

Algoritmo de Gauss o **Eliminación Gaussiana** (**Gaussian Elimination**) es un método numérico que se utiliza para reducir una matriz. Es decir, para *llevar* la matriz a la forma escalonada reducida por renglones. Hay otros métodos como Gauss-Jordan o Montante. El método consta de dos fases:

- 1 La primera cuyo fin es escalonar la matriz: esto lo hace de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, y
- 2 La segunda donde reduce: esto lo hace de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda.

En su aplicación sólo requiere operaciones elementales de renglón. El uso de eliminación Gaussiana no sólo se limita a resolver sistemas de ecuaciones lineales sino también se puede aplicar al cálculo de inversas de matrices o a la comparación de espacios generados. Es decir, es un método genérico y por lo tanto, no debe suponer que la matriz es una matriz aumentada de un sistema. Hasta el momento, es el método que requiere menos operaciones aritméticas cuando se aplica a una matriz general.

Pasos del algoritmo de Eliminación Gaussiana:

I. Fase de Escalonamiento:

1. Determine la primer columna (a la izquierda) no cero.
2. Si el primer elemento de la columna es cero, intercambie el renglón por un renglón inferior que no tenga cero en esa posición.
3. Por eliminación, obtenga ceros abajo del elemento delantero (pivote) en los renglones debajo de él.
4. *Cubra* el renglón y la columna de trabajo y repita el proceso comenzando en el paso 1.

II. Fase de Reducción:

5. Comenzando con el último renglón no cero avance hacia arriba escalando el renglón para obtener un 1 delantero (pivote) y haga ceros arriba de él utilizando eliminación.

Aplique el algoritmo de Gauss a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Fase I: Escalonamiento

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - (2/3)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - (-2/3)R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Fase II: Reducción

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 1/(-2) R_3} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - (-9) R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - (-2) R_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 6 R_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow 1/3 R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplique el algoritmo de Gauss a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & 7 & 5 & 2 & -7 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Fase I: Escalonamiento

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & 7 & 5 & 2 & -7 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_2 &\leftarrow R_2 - \frac{1}{1} \cdot R_1 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{-1}{1} \cdot R_1 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - \frac{-2}{1} \cdot R_1 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Fase I: Escalonamiento

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & 7 & 5 & 2 & -7 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_2 &\leftarrow R_2 - \frac{1}{1} \cdot R_1 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{-1}{1} \cdot R_1 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - \frac{-2}{1} \cdot R_1 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{3}{3} \cdot R_2 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - \frac{-6}{3} \cdot R_2 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{3}{3} \cdot R_2 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - \frac{-6}{3} \cdot R_2 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{-2}{-2} \cdot R_3 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{-2}{-2} \cdot R_3 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

FASE II: REDUCCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_4 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot R_4 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

FASE II: REDUCCIÓN

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - \frac{2}{1} \cdot R_4 \\ R_2 &\leftarrow R_2 - \frac{-3}{1} \cdot R_4 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{-2}{1} \cdot R_4 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{-2} \cdot R_3 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{-2} \cdot R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{-4}{1} \cdot R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{1} \cdot R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{-4}{1} \cdot R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{1} \cdot R_3$$

→

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3} \cdot R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{3} \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{-2}{1} \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$