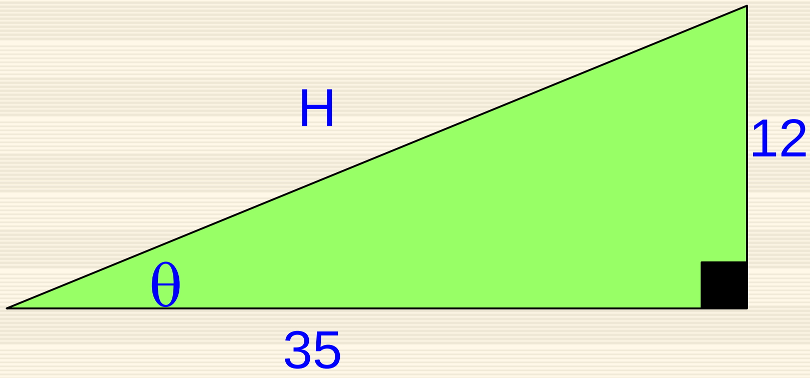
$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

Efrén Giraldo T.

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Trigono_a10.svg



TEOREMA DE PITÁGORAS

$$H^2 = 12^2 + 35^2$$

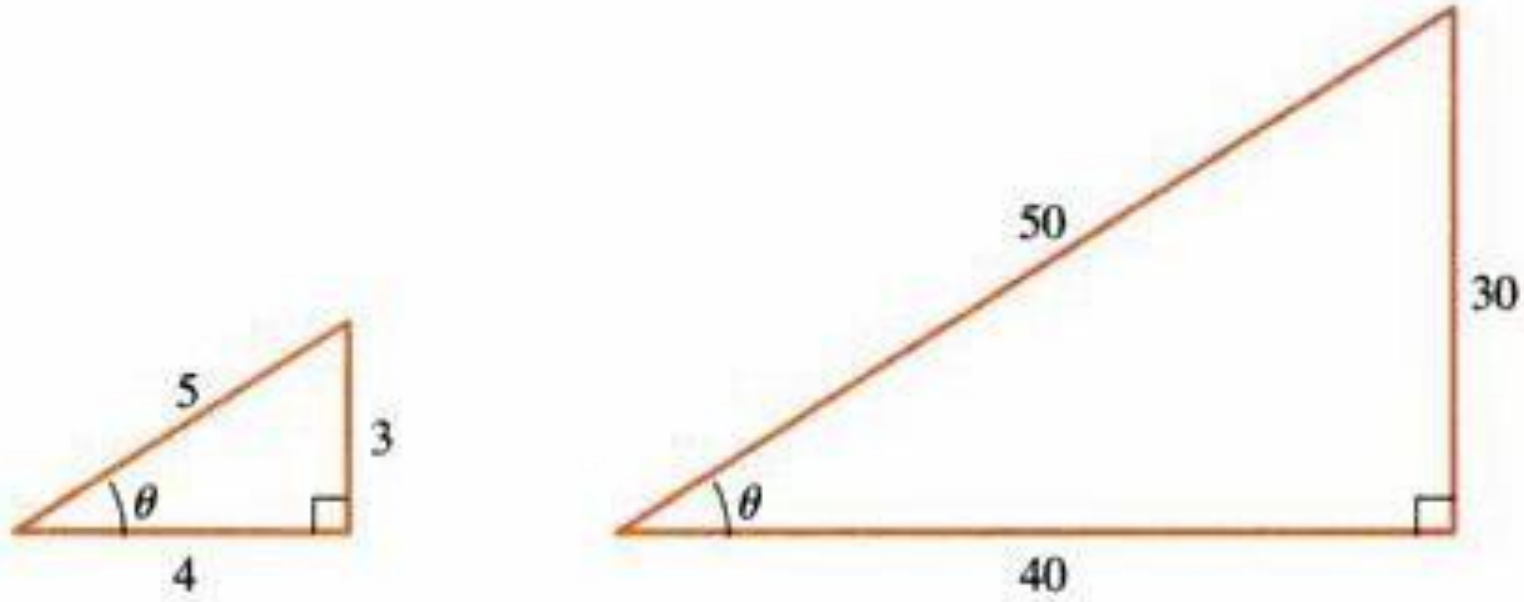
$$H = \sqrt{1369} = 37$$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{12}{37}$	$\tan\theta = \dfrac{12}{35}$	$\sec\theta = \dfrac{37}{35}$
$\cos\theta = \dfrac{35}{37}$	$\cot\theta = \dfrac{35}{12}$	$\csc\theta = \dfrac{37}{12}$

http://www.google.com.co/#sclient=psy- ab&hl=es&site=&source=hp&q=Rub%C3%A9n%20Alba%20Cabrera.%20Trigonometr%C3%ADa%20contemporanea.%20http%3A%2F%2Fwww.sectormatematica.cl%2Fppt.htm&pbx=1&oq=&aq=&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.,cf.osb&fp=5d66ad1cdfb15af2&biw=1024&bih=572&pf=p&pdl=3000

- Nota importante:
- Las funciones trigonométricas son en realidad razones trigonométricas puesto que son el resultado de la división entre los diferentes lados de un triángulo rectángulo(catetos e hipotenusa)

Elaboró Efrén Giraldo Toro



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

(Stewart, 2007)

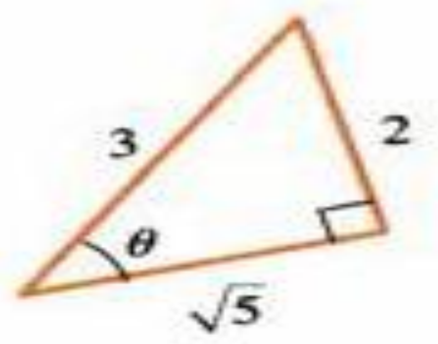


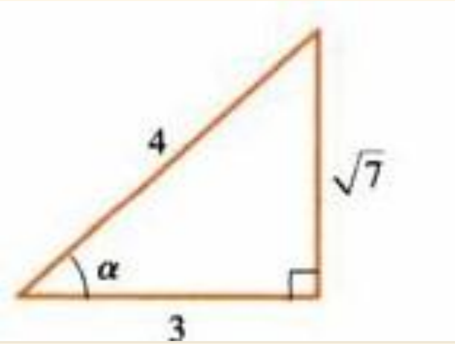
Figura 3

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(Stewart, 2007)

Si cos $\alpha = \frac{3}{4}$, bosqueje un triángulo rectángulo con ángulo α agudo y encuentre l
otras cinco relaciones trigonométricas de α.

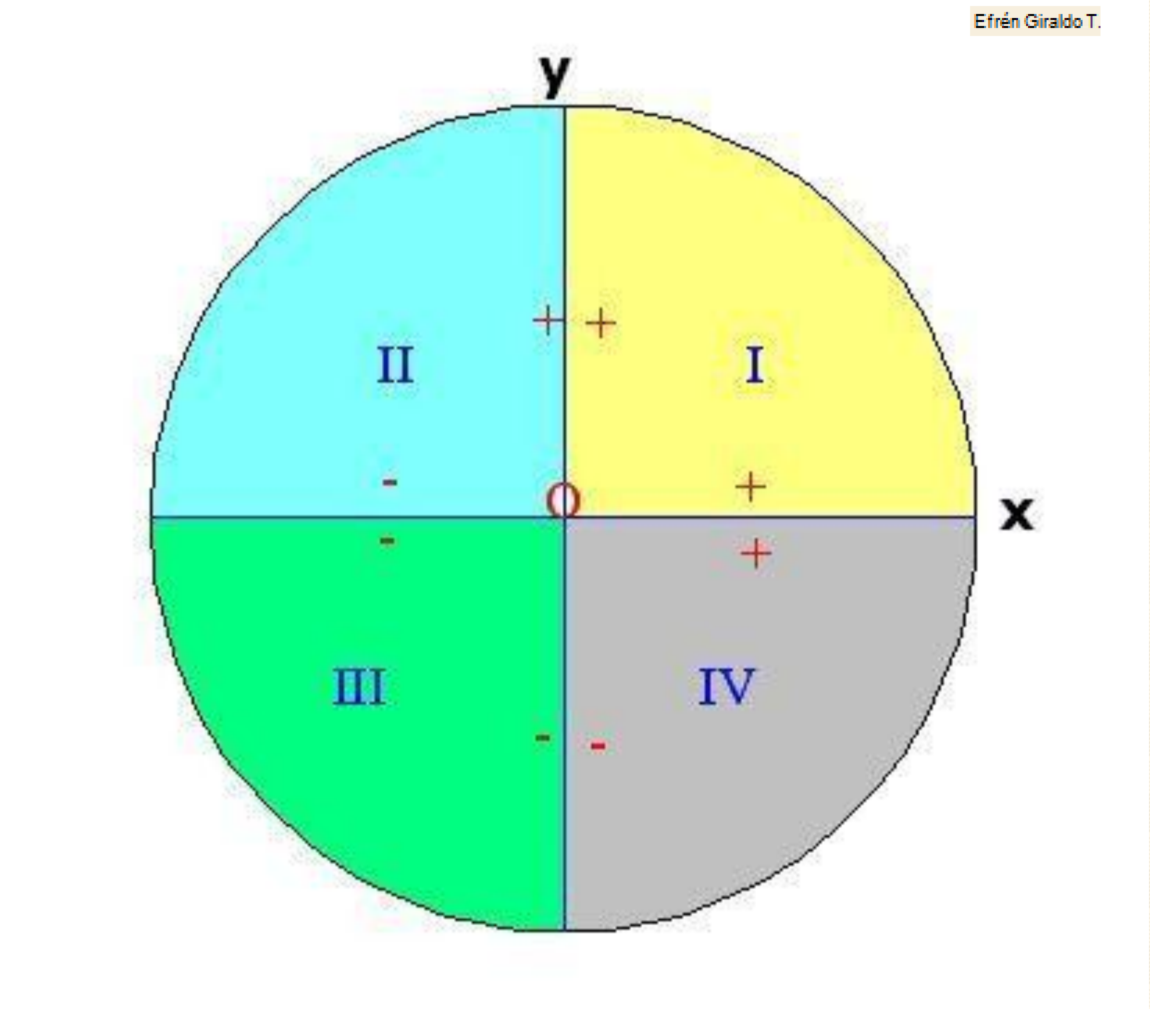


Solución Puesto que cos α se define como la relación del cateto adyacente a la hipotenusa, se bosqueja un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un cateto de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o $x^2 = 7$, por lo tanto, $x = \sqrt{7}$. Después se usa el triángulo de la figura 4 para hallar las relaciones.

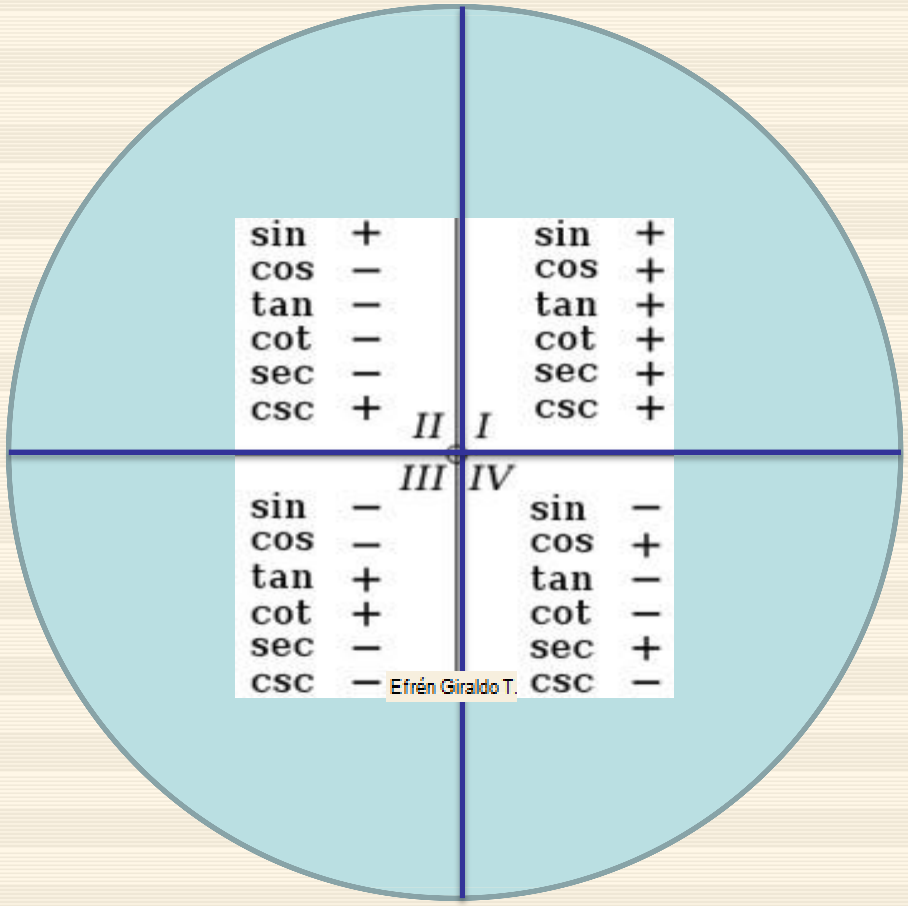
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos \alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec \alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

(Stewart, 2007)



Valores positivos o negativos de la x y la y en los respectivos cuadrantes.



Valores positivos o negativos de las funciones trigonométricas en los respectivos cuadrantes

FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

Función Ángulo	Seno θ	Cos θ	Tang θ	Ctg θ	Sec θ	Csc θ
30° ó π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45° ó π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60° ó π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

http://www.google.com.co/imgres?q=funciones+trigonometricas+de+30+60+y+45&um=1&hl=es&sa=N&biw=1280&bih=859&tbm=isch&tbnid=EqItcxVK5wXMnM:&imgrefurl=http://www.tareasfacil.info/Matematicas-Basicas/trigonometria-basica-elementos.html&docid=fkAMxapcbTa07M&imgurl=http://www.tareasfacil.info/imaganes/clip_image052_0056.jpg&w=518&h=157&ei=DuKZTtb-CYK5twfrj4GHBA&zoom=1&iact=hc&vpx=401&vpy=632&dur=323&hovh=120&hovw=400&tx=301&ty=94&sig=108289476752443945942&page=2&tbnh=74&tbnw=243&start=26&ndsp=23&ved=1t:429,r:1,s:26

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS:
son las que al multiplicar la una por la otra dan 1 o la una es igual 1 sobre la otra.

$$\mathbf{sen}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{csc}\,\theta} \qquad \mathbf{cos}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{sec}\,\theta} \qquad \mathbf{tan}\,\theta = \frac{1}{\mathbf{cot}\,\theta}$$

$$\mathbf{sen}\,\theta\,\mathbf{csc}\,\theta = 1 \qquad \mathbf{cos}\,\theta\,\mathbf{sec}\,\theta = 1 \qquad \mathbf{tan}\,\theta\,\mathbf{cot}\,\theta = 1$$

Rubén Alba Cabrera. Trigonometría contemporanea. http://www.sectormatematica.cl/ppt.htm

EJEMPLOS

A) $\dfrac{1}{\text{sen}36°} = \csc 36°$

B) $\dfrac{1}{\cos 17°} = \sec 17°$

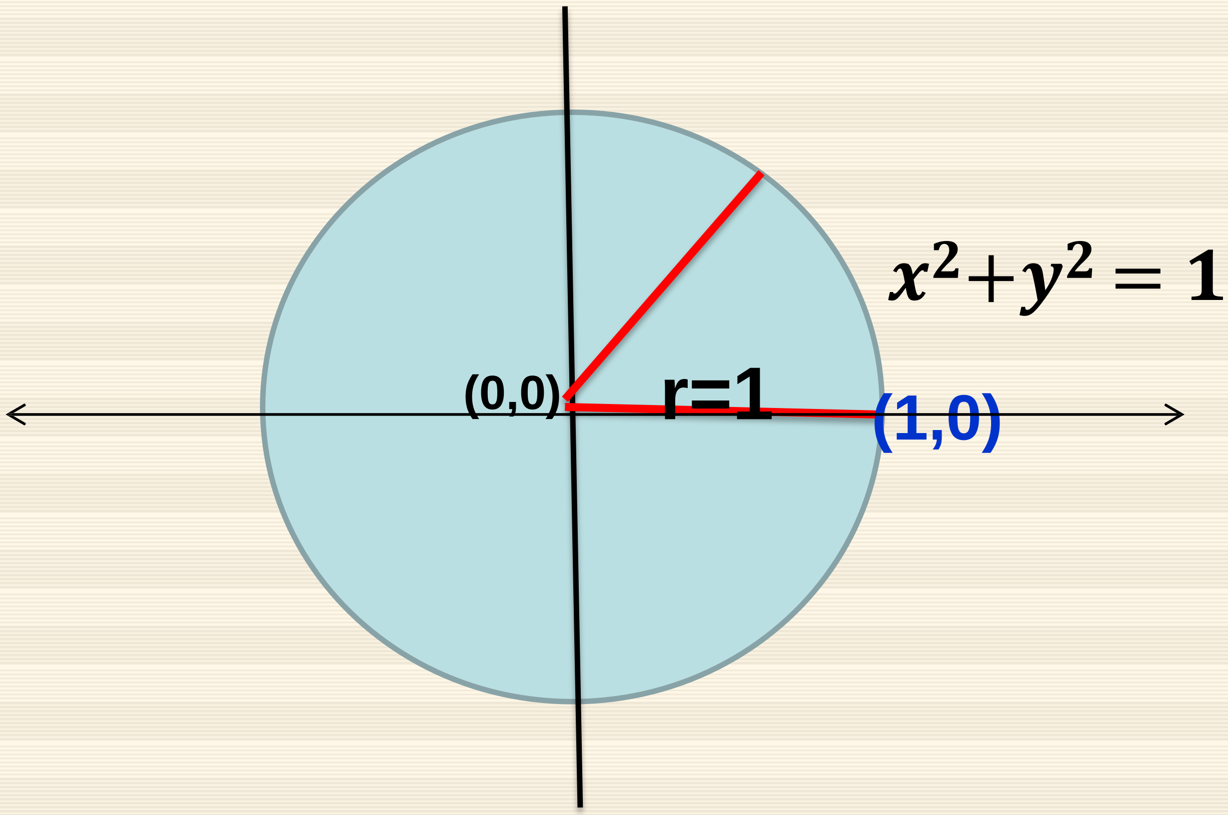
C) $\tan 49° \cot 49° = 1$

D) $\text{sen}2\theta \csc 2\theta = 1$

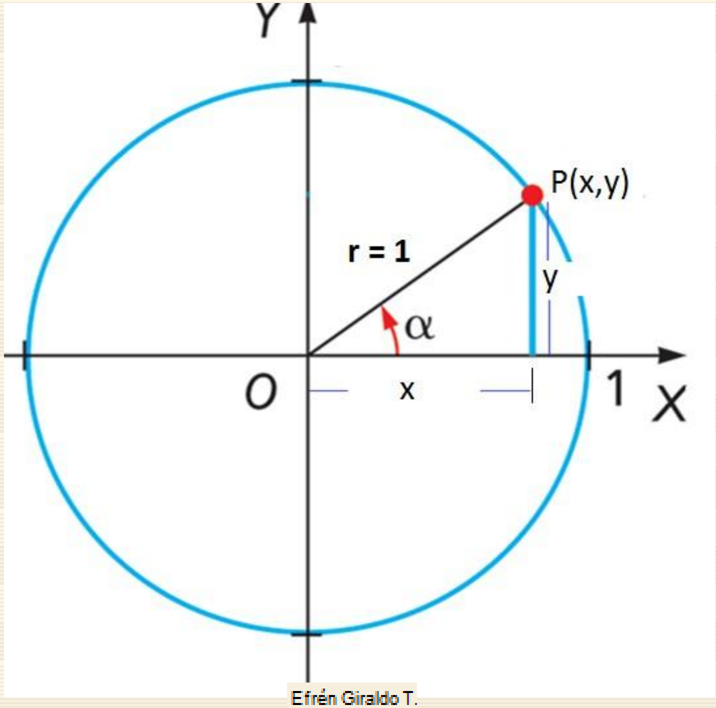
Rubén Alba Cabrera. Trigonometría contemporanea. http://www.sectormatematica.cl/ppt.htm

CÍRCULO UNITARIO

- Un círculo unitario es el conjunto de puntos que están a una distancia 1 del centro o sea que su radio es 1 y su ecuación es:
- $$x^2+y^2=1$$
- Si se ubica el círculo unitario en un plano cartesiano su centro coincide con el origen de coordenadas (0,0) y los ángulos se comienzan a medir a partir del eje x ó punto P(1,0)



Círculo unitario

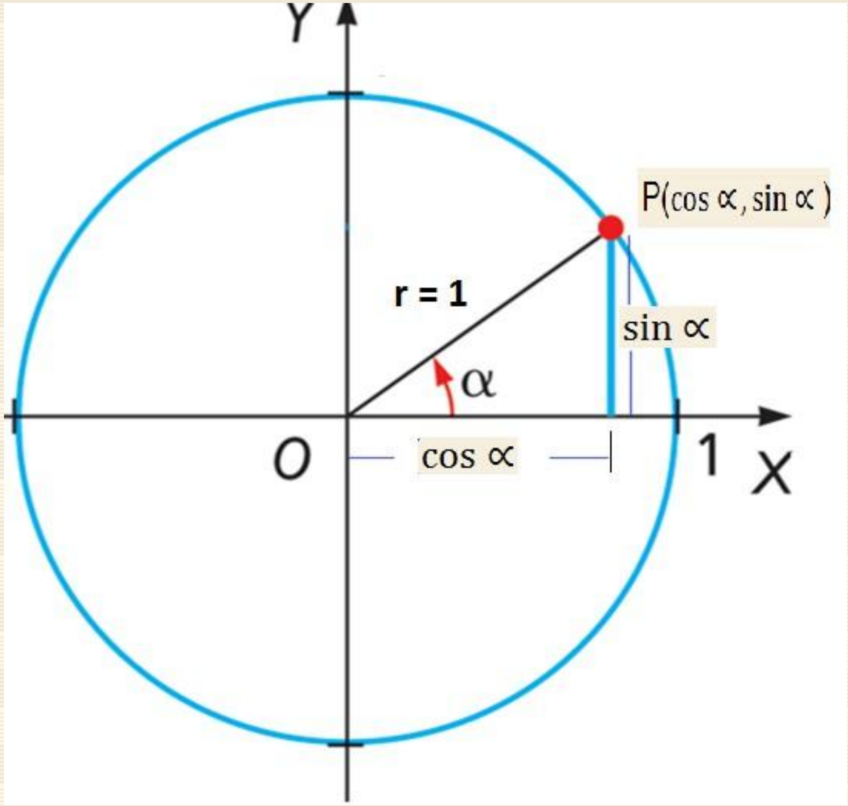


Gráfica de coordenadas de cualquier punto (x,y) del círculo en el plano xy.

El seno y el coseno por definición son:

- $\sin \propto = \frac{y}{1} \longrightarrow \sin \propto = y$
- $\cos \propto = \frac{x}{1} \longrightarrow \cos \propto = x$

- El *seno* de un ángulo se asocia con y
- o eje vertical
-
- El *coseno* se asocia con x o eje horizontal



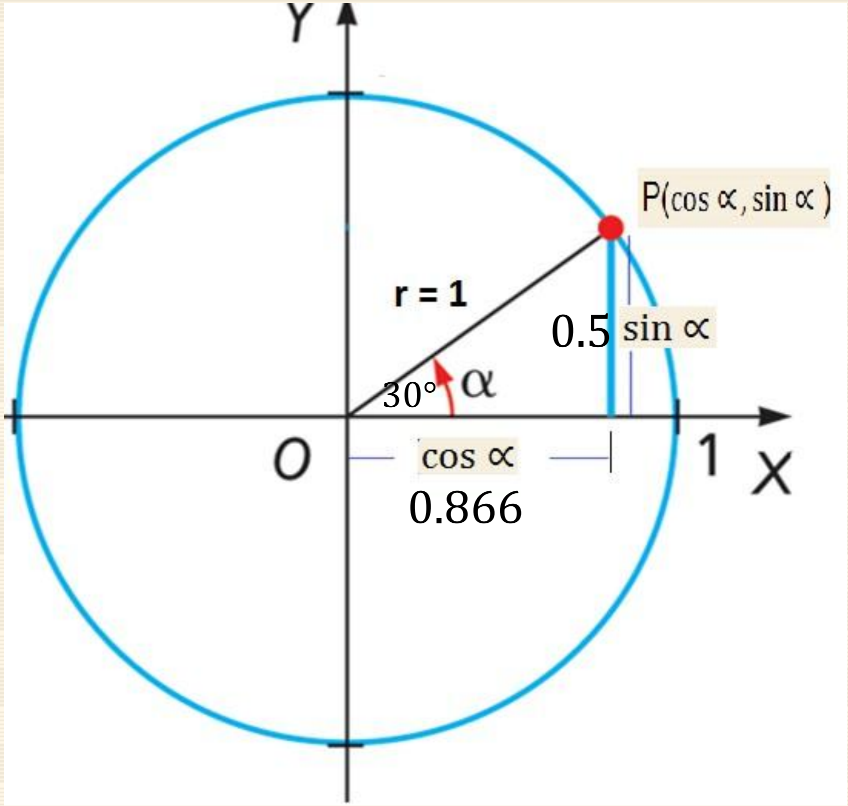
Por tanto las coordenadas P(x,y) que estén en el círculo unitario se representan trigonométricamente también como

$$\mathbf{P}(cos \propto, \sin \propto)$$

Lo cual permite que conocido el ángulo $\propto$, se pueda hallar su posición en el círculo P(x,y) mediante **P($\boldsymbol{cos \propto}$, $\mathbf{sin} \propto$)**

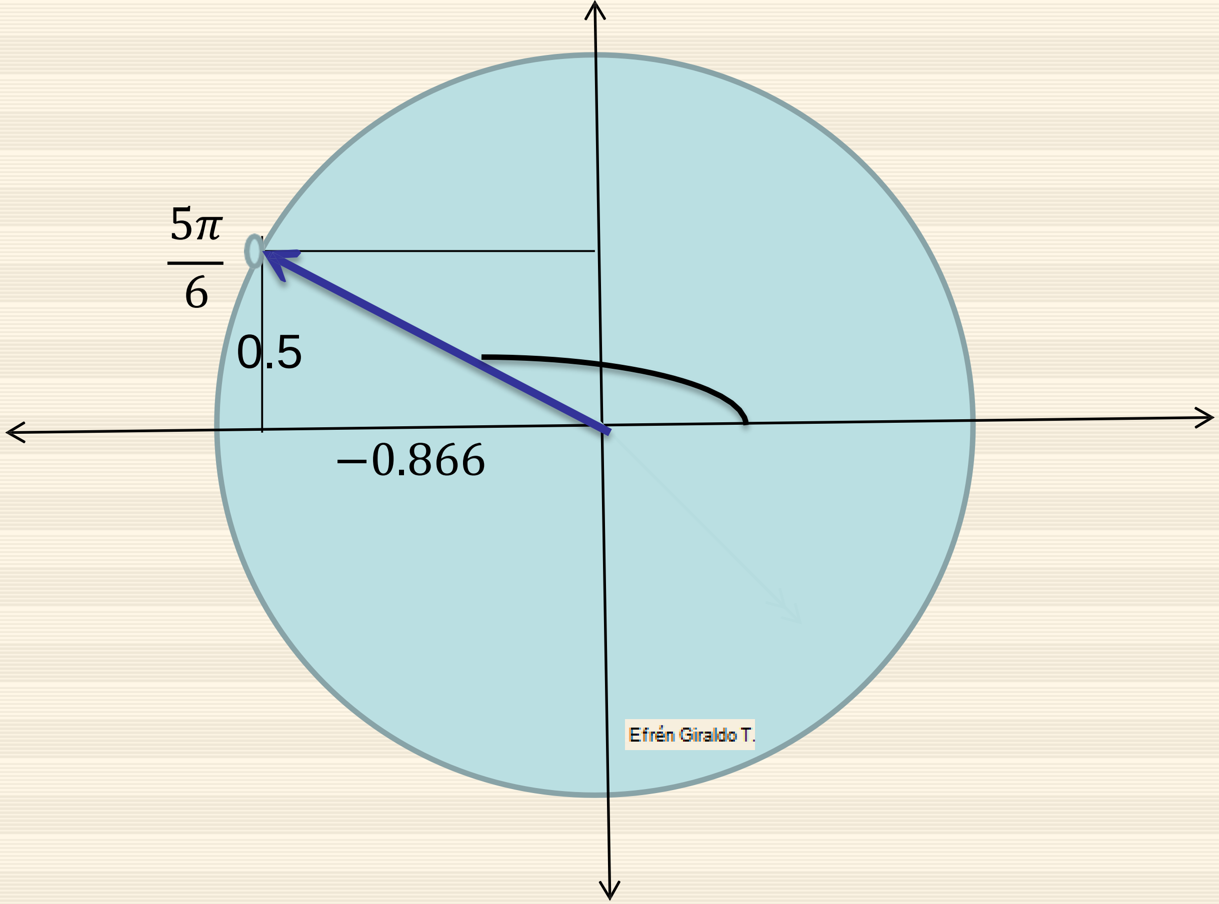
- $\propto = 30°$
- $\mathrm{x} = \cos 30° = 0.866$
- $\mathrm{y} = \sin 30° = 0.5$

A un ángulo de 30° le corresponde en el círculo unas coordenadas P(0.866, 0.5)


Y
P(cos ∝, sin ∝)
r = 1
0.5
sin ∝
30°
α
O
cos ∝
1
X
0.866

- Lo anterior vale tanto para ángulos en grados ° como en radianes (π o números reales) puesto que las calculadoras permiten ambos sistemas adecuándolas convenientemente en el modo “sexages” o “radianes”

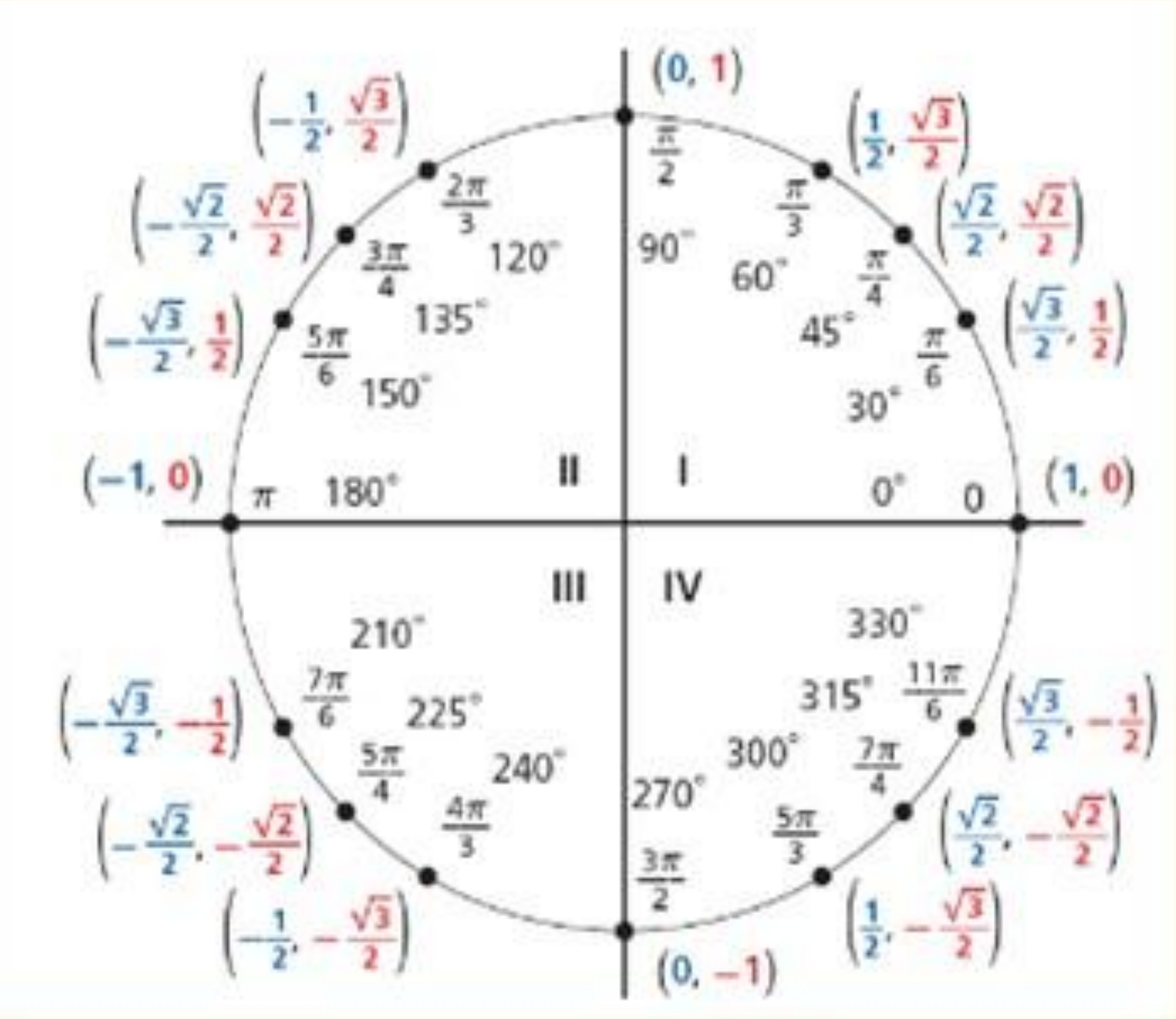
- Hallar la posición en el plano xy de un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$
- $\cos\frac{5\pi}{6} = -0.866$
- $\sin\frac{5\pi}{6} = 0.5$ por tanto P(-0.866,0.5)
- - significa que está en el segundo cuadrante
- Nota. Tener cuidado con el signo.



Posición del ángulo $\frac{5\pi}{6}$ en el círculo

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi.180°}{6\pi} = 150°$$

- Los puntos del círculo se pueden asociar a los puntos P(x,y) del plano cartesiano. Conocido el ángulo se puede hallar sus coordenadas,



http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/misc_eso/applets/defcosi.htm
http://www.geogebra.org/en/upload/files/Ferito/Circulo_Unitario.html

- La ecuación del circulo unitario es

- $$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$$
- Y como $x = \cos \propto$
- $y = \sin \propto$

- $\boldsymbol{sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1}$
- **Esta es una identidad fundamental de la trigonimetría**

Identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Ejemplo 1 **Simplificación de una expresión trigonométrica**

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$
\begin{aligned}
\cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca}\\
&= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Denominador común}\\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \sec t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

■

Ejemplo 3 **Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno**

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Ejemplo 3 **Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno**

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} \text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrollo} \\ &= \operatorname{sen}^2\theta = \text{SM} && \text{Identidad pitagórica} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 **Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones**

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejemplo 4 Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Solución Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{PM} && \text{Identidades recíprocas} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 5 **Demostración de una identidad mediante la introducción de un elemento extra**

Verificar la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

Solución Empezamos con el primer miembro y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \operatorname{sen} u$.

$$= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u}$$

$$= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u}$$ Multiplicación del numerador y del denominador por 1 + sen u

$$= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u}$$ Desarrollo del denominador

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas para el seno:

$$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$

$$\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para el coseno:

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para la tangente:

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Ejemplo 3 Demostración de una identidad de cofunciones

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Fórmulas para el coseno: $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

Ejemplo 3 **Demostración de una identidad de cofunciones**

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Solución Por la fórmula de sustracción en el caso del coseno,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u \\ &= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u \end{aligned}$$

Ejemplo 4 **Demostración de una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

Fórmulas para la tangente: $\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Fórmulas para la tangente: $\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Ejemplo 4 Demostración de una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

Solución Empezamos con el segundo miembro y usamos la fórmula de la adición para la tangente con lo que obtenemos

$$\text{SM} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \text{PM}$$

■

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

La elección del signo $+$ o $-$ depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Esta misma fórmula se puede poner a partir de un ángulo sencillo (x) obtener el ángulo doble ($2x$): se hace $u = 2x$ y se eleva al cuadrado en ambos lados:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\boldsymbol{sen\,2u = 2\,sen\,u\,cos\,u}$$
$$\boldsymbol{cos\,2u = cos\,2u - sen\,2u}$$

Ejemplo 4 Reducción de potencias en una expresión trigonométrica

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ejemplo 4 **Reducción de potencias en una expresión trigonométrica**

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

Fórmulas del producto-a-suma

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

Ejemplo 7 **Expresión en forma de producto-suma trigonométrico**

Exprese $\boxed{\text{sen } 3x \text{ sen } 5x}$ como una suma de funciones trigonométricas.

Solución Aplicamos la cuarta fórmula del producto-a-suma con $\boxed{u = 3x \text{ y } v = 5x}$ y el hecho de que el coseno es una función par para obtener

$$\text{sen } u \text{ sen } v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$sen\ 2u = 2\ sen\ u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos 2u - sen\ 2u$$

Ejemplo *Exprese como una suma*

1. $\operatorname{sen} 9\theta \cos 3\theta$ $\quad u = 9\theta$ y $v = 3\theta$.

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

5.2. Ejemplos

Ejemplo *Exprese como una suma*

1. $\operatorname{sen} 9\theta \cos 3\theta$
2. $\cos 6x \cos(-4x)$

Solución $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

1. Aplicando la ecuación (1) con $u = 9\theta$ y $v = 3\theta$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 9\theta \cos 3\theta &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(9\theta + 3\theta) + \operatorname{sen}(9\theta - 3\theta)] \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 12\theta + \operatorname{sen} 6\theta) \end{aligned}$$

http://ciencias.udea.edu.co/algebraytrigo/Clase6imprimir.pdf

Ejemplo *Exprese como una suma*

$$\cos 6x \cos(-4x)$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

Aplicando la ecuación (3) con $u = 6x$ y $v = -4x$,

$$\begin{aligned}\cos 6x \cos(-4x) &= \frac{1}{2}[\cos(6x + (-4x)) + \cos(6x - (-4x))] \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x)\end{aligned}$$

Ejemplo 7 Expresión en forma de producto-suma trigonométrico

Exprese sen $3x$ sen $5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

Solución Aplicamos la cuarta fórmula del producto-a-suma con $u = 3x$ y $v = 5x$ y el hecho de que el coseno es una función par para obtener

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)] \\ &= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x \\ &= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado del signo igual. Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1 **Resolución de una ecuación trigonométrica**

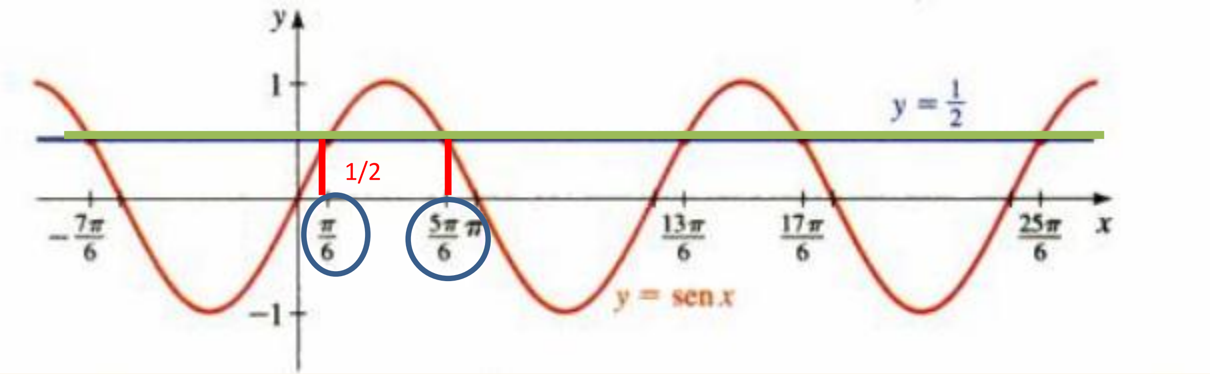
Resuelva la ecuación $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Solución Empezamos por aislar $\operatorname{sen} x$.

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2 \operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$



Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 1 se ilustra una representación gráfica de las soluciones.

Ejemplo 2 **Resolución de una ecuación trigonométrica**

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Solución Empezamos por aislar a $\tan x$.

$$\begin{aligned} \tan^2 x - 3 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ \tan^2 x &= 3 && \text{Suma de 3} \\ \tan x &= \pm\sqrt{3} && \text{Obtención de las raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otras soluciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Ejemplo 5 **Uso de una identidad trigonométrica**

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$.

Solución Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$.

Solución Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$	Ecuación dada
$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$	Identidad pitagórica
$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$	Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación
$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0$	Factorización
$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0$	Todos los factores se igualan a 0
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1$	Determinación de sen x
$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2}$	Determinación de x en el intervalo $[0, 2\pi)$

Como el periodo del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ■

- http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/misc_eso/applets/defcosi.html
- http://www.geogebra.org/en/upload/files/Ferito/Circulo_Unitario.html

- http://www.vadenumeros.es/geogebra/geometria/goniometrica.html
- http://geogebra.geometriadinamica.org/construccion_de_las_razones_trigonometricas.html