*SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM*

# TEORIA Y PROBLEMAS

DE

# GEOMETRIA ANALITICA

## *Plana y del Espacio*


JOSEPH H. KINDLE, Ph. D.

*Professor of Mathematics*
*University of Cincinnati*





TRADUCCION Y ADAPTACION

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ
*Ingeniero de Armamento*

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
*Ingeniero de Armamento*
*Licenciado en Ciencias Físicas*
*Diplomado en Ingeniería Nuclear*





**McGRAW-HILL**

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

# Prólogo

Este libro de problemas está concebido como complemento de los textos de geometría analítica que se estudian en los institutos y escuelas técnicas de grado medio. En él se exponen las materias aproximadamente en el mismo orden que figura en la mayor parte de dichos textos. Consta de 345 problemas tipo, cuidadosamente resueltos, y 910 problemas propuestos como ejercicio para el alumno a distinto grado de dificultad. Los problemas, por otra parte, se han dispuesto de forma que se pueda seguir con facilidad el desarrollo natural de cada materia. Como un curso de geometría analítica se base, fundamentalmente, en la resolución de problemas, y dado que una de las principales causas del bajo rendimiento que en ocasiones se alcanza en los cursos de matemáticas es no disponer de métodos ordenados de resolución de aquéllos, estamos convencidos de que este libro, bien empleado, constituirá una gran ayuda para el alumno. También se ha pensado en aquellos otros que quieran repasar la teoría y los problemas fundamentales de la geometría analítica.

Para la mejor utilización del libro se debe tener presente lo que realmente es, considerando que no se trata de un texto propiamente dicho y que, por tanto, no debe emplearse como medio para evitar el estudio de las cuestiones teóricas de la asignatura. Cada uno de los capítulos contiene un breve resumen, a modo de formulario, de las definiciones necesarias, principios y teoremas, seguido de una serie de problemas, resueltos unos y otros propuestos, a distintos niveles de dificultad.

No se puede decir de forma rotunda que estudiar matemáticas sea, esencialmente, hacer problemas, pero hay que tener en cuenta que con una lectura más o menos rutinaria del libro de texto, la retención en la memoria de un pequeño número de expresiones y con un estudio superficial de los problemas resueltos de este libro, no se adquirirá más que una vaga noción de la materia. Por tanto, para que la utilización de este libro sea verdaderamente eficaz es necesario que el alumno intente resolver por sí mismo todos los problemas en un papel y se fije bien en el porqué de cada uno de los pasos de que consta su solución, y en la forma en que éstos se expresan. En todos y cada uno de los problemas resueltos hay algo que aprender; con estas normas, el alumno encontrará muy pocas dificultades para resolver los problemas aquí propuestos, así como los que figuren en su propio libro de texto.

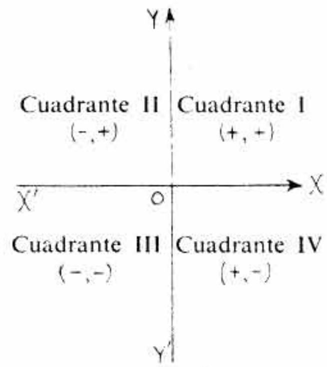
J. H. K.

# Tabla de materias

CAPITULO 1

# Coordenadas rectangulares

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES. El sistema de coordenadas rectangulares divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto $O$. La horizontal $X'OX$ se denomina eje $x$, la vertical $Y'OY$, eje $y$, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas. El punto $O$ se llama origen del sistema.

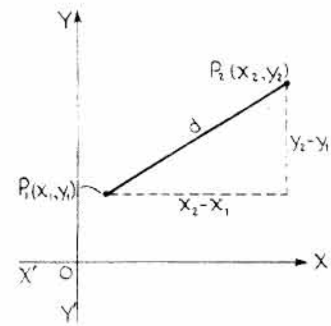



La distancia de un punto al eje $y$ se llama *abscisa* del mismo. La distancia de un punto al eje $x$ es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas* del punto en cuestión y se representan por el símbolo $(x,y)$. Las abscisas son positivas cuando el punto está situado a la derecha del eje $y$, y negativas en caso contrario. Las ordenadas son positivas cuando el punto está por encima del eje $x$, y negativas en caso contrario.

Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. La distancia $d$ entre dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

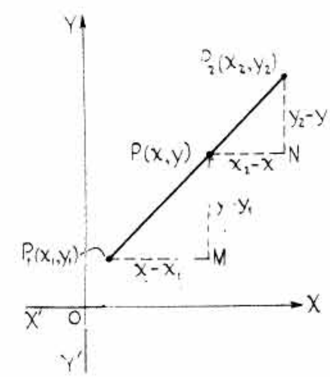
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$




Por ejemplo, la distancia entre los puntos $(4, -1)$ y $(7, 3)$ es

$$d = \sqrt{(7 - 4)^2 + (3 + 1)^2}$$
$$= 5 \text{ unidades.}$$

PUNTO DE DIVISION es el que divide a un segmento en una relación dada. Consideremos los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y la recta que determinan. Sea $P(x,y)$ un tercer punto que divida al segmento en la relación $\dfrac{P_1P}{PP_2} = r$. Como $P_1P$ y $PP_2$ son del mismo sentido, dicha relación es positiva. Si el punto de división $P(x,y)$ estuviera situado en la prolongación del segmento, a uno u otro lado del mismo, la relación $\dfrac{P_1P}{PP_2} = r$ sería negativa, ya que $P_1P$ y $PP_2$ tendrían sentidos opuestos.

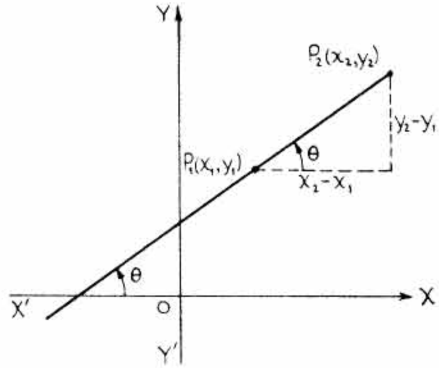



Teniendo en cuenta los triángulos semejantes de la figura, $\dfrac{P_1M}{PN} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = r.$

Despejando $x$, $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$. Análogamente, $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$.

Si $P(x,y)$ es el punto medio del segmento $P_1P_2$, $r = 1$ y $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA. La *inclinación* de una recta $L$ (que no sea paralela al eje $x$) es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje $x$ positivo y se mide, desde el eje $x$ a la recta $L$, en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Mientras no se advierta otra cosa, consideraremos que el sentido positivo de $L$ es hacia arriba. Si $L$ fuera paralela al eje $x$, su inclinación sería cero.




La *pendiente* de una recta es la tangente del ángulo de inclinación. En estas condiciones, $m = \operatorname{tg} \theta$, siendo $\theta$ el ángulo de inclinación y $m$ la pendiente.

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

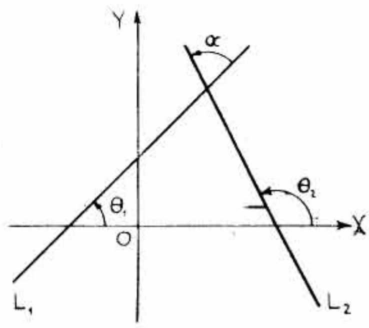
cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos $P_1$ y $P_2$.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES. Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

Si dos rectas $L_1$ y $L_2$ son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo contrario. Esto es, llamando $m_1$ a la pendiente de $L_1$ y $m_2$ a la de $L_2$ se tiene $m_1 = -1/m_2$, o bien, $m_1m_2 = -1$.

ANGULO DE DOS RECTAS. El ángulo $\alpha$, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, desde la recta $L_1$ de pendiente $m_1$ a la $L_2$ de pendiente $m_2$ es

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}.$$

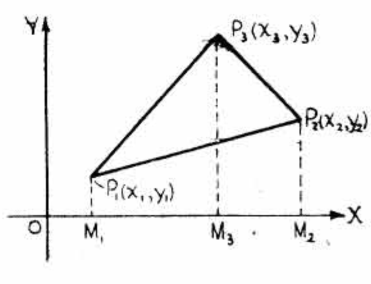



Demostración: $\theta_2 = \alpha + \theta_1$, o $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}.$$

AREA DE UN POLIGONO EN FUNCION DE LAS COORDENADAS DE SUS VERTICES. Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo. El área $A$ en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión




$$A = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3).$$

Demostración: Area del triángulo = área del trapecio $M_1P_1P_3M_3$ + área del trapecio $M_3P_3P_2M_2$ — área del trapecio $M_1P_1P_2M_2$. Por tanto,

$$A = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2).$$

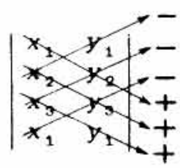
Este resultado se puede expresar de otra manera, más fácil de recordar, teniendo en cuenta la notación de determinante:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de expresar el área de un triángulo, muy útil cuando se trate de hallar áreas de polígonos de más de tres lados, es la siguiente:

$$A = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1).$$

$A = \frac{1}{2}$




Obsérvese que se ha repetido la primera fila en la cuarta.

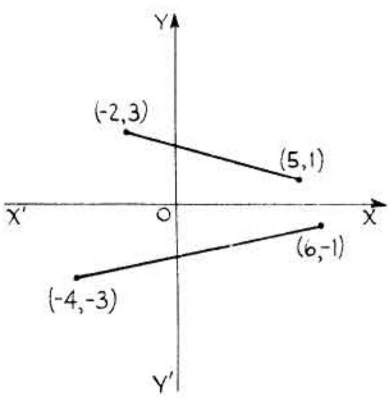
## PROBLEMAS RESUELTOS

### DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

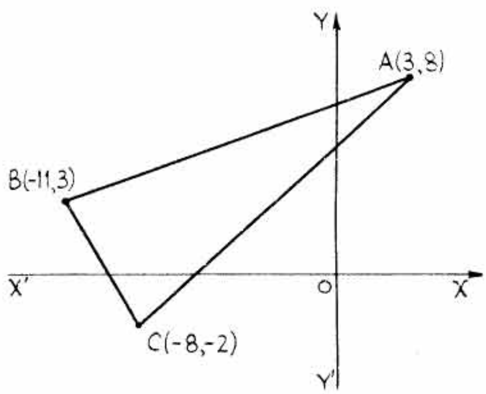
**1.** Hallar la distancia entre *a*) (—2, 3) y (5, 1), *b*) (6, —1) y (—4, —3).

*a*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

*b*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$




*Problema 1*




*Problema 2*

**2.** Demostrar que los puntos $A(3, 8)$, $B(-11, 3)$, $C(-8, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

$AB = \sqrt{(3 + 11)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{221}$

$BC = \sqrt{(-11 + 8)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(3 + 8)^2 + (8 + 2)^2} = \sqrt{221}$. Como $AB = AC$, el triángulo es isósceles.

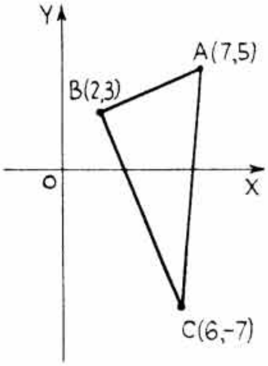
**3.** *a*) Demostrar que los puntos $A(7, 5)$, $B(2, 3)$, $C(6, -7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
*b*) Hallar el área del triángulo rectángulo.

*a*) $AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$ $\qquad$ $BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{116}$

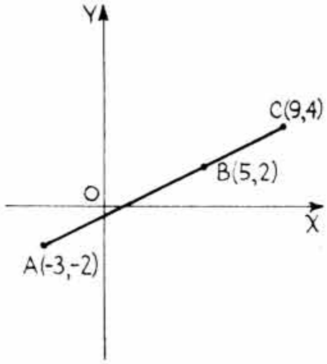
$$AC = \sqrt{(7-6)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{145}$$

Como $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, o sea, $29 + 116 = 145$, $ABC$ es un triángulo rectángulo.

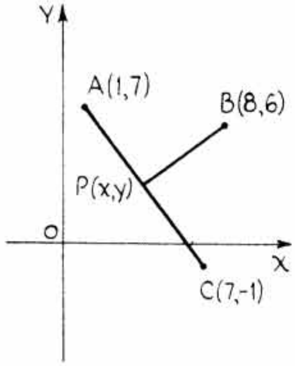
*b*) Area $= \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{29}\sqrt{116} = 29$ unidades de superficie.




*Problema 3*




*Problema 4*




*Problema 5*

**4.** Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(9, 4)$.

$AB = \sqrt{(5+3)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{5}$ $\qquad$ $BC = \sqrt{(9-5)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$

$$AC = \sqrt{(9+3)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{5}$$

Como $\underline{AB + BC = AC}$, o sea, $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$, los puntos son colineales.

**5.** Determinar un punto que equidiste de los puntos $A(1, 7)$, $B(8, 6)$, $C(7, -1)$.

Sea $P(x, y)$ el punto buscado. Ha de ser, $PA = PB = PC$.

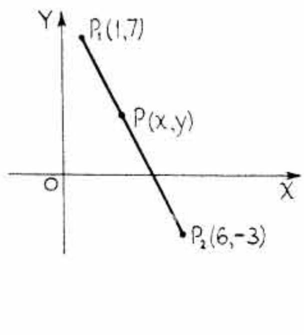
Como $PA = PB$, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2}$.
Elevando al cuadrado y simplificando, $7x - y - 25 = 0$. (1)

Como $PA = PC$, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$.
Elevando al cuadrado y simplificando, $3x - 4y = 0$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) resulta $x = 4$, $y = 3$. Por tanto, el punto buscado tiene de coordenadas $(4, 3)$.

## PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RELACION DADA.

**6.** Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(1, 7)$ y $P_2(6, -3)$ en la relación $r = 2/3$.




Como la relación es positiva, $P_1P$ y $PP_2$ han de ser del mismo sentido y, por tanto, el punto $P(x, y)$ estará situado entre los puntos dados extremos del segmento.

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{3}$$

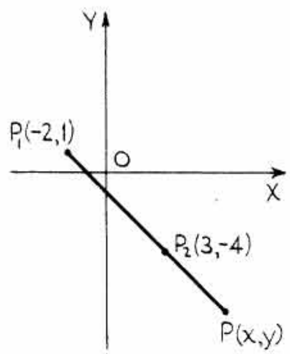
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{1 + \frac{2}{3}(6)}{1 + \frac{2}{3}} = 3 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{7 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = 3$$

El punto buscado es (3, 3).

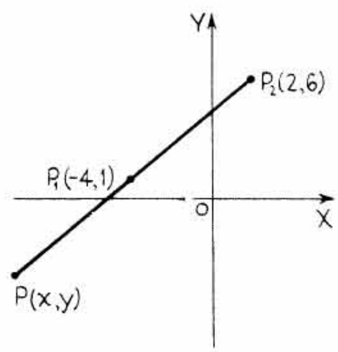
**7.** Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-2, 1)$ y $P_2(3, -4)$ en la relación $r = -8/3$.

Como la relación es negativa, $P_1P$ y $PP_2$ han de ser de sentido opuesto, con lo que el punto $P(x, y)$ será exterior al segmento $P_1P_2$. $\quad r = \dfrac{P_1P}{PP_2} = -\dfrac{8}{3}$.

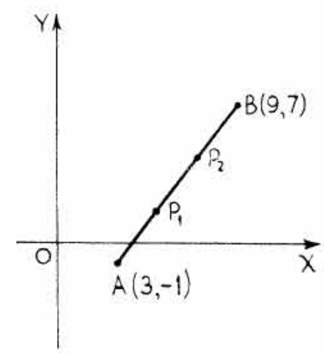
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2 + \left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = 6 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = -7$$




*Problema 7*




*Problema 8*




*Problema 9*

**8.** El extremo de un diámetro de una circunferencia de centro $P_1(-4, 1)$ es $P_2(2, 6)$. Hallar las coordenadas $P(x, y)$ del otro extremo.

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{2}$$

Como $P_1P$ y $PP_2$ son de sentido opuesto, la relación $r$ es negativa.

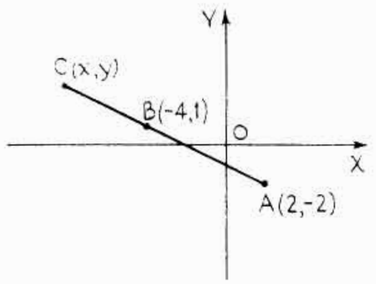
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -10 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(6)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4$$

**9.** Hallar dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que dividan al segmento que une $A(3, -1)$ con $B(9, 7)$ en tres partes iguales.

Para hallar $P_1(x_1, y_1)$: $\quad r_1 = \dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{1}{2}, \quad x_1 = \dfrac{3 + \frac{1}{2}(9)}{1 + \frac{1}{2}} = 5, \quad y_1 = \dfrac{-1 + \frac{1}{2}(7)}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{5}{3}.$

Para hallar $P_2(x_2, y_2)$: $\quad r_2 = \dfrac{AP_2}{P_2B} = \dfrac{2}{1}, \quad x_2 = \dfrac{3 + 2(9)}{1 + 2} = 7, \quad y_2 = \dfrac{-1 + 2(7)}{1 + 2} = \dfrac{13}{3}.$

**10.** Hallar las coordenadas del extremo $C(x, y)$ del segmento que une este punto con $A(2, -2)$ sabiendo que el punto $B(-4, 1)$ está situado a una distancia de $A$ igual a las tres quintas partes de la longitud total del segmento.



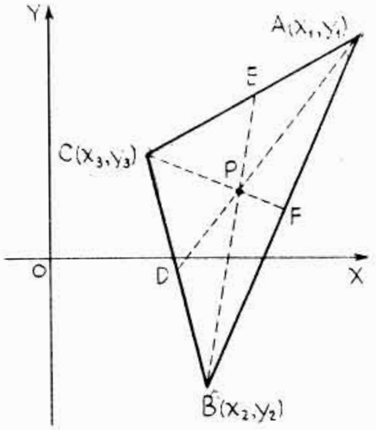

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2} \qquad r = \frac{AC}{CB} = -\frac{5}{2}$$

Como $AC$ y $CB$ son de sentido opuesto, la relación $r$ es negativa.

$$x = \frac{2 + \left(-\frac{5}{2}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)} = -8 \qquad y = \frac{-2 + \left(-\frac{5}{2}\right)(1)}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)} = 3$$

**11.** Las medianas de un triángulo se cortan en un punto $P(x, y)$ llamado baricentro, situado de los vértices a 2/3 de la distancia de cada uno de ellos al punto medio del lado opuesto. Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo cuyos vértices tienen de coordenadas $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Consideremos la mediana $APD$, siendo $D$ el punto medio de $BC$.




Las coordenadas de $D$ son $\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}$.

Como $\frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$, resulta $r = \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1} = 2$.

$$x = \frac{x_1 + 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

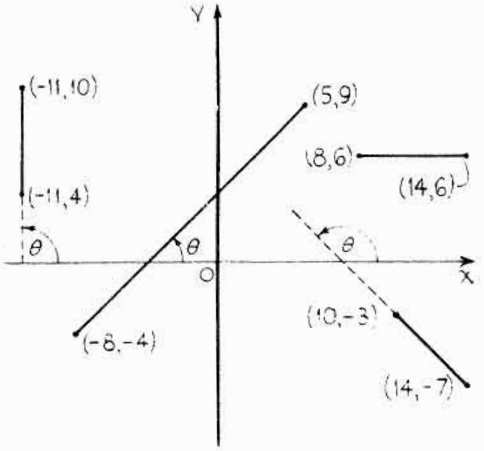
Las coordenadas del baricentro de un triángulo son, pues, $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

Al mismo resultado se habría llegado considerando las medianas $BPE$ o $CPF$, siendo en todo caso $r = \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} = \frac{CP}{PF} = \frac{2}{1} = 2$.

## INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA

**12.** Hallar la pendiente $m$ y el ángulo de inclinación $\theta$ de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

*a)* $(-8, -4), (5, 9)$. *c)* $(-11, 4), (-11, 10)$.
*b)* $(10, -3), (14, -7)$. *d)* $(8, 6), (14, 6)$.




$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*a)* $m = \frac{9 + 4}{5 + 8} = 1 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45°$

*b)* $m = \frac{-7 + 3}{14 - 10} = -1 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} -1 = 135°$

*c)* $m = \frac{10 - 4}{-11 + 11} = \frac{6}{0} = \infty \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \infty = 90°$

*d)* $m = \frac{6 - 6}{14 - 8} = \frac{0}{6} = 0 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} 0 = 0°$

**13.** Demostrar que los puntos $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(6, 1)$ son colineales.

Pendiente de $AB = \dfrac{2-4}{3+3} = -\dfrac{1}{3}$. Pendiente de $AC = \dfrac{1-4}{6+3} = -\dfrac{1}{3}$.

Como la pendiente de $AB$ es la misma que la de $AC$, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

**14.** Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos $A(8, 6)$, $B(4, 8)$ y $C(2, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

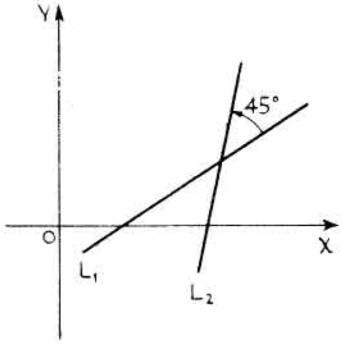
Pendiente de $AB = \dfrac{8-6}{4-8} = -\dfrac{1}{2}$ Pendiente de $BC = \dfrac{4-8}{2-4} = 2$.

Como la pendiente de $AB$ es el recíproco con signo contrario de la pendiente de $BC$, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

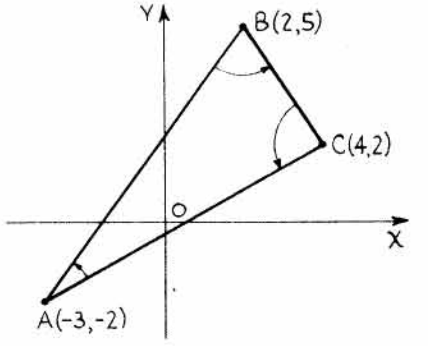
## ANGULO DE DOS RECTAS

**15.** Sabiendo que el ángulo formado por las rectas $L_1$ y $L_2$ es de 45°, y que la pendiente $m_1$ de $L_1$ es 2/3, hallar la pendiente $m_2$ de $L_2$.

$\operatorname{tg} 45° = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, es decir, $1 = \dfrac{m_2 - \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{2}{3} m_2}$. De esta ecuación, $m_2 = 5$.




*Problema 15*




*Problema 16*

**16.** Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-3, -2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 2)$.

$m_{AB} = \dfrac{5+2}{2+3} = \dfrac{7}{5}$ $m_{BC} = \dfrac{2-5}{4-2} = -\dfrac{3}{2}$ $m_{CA} = \dfrac{2+2}{4+3} = \dfrac{4}{7}$

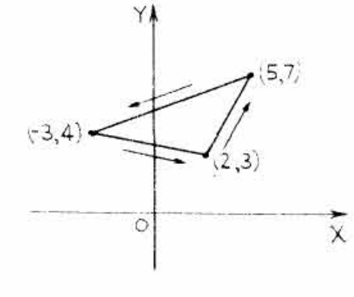
$$\operatorname{tg} A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{1 + m_{AB} m_{CA}} = \frac{\dfrac{7}{5} - \dfrac{4}{7}}{1 + \dfrac{7}{5}\left(\dfrac{4}{7}\right)} = \frac{29}{63} \qquad A = 24°\ 43{,}1'.$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC} m_{AB}} = \frac{-\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{5}}{1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{7}{5}\right)} = \frac{29}{11}. \qquad B = 69°\ 13{,}6'.$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA} m_{BC}} = \frac{\dfrac{4}{7} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{1 + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \frac{29}{2}, \quad C = 86°3{,}3'. \text{ Comprobación: } A + B + C = 180°.$$

## AREA DE UN POLIGONO DE VERTICES CONOCIDOS.

**17.** Hallar el área $A$ del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (2, 3), (5, 7), (—3, 4).




$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[2\cdot 7 + 5\cdot 4 + (-3)(3) - 2\cdot 4 - (-3)(7) - 5\cdot 3]$$

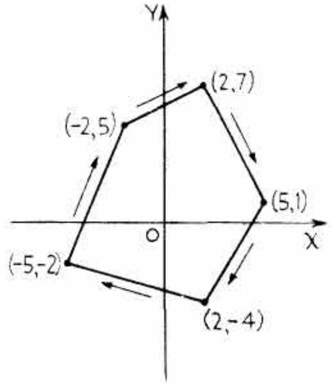
$= \tfrac{1}{2}(14 + 20 - 9 - 8 + 21 - 15) = 11{,}5$ unidades de superficie.

**18.** Hallar el área $A$ del pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas (—5, —2), (—2, 5), (2, 7), (5, 1), (2, —4).

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \\ 2 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[(-5)(5) + (-2)(7) + 2\cdot 1 + 5(-4) + 2(-2) - (-5)(-4) - 2\cdot 1 - 5\cdot 7 - 2\cdot 5 - (-2)(-2)]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-132) = -66.$$




Solución: 66 unidades de superficie. Si se toman los vértices recorriendo el polígono en el sentido contrario al de las agujas del reloj, el área se considera positiva, y en caso contrario negativa.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Representar los puntos de coordenadas: (2, 3), (4, 0), (—3, 1), ($\sqrt{2}$, —1), (—2, 0), (—2, $\sqrt{3}$), (0, 1), (—2, $\sqrt{8}$), ($\sqrt{7}$, 0), (0, 0), (4,5, —2), ($\sqrt{10}$, — $\sqrt{2}$), (0, $\sqrt{3}$), (2,3, —6).

**2.** Representar los triángulos de vértices:
*a*) (0, 0), (—1, 5), (4, 2);
*b*) ($\sqrt{2}$, 0), (4, 5), (—3, 2);
*c*) (2 + $\sqrt{2}$, —3), ($\sqrt{3}$, 3), (—2, 1 + $\sqrt{8}$).

**3.** Representar los polígonos de vértices:
*a*) (—3, 2), (1, 5), (5, 3), (1, —2);
*b*) (—5, 0), (—3, —4), (3, —3), (7, 2), (1, 6).

**4.** Hallar la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:
*a*) (4, 1), (3, —2); *c*) (0, 3), (—4, 1); *e*) (2, —6), (2, —2);
*b*) (—7, 4), (1, —11); *d*) (—1, —5), (2, —3); *f*) (—3, 1), (3, —1).
*Sol.* *a*) $\sqrt{10}$, *b*) 17, *c*) $2\sqrt{5}$, *d*) $\sqrt{13}$, *e*) 4, *f*) $2\sqrt{10}$.

**5.** Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:
*a*) (—2, 5), (4, 3), (7, —2); *c*) (2, —5), (—3, 4), (0, —3);
*b*) (0, 4), (—4, 1), (3, —3); *d*) (—1, —2), (4, 2), (—3, 5).
*Sol.* *a*) 23,56, *b*) 20,67, *c*) 20,74, *d*) 21,30.

**6.** Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles:
*a*) (2, —2), (—3, —1), (1, 6); *c*) (2, 4), (5, 1), (6, 5);
*b*) (—2, 2), (6, 6), (2, —2); *d*) (6, 7), (—8, —1), (—2, —7).

**7.** Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos. Hallar sus áreas.

*a*) (0, 9), (—4, —1), (3, 2); *c*) (3, —2), (—2, 3), (0, 4);
*b*) (10, 5), (3, 2), (6, —5); *d*) (—2, 8), (—6, 1), (0, 4).
*Sol.* Areas: *a*) 29, *b*) 29, *c*) 7,5, *d*) 15 unidades de superficie.

**8.** Demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo:

*a*) (—1, —2), (0, 1), (—3, 2), (—4, —1);
*b*) (—1, —5), (2, 1), (1, 5), (—2, —1);
*c*) (2, 4), (6, 2), (8, 6), (4, 8).

**9.** Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos:

*a*) (3, 3), (6, 2), (8, —2); *b*) (4, 3), (2, 7), (—3, —8); *c*) (2, 3), (4, —1), (5, 2).
*Sol.* *a*) (3, —2), *b*) (—5, 1), *c*) (3, 1).

**10.** Demostrar, mediante la fórmula de la distancia, que los puntos siguientes son colineales:

*a*) (0, 4), (3, —2), (—2, 8); *c*) (1, 2), (—3, 10), (4, —4);
*b*) (—2, 3), (—6, 1), (—10, —1); *d*) (1, 3), (—2, —3), (3, 7).

**11.** Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices. Supóngase que las coordenadas de los vértices son (0, 0), (0, $b$), ($a$, $b$) y ($a$, 0).

**12.** Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (—3, 6).
*Sol.* (3, —2), (3, 14).

**13.** Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \dfrac{P_1P}{PP_2}$.

*a*) $P_1(4, -3)$, $P_2(1, 4)$, $r = \dfrac{2}{1}$. *d*) $P_1(0, 3)$, $P_2(7, 4)$, $r = -\dfrac{2}{7}$.

*b*) $P_1(5, 3)$, $P_2(-3, -3)$, $r = \dfrac{1}{3}$. *e*) $P_1(-5, 2)$, $P_2(1, 4)$, $r = -\dfrac{5}{3}$.

*c*) $P_1(-2, 3)$, $P_2(3, -2)$, $r = \dfrac{2}{5}$. *f*) $P_1(2, -5)$, $P_2(6, 3)$, $r = \dfrac{3}{4}$.

*Sol.* *a*) $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$, *c*) $\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$, *d*) $\left(-\dfrac{14}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$, *e*) (10, 7), *f*) $\left(\dfrac{26}{7}, -\dfrac{11}{7}\right)$.

**14.** Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son:

*a*) (5, 7), (1, —3), (—5, 1); *c*) (3, 6), (—5, 2), (7, —6); *e*) (—3, 1), (2, 4), (6, —2).
*b*) (2, —1), (6, 7), (—4, —3); *d*) (7, 4), (3, —6), (—5, 2);

*Sol.* *a*) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$, *c*) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, *d*) $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, *e*) $\left(\dfrac{5}{3}, 1\right)$.

**15** Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = 3/7$, hallar las coordenadas de $P_2$.
*Sol.* (16, —12).

**16.** Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (—2, 1), (5, 2) y (2, —3).
*Sol.* (1, 6), (9, —2), (—5, —4).

**17.** Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son (3, 2), (—1, —2) y (5, —4).
*Sol.* (—3, 4), (9, 0), (1, —8).

**18.** Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, -6)$ y $D(-5, -4)$ forman otro cuadrilátero cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

**19.** Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de dos lados de los triángulos del Problema 14 son paralelas al tercer lado e iguales a su mitad.

**20.** Dado el cuadrilátero $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$ y $D(2, -8)$, demostrar que:

*a*) La recta que une los puntos medios de $AD$ y $BC$ pasa por el punto medio del segmento que une los puntos medios de $AB$ y $CD$.
*b*) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero forman un paralelogramo.

**21.** El segmento que une $A(-2, -1)$ con $B(3, 3)$ se prolonga hasta $C$. Sabiendo que $BC = 3AB$, hallar las coordenadas de $C$. *Sol.* (18, 15).

**22.** Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices. Ind.: Supóngase que las coordenadas del vértice del ángulo recto son (0, 0) y las de los otros vértices $(a, 0)$ y $(0, b)$.

**23.** Demostrar que en los triángulos isósceles del Problema 6 dos de las medianas son de la misma longitud.

**24.** Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

*a*) $(3, 4), (1, -2)$; *c*) $(6, 0), (6, \sqrt{3})$; *e*) $(2, 4), (-2, 4)$;
*b*) $(-5, 3), (2, -3)$; *d*) $(1, 3), (7, 1)$; *f*) $(3, -2), (3, 5)$.

*Sol.* *a*) 3, *b*) $-\frac{6}{7}$, *c*) $\infty$, *d*) $-\frac{1}{3}$, *e*) 0, *f*) $\infty$.

**25.** Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:

*a*) $(4, 6)$ y $(1, 3)$; *c*) $(2, 3)$ y $(1, 4)$; *e*) $(\sqrt{3}, 2)$ y $(0, 1)$;
*b*) $(2, \sqrt{3})$ y $(1, 0)$; *d*) $(3, -2)$ y $(3, 5)$; *f*) $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.

*Sol.* *a*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45°$; *c*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} -1 = 135°$; *e*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 1/\sqrt{3} = 30°$;
*b*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3} = 60°$; *d*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \infty = 90°$; *f*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 0 = 0°$.

**26.** Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.

*a*) $(2, 3), (-4, 7)$ y $(5, 8)$; *d*) $(0, 5), (5, 0)$ y $(6, -1)$;
*b*) $(4, 1), (5, -2)$ y $(6, -5)$; *e*) $(a, 0), (2a, -b)$ y $(-a, 2b)$;
*c*) $(-1, -4), (2, 5)$ y $(7, -2)$; *f*) $(-2, 1), (3, 2)$ y $(6, 3)$.

*Sol.* *a*) No, *b*) Sí, *c*) No, *d*) Sí, *e*) Sí, *f*) No.

**27.** Demostrar que el punto $(1, -2)$ está situado en la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$ y que equidista de ellos.

**28.** Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.

*a*) $(6, 5), (1, 3)$ y $(5, -7)$; *c*) $(2, 4), (4, 8)$ y $(6, 2)$;
*b*) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *d*) $(3, 4), (-2, -1)$ y $(4, 1)$.

**29.** Hallar los ángulos interiores de los triángulos cuyos vértices son:

*a*) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *Sol.* 45°, 45°, 90°.
*b*) $(4, 2), (0, 1)$ y $(6, -1)$; *Sol.* 109° 39,2′, 32° 28,3′, 37° 52,5′.
*c*) $(-3, -1), (4, 4)$ y $(-2, 3)$; *Sol.* 113° 29,9′, 40° 25,6′, 26° 4,5′.

**30.** Demostrar, hallando los ángulos interiores, que los triángulos siguientes son isósceles, y efectuar la comprobación calculando las longitudes de los lados.

*a*) (2, 4), (5, 1) y (6, 5); *Sol.* 59° 2,2', 61° 55,6', 59° 2,2'.
*b*) (8, 2), (3, 8) y (—2, 2); *Sol.* 50° 11,7', 79° 36,6', 50° 11,7'.
*c*) (3, 2), (5, —4) y (1, —2); *Sol.* 45°, 45°, 90°.
*d*) (1, 5), (5, —1) y (9, 6); *Sol.* 63° 26', 63° 26', 53° 8'.

**31.** La pendiente de una recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ es igual a 3/4. Situar dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de $A$.
*Sol.* (7, 5), (—1, —1).

**32.** El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos (—4, 5) y (3, $y$) con la que pasa por (—2, 4) y (9, 1) es de 135°. Hallar el valor de $y$. *Sol.* $y = 9$.

**33.** La recta $L_2$ forma un ángulo de 60° con la recta $L_1$. Si la pendiente de $L_1$ es 1, hallar la pendiente de $L_2$.
*Sol.* $-(2 + \sqrt{3})$.

**34.** Hallar la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la recta que pasa por los puntos de coordenadas (2, —1) y (5, 3). *Sol.* $m_2 = -7$.

**35.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 5) y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $x - 3y + 6 = 0$. *Sol.* $2x - y + 1 = 0$.

**36.** Hallar las áreas de los triángulos cuyas coordenadas de los vértices son:

*a*) (2, —3), (4, 2) y (—5, —2) *Sol.* 18,5 unidades de superficie.
*b*) (—3, 4), (6, 2) y (4, —3) *Sol.* 24,5.
*c*) (—8, —2), (—4, —6) y (—1, 5) *Sol.* 28.
*d*) (0, 4), (—8, 0) y (—1, —4) *Sol.* 30.
*e*) ($\sqrt{2}$, 2), (—4, 6) y (4, $-2\sqrt{2}$) *Sol.* $7\sqrt{2} - 2 = 7{,}899$.
*f*) (—7, 5), (1, 1) y (—3, 3) *Sol.* 0. Razonar la respuesta.
*g*) ($a$, $b + c$), ($b$, $c + a$) y ($c$, $a + b$) *Sol.* 0.

**37.** Hallar las áreas de los polígonos cuyas coordenadas de los vértices son:

a) (2, 5), (7, 1), (3, —4) y (—2, 3) *Sol.* 39,5 unidades de superficie.
*b*) (0, 4), (1, —6), (—2, —3) y (—4, 2) *Sol.* 25,5.
*c*) (1, 5), (—2, 4), (—3, —1), (2, —3) y (5, 1) *Sol.* 40.

**38.** Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados de los triángulos del Problema 36 dividen a cada uno de ellos en cuatro triángulos de áreas iguales.

CAPITULO 2

# Ecuaciones y lugares geométricos

LOS DOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA SON:

1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

LUGAR GEOMETRICO, o gráfica, de una ecuación de dos variables es una línea, recta o curva, que contiene todos los puntos, y solo ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

Antes de representar gráficamente el lugar geométrico que corresponde a una ecuación dada, es muy conveniente, para determinar su forma, conocer algunas propiedades del lugar en cuestión, como, por ejemplo: intersecciones con los ejes, simetrías, campo de variación de las variables, etc.

INTERSECCIONES CON LOS EJES. Son las distancias (positivas o negativas) desde el origen hasta los puntos en los que la línea del lugar corta a los ejes coordenados.

Para hallar la intersección con el eje $x$ se hace $y = 0$ en la ecuación dada y se despeja la variable $x$. Análogamente, para hallar la intersección con el eje $y$, se hace $x = 0$ y se despeja $y$.

Por ejemplo, en la ecuación $y^2 + 2x = 16$, para $y = 0$, $x = 8$; para $x = 0$, $y = \pm 4$. Por tanto, la abscisa del punto de intersección con el eje $x$ es 8 y las ordenadas de los de intersección con el eje $y$ son $\pm 4$.

SIMETRIAS. Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si ésta es la mediatriz del segmento que los une. Dos puntos son simétricos con respecto a otro punto, si éste es el punto medio del segmento que los une. En consecuencia:

1. Si una ecuación no se altera al sustituir $x$ por $-x$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al eje $y$. A todo valor de $y$ en esta ecuación, le corresponden dos valores iguales de $x$ en valor absoluto pero de signos contrarios.

   Ejemplo: $x^2 - 6y + 12 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{6y - 12}$.

2. Si una ecuación no varía al sustituir $y$ por $-y$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al eje $x$. A todo valor de $x$ en esta ecuación le corresponden dos valores numéricamente iguales de $y$ en valor absoluto pero de signos contrarios.

   Ejemplo: $y^2 - 4x - 7 = 0$, es decir, $y = \pm\sqrt{4x + 7}$.

3. Si una ecuación no varía al sustituir $x$ por $-x$ e $y$ por $-y$, su representación gráfica, o lugar, es simétrica con respecto al origen.

   Ejemplo: $x^3 + x + y^3 = 0$.

CAMPOS DE VARIACION. Los valores de una de las variables para los cuales la otra se hace imaginaria, carecen de sentido.

Sea la ecuación $y^2 = 2x - 3$, o bien, $y = \pm\sqrt{2x - 3}$. Si $x$ es menor que 1,5, $2x - 3$ es negativo e $y$ es imaginario. Por tanto, no se deben considerar los valores de $x$ menores que 1,5 y, en consecuencia, la curva del lugar estará situada toda ella a la derecha de la recta $x = 1{,}5$.

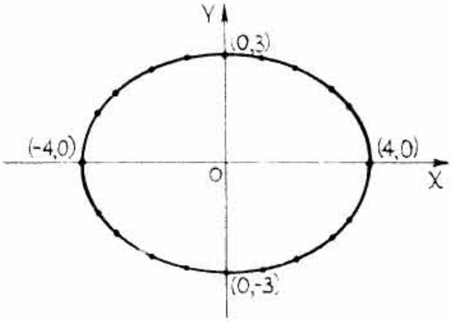
Despejando $x$, $x = \frac{1}{2}(y^2 + 3)$. Como $x$ es real para todos los valores de $y$, la curva del lugar se extiende hasta el infinito, aumentando $y$ a medida que lo hace $x$ desde el valor $x = 1{,}5$.

# PROBLEMAS RESUELTOS

## LUGAR GEOMETRICO DE UNA ECUACION

**1.** Representar la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

*Intersecciones con los ejes.* Para $y = 0$, $x = \pm 4$. Para $x = 0$, $y = \pm 3$. Por tanto, corta al eje $x$ en los puntos de abscisa $\pm 4$, y al eje $y$ en los de ordenada $\pm 3$.




*Simetrías.* Como la ecuación solo contiene potencias pares de $x$ e $y$, la curva es simétrica con respecto a los dos ejes y, por tanto, con respecto al origen. Así, pues, basta con dibujar la porción de curva contenida en el primer cuadrante y trazar después el resto de ella por simetría.

*Campo de variación.* Despejando $y$ y $x$,

$$y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}, \qquad x = \pm \frac{4}{3}\sqrt{9 - y^2}.$$

Si $x$ es, *en valor absoluto*, mayor que 4, $16 - x^2$ es negativo e $y$ es imaginario. Luego $x$ no puede tomar valores mayores que 4 ni menores que $-4$, es decir, $4 \geqq x \geqq -4$. Análogamente, $y$ no puede tomar valores mayores que 3 ni menores que $-3$, o sea, $3 \geqq y \geqq -3$.

| $x$ | 0 | $\pm 1$ | $\pm 2$ | $\pm 3$ | $\pm 3,5$ | $\pm 4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\pm 3$ | $\pm 2,9$ | $\pm 2,6$ | $\pm 2,0$ | $\pm 1,5$ | 0 |

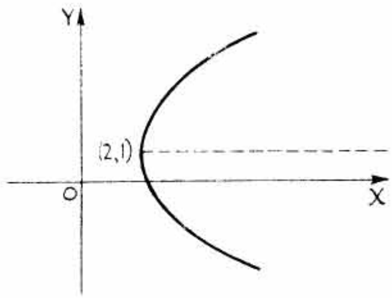
**2.** Representar la parábola de ecuación $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$.

Despejando $y$ de la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ siendo } a = 1,\ b = -2,\ c = -4x + 9:$$

$$y = 1 \pm 2\sqrt{x - 2}. \qquad (1)$$

Despejando $x$,
$$x = \frac{y^2 - 2y + 9}{4}. \qquad (2)$$




*Intersecciones con los ejes.* Para $y = 0$, $x = 9/4$. Para $x = 0$, $y$ es imaginario $(1 \pm 2\sqrt{-2})$. Por tanto, la curva corta al eje $x$ en el punto de abscisa $9/4$ y no corta al eje $y$.

*Simetrías.* La curva no es simétrica ni con respecto a los ejes ni con respecto al origen.

Es simétrica con respecto a la recta $y = 1$, con lo cual, a cada valor de $x$ se obtienen dos de $y$, uno mayor que 1 y otro menor que 1.

*Campos de variación.* De (1) se deduce que si $x$ es menor que 2, $x - 2$ es negativo e $y$ imaginario. Por tanto, $x$ no puede tomar valores menores que 2.

Análogamente, de (2) se deduce que como $x$ es real para todos los valores de $y$, esta variable puede tomar todos los valores reales.

| $x$ | 2 | 9/4 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0; 2 | 3; $-1$ | 3,8; $-1,8$ | 4,5; $-2,5$ | 5; $-3$ |

**3.** Representar la hipérbola $xy - 2y - x = 0$.

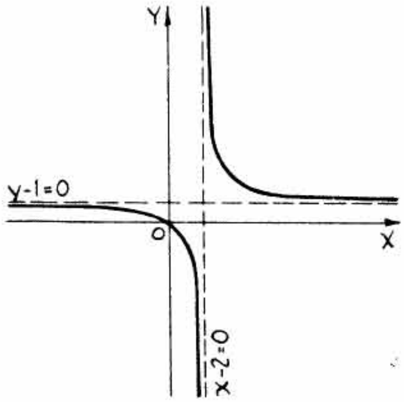
*Intersecciones con los ejes.* Para $x = 0$, $y = 0$; para $y = 0$, $x = 0$.

*Simetrías.* La curva no es simétrica ni con respecto a los ejes coordenados ni con respecto al origen.

*Campos de variación.* Despejando $y$, $y = \dfrac{x}{x-2}$. para $x = 2$, el denominador, $x - 2$, se anula e $y$ se hace infinito.

Despejando $x$, $x = \dfrac{2y}{y-1}$. Para $y = 1$, el denominador, $y - 1$, se anula y $x$ se hace infinito.

Ninguna de las dos variables se hace imaginaria para valores reales de la otra.




| $x$ | 0 | 1 | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{3}{4}$ | 2 | $2\frac{1}{4}$ | $2\frac{1}{2}$ | 3 | 4 | 5 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-1$ | $-3$ | $-7$ | $\infty$ | 9 | 5 | 3 | 2 | 1,7 | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |

Cuando $x$ tiende a 2 por la izquierda, $y$ tiende a menos infinito. Cuando $x$ tiende a 2 por la derecha, $y$ tiende a más infinito. Las dos ramas de la curva se aproximan indefinidamente a la recta $x = 2$ haciéndose tangentes a ella en $\pm$ infinito. La recta $x - 2 = 0$ se denomina asíntota vertical de la curva.

Veamos qué ocurre cuando $x$ tiende hacia infinito. Consideremos $y = \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{x}}$.

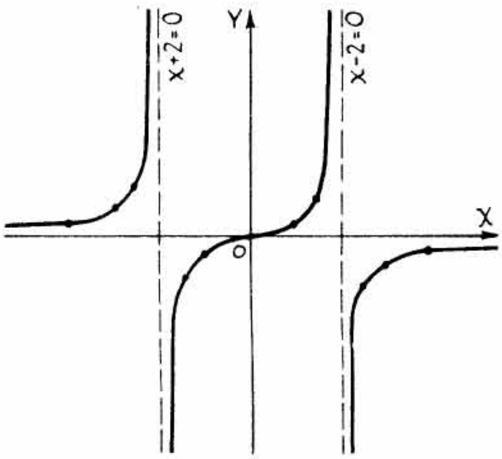
Cuando $x$ tiende a más o menos infinito, $\dfrac{2}{x}$ tiende a cero e $y$ tiende a 1. La recta $y - 1 = 0$ es una asíntota horizontal.

**4.** Representar la función

$$x^2y - 4y + x = 0.$$

*Intersecciones con los ejes.* Para $x = 0$, $y = 0$.
Para $y = 0$, $x = 0$.

*Simetrías.* Sustituyendo $-x$ por $x$, y $-y$ por $y$, se obtiene la ecuación $-x^2y + 4y - x = 0$, que multiplicada por $-1$ es la ecuación original. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al origen. No es simétrica con respecto a los ejes.




*Campo de variación.* Despejando $y$,

$$y = \frac{x}{4 - x^2} = \frac{x}{(2-x)(2+x)}.$$

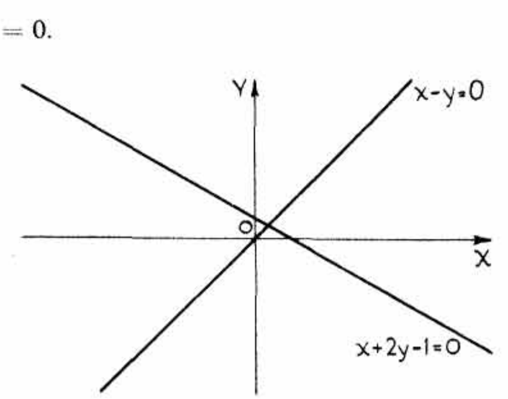
Las asíntotas verticales son $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$.

Despejando $x$ se obtiene, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$. La asíntota horizontal es $y = 0$.

Ninguna de las variables se hace imaginaria para valores reales de la otra.

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,3 | 0,6 | 1,1 | $\infty$ | $-0{,}9$ | $-0{,}3$ | 0 | 0,3 | 0,9 | $\infty$ | $-1{,}1$ | $-0{,}6$ | $-0{,}3$ |

**5.** Representar el lugar geométrico $x^2 - x + xy + y - 2y^2 = 0$.




Algunas veces, una ecuación se puede descomponer en producto de varios factores y, en este caso, su gráfica consta de la correspondiente a cada uno de ellos.

Como la ecuación dada se descompone en los factores

$$(x - y)(x + 2y - 1) = 0,$$

su gráfica se compone de las dos rectas

$$x - y = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 1 = 0.$$

**6.** Determinar los puntos reales, si existen, que satisfacen las ecuaciones siguientes.

*a*) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -5$.

*b*) $x^2 + y^2 = 0$.

*c*) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.

*d*) $x^2 + 2y^2 - 6x + 11 = 0$.

*e*) $(x^2 - 4y^2)^2 + (x + 3y - 10)^2 = 0$.

*f*) $x^2 + (2i - 1)x - (6i + 5)y - 1 = 0$.



*a*) Como el cuadrado de todo número real es positivo, tanto $(x + 4)^2$ como $(y - 2)^2$ son positivos y, por tanto, la ecuación no se satisface para valores reales ni de $x$ ni de $y$.

*b*) Es evidente que el único punto real que satisface a la ecuación dada es el origen (0, 0).

*c*) Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 0$, o bien, $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$, cuando $x - 4 = 0$ e $y + 1 = 0$, es decir, para $x = 4$, $y = -1$, el único punto real que la satisface es el de coordenadas $(4, -1)$.

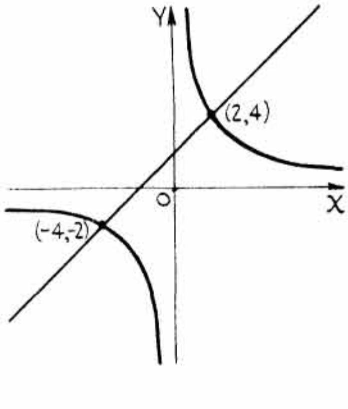
*d*) Escribiendo la ecuación dada en la forma $x^2 - 6x + 9 + 2y^2 + 2 = 0$, o bien, $(x - 3)^2 + 2y^2 + 2 = 0$, como $(x - 3)^2$, $2y^2$ y 2 son positivos para todos los valores reales de $x$ e $y$, la ecuación dada no se satisface para valores reales de dichas variables.

*e*) La ecuación se satisface para los valores de $x$ e $y$ que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 0$ y $x + 3y - 10 = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (4, 2) y $(-20, 10)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen la ecuación dada.

*f*) Agrupando las partes reales e imaginarias se obtiene $(x^2 - x - 5y - 1) + 2i(x - 3y) = 0$. Esta ecuación se satisface para los valores de $x$ e $y$ que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - x - 5y - 1 = 0$ y $x - 3y = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos (3, 1) y $(-1/3, -1/9)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen a la ecuación dada.

**7.** Resolver gráficamente el sistema formado por las ecuaciones siguientes y comprobar el resultado por vía algebraica.

$$xy = 8 \qquad (1)$$
$$x - y + 2 = 0 \qquad (2)$$




Despejando $y$ en (1) se obtiene, $y = \dfrac{8}{x}$. Para $x = 0$, $y$ es infinito.

Despejando $x$ en (1) se obtiene, $x = \dfrac{8}{y}$. Para $y = 0$, $x$ es infinito.

Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal y $x = 0$ una asíntota vertical.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\infty$ | 8 | 4 | 8/3 | 2 | $-8$ | $-4$ | $-8/3$ | $-2$ |

La ecuación (2) representa una recta que corta a los ejes en los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. Gráficamente se deducen las soluciones $(-4, -2)$ y $(2, 4)$.

**5.** Representar el lugar geométrico $x^2 - x + xy + y - 2y^2 = 0$.

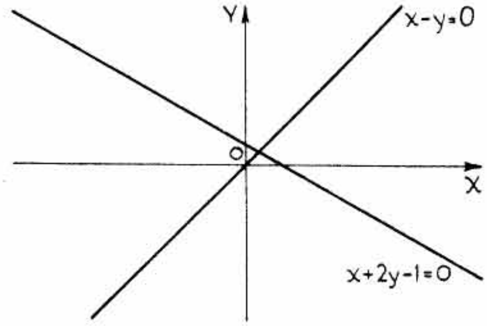
Algunas veces, una ecuación se puede descomponer en producto de varios factores y, en este caso, su gráfica consta de la correspondiente a cada uno de ellos.

Como la ecuación dada se descompone en los factores

$$(x - y)(x + 2y - 1) = 0,$$

su gráfica se compone de las dos rectas

$$x - y = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 1 = 0.$$




**6.** Determinar los puntos reales, si existen, que satisfacen las ecuaciones siguientes.

*a*) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -5$.

*b*) $x^2 + y^2 = 0$.

*c*) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$.

*d*) $x^2 + 2y^2 - 6x + 11 = 0$.

*e*) $(x^2 - 4y^2)^2 + (x + 3y - 10)^2 = 0$.

*f*) $x^2 + (2i - 1)x - (6i + 5)y - 1 = 0$.



*a*) Como el cuadrado de todo número real es positivo, tanto $(x + 4)^2$ como $(y - 2)^2$ son positivos y, por tanto, la ecuación no se satisface para valores reales ni de $x$ ni de $y$.

*b*) Es evidente que el único punto real que satisface a la ecuación dada es el origen $(0, 0)$.

*c*) Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 0$, o bien, $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$, cuando $x - 4 = 0$ e $y + 1 = 0$, es decir, para $x = 4$, $y = -1$, el único punto real que la satisface es el de coordenadas $(4, -1)$.

*d*) Escribiendo la ecuación dada en la forma $x^2 - 6x + 9 + 2y^2 + 2 = 0$, o bien, $(x - 3)^2 + 2y^2 + 2 = 0$, como $(x - 3)^2$, $2y^2$ y 2 son positivos para todos los valores reales de $x$ e $y$, la ecuación dada no se satisface para valores reales de dichas variables.

*e*) La ecuación se satisface para los valores de $x$ e $y$ que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 0$ y $x + 3y - 10 = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos $(4, 2)$ y $(-20, 10)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen la ecuación dada.

*f*) Agrupando las partes reales e imaginarias se obtiene $(x^2 - x - 5y - 1) + 2i(x - 3y) = 0$. Esta ecuación se satisface para los valores de $x$ e $y$ que verifican, simultáneamente, las ecuaciones $x^2 - x - 5y - 1 = 0$ y $x - 3y = 0$. Resolviendo el sistema formado por ambas se obtienen los puntos $(3, 1)$ y $(-1/3, -1/9)$, que son los únicos puntos reales que satisfacen a la ecuación dada.

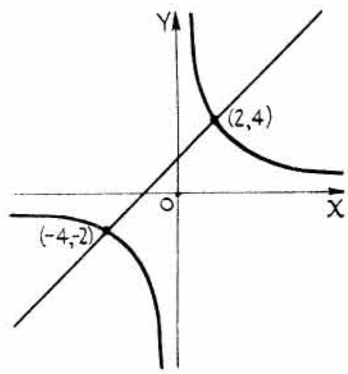
**7.** Resolver gráficamente el sistema formado por las ecuaciones siguientes y comprobar el resultado por vía algebraica.

$$xy = 8 \qquad (1)$$
$$x - y + 2 = 0 \qquad (2)$$

Despejando $y$ en (1) se obtiene, $y = \dfrac{8}{x}$. Para $x = 0$, $y$ es infinito.

Despejando $x$ en (1) se obtiene, $x = \dfrac{8}{y}$. Para $y = 0$, $x$ es infinito.

Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal y $x = 0$ una asíntota vertical.




| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
| $y$ | $\infty$ | 8 | 4 | 8/3 | 2 | $-8$ | $-4$ | $-8/3$ | $-2$ |

La ecuación (2) representa una recta que corta a los ejes en los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. Gráficamente se deducen las soluciones $(-4, -2)$ y $(2, 4)$.

*Solución algebraica.* De (2), $y = x + 2$.

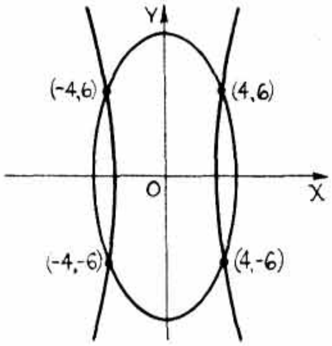
Sustituyendo en (1), $x(x + 2) = 8$, es decir, $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Descomponiendo en factores, $(x + 4)(x - 2) = 0$. Por tanto, $x = -4$ y $x = 2$.

Como $y = x + 2$, $y = -2$ para $x = -4$ e $y = 4$ para $x = 2$.

**8.** Resolver gráficamente el sistema de ecuaciones siguiente y comprobar su solución por vía algebraica.

$$4x^2 + y^2 = 100 \qquad (1)$$
$$9x^2 - y^2 = 108 \qquad (2)$$




Ambas curvas son simétricas con respecto a los ejes y al origen.

Despejando $y$ en (1) se obtiene, $y = \pm\sqrt{100 - 4x^2}$. Luego $x$ no puede tomar valores mayores que 5 ni menores que $-5$.

Despejando $x$ en (1) se obtiene, $x = \frac{1}{2}\sqrt{100 - y^2}$. Luego $y$ no puede tomar valores mayores que 10 ni menores que $-10$.

| $x$ | 0 | $\pm 1$ | $\pm 2$ | $\pm 3$ | $\pm 4$ | $\pm 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\pm 10$ | $\pm 9{,}8$ | $\pm 9{,}2$ | $\pm 8$ | $\pm 6$ | 0 |

Despejando $y$ en (2) se obtiene, $y = \pm 3\sqrt{x^2 - 12}$. Luego $x$ no puede tomar valores comprendidos entre $\sqrt{12}$ y $-\sqrt{12}$.

Despejando $x$ en (2) se obtiene, $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{y^2 + 108}$. Luego $y$ puede tomar cualquier valor.

| $x$ | $\pm\sqrt{12}$ | $\pm 4$ | $\pm 5$ | $\pm 6$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $\pm 6$ | $\pm 10{,}8$ | $\pm 14{,}7$ |

Gráficamente se deducen las soluciones $(4, \pm 6)$, $(-4, \pm 6)$.

*Solución algebraica.*

$$\begin{array}{r} 4x^2 + y^2 = 100 \\ 9x^2 - y^2 = 108 \\ \hline 13x^2 = 208, \end{array} \quad x^2 = 16, \text{ y } x = \pm 4.$$

$$y^2 = 9x^2 - 108 = 144 - 108 = 36, \text{ e } y = \pm 6.$$

## ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO.

**9.** Hallar la ecuación de la recta que sea,

*a*) paralela al eje $y$ y que corte al eje $x$ cinco unidades a la izquierda del origen.
*b*) paralela al eje $x$ y que corte al eje $y$ siete unidades por encima del origen.
*c*) paralela y a la derecha de la recta $x + 4 = 0$ y que diste de ella 10 unidades.
*d*) paralela y por debajo de la recta $y = 2$ y que diste de ella 5 unidades.
*e*) paralela a la recta $y + 8 = 0$ y que diste 6 unidades del punto (2, 1).
*f*) perpendicular a la recta $y - 2 = 0$ y que diste 4 unidades del punto $(-1, 7)$.

*a*) $x = -5$, es decir, $x + 5 = 0$. Esta es la ecuación de la recta que es paralela al eje $y$ y que está situada 5 unidades a su izquierda.

*b*) $y = 7$, es decir, $y - 7 = 0$. Esta es la ecuación de la recta que es paralela al eje $x$ y que está situada 7 unidades por encima del origen.

*c*) $x = -4 + 10$, es decir, $x = 6$. Esta es la ecuación de la recta situada 10 unidades a la derecha de la recta $x + 4 = 0$. Es paralela al eje $y$ y está situada 6 unidades a su derecha.

*d*) $y = 2 - 5$, es decir, $y = -3$. Esta es la ecuación de la recta situada 5 unidades por debajo de la recta $y - 2 = 0$. Es paralela al eje $x$ y está a 3 unidades por debajo de él.

*e*) Como la recta $y + 8 = 0$ es paralela al eje $x$, las dos rectas pedidas también lo serán y estarán situadas 6 unidades por debajo y por encima, respectivamente, de la recta $y = 1$. Luego $y = 1 \pm 6$, es decir, $y = 7$ e $y = -5$.

*f*) Como la recta $y - 2 = 0$ es paralela al eje $x$, las dos rectas pedidas también lo serán y estarán a 4 unidades de la derecha o a la izquierda de la recta $x = -1$. Luego $x = -1 \pm 4$, es decir, $x = 3$ y $x = -5$.

**10.** Hallar la ecuación de la recta que sea,

*a*) paralela al eje $x$ y que diste 5 unidades del punto $(3, -4)$,

*b*) equidistante de las rectas $x + 5 = 0$ y $x - 2 = 0$,

*c*) que diste tres veces más de la recta $y - 9 = 0$ que de $y + 2 = 0$.

Sea $(x, y)$ un punto genérico de la recta pedida.

*a*) $y = -4 \pm 5$, es decir, $y = 1$ e $y = -9$.

*b*) $\dfrac{5 + x}{2 - x} = 1$, o sea, $x = \dfrac{-5 + 2}{2} = -\dfrac{3}{2}$, o bien, $2x + 3 = 0$.

*c*) $\dfrac{y + 2}{9 - y} = \pm\dfrac{1}{3}$. Simplificando, $4y - 3 = 0$ y $2y + 15 = 0$.

Para la recta $4y - 3 = 0$, situada entre las dos dadas, la relación es $+\frac{1}{3}$. Para la recta $2y + 15 = 0$ situada por debajo de ellas, la relación es $-\frac{1}{3}$.

**11.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de $A(-2, 3)$ y $B(3, -1)$.

$PA = PB$, es decir, $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2}$.

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene, $10x - 8y + 3 = 0$. Esta es la ecuación de la mediatriz del segmento que une los dos puntos dados.

**12.** Hallar la ecuación de la recta que pase,

*a*) por el punto $(-4, 5)$ y cuya pendiente sea $2/3$.

*b*) por los puntos $(3, -1)$ y $(0, 6)$.

Sea $(x, y)$ un punto genérico de la recta pedida.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

*a*) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-4, 5)$ y $(x, y)$ es $\dfrac{2}{3}$.

Por tanto, $\dfrac{y - 5}{x + 4} = \dfrac{2}{3}$. Simplificando, $2x - 3y + 23 = 0$.

*b*) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, -1)$ y $(0, 6)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(x, y)$.

Por tanto, $\dfrac{6 + 1}{0 - 3} = \dfrac{y - 6}{x - 0}$. Simplificando, $7x + 3y - 18 = 0$.

**13.** Hallar la ecuación de la recta que pase,

*a*) por el punto $(2, -1)$ y sea perpendicular a la recta que une los puntos $(4, 3)$ y $(-2, 5)$,
*b*) por el punto $(-4, 1)$ y sea paralela a la recta que une los puntos $(2, 3)$ y $(-5, 0)$.

*a*) Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco, con signo contrario, de la pendiente de la otra.

Pendiente de la recta que pasa por $(4, 3)$ y $(-2, 5) = \dfrac{5-3}{-2-4} = -\dfrac{1}{3}$.

Pendiente de la recta pedida = recíproco con signo contrario de $-\dfrac{1}{3} = 3$.

Sea $(x, y)$ un punto genérico de la recta pedida. La pendiente de la recta que pasa por $(x, y)$ y $(2, -1)$ es $\dfrac{y+1}{x-2} = 3$. Simplificando, $3x - y - 7 = 0$.

*b*) Si las dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

Sea $(x, y)$ un punto genérico de la recta pedida.

Pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(-5, 0)$ = pendiente de la recta que pasa por $(x, y)$ y $(-4, 1)$.

Por tanto, $\dfrac{3-0}{2+5} = \dfrac{y-1}{x+4}$. Simplificando, $3x - 7y + 19 = 0$.

**14.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $C(2, -1)$ sea igual a 5.

Distancia $PC = 5$, es decir, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 5$.

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene la ecuación del lugar pedido, $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$.
Este lugar es una circunferencia de centro el punto $(2, -1)$ y de radio 5.

**15.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $A(0, 0)$ y $B(2, -4)$ sea igual a 20.

$(PA)^2 + (PB)^2 = 20$, o bien, $x^2 + y^2 + [(x-2)^2 + (y+4)^2] = 20$.

Simplificando, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Esta es la ecuación de una circunferencia de diámetro $AB$.

**16.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de sus distancias al origen.

Distancia de $P(x, y)$ al eje $y$ + distancia al eje $x$ = cuadrado de distancia al $(0, 0)$.

Luego $x + y = x^2 + y^2$, o bien, $x^2 + y^2 - x - y = 0$. Esta es la ecuación de una circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

**17.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya relación de distancias a la recta $y - 4 = 0$ y al punto $(3, 2)$ sea igual a 1.

$$\frac{\text{Distancia de } P(x, y) \text{ a } y - 4 = 0}{\text{Distancia de } P(x, y) \text{ a } (3, 2)} = 1, \text{ o sea, } \frac{4-y}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}} = 1.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $(4-y)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$, o bien, $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Esta es la ecuación de una parábola.

**18.** Dados dos puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(5, -3)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que la pendiente de $PP_1$ sea igual a la pendiente de $PP_2$ más la unidad.

Pendiente de $PP_1$ = pendiente de $PP_2 + 1$, o sea, $\dfrac{y-4}{x-2} = \dfrac{y+3}{x-5} + 1$.

Simplificando, $x^2 + 3y - 16 = 0$, que es la ecuación de una parábola.

**19.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ equidistantes del punto fijo $F(3, 2)$ y del eje $y$.

$PF = x$, es decir, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = x$, o sea, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2$.

Simplificando, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, que es la ecuación de una parábola.

**20.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(1, 4)$ y $F_2(1, -4)$ sea igual a 6.

$PF_1 - PF_2 = 6$, es decir, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = 6$.

Pasando un radical al segundo miembro.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = 6 + \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}.$$

Elevando al cuadrado, $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 36 + 12\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16$.

Simplificando, $4y + 9 = -3\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}$.

Elevando al cuadrado, $16y^2 + 72y + 81 = 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 + 72y + 144$.

Simplificando, $9x^2 - 7y^2 - 18x + 72 = 0$, ecuación de una hipérbola.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### LUGAR GEOMETRICO DE UNA ECUACION.

Trazar la gráfica de las ecuaciones 1 — 18.

**1.** $x^2 + 2x - y + 3 = 0$

**2.** $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$

**3.** $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0$

**4.** $2x^2 + 3y^2 - 18 = 0$

**5.** $3x^2 + 5y^2 = 0$

**6.** $4y^2 - x^3 = 0$

**7.** $(xy - 6)^2 + (x^2 + 3xy + y^2 + 5) = 0$

**8.** $8y - x^3 = 0$

**9.** $y^2 = x(x-2)(x+3)$

**10.** $y = x(x+2)(x-3)$

**11.** $(x^2 + 2xy - 24)^2 + (2x^2 + y^2 - 33)^2 = 0$

**12.** $x^2y + 4y - 8 = 0$

**13.** $x^2y^2 + 4x^2 - 9y^2 = 0$

**14.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$

**15.** $2x^2 + y^2 - 2y^2i + x^2i - 54 - 17i = 0$

**16.** $y(x+2)(x-4) - 8 = 0$

**17.** $x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0$

**18.** $(x^2 - y) - yi = (5 - 2x) + 3(1 - x)i$

Representar los siguientes pares de ecuaciones y resolver gráficamente el sistema que forman. Comprobar algebraicamente los resultados.

**19.** $y = x^2$, $x - y + 2 = 0$. *Sol.* $(2, 4)$, $(-1, 1)$.

**20.** $4y - x^2 = 0, \quad x^2y + 4y - 8 = 0.$ *Sol.* (2, 1), (—2, 1), las otras son imaginarias.

**21.** $x^2 + y^2 - 20 = 0, \quad y^2 - 2x - 12 = 0.$ *Sol.* $(2, \pm 4), (-4, \pm 2)$.

**22.** $y^2 - 2x - 5 = 0, \quad 3x^2 - 2y^2 - 1 = 0.$ *Sol.* $(2{,}7, \pm 3{,}2), (-1{,}4, \pm 1{,}5)$.

**23.** $y^2 - 4x - 9 = 0, \quad x^2 + 2y - 6 = 0.$ *Sol.* $(-2, 1), (-2, 1), (4, -5), (0, 3)$.

**24.** $2x^2 + y^2 - 6 = 0, \quad x^2 - y^2 - 4 = 0.$ *Sol.* Imaginarias.

**25.** $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 5 = 0.$ *Sol.* $(2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$.

**26.** $x^2 - y^2 + x - y = 0, \quad x^2 - 2xy - 3x + 6y = 0.$ *Sol.* $(3, -4), (-2/3, -1/3), (3, 3), (0, 0)$.

## ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO.

**27.** Hallar la ecuación de la recta:

*a*) Situada 3 unidades a la derecha del eje $y$. *Sol.* $x - 3 = 0$

*b*) Situada 5 unidades por debajo del eje $x$. *Sol.* $y + 5 = 0$

*c*) Paralela al eje $y$ y a 7 unidades del punto $(-2, 2)$. *Sol.* $x - 5 = 0, \quad x + 9 = 0$.

*d*) Situada 8 unidades a la izquierda de la recta $x = -2$. *Sol.* $x + 10 = 0$

*e*) Paralela al eje $x$ y mediatriz del segmento determinado por (2, 3) y (2, —7). *Sol.* $y + 2 = 0$

*f*) Que diste 4 veces más de la recta $x = 3$ que de $x = -2$. *Sol.* $3x + 11 = 0, \quad x + 1 = 0$.

*g*) Que pase por el punto $(-2, -3)$ y sea perpendicular a la recta $x - 3 = 0$. *Sol.* $y + 3 = 0$

*h*) Que equidiste de los ejes coordenados. *Sol.* $y - x = 0, \quad y + x = 0$.

*i*) Que pase por el punto $(3, -1)$ y sea paralela a la recta $y + 3 = 0$. *Sol.* $y + 1 = 0$

*j*) Que equidiste de las rectas $y - 7 = 0$ e $y + 2 = 0$. *Sol.* $2y - 5 = 0$

**28.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ sea igual a 4. *Sol.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

**29.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidisten de los puntos fijos $(-3, 1)$ y $(7, 5)$. *Sol.* $5x + 2y - 16 = 0$.

**30.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyas distancias al punto fijo (3, 2) sean la mitad de sus distancias al $(-1, 3)$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 26x - 10y + 42 = 0$.

**31.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidisten del punto (2, 3) y de la recta $x + 2 = 0$. *Sol.* $y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$.

**32.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto (3, 5) y sea tangente a la recta $y - 1 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$.

**33.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ sea igual a $2a$, $(2a > 2c)$. *Sol.* $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$.

**34.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (2, 3) y (2, —3) sea igual a 8. *Sol.* $16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$.

**35.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos (3, 2) y (—5, 2) sea igual a 6. *Sol.* $7x^2 - 9y^2 + 14x + 36y - 92 = 0$.

**36.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y + 4 = 0$ sea igual a los dos tercios de su distancia al punto (3, 2). *Sol.* $4x^2 - 5y^2 - 24x - 88y - 92 = 0$.

**37.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (—2, 2) sea tres veces su distancia a la recta $x - 4 = 0$. *Sol.* $8x^2 - y^2 - 76x + 4y + 136 = 0$.

**38.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los ejes coordenados sea igual a 9. *Sol.* $x^2 + y^2 = 9$.

**39.** Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos de coordenadas (—3, 2) y (5, —4). *Sol.* $4x - 3y = 7$.

**40.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que disten 3 unidades del origen de coordenadas. *Sol.* $x^2 + y^2 = 9$.

**41.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (2, 3) y que pase por el punto (5, —1). *Sol.* $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

**42.** Dados los puntos $A(0, -2)$, $B(0, 4)$ y $C(0, 0)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que el producto de las pendientes de $PA$ y $PB$ sea igual a la pendiente de $PC$. *Sol.* $y^2 - xy - 2y - 8 = 0$.

**43.** Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 12 unidades de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes coordenados. *Sol.* $x^2 + y^2 = 36$.

**44.** Dados los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 1)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de manera que la pendiente de $PA$ sea el recíproco, con signo contrario, de la pendiente de $PB$. *Sol.* $x^2 + y^2 - x - 4y - 3 = 0$.

CAPITULO 3

# La línea recta

UNA LINEA RECTA, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular), etc.

FORMAS DE LA ECUACION DE LA RECTA:

*a*) PUNTO-PENDIENTE. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea $m$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

*b*) PENDIENTE-ORDENADA EN EL ORIGEN. La ecuación de la recta de pendiente $m$ y que corta al eje $y$ en el punto $(0, b)$ —siendo $b$ la ordenada en el origen— es

$$y = mx + b.$$

*c*) CARTESIANA. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

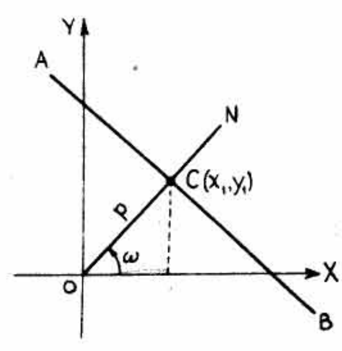
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

*d*) REDUCIDA O ABSCISA Y ORDENADA EN EL ORIGEN. La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados $x$ e $y$ en los puntos $(a, 0)$ —siendo $a$ la abscisa en el origen— y $(0, b)$ —siendo $b$ la ordenada en el origen—, respectivamente, es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

*e*) GENERAL. Una ecuación lineal o de primer grado en las variables $x$ e $y$ es de la forma $Ax + By + C = 0$, en donde $A$, $B$ y $C$ son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es $m = -\dfrac{A}{B}$ y su ordenada en el origen $b = -\dfrac{C}{B}$.

*f*) NORMAL. Una recta también queda determinada si se conocen la longitud de la perpendicular a ella trazada desde el origen $(0, 0)$ y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje $x$.




Sea $AB$ la recta y $ON$ la perpendicular desde el origen $O$ a $AB$.

La distancia $p$ (parámetro) de $O$ a $AB$ se considera siempre positiva cualquiera que sea la posición de $AB$, es decir, para todos los valores del ángulo $\omega$ que la perpendicular forma con el semieje $x$ positivo desde 0 a 360°.

Sean $(x_1, y_1)$ las coordenadas del punto $C$.

En estas condiciones, $x_1 = p \cos \omega$, $y_1 = p \operatorname{sen} \omega$, y pendiente de $AB = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \omega}$ $= -\operatorname{cotg} \omega = -\dfrac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}$.

Llamando $(x, y)$ otro punto cualquiera de $AB$, $y - y_1 = -\operatorname{cotg}\omega\,(x - x_1)$, o bien,

$$y - p \operatorname{sen}\omega = -\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}(x - p\cos\omega).$$

Simplificando, $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$, que es la ecuación de la recta en forma normal.

REDUCCION DE LA FORMA GENERAL A NORMAL. Sean $Ax + By + C = 0$ y $x\cos\omega + y \operatorname{sen}\omega - p = 0$ las ecuaciones de una misma recta escritas en sus formas general y normal respectivamente; los coeficientes de ambas ecuaciones han de ser iguales o proporcionales. Por tanto,

$$\frac{\cos\omega}{A} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{B} = \frac{-p}{C} = k, \text{ siendo } k \text{ la constante de proporcionalidad.}$$

En estas condiciones, $\cos\omega = kA$, $\operatorname{sen}\omega = kB$, $-p = kC$. Elevando al cuadrado y sumando las dos primeras, $\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = k^2(A^2 + B^2)$, o sea, $1 = k^2(A^2 + B^2)$, de donde $k = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Teniendo en cuenta este valor de $k$,

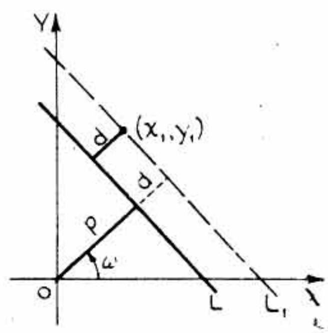
$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \operatorname{sen}\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

en la que se debe considerar el signo del radical el opuesto al de $C$. Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de $B$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA. Para hallar la distancia $d$ de un punto $(x_1, y_1)$ a una recta $L$, se traza la recta $L_1$ paralela a $L$ y que pase por $(x_1, y_1)$.




La ecuación de $L$ es $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$, y la ecuación de $L_1$ es $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - (p + d) = 0$, ya que ambas rectas son paralelas.

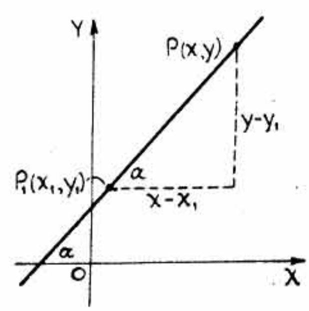
Las coordenadas de $(x_1, y_1)$ satisfacen la ecuación de $L_1$, $x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - (p + d) = 0$. Despejando la distancia $d$,

$$d = x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - p.$$

En el caso de que $(x_1, y_1)$ y el origen estén a distinto lado de la recta $L$, la distancia $d$ es positiva; si estuvieran al mismo lado de $L$, $d$ sería negativa.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1. Deducir la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente, o coeficiente angular, sea $m$. (Ver figura.)**




Sea $P(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta.

La pendiente $m$ de la recta que pasa por los puntos $(x, y)$ y $(x_1, y_1)$ es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \text{ o bien, } y - y_1 = m(x - x_1).$$

**2. Deducir la ecuación de la recta de pendiente $m$ que corte al eje $y$ en el punto $(0, b)$.**

Sea $P(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta.

La pendiente $m$ de la recta que pasa por $(x, y)$ y $(0, b)$ es $m = \dfrac{y - b}{x - 0}$. Por tanto, $y = mx + b$.

**3.** Hallar la ecuación de la recta (*a*) que pasa por $(-4, 3)$ y tenga de pendiente $\frac{1}{2}$, (*b*) que pasa por $(0, 5)$ y tenga de pendiente $-2$, (*c*) que pasa por $(2, 0)$ y tenga de pendiente $\frac{3}{4}$.

Sea $P(x, y)$ otro punto genérico cualquiera de cada una de las rectas.
Aplicando la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

*a*) $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$, es decir, $2y - 6 = x + 4$, o bien, $x - 2y + 10 = 0$.

*b*) $y - 5 = -2(x - 0)$, es decir, $y - 5 = 2x$, o bien, $2x + y - 5 = 0$.

Esta ecuación también se puede obtener aplicando la fórmula $y = mx + b$.
En esta forma, $y = -2x + 5$, es decir, $2x + y - 5 = 0$.

*c*) $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2)$, o sea, $4y = 3x - 6$, o bien, $3x - 4y - 6 = 0$.

**4.** Deducir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$.
Sea $(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$.
Pendiente de la recta que une $(x, y)$ y $(x_1, y_1)$ = pendiente de la recta que une $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$.

Por tanto, $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

**5.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -3)$ y $(4, 2)$.

Aplicando $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, resulta $\dfrac{y + 3}{x + 2} = \dfrac{-3 - 2}{-2 - 4}$, o sea, $5x - 6y - 8 = 0$.

**6.** Deducir la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $(a, 0)$ y $(0, b)$. ($a$ = abscisa en el origen, $b$ = ordenada en el origen.)

Sustituyendo en $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ se tiene $\dfrac{y - 0}{x - a} = \dfrac{0 - b}{a - 0}$, o sea, $bx + ay = ab$.

Dividiendo $bx + ay = ab$ por $ab$ se tiene $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

**7.** Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y $-3$, respectivamente.

Aplicando $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, se tiene la ecuación $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-3} = 1$, o bien, $3x - 5y - 15 = 0$.

**8.** Hallar la pendiente $m$ y la ordenada en el origen $b$ de la recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$, siendo $A$, $B$ y $C$ constantes arbitrarias.

Despejando $y$, $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Comparando con $y = mx + b$, $m = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Si $B = 0$ se tiene $Ax + C = 0$, o bien, $x = -\dfrac{C}{A}$, recta paralela al eje $y$.

Si $A = 0$ se tiene $By + C = 0$, o bien, $y = -\dfrac{C}{B}$, recta paralela al eje $x$.

**9.** **Hallar la pendiente $m$ y la ordenada en el origen $b$ de la recta $2y + 3x = 7$.**

Escribiendo la ecuación en la forma $y = mx + b$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$. Luego su pendiente es $-3/2$ y su ordenada en el origen $7/2$.

Si se escribe en la forma $Ax + By + C = 0$, es decir, $3x + 2y - 7 = 0$, la pendiente $m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$.

**10.** **Demostrar que si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ son paralelas, $A/A' = B/B'$, y que si son perpendiculares, $AA' + BB' = 0$.**

Si son paralelas, $m = m'$, es decir, $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$, o bien, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

Si son perpendiculares, $m = -\frac{1}{m'}$, es decir, $-\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$, o bien, $AA' + BB' = 0$.

**11.** **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que une los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.**

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Sea $(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(2, -3)$.

Pendiente de la recta que pasa por $(x, y)$ y $(2, -3)$ = pendiente de la recta que pasa por $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

Por tanto, $\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{1 - 2}{4 + 2}$. Simplificando, $x + 6y + 16 = 0$.

**12.** **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.**

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$, que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$, es $-\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$, luego la pendiente de la recta pedida es $-\frac{3}{2}$.

Sea $(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(-2, 3)$ y tiene de pendiente $-\frac{3}{2}$.

Entonces, $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$. Simplificando, $3x + 2y = 0$.

**13.** **Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $(7, 4)$ y $(-1, -2)$.**

El punto medio $(x_0, y_0)$ del segmento tiene de coordenadas

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Pendiente del segmento $= \frac{4 + 2}{7 + 1} = \frac{3}{4}$, luego la pendiente de la recta pedida es igual a $-\frac{4}{3}$.

Sea $(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(3, 1)$ y tiene de pendiente $-\frac{4}{3}$.

Entonces, $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$. Simplificando, $4x + 3y - 15 = 0$.

**14.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2, -3)$ y tenga una inclinación de $60°$.
Sea $(x, y)$ un punto genérico de la recta de pendiente $m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

Entonces, $y + 3 = \sqrt{3}(x - 2)$. Simplificando, $\sqrt{3}x - y - 3 - 2\sqrt{3} = 0$.

**15.** Hallar el valor del parámetro $k$ de forma que:
*a*) $3kx + 5y + k - 2 = 0$ pase por el punto $(-1, 4)$.
*b*) $4x - ky - 7 = 0$ tenga de pendiente 3;
*c*) $kx - y = 3k - 6$ tenga de abscisa en el origen 5.

*a*) Sustituyendo $x = -1, y = 4$: $3k(-1) + 5(4) + k - 2 = 0$, $2k = 18$, $k = 9$.

*b*) Aplicando la forma $Ax + By + C = 0$, pendiente $= -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{4}{-k} = 3$, $k = \dfrac{4}{3}$.

O bien, reduciendo $4x - ky - 7 = 0$ a la forma $y = mx + b$, $y = \dfrac{4}{k}x - \dfrac{7}{k}$.

Por tanto, pendiente $= \dfrac{4}{k} = 3$, $3k = 4$, $k = \dfrac{4}{3}$.

*c*) Para $y = 0$, $x = \dfrac{3k - 6}{k} = 5$. De aquí resulta $3k - 6 = 5k$, $k = -3$.

**16.** Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente $-3/4$ que formen con los ejes coordenados un triángulo de área 24 unidades de superficie.

Una recta de pendiente $-\dfrac{3}{4}$ y ordenada en el origen $b$ viene dada por $y = -\dfrac{3}{4}x + b$.

Para $x = 0$, $y = b$; para $y = 0$, $x = \dfrac{4}{3}b$.

Area del triángulo $= \frac{1}{2}$(producto de los catetos) $= \frac{1}{2}\left(b \cdot \dfrac{4}{3}b\right) = \dfrac{2}{3}b^2 = 24$.

De aquí se deduce que $2b^2 = 3(24)$, $b^2 = 36$, $b = \pm 6$, y las ecuaciones pedidas son

$$y = -\frac{3}{4}x \pm 6, \text{ es decir, } 3x + 4y - 24 = 0 \text{ y } 3x + 4y + 24 = 0.$$

**17.** Hallar el lugar geométrico representado por las ecuaciones siguientes:
*a*) $x^2 + 8xy - 9y^2 = 0$;
*b*) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

*a*) Como la ecuación se descompone en los factores $(x - y)(x + 9y) = 0$, el lugar que representa son las dos rectas $x - y = 0$, $x + 9y = 0$.

*b*) Descomponiendo en factores, $(x - 1)(x^2 - 3x - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 4) = 0$.
Por tanto, representa las tres rectas $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 4 = 0$.

**18.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x, y)$ que disten el doble de la recta $x = 5$ que de la recta $y = 8$.

Distancia del punto $(x, y)$ a la recta $x = 5 = \pm 2$[distancia de $(x, y)$ a la recta $y = 8$],
es decir, $x - 5 = \pm 2(y - 8)$.

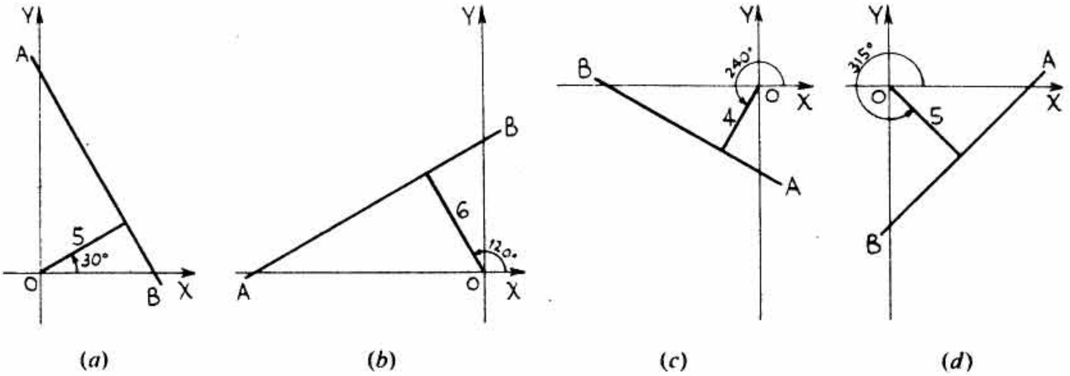
Por consiguiente, el lugar geométrico está constituido por el par de rectas

$$x - 2y + 11 = 0 \text{ y } x + 2y - 21 = 0, \text{ o sea, } (x - 2y + 11)(x + 2y - 21) = 0.$$

## ECUACION NORMAL DE LA RECTA.

**19.** Trazar las rectas $AB$ para los valores de $p$ y $\omega$ que se indican y escribir sus ecuaciones respectivas.

*a)* $p = 5,\ \omega = \pi/6 = 30°$.
*b)* $p = 6,\ \omega = 2\pi/3 = 120°$.
*c)* $p = 4,\ \omega = 4\pi/3 = 240°$.
*d)* $p = 5,\ \omega = 7\pi/4 = 315°$.




*a)* $x \cos 30° + y \operatorname{sen} 30° - 5 = 0$, es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$, o bien, $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$.

*b)* $x \cos 120° + y \operatorname{sen} 120° - 6 = 0$, es decir, $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 6 = 0$, o bien, $x - \sqrt{3}y + 12 = 0$

*c)* $x \cos 240° + y \operatorname{sen} 240° - 4 = 0$, es decir, $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 4 = 0$, o bien, $x + \sqrt{3}y + 8 = 0$.

*d)* $x \cos 315° + y \operatorname{sen} 315° - 5 = 0$, es decir, $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 5 = 0$, o bien, $x - y - 5\sqrt{2} = 0$

**20.** Reducir a forma normal las ecuaciones siguientes y hallar $p$ y $\omega$.

*a)* $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$.
*b)* $3x - 4y - 6 = 0$.
*c)* $x + y + 8 = 0$.
*d)* $12x - 5y = 0$.
*e)* $4y - 7 = 0$.
*f)* $x + 5 = 0$.

La forma normal de $Ax + By + C = 0$ es $\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$

*a)* $A = \sqrt{3},\ B = 1,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Como $C(= -9)$ es negativo, $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo. La ecuación en forma normal es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{sen}\omega = \frac{1}{2},\quad p = \frac{9}{2},\quad \omega = 30°.$$

Como sen $\omega$ y cos $\omega$ son ambos positivos, $\omega$ está en el primer cuadrante.

*b)* $A = 3,\ B = -4,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{9+16} = 5$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \frac{3}{5},\quad \operatorname{sen}\omega = -\frac{4}{5},\quad p = \frac{6}{5},\quad \omega = 306°\ 52'.$$

Como cos $\omega$ es positivo y sen $\omega$ es negativo, $\omega$ está en el cuarto cuadrante.

*c)* $A = 1,\ B = 1,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2}$. Como $C(= +8)$ es positivo, el radical se toma con signo negativo. La ecuación en forma normal es

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 4\sqrt{2} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \operatorname{sen}\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad p = 4\sqrt{2},\quad \omega = 225°.$$

Como $\cos\omega$ y $\operatorname{sen}\omega$ son negativos, $\omega$ está en el tercer cuadrante.

*d*) $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{144+25}=13$. Como $C=0$, el radical se toma con el mismo signo que $B(=-5)$, con lo cual, $\operatorname{sen}\omega$ será positivo y $\omega < 180°$. La ecuación en forma normal es

$$-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y=0, \quad \text{y} \quad \cos\omega=-\frac{12}{13},\ \operatorname{sen}\omega=\frac{5}{13},\ p=0, \quad \omega=157°23'.$$

Como $\cos\omega$ es negativo y $\operatorname{sen}\omega$ es positivo, $\omega$ está en el segundo cuadrante.

*e*) $A=0$, $B=4$, $\sqrt{A^2+B^2}=4$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{4}{4}y-\frac{7}{4}=0, \text{ es decir, } y-\frac{7}{4}=0, \quad \text{y} \quad \cos\omega=0, \quad \operatorname{sen}\omega=1, \quad p=\frac{7}{4}, \quad \omega=90°.$$

*f*) $A=1$, $B=0$, $\sqrt{A^2+B^2}=1$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{1}{-1}x+\frac{5}{-1}=0, \text{ es decir, } -x-5=0, \quad \text{y} \quad \cos\omega=-1,\ \operatorname{sen}\omega=0,\ p=5,\ \omega=180°.$$

**21.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(4, -2)$ y distan 2 unidades del origen.

La ecuación de las rectas que pasan por el punto $(4, -2)$ es $y+2=m(x-4)$, o bien, $mx-y-(4m+2)=0$.

La forma normal de $mx-y-(4m+2)=0$ es $\dfrac{mx-y-(4m+2)}{\pm\sqrt{m^2+1}}=0$.

Luego, $p=\dfrac{4m+2}{\pm\sqrt{m^2+1}}=2$, o bien, $(4m+2)^2=4(m^2+1)$. Resolviendo, $m=0, -\dfrac{4}{3}$.

Las ecuaciones pedidas son $y+2=0$, e $y+2=-\dfrac{4}{3}(x-4)$, o bien, $4x+3y-10=0$.

**22.** Hallar la distancia $d$ desde *a*) la recta $8x+15y-24=0$ al punto $(-2, -3)$.
*b*) la recta $6x-8y+5=0$ al punto $(-1, 7)$.

*a*) La forma normal de la ecuación es $\dfrac{8x+15y-24}{+\sqrt{8^2+(15)^2}}=0$, o bien, $\dfrac{8x+15y-24}{17}=0$.

$d=\dfrac{8(-2)+15(-3)-24}{17}=\dfrac{-85}{17}=-5$. Como $d$ es negativo, el punto $(-2, -3)$ y el origen están al mismo lado de la recta.

*b*) La forma normal de la ecuación es $\dfrac{6x-8y+5}{-\sqrt{6^2+(-8)^2}}=0$, o bien, $\dfrac{6x-8y+5}{-10}=0$.

$d=\dfrac{6(-1)-8(7)+5}{-10}=\dfrac{-57}{-10}=5{,}7$. Como $d$ es positivo, el punto $(-1, 7)$ y el origen están a distinto lado de la recta.

**23.** Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

$(L_1)$ $3x+4y+8=0$
y $(L_2)$ $5x+12y-15=0$.

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico de la bisectriz $L_3$.

Tendremos,

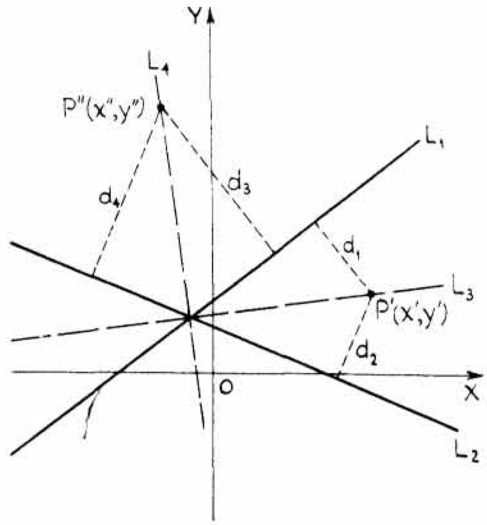
$$d_1 = \frac{3x' - 4y' + 8}{-5}, \quad d_2 = \frac{5x' + 12y' - 15}{13}.$$

Para todo punto de $L_3$ se verifica que $d_1$ y $d_2$ son iguales en valor absoluto.

Los puntos $P'$ y el origen están al mismo lado de $L_1$ pero a distinto lado de $L_2$. Luego $d_1$ es negativo y $d_2$ positivo, y $d_1 = -d_2$. Así, pues, el lugar geométrico de $P'$ viene definido

$$\frac{3x' - 4y' + 8}{-5} = -\frac{5x' + 12y' - 15}{13}.$$

Simplificando y suprimiendo las primas, la ecuación de $L_3$ es $14x - 112y + 179 = 0$.




Análogamente, sea $P''(x'', y'')$ un punto genérico de la bisectriz $L_4$. Como $P''$ y el origen están a distinto lado de $L_1$ y $L_2$, las distancias $d_3$ y $d_4$ son positivas y $d_3 = d_4$.

Por tanto, el lugar de $P''$ es $\dfrac{3x'' - 4y'' + 8}{-5} = \dfrac{5x'' + 12y'' - 15}{13}$.

Simplificando y suprimiendo las primas, la ecuación de $L_4$ es $64x + 8y + 29 = 0$.

Obsérvese que $L_3$ y $L_4$ son rectas perpendiculares y que la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

**24.** Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $12x - 5y - 15 = 0$ que disten de ella 4 unidades.

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico cualquiera de la recta pedida. Entonces, $\dfrac{12x' - 5y' - 15}{13} = \pm 4.$

Simplificando y suprimiendo las primas, las ecuaciones pedidas son

$$12x - 5y - 67 = 0 \quad \text{y} \quad 12x - 5y + 37 = 0.$$

**25.** Hallar el valor de $k$ para que la distancia $d$ de la recta $8x + 15y + k = 0$ al punto $(2, 3)$ sea igual a 5 unidades.

$$d = \frac{8(2) + 15(3) + k}{\pm 17} = \pm 5. \qquad \text{Resolviendo, } k = -146,\ 24.$$

**26.** Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de lados

$(L_1)$ $7x - y + 11 = 0$,
$(L_2)$ $x + y - 15 = 0$,
$(L_3)$ $7x + 17y + 65 = 0$.

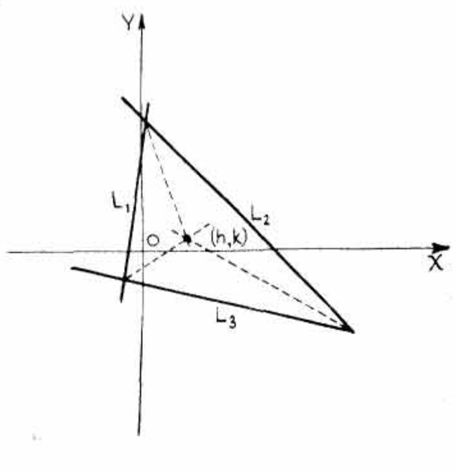
El punto de intersección $(h, k)$ es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Por tanto, la distancia

de $(h, k)$ a $L_1$ es $d_1 = \dfrac{7h - k + 11}{-\sqrt{50}}$,

de $(h, k)$ a $L_2$ es $d_2 = \dfrac{h + k - 15}{\sqrt{2}}$,

de $(h, k)$ a $L_3$ es $d_3 = \dfrac{7h + 17k + 65}{-\sqrt{338}}$,



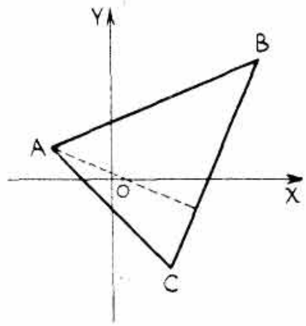
Estas distancias son todas negativas ya que el punto y el origen están al mismo lado de cada recta. Luego $d_1 = d_2 = d_3$.

Como $d_1 = d_2$, $\dfrac{7h - k + 11}{-5\sqrt{2}} = \dfrac{h + k - 15}{\sqrt{2}}$. Simplificando, $3h + k = 16$.

Como $d_1 = d_3$, $\dfrac{7h - k + 11}{-5\sqrt{2}} = \dfrac{7h + 17k + 65}{-13\sqrt{2}}$. Simplificando, $4h - 7k = 13$.

Resolviendo el sistema formado por $3h + k = 16$ y $4h - 7k = 13$ se obtiene, $h = 5$, $k = 1$.

**27.** Dado el triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(2, -3)$, hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice $A$ y el área del mismo.




Ecuación de $BC$: $\dfrac{y + 3}{x - 2} = \dfrac{4 + 3}{5 - 2}$, o bien, $7x - 3y - 23 = 0$.

Distancia de $BC$ a $A = \dfrac{7(-2) - 3(1) - 23}{\sqrt{49 + 9}} = \dfrac{-40}{\sqrt{58}}$.

Longitud de $BC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (4 + 3)^2} = \sqrt{58}$.

Area del triángulo $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{58} \cdot \dfrac{40}{\sqrt{58}}\right) = 20$ unidades de superficie.

## HAZ DE RECTAS.

**28.** Hallar la ecuación del haz de rectas

*a*) de pendiente $-4$,
*b*) que pasa por el punto (4, 1),
*c*) de ordenada en el origen 7,
*d*) de abscisa en el origen 5,
*e*) cuya suma de coordenadas en el origen sea 8,
*f*) cuya ordenada en el origen sea el doble que la abscisa en el origen,
*g*) que una de las coordenadas en el origen sea el doble de la otra.

Llamemos $k$, en cada caso, la constante arbitraria o parámetro del haz.

*a*) Sea $k$ = ordenada en el origen del haz de rectas cuya pendiente es $-4$.
De la expresión $y = mx + b$ se obtiene la ecuación pedida, $y = -4x + k$, o bien, $4x + y - k = 0$.

*b*) Sea $k$ = pendiente del haz de rectas que pasa por el punto (4, 1).
Sustituyendo en $y - y_1 = m(x - x_1)$, la ecuación pedida es

$$y - 1 = k(x - 4), \text{ o bien, } kx - y + 1 - 4k = 0.$$

*c*) Sea $k$ = pendiente del haz de rectas cuya ordenada en el origen es 7.
De $y = mx + b$ se obtiene la ecuación, $y = kx + 7$, o bien, $kx - y + 7 = 0$.

*d*) Sea $k$ = pendiente del haz de rectas cuya abscisa en el origen es 5.
De $y - y_1 = m(x - x_1)$ se obtiene la ecuación, $y - 0 = k(x - 5)$, o bien, $kx - y - 5k = 0$.

*e*) Sea $k$ = abscisa en el origen del haz de rectas. Entonces, $(8 - k)$ = ordenada en el origen de dicho haz.

De $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ se obtiene la ecuación, $\dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{8 - k} = 1$, o bien, $(8 - k)x + ky - 8k + k^2 = 0$.

*f*) Sea $k$ = ordenada en el origen. Entonces, $\frac{1}{2}k$ = abscisa en el origen.

De $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ se obtiene la ecuación, $\dfrac{x}{\frac{1}{2}k} + \dfrac{y}{k} = 1$, o bien, $2x + y - k = 0$.

*g*) Pendiente de una recta $= -\dfrac{\text{ordenada en el origen}}{\text{abscisa en el origen}}$. Cuando la abscisa en el origen sea igual a ($\pm$) el doble de la ordenada en el origen, la pendiente es $\mp\frac{1}{2}$; cuando la ordenada en el origen sea numéricamente igual al doble de abscisa en el origen, la pendiente de la recta es $\mp 2$. Sea $k$ = ordenada en el origen. De $y = mx + b$, las ecuaciones del haz de rectas pedido son $y = \pm\frac{1}{2}x + k$ e $y = \pm 2x + k$.

**29.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (—2, —4) y cuyas coordenadas en el origen suman 3.

La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto (—2, —4) es $y + 4 = m(x + 2)$.

Para $x = 0$, $y = 2m - 4$; para $y = 0$, $x = \dfrac{4 - 2m}{m}$.

La suma de las coordenadas en el origen es 3. Luego, $2m - 4 + \dfrac{4 - 2m}{m} = 3$.

Simplificando, $2m^2 - 9m + 4 = 0$. Resolviendo, $(2m - 1)(m - 4) = 0$, $m = \frac{1}{2}, 4$.

Sustituyendo estos valores de $m$ en $y + 4 = m(x + 2)$, las ecuaciones pedidas son, $y + 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$ e $y + 4 = 4(x + 2)$, o sea, $x - 2y - 6 = 0$ y $4x - y + 4 = 0$.

**30.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 10 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y por el punto (2, 1).

$3x - 2y + 10 + k(4x + 3y - 7) = 0$ es la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto de intersección de las dos dadas.

Como la recta pedida ha de pasar también por el punto (2, 1), $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 10 + k(4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 7) = 0$.

Despejando $k$ de esta ecuación resulta $k = -7/2$. La recta pedida es

$$3x - 2y + 10 - \frac{7}{2}(4x + 3y - 7) = 0, \text{ o bien, } 22x + 25y - 69 = 0.$$

**31.** Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $4x + y - 1 = 0$ que pase por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$.

La pendiente de la recta $4x + y - 1 = 0$ es $-4$. Luego la pendiente de la recta pedida es $\frac{1}{4}$.
La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$ es

$$2x - 5y + 3 + k(x - 3y - 7) = 0, \text{ o bien, } (2 + k)x - (5 + 3k)y + (3 - 7k) = 0. \quad (1)$$

La pendiente de cada una de las rectas del haz es $\dfrac{2 + k}{5 + 3k}$ y la pendiente de la recta pedida es $\frac{1}{4}$.

Por tanto, $\dfrac{2 + k}{5 + 3k} = \dfrac{1}{4}$, de donde, $k = -3$.

Sustituyendo este valor de $k = -3$ en (1) resulta la ecuación pedida, $x - 4y - 24 = 0$.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

*a*) Pasa por (0, 2), $m = 3$. *Sol.* $y - 3x - 2 = 0$.
*b*) Pasa por (0, —3), $m = -2$. *Sol.* $y + 2x + 3 = 0$.
*c*) Pasa por (0, 4), $m = 1/3$. *Sol.* $x - 3y + 12 = 0$.
*d*) Pasa por (0, —1), $m = 0$. *Sol.* $y + 1 = 0$.
*e*) Pasa por (0, 3), $m = -4/3$. *Sol.* $4x + 3y - 9 = 0$.

**2.** Hallar la ecuación de las rectas que pasan por los puntos:

*a*) $(2, -3)$ y $(4, 2)$. *Sol.* $5x - 2y - 16 = 0$.
*b*) $(-4, 1)$ y $(3, -5)$. *Sol.* $6x + 7y + 17 = 0$.
*c*) $(7, 0)$ y $(0, 4)$. *Sol.* $4x + 7y - 28 = 0$.
*d*) $(0, 0)$ y $(5, -3)$. *Sol.* $3x + 5y = 0$.
*e*) $(5, -3)$ y $(5, 2)$. *Sol.* $x - 5 = 0$.
*f*) $(-5, 2)$ y $(3, 2)$. *Sol.* $y - 2 = 0$.

**3.** En el triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ y $C(3, 2)$, hallar,
*a*) las ecuaciones de sus medianas,
*Sol.* $7x + 6y - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 6y + 9 = 0$.
*b*) el punto de intersección de las mismas. *Sol.* $(-1, 4/3)$.

**4.** *a*) Hallar las ecuaciones de las alturas del triángulo del Problema 3.
*Sol.* $2x + 3y - 8 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x - 5y + 4 = 0$.
*b*) Hallar el punto de intersección de dichas alturas. *Sol.* $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

**5.** *a*) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo del Problema 3.
*Sol.* $2x - 5y + 11 = 0$, $2x - y + 6 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$.
*b*) Hallar el punto de intersección de dichas mediatrices.
*Sol.* $(-19/8, 5/4)$. Este es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

**6.** Demostrar que los puntos de intersección de las medianas, de las alturas y de las mediatrices de los lados del triángulo del Problema 3, están en línea recta. *Sol.* $2x - 33y + 46 = 0$.

**7.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y cuya abscisa en el origen es el doble que la ordenada en el origen. *Sol.* $x + 2y - 8 = 0$.

**8.** Hallar el valor del parámetro $K$ en la ecuación $2x + 3y + K = 0$ de forma que dicha recta forme con los ejes coordenados un triángulo de área 27 unidades de superficie. *Sol.* $K = \pm 18$.

**9.** Hallar el valor del parámetro $K$ para que la recta de ecuación $2x + 3Ky - 13 = 0$ pase por el punto $(-2, 4)$. *Sol.* $K = 17/12$.

**10.** Hallar el valor de $K$ para que la recta de ecuación $3x - Ky - 8 = 0$ forme un ángulo de 45° con la recta $2x + 5y - 17 = 0$. *Sol.* $K = 7 - 9/7$.

**11.** Hallar un punto de la recta $3x + y + 4 = 0$ que equidista de los puntos $(-5, 6)$ y $(3, 2)$.
*Sol.* $(-2, 2)$.

**12.** Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(1, -6)$ y cuyo producto de coordenadas en el origen es 1. *Sol.* $9x + y - 3 = 0$, $4x + y + 2 = 0$.

**13.** Hallar la ecuación de la recta de abscisa en el origen $-3/7$ y que es perpendicular a la recta $3x + 4y - 10 = 0$. *Sol.* $28x - 21y + 12 = 0$.

**14.** Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $2x + 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con $3x - 2y + 8 = 0$. *Sol.* $7x - 2y + 16 = 0$.

**15.** Trazar las rectas siguientes para los valores de $p$ y $\omega$ que se indican, escribiendo sus ecuaciones.

*a*) $p = 6$, $\omega = 30°$. *Sol.* $\sqrt{3}x + y - 12 = 0$.
*b*) $p = \sqrt{2}$, $\omega = \pi/4$. *Sol.* $x + y - 2 = 0$.
*c*) $p = 3$, $\omega = 2\pi/3$. *Sol.* $x - \sqrt{3}y + 6 = 0$.
*d*) $p = 4$, $\omega = 7\pi/4$. *Sol.* $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.
*e*) $p = 3$, $\omega = 0°$. *Sol.* $x - 3 = 0$.
*f*) $p = 4$, $\omega = 3\pi/2$. *Sol.* $y + 4 = 0$.

**16.** Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes en forma normal. Hallar $p$ y $\omega$.

*a)* $x - 3y + 6 = 0$. *Sol.* $-\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{6}{\sqrt{10}} = 0$, $p = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, $\omega = 108°26'$.

*b)* $2x + 3y - 10 = 0$. *Sol.* $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{10}{\sqrt{13}} = 0$, $p = \frac{10\sqrt{13}}{13}$, $\omega = 56°\ 19'$.

*c)* $3x + 4y - 5 = 0$. *Sol.* $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$, $p = 1$, $\omega = 53°\ 8'$.

*d)* $5x + 12y = 0$. *Sol.* $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y = 0$, $p = 0$, $\omega = 67°\ 23'$.

*e)* $x + y - \sqrt{2} = 0$. *Sol.* $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1 = 0$, $p = 1$, $\omega = \pi/4$.

**17.** Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo formado por las rectas $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$.
*Sol.* $9x - 13y - 90 = 0$, $2x + 11y - 20 = 0$, $7x + y - 70 = 0$. Punto (10, 0).

**18.** Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados son las rectas $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$ y $6x - 7y - 16 = 0$.
*Sol.* $x + 13y + 5 = 0$, $5x - 3y - 3 = 0$, $4x + y - 1 = 0$. Punto (6/17, —7/17).

**19.** Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados son las rectas $y = 0$, $3x - 4y = 0$ y $4x + 3y - 50 = 0$.
*Sol.* $x - 3y = 0$, $2x + 4y - 25 = 0$, $7x - y - 50 = 0$. Punto (15/2, 5/2).

**20.** Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de vértices (—1, 3), (3, 6) y (31/5, 0). *Sol.* (17/7, 24/7).

**21.** Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son las rectas $15x - 8y + 25 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ y $5x + 12y - 30 = 0$.
*Sol.* (4/7, 1/4). Radio = 13/7.

**22.** Hallar el valor de $K$ de forma que la distancia de la recta $y + 5 = K(x - 3)$ al origen sea 3.
*Sol.* $K = -8/15, \infty$.

**23.** Hallar el lugar geométrico de los puntos que distan de la recta $5x + 12y - 20 = 0$ tres veces más que de la recta $4x - 3y + 12 = 0$. *Sol.* $181x - 57y + 368 = 0$, $131x - 177y + 568 = 0$.

**24.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de su distancia al (3, —2) sea igual a su distancia a la recta $5x - 12y - 13 = 0$.
*Sol.* $13x^2 + 13y^2 - 73x + 40y + 156 = 0$, $13x^2 + 13y^2 - 83x + 64y + 182 = 0$.

**25.** Hallar dos puntos de la recta $5x - 12y + 15 = 0$ cuya distancia a $3x + 4y - 12 = 0$ sea 3.
*Sol.* $\left(\frac{33}{7}, \frac{45}{14}\right), \left(-\frac{12}{7}, \frac{15}{28}\right)$.

**26.** Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $8x - 15y + 34 = 0$ que distan 3 unidades del punto (—2, 3). *Sol.* $8x - 15y + 112 = 0$, $8x - 15y + 10 = 0$.

**27.** Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $3x - 4y - 2 = 0$ y del punto (—1, 2). ***Sol.*** $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 62x - 116y + 121 = 0$.

**28.** Hallar el área y la longitud de la altura trazada desde $A$ al lado $BC$ de los triángulos cuyos vértices son:

*a*) $A(-3, 3)$, $B(5, 5)$, $C(2, -4)$. *Sol.* Altura $= \frac{11\sqrt{10}}{5}$, área = 33 unidades de superficie.

*b*) $A(5, 6)$, $B(1, -4)$, $C(-4, 0)$. *Sol.* Altura $= \frac{66\sqrt{41}}{41}$, área = 33 unidades de superficie.

*c*) $A(-1, 4)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$. *Sol.* Altura $= \frac{12\sqrt{5}}{5}$, área = 24 unidades de superficie.

*d*) $A(0, 4)$, $B(5, 1)$, $C(1, -3)$. *Sol.* Altura $= 4\sqrt{2}$, área = 16 unidades de superficie.

**29.** Hallar el valor de $K$ en las ecuaciones de las rectas siguientes de forma que se verifique la condición que se indica.

*a*) $(2 + K)x - (3 - K)y + 4K + 14 = 0$, pase por el punto $(2, 3)$. *Sol.* $K = -1$.
*b*) $Kx + (3 - K)y + 7 = 0$, la pendiente de la recta sea 7. *Sol.* $K = 7/2$.
*c*) $5x - 12y + 3 + K = 0$, la distancia de esta recta al punto $(-3, 2)$ sea, en valor absoluto, igual a 4. *Sol.* $K = -16$, $K = 88$.

**30.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 5y + 9 = 0$ y $4x + 7y - 28 = 0$ y cumple la condición siguiente:

*a*) Pasa por el punto $(-3, -5)$. *Sol.* $13x - 8y - 1 = 0$.
*b*) Pasa por el punto $(4, 2)$. *Sol.* $38x + 87y - 326 = 0$.
*c*) Es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$. *Sol.* $82x + 123y - 514 = 0$.
*d*) Es perpendicular a la recta $4x + 5y - 20 = 0$. *Sol.* $205x - 164y + 95 = 0$.
*e*) Iguales coordenadas en el origen. *Sol.* $41x + 41y - 197 = 0$, $120x - 77y = 0$.

**31.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 1 = 0$ y $2x + 5y - 9 = 0$ y cuya distancia al origen es (*a*) 2, (*b*) $\sqrt{5}$.
*Sol.* (*a*) $x - 2 = 0$, $3x + 4y - 10 = 0$; (*b*) $2x + y - 5 = 0$.

CAPITULO 4

# La circunferencia

UNA CIRCUNFERENCIA, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables. Ahora bien, no toda ecuación de este tipo representa siempre una circunferencia; solo en determinadas condiciones es cierto.

Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA de centro $(h, k)$ y radio $r$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Si el centro es el origen de coordenadas, la ecuación toma la forma $x^2 + y^2 = r^2$.

Toda circunferencia se puede expresar por medio de una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si escribimos esta ecuación en la forma

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

y sumamos y restamos los términos que se indican para completar cuadrados, se tiene,

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

o bien $$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

El centro es el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real.
Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1. Hallar** la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y radio 4.

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

**2. Hallar** las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$ *a*) sumando y restando los términos adecuados para completar cuadrados, *b*) aplicando la fórmula general.

*a*) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 5y + \frac{25}{4} = 14 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$, o sea, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4}$.

Luego el centro es el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

*b*) $h = -\frac{D}{2} = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{E}{2} = -\frac{5}{2}$, y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 25 + 56} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

**3.** Hallar el valor de $k$ para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

Como $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$, resulta $7 = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 - 4k}$. Elevando al cuadrado y resolviendo, $k = -8$.

**4.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(5, -2)$ y que pase por el punto $(-1, 5)$.

El radio de la circunferencia es $r = \sqrt{(5 + 1)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$.

Luego $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$, o bien, $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 56$.

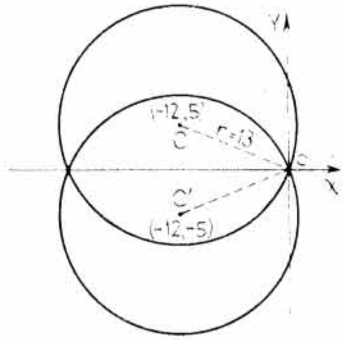
**5.** Hallar la ecuación de la circunferencia de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos $(5, -1)$ y $(-3, 7)$.

Las coordenadas del centro son $h = \dfrac{5 - 3}{2} = 1$, $\quad k = \dfrac{-1 + 7}{2} = 3$.

El radio es $r = \sqrt{(5 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$.

Luego $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32$, o bien, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 22$.

**6.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto $(0, 0)$, tenga de radio $r = 13$ y la abscisa de su centro sea $-12$.




Como la circunferencia pasa por el origen.

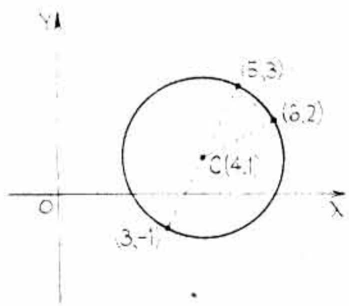
$$h^2 + k^2 = r^2, \text{ o } 144 + k^2 = 169$$

Resolviendo: $k^2 = 169 - 144 = 25$, $\quad k = \pm 5$.

Luego, $\quad (x + 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$
y $\quad (x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$.

Desarrollando, $\quad x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0$
y $\quad x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$.

**7.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5, 3)$, $(6, 2)$ y $(3, -1)$.




Cada una de las expresiones

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

o bien, $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

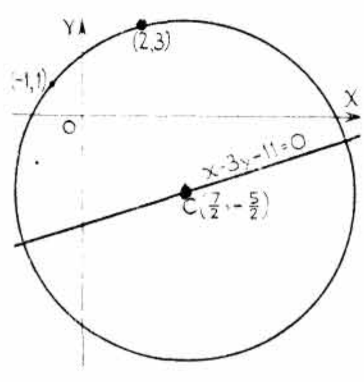
contiene tres constantes indeterminadas con lo que serán necesarias tres condiciones para determinarlas. Como la circunferencia debe pasar por los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas de los puntos en lugar de $x$ e $y$ resolviendo, a continuación, las tres ecuaciones lineales en $D$, $E$ y $F$. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} 25 + 9 + 5D + 3E + F &= 0, \\ 36 + 4 + 6D + 2E + F &= 0, \\ 9 + 1 + 3D - E + F &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene, $D = -8$, $E = -2$ y $F = 12$.

Sustituyendo estos valores de $D$, $E$ y $F$, resulta la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

**8.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 3) y (—1, 1) y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.




Sean $(h, k)$ las coordenadas del centro de la circunferencia. Como $(h, k)$ debe equidistar de los puntos (2, 3) y (—1, 1),

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h+1)^2 + (k-1)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $6h + 4k = 11$.

Como el centro debe estar sobre la recta $x - 3y - 11 = 0$ se tiene, $h - 3k = 11$.

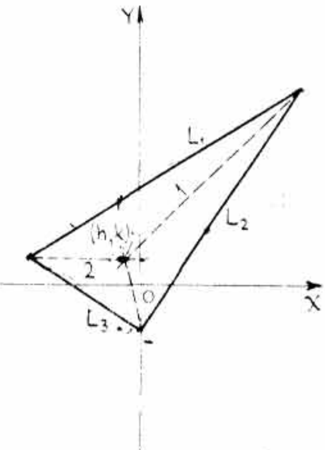
Despejando los valores de $h$ y $k$ de estas ecuaciones se deduce, $h = \frac{7}{2}$, $k = -\frac{5}{2}$.

Por tanto, $r = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}-1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{130}$.

La ecuación pedida es $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$.

**9.** Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son las rectas

$$L_1:\ 2x - 3y + 21 = 0,$$
$$L_2:\ 3x - 2y - 6 = 0,$$
$$L_3:\ 2x + 3y + 9 = 0.$$




Como el centro de la circunferencia es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo será necesario hallar, previamente, las ecuaciones de dichas bisectrices. Sean $(h, k)$ las coordenadas del centro. Para determinar la bisectriz (1) (ver Figura):

$$\frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}} = \frac{3h - 2k - 6}{\sqrt{13}}, \text{ o bien, } h - k + 3 = 0.$$

Para la bisectriz (2):

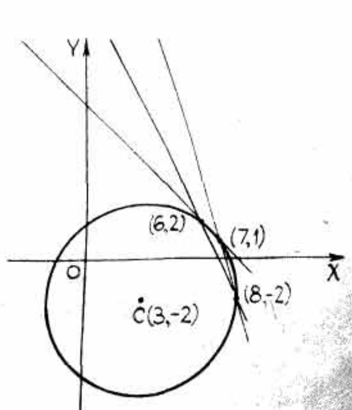
$$\frac{2h + 3k + 9}{-\sqrt{13}} = \frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}}, \text{ o bien, } 6k - 12 = 0.$$

Luego, $k = 2$, $h = -1$, y $r = \dfrac{2(-1) + 3(2) + 9}{\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$.

Sustituyendo en $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$, o sea, $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8$.

**10.** Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados son las rectas

$$x + y = 8,$$
$$2x + y = 14,$$
$$3x + y = 22.$$




Resolviendo estas ecuaciones tomadas dos a dos, se obtienen las coordenadas de los vértices (6, 2), (7, 1) y (8, —2).

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación general de la circunferencia, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, resulta el sistema siguiente:

$$6D + 2E + F = -40,$$
$$7D + E + F = -50,$$
$$8D - 2E + F = -68.$$

cuya solución proporciona los valores $D = -6$, $E = 4$ y $F = -12$.

Por sustitución se deduce la ecuación pedida, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

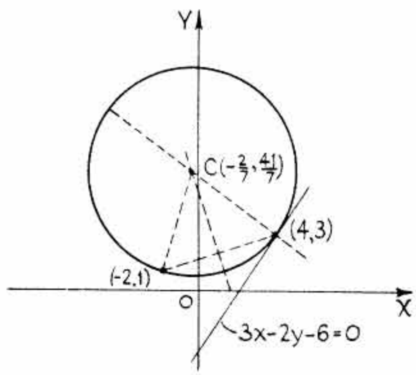
**11.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(-4, 2)$ y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.

El radio se puede determinar calculando la distancia del punto $(-4, 2)$ a la recta.

$$r = \left| \frac{3(-4) + 4(2) - 16}{5} \right| = \left| -\frac{20}{5} \right| = \left| -4 \right| \text{ o sea } 4.$$

La ecuación pedida es $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$, o $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

**12.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto $(-2, 1)$ y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$.




Como la circunferencia debe pasar por los dos puntos $(-2, 1)$ y $(4, 3)$, su centro estará situado sobre la mediatriz del segmento que determinan. Por otra parte, también debe pertenecer a la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$.

La ecuación de la mediatriz del segmento es $3x + y - 5 = 0$.

La ecuación de la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$ es $2x + 3y - 17 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$ se obtiene, $x = -\frac{2}{7}$, $y = \frac{41}{7}$. Por tanto, $r = \sqrt{\left(4 + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(3 - \frac{41}{7}\right)^2} = \frac{10}{7}\sqrt{13}$.

La ecuación pedida es $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1.300}{49}$, o bien, $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$.

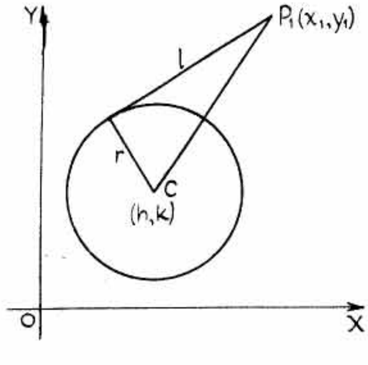
**13.** Hallar el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuyas hipotenusas son el segmento que determinan los puntos $(0, b)$ y $(a, b)$.

Sea $(x, y)$ el vértice del ángulo recto. Entonces, como los dos catetos son perpendiculares, la pendiente de uno de ellos debe ser el recíproco con signo contrario de la pendiente del otro, es decir,

$$\frac{y - b}{x - 0} = -\frac{1}{\dfrac{y - b}{x - a}} = -\frac{x - a}{y - b}.$$

Simplificando, $(y - b)^2 = -x(x - a)$, o sea, $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$ (una circunferencia).

**14.** Hallar la longitud de la tangente desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.




$$l^2 = (P_1C)^2 - r^2,$$

o bien $\quad l^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2,$

de donde $\quad l = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$

En consecuencia, la longitud de la tangente trazada desde un punto cualquiera exterior a una circunferencia es igual a la raíz cuadrada del valor que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la misma.

**15.** *Definición.* Se llama *eje radical* de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las tangentes a ellas son de igual longitud.

Deducir la ecuación del eje radical de las circunferencias,

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0.$$

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico cualquiera del eje radical pedido.

Tendremos $l_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1}$ y $l_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Como $l_1 = l_2$, $\sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas, $(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$, que es la ecuación de una recta.

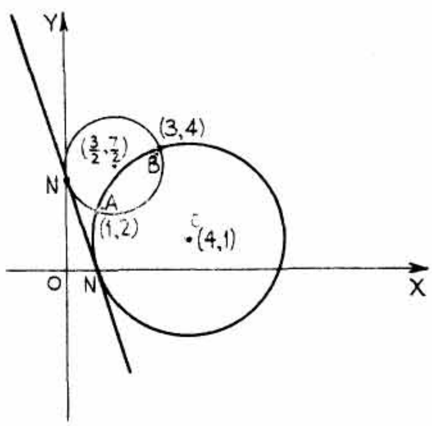
**16.** Hallar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de dos dadas.

Sean $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ y $x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$, dos circunferencias secantes.

La ecuación $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 + K(x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0$ representa a dicha familia, ya que las coordenadas de los puntos de intersección satisfacen a las ecuaciones de dichas circunferencias.

Para todos los valores de $K$, excepto para $K = -1$, se obtiene una circunferencia. Para $K = -1$, la ecuación se reduce a una recta, que es la cuerda común de dichas circunferencias.

**17.** Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasen por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y sean tangentes a la recta $3x + y - 3 = 0$.




Para hallar las coordenadas del centro, $C(h, k)$, se tienen en cuenta las igualdades $CA = CB$ y $CA = CN$, es decir,

$$(h - 1)^2 + (k - 2)^2 = (h - 3)^2 + (k - 4)^2$$

y

$$(h - 1)^2 + (k - 2)^2 = \left(\frac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}\right)^2$$

Desarrollando y simplificando se obtiene,

$$h + k = 5$$

y

$$h^2 + 9k^2 - 6hk - 2h - 34k + 41 = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resultan $h = 4$, $k = 1$ y $h = 3/2$, $k = 7/2$.

De $r = \dfrac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}$ se deduce $r = \dfrac{12 + 1 - 3}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y $r = \dfrac{9/2 + 7/2 - 3}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Teniendo en cuenta $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, tendremos

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad \text{y} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}.$$

Desarrollando estas ecuaciones, resulta $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.

**18.** Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto (4, 1).

Sean $(h, k)$ las coordenadas del centro.

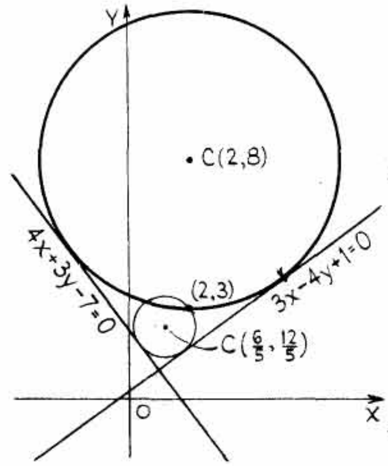
Entonces $\dfrac{3h + 4k - 16}{5} = \pm 5$, o bien, $3h + 4k - 16 = \pm 25$.

Por otra parte, $(h - 4)^2 + (k - 1)^2 = 25$, es decir, $h^2 + k^2 - 8h - 2k = 8$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las dos soluciones (7, 5) y (1, —3).

Las ecuaciones de las dos circunferencias respectivas son $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$, y $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

**19.** Hallar las ecuaciones de las dos circunferencias tangentes a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y que pasan por el punto (2, 3).




Sea $(h, k)$ las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{3h - 4k + 1}{-5} = \frac{4h + 3k - 7}{5} \quad \text{o} \quad 7h - k - 6 = 0. \quad (a)$$

Por otra parte, como $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5}$,

$$(h - 2)^2 + (k - 3)^2 = \left(\frac{3h - 4k + 1}{-5}\right)^2$$

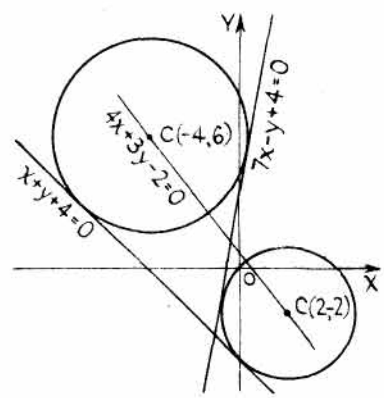
o bien, $16h^2 + 9k^2 - 106h - 142k + 24hk + 324 = 0.$ $(b)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $(a)$ y $(b)$ se obtienen, para las coordenadas de los dos centros, los puntos (2, 8) y (6/5, 12/5).

Para la circunferencia de centro (2, 8), $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5} = \dfrac{6 - 32 + 1}{-5} = 5$ y la ecuación de la misma es $(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

Para la de centro $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$, $r = 1$, y la ecuación de la circunferencia es $\left(x - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{12}{5}\right)^2 = 1$.

**20.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y que tenga su centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$.




Sean $(h, k)$ las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{h + k + 4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7h - k + 4}{5\sqrt{2}}$$

o bien, $h - 3k - 8 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$,

que son las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas. Como el centro ha de pertenecer a la recta $4x + 3y - 2 = 0$ se verificará, $4h + 3k - 2 = 0$. De esta ecuación, y de $h - 3k - 8 = 0$, se obtienen $h = 2$ y $k = -2$.

Por tanto, $r = \dfrac{2 - 2 + 4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, con lo que la ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones $4h + 3k - 2 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$ resulta, $h = -4$, $k = 6$ y $r = 3\sqrt{2}$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$.

**21.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x', y')$ cuya suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $5x + 12y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 10 = 0$ sea igual a 5.

La distancia del punto $(x', y')$ a la recta $5x + 12y - 4 = 0$ es $\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}$, y a la recta $12x - 5y + 10 = 0$ es $\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}$. Luego, $\left(\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}\right)^2 = 5$.

Simplificando y suprimiendo las primas, se obtiene $169x^2 + 169y^2 + 200x - 196y = 729$, una circunferencia.

**22.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x, y)$ cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(-1, -2)$ sea igual a 34.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (x+1)^2 + (y+2)^2 = 34$. Simplificando, se obtiene, $x^2 + y^2 - x - y = 8$, una circunferencia.

**23.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x, y)$ cuya relación de distancias a los puntos fijos $(-1, 3)$ y $(3, -2)$ sea igual a $a/b$.

$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}} = \dfrac{a}{b}$. Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene, $(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 - a^2)y^2 + 2(b^2 + 3a^2)x - 2(3b^2 + 2a^2)y = 13a^2 - 10b^2$, una circunferencia.

**24.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x, y)$ cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-5, 2)$ sea igual a su distancia a la recta $5x + 12y - 26 = 0$.

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = \pm\left(\dfrac{5x + 12y - 26}{13}\right)^2$. Desarrollando y simplificando,

$13x^2 + 13y^2 + 125x - 64y + 403 = 0$ y $13x^2 + 13y^2 + 135x - 40y + 351 = 0$, circunferencias.

**25.** Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

El centro de la circunferencia dada es $(2, -3)$. El radio de la circunferencia pedida es la distancia del punto $(2, -3)$ a la recta $3x - 4y + 7 = 0$, es decir, $r = \dfrac{6 + 12 + 7}{5} = 5$.

Luego la circunferencia pedida tiene de ecuación $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

**26.** Hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio 15 que sean tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ en el punto $(6, -8)$.

El centro de estas circunferencias debe estar sobre la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(6, -8)$, cuya ecuación es $y = -\dfrac{4}{3}x$.

Llamando $(h, k)$ a las coordenadas del centro, $k = -\dfrac{4}{3}h$ y $(h-6)^2 + (k+8)^2 = 225$.

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones se obtienen los valores de $h$ y $k$ $(-3, 4)$ y $(15, -20)$.

Las ecuaciones de las dos circunferencias son $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 225$ y $(x-15)^2 + (y+20)^2 = 225$.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar la ecuación de la circunferencia

*a*) de centro el punto (3, —1) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

*b*) de centro el punto (0, 5) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

*c*) de centro el punto (—4, 2) y diámetro 8. *Sol.* $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

*d*) de centro el punto (4, —1) y que pase por (—1, 3).
*Sol.* $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$.

*e*) de diámetro el segmento que une los puntos (—3, 5) y (7, —3).
*Sol.* $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$.

*f*) de centro el punto (—4, 3) y que sea tangente al eje *y*.
*Sol.* $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$.

*g*) de centro el punto (3, —4) y que pase por el origen.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

*h*) de centro el origen y que pase por el punto (6, 0).
*Sol.* $x^2 + y^2 - 36 = 0$.

*i*) que sea tangente a los dos ejes de coordenadas de radio $r = 8$ y cuyo centro esté en el primer cuadrante. *Sol.* $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$.

*j*) que pase por el origen, de radio $r = 10$ y cuya abscisa de su centro sea —6.
*Sol.* $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$, $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$.

**2.** Hallar el centro y el radio de las circunferencias siguientes. Determinar si cada una de ellas es real, imaginaria o se reduce a un punto. Aplicar la fórmula y comprobarla por suma y resta de los términos adecuados para completar cuadrados.

*a*) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$. *Sol.* $(4, -5)$, $r = \sqrt{53}$, real.

*b*) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$. *Sol.* $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{-13}$, imaginaria.

*c*) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$. *Sol.* $\left(4, \frac{7}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{113}$, real.

*d*) $x^2 + y^2 = 0$. *Sol.* $(0, 0)$, $r = 0$, un punto.

*e*) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$. *Sol.* $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $r = \frac{1}{4}$, real.

**3.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos

*a*) (4, 5), (3, —2), y (1, —4). *Sol.* $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$.

*b*) (8, —2), (6, 2), y (3, —7). *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

*c*) (1, 1), (1, 3), y (9, 2). *Sol.* $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$.

*d*) (—4, —3), (—1, —7), y (0, 0). *Sol.* $x^2 + y^2 + x + 7y = 0$.

*e*) (1, 2), (3, 1), y (—3, —1). *Sol.* $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$.

**4.** Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados

*a*) $x - y + 2 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, y $4x + y - 17 = 0$.
*Sol.* $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$.

*b*) $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, y $x - y + 1 = 0$.
*Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 13x - 11y + 20 = 0$.

*c*) $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, y $x + y - 5 = 0$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 17x - 7y + 52 = 0$.

*d*) $2x + y - 8 = 0$, $x - y - 1 = 0$, y $x - 7y - 19 = 0$.
*Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$.

*e*) $2x - y + 7 = 0$, $3x + 5y - 9 = 0$, y $x - 7y - 13 = 0$.
*Sol.* $169x^2 + 169y^2 - 8x + 498y - 3707 = 0$.

**5.** Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de lados

*a*) $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, y $3x + 4y - 5 = 0$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0$.

*b*) $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$, y $6x - 7y - 16 = 0$.
*Sol.* $85x^2 + 85y^2 - 60x + 70y - 96 = 0$.

*c*) $y = 0$, $3x - 4y = 0$, y $4x + 3y - 50 = 0$.
*Sol.* $4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$.

*d*) $15x - 8y + 25 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, y $5x + 12y - 30 = 0$.
*Sol.* $784x^2 + 784y^2 - 896x - 392y - 2399 = 0$.

*e*) inscrita al triángulo de vértices $(-1, 3)$, $(3, 6)$ y $\left(\frac{31}{5}, 0\right)$.
*Sol.* $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$.

**6.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ que sea tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

**7.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el origen que sea tangente a la recta $8x - 15y - 12 = 0$. *Sol.* $289x^2 + 289y^2 = 144$.

**8.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, -3)$ que sea tangente a la recta que une los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 1)$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

**9.** Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esté en el eje $x$ y que pase por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 5)$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$.

**10.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, -4)$ y $(5, 2)$ y que tiene su centro en la recta $x - 2y + 9 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 47 = 0$.

X **11.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(4, 1)$ y sea tangente al eje $x$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$.

**12.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(3, 6)$ y sea tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$.

**13.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(11, 2)$ y sea tangente a la recta $2x + 3y - 18 = 0$ en el punto $(3, 4)$. *Sol.* $5x^2 + 5y^2 - 98x - 142y + 737 = 0$.

**14.** Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$ en el punto $(7, 2)$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$.

**15.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 2y + 4 = 0$ y $2x - y - 8 = 0$ y que pase por el punto $(4, -1)$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0$, $x^2 + y^2 - 70x + 46y + 309 = 0$.

**16.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 3y + 9 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$ y que tenga su centro en la recta $7x + 12y - 32 = 0$.
*Sol.* $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 31 = 0$, $961x^2 + 961y^2 + 248x - 5270y + 7201 = 0$.

**17.** Hallar la ecuación de la circunferencia definida por el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos $(-4, 1)$ y $(3, 2)$.
*Sol.* $x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0$.

**18.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $4x + 3y - 50 = 0$ y $3x - 4y - 25 = 0$ y cuyo radio sea igual a 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$,
$x^2 + y^2 - 36x - 2y + 300 = 0$,
$x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$,
$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

**19.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $2x + 3y - 6 = 0$ y $3x - 2y + 8 = 0$ sea igual a 10. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.

*Sol.* $13x^2 + 13y^2 + 24x - 68y - 30 = 0$. Centro $\left(-\frac{12}{13}, \frac{34}{13}\right)$, $r = \sqrt{10}$.

**20.** Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $b_1x - a_1y + c_2 = 0$ es una constante $K^2$, es una circunferencia.

**21.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $(-2, -5)$ y $(3, 4)$ sea igual a 70. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.
*Sol.* $x^2 + y^2 - x + y - 8 = 0$. Centro $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{34}$.

**22.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos $(2, -1)$ y $(-3, 4)$ sea igual a $2/3$. Si es una circunferencia, determinar su centro y su radio.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$. Centro $(6, -5)$, $r = 6\sqrt{2}$.

**23.** Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos $(a, b)$ y $(c, d)$ es igual a $K$ (constante) es una circunferencia.

**24.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-2, -5)$ sea el triple de la correspondiente a la recta $8x + 15y - 34 = 0$.
*Sol.* $17x^2 + 17y^2 + 44x + 125y + 595 = 0$, $17x^2 + 17y^2 + 92x + 215y + 391 = 0$.

**25.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 17 = 0$ que sea concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$.

**26.** Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.
*Sol.* $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$.

**27.** Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 30 centímetros de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes de coordenadas.
*Sol.* Una circunferencia, $x^2 + y^2 = 225$.

**28.** Hallar la máxima y mínima distancias del punto $(10, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$. *Sol.* 15 y 5.

**29.** Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(7, 8)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.
*Sol.* $2\sqrt{26}$.

**30.** Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(6, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$. *Sol.* 9.

**31.** Hallar el valor de $K$ para el cual la longitud de la tangente trazada desde el punto $(5, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2Ky = 0$ sea igual a *a*), 1, *b*), 0. *Sol.* *a*) $K = -5$, *b*) $K = -5{,}125$.

**32.** Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes, y demostrar que se cortan en un punto.

$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0, \quad \text{y } x^2 + y^2 - 1 = 0.$

*Sol.* $5x - y + 2 = 0, \quad 3x - 2y - 3 = 0, \quad 2x + y + 5 = 0.$ Punto de intersección $(-1, -3)$. Este punto se denomina centro radical de las circunferencias.

**33.** Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes y hallar el centro radical (punto de intersección de los ejes).

$x^2 + y^2 + x = 0, \quad x^2 + y^2 + 4y + 7 = 0, \quad \text{y} \quad 2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y + 9 = 0.$

*Sol.* $x - 4y - 7 = 0, \quad x + y + 3 = 0, \quad x - y - 1 = 0.$ Centro $(-1, -2)$.

**34.** Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales y el centro radical de las circunferencias siguientes.

$x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0, \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0.$

*Sol.* $x + 2 = 0, \quad x - y - 2 = 0, \quad y + 4 = 0.$ Centro $(-2, -4)$.

**35.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-2, 2)$ y por los de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0.$$

*Sol.* $5x^2 + 5y^2 - 7y - 26 = 0.$

**36.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3, 1)$ y por los de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0.$$

*Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 13x + 3y + 6 = 0.$

**37.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ y cuyo centro esté en la recta $y = x$.

*Sol.* $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0.$

CAPITULO 5

# Secciones cónicas.–La parábola

DEFINICION. El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante recibe el nombre de *sección cónica* o simplemente *cónica*.

El punto fijo se llama *foco* de la cónica, la recta fija *directriz* y la relación constante *excentricidad* que, normalmente, se representa por la letra $e$.

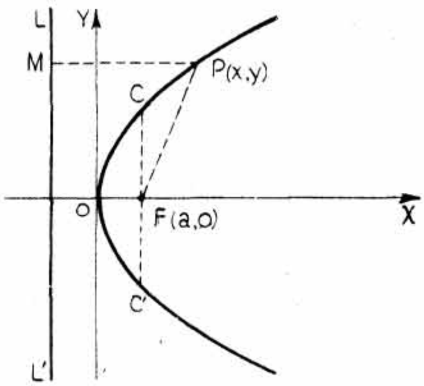
Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías, según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad $e$.

Si $e < 1$, la cónica se llama *elipse*.
Si $e = 1$, la cónica se llama *parábola*.
Si $e > 1$, la cónica se llama *hipérbola*.

PARABOLA. Sean $L'L$ y $F$ la recta y punto fijos. Tracemos por $F$ la perpendicular al eje $x$ y sea $2a$ la distancia de $F$ a $L'L$. Por definición de parábola la curva debe cortar al eje $x$ en el punto $O$, equidistante de $F$ y $L'L$. El eje $y$ se traza perpendicular al $x$ por el punto $O$.

Las coordenadas de $F$ son $(a, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -a$, o bien, $x + a = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de manera que $\dfrac{PF}{PM} = e = 1$.




Entonces, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$.

Elevando al cuadrado,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

o bien, $$y^2 = 4ax.$$

De la forma de la ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje $x$. El punto en que la curva corta al eje de simetría se denomina *vértice*. La cuerda $C'C$ que pasa por el foco y es perpendicular al eje se llama *latus rectum*. La longitud del *latus rectum* es $4a$, es decir, el coeficiente del término de primer grado en la ecuación.

Si el foco está a la izquierda de la directriz, la ecuación toma la forma

$$y^2 = -4ax.$$

Si el foco pertenece al eje $y$, la forma de la ecuación es

$$x^2 = \pm 4ay$$

en la que el signo depende de que el foco esté por encima o por debajo de la directriz.

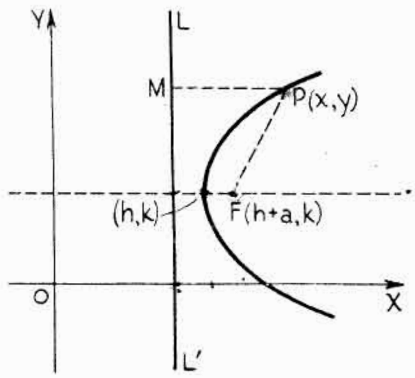
Consideremos ahora una parábola de vértice el punto $(h, k)$, de eje paralelo al de coordenadas $x$ y cuyo foco esté a una distancia $a$ del vértice y a la derecha de él. La directriz, paralela al eje $y$ y a una distancia $2a$ a la izquierda del foco, tendrá la ecuación $x = h - a$, o bien, $x - h + a = 0$.

Llamemos $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. Como $PF = PM$,

$$\sqrt{(x - h - a)^2 + (y - k)^2} = x - h + a,$$

es decir, $\qquad y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah,$

o bien, $\qquad (y - k)^2 = 4a(x - h).$




Otras expresiones tipicas son:

$$(y - k)^2 = -4a(x - h);$$
$$(x - h)^2 = 4a(y - k);$$
$$(x - h)^2 = -4a(y - k).$$

Que desarrolladas adquieren la forma $\quad x = ay^2 + by + c,$
$\quad y = ax^2 + bx + c.$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** Hallar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del *latus rectum* de la parábola $3y^2 = 8x$, o bien, $y^2 = \frac{8}{3}x$.

De la ecuación de la parábola se deduce que $4a = \frac{8}{3}$, de donde, $a = \frac{2}{3}$. El foco es, pues el punto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, y la ecuación de la directriz, $x = -\frac{2}{3}$.

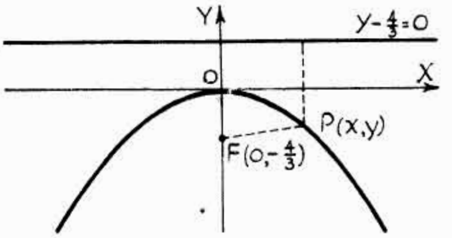
Para hallar la longitud del *latus rectum* se calcula el valor de $y$ para $x = \frac{2}{3}$. Para $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, con lo cual, la longitud del *latus rectum* es $2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

**2.** Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y por directriz la recta $y - \frac{4}{3} = 0$. Hallar la longitud del *latus rectum*.

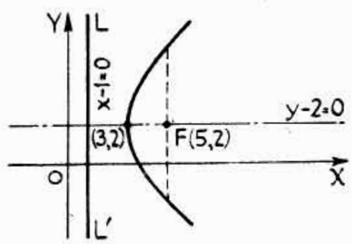
Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la parábola. En estas condiciones,

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2} = y - \frac{4}{3}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $x^2 + \frac{16}{3}y = 0$. *Latus rectum* $= 4a = \frac{16}{3}$.




*Problema 2*




*Problema 3*

**3.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (3, 2) y foco (5, 2).

Como el vértice es el punto (3, 2) y el foco (5, 2) se tiene, $a = 2$ y la ecuación adquiere la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, o sea, $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$.

Simplificando, $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

**4.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice el origen, de eje el de coordenadas $y$, y que pase por el punto $(6, —3)$.

La ecuación que hemos de aplicar es $x^2 = —4ay$.

Como el punto $(6, —3)$ pertenece a la curva el valor de $a$ debe ser tal que las coordenadas del punto satisfagan a la ecuación.

Sustituyendo, $36 = —4a(—3)$, de donde, $a = 3$. La ecuación pedida es $x^2 = —12y$.

**5.** Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(6, —2)$ y directriz la recta $x — 2 = 0$.

De la definición, $\sqrt{(x — 6)^2 + (y + 2)^2} = x — 2$.

Elevando al cuadrado, $x^2 — 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = x^2 — 4x + 4$. Simplificando, $y^2 + 4y — 8x + 36 = 0$.

**6.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(2, 3)$, de eje paralelo al de coordenadas $y$, y que pase por el punto $(4, 5)$.

La ecuación que hemos de aplicar es $(x — h)^2 = 4a(y — k)$, es decir, $(x — 2)^2 = 4a(y — 3)$.

Como el punto $(4, 5)$ pertenece a la curva, $(4 — 2)^2 = 4a(5 — 3)$, de donde, $a = \frac{1}{2}$.

La ecuación pedida es $(x — 2)^2 = 2(y — 3)$, o bien, $x^2 — 4x — 2y + 10 = 0$.

**7.** Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas $x$, y que pase por los puntos $(—2, 1)$, $(1, 2)$ y $(—1, 3)$.

Aplicamos la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Sustituyendo $x$ e $y$ por las coordenadas de los puntos,
$$1 — 2D + E + F = 0,$$
$$4 + D + 2E + F = 0;$$
$$9 — D + 3E + F = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, $D = \frac{2}{5}$, $E = —\frac{21}{5}$, $F = 4$.

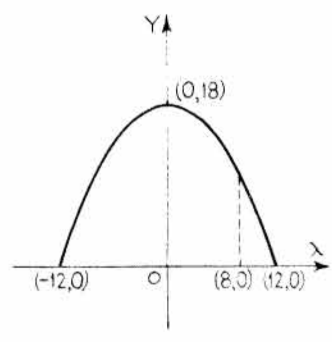
Por tanto, la ecuación pedida es $y^2 + \frac{2}{5}x — \frac{21}{5}y + 4 = 0$, o bien, $5y^2 + 2x — 21y + 20 = 0$.

**8.** Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 metros de altura y 24 metros de base, situado a una distancia de 8 metros del centro del arco.

Tomemos el eje $x$ en la base del arco y el origen en el punto medio. La ecuación de la parábola será de la forma

$$(x — h)^2 = 4a(y — k)$$

o bien
$$(x — 0)^2 = 4a(y — 18).$$




La curva pasa por el punto $(12, 0)$. Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación se obtiene, $a = —2$. Por consiguiente,

$$(x — 0)^2 = —8(y — 18).$$

Para hallar la altura del arco a 8 metros del centro se sustituye $x = 8$ en la ecuación y se despeja el valor de $y$. Por tanto, $8^2 = —8(y — 18)$, de donde, $y = 10$ metros. El arco simple más resistente es el de forma parabólica.

**9.** Dada la parábola de ecuación $y^2 + 8y — 6x + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice y del foco, y la ecuación de su directriz.

Sumando y restando términos adecuados, para completar un cuadrado, $y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16 = 6x + 12$, o bien, $(y + 4)^2 = 6(x + 2)$.

El vértice es el punto $(-2, -4)$. Como $4a = 6$, $a = 3/2$. Luego el foco es el punto de coordenadas $(-\frac{1}{2}, -4)$, y la ecuación de la directriz es $x = -7/2$.

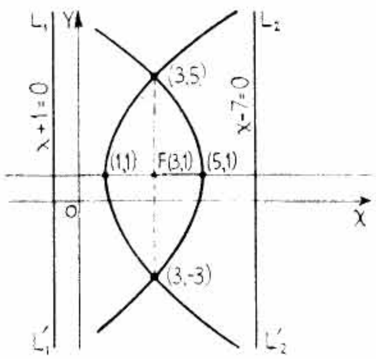
**10.** Hallar la ecuación de la parábola cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos $(3, 5)$ y $(3, -3)$.

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = \pm 4a(x - h)$.

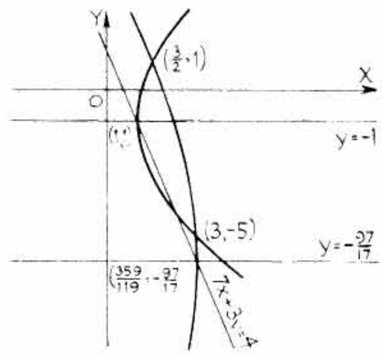
Como la longitud del *latus rectum* es 8, $4a = 8$, e $(y - k)^2 = \pm 8(x - h)$.

Para determinar las coordenadas $(h, k)$ tenemos, $(5 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$ y $(-3 - k)^2 = \pm 8(3 - h)$, ya que los puntos $(3, 5)$ y $(3, -3)$ pertenecen a la curva. Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen como valores de $h$ y $k$ los puntos $(1, 1)$ y $(5, 1)$.

Las ecuaciones pedidas son (1) $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$ o $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$
y (2) $(y - 1)^2 = -8(x - 5)$ o $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$.




*Problema 10*




*Problema 11*

**11.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice en la recta $7x + 3y - 4 = 0$, de eje horizontal y que pase por los puntos $(3, -5)$ y $(3/2, 1)$.

Aplicamos la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$. Sustituyendo las coordenadas de los puntos dados se obtiene,

$$(-5 - k)^2 = 4a(3 - h) \quad \text{y} \quad (1 - k)^2 = 4a(3/2 - h).$$

Como $(h, k)$ pertenece a la recta $7x + 3y - 4 = 0$, se tiene, $7h + 3k - 4 = 0$.

Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones resulta $h = 1$, $k = -1$, $4a = 8$; y $h = 359/119$, $k = -97/17$, $4a = -504/17$.

Luego las ecuaciones pedidas son, $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$ e $\left(y + \frac{97}{17}\right)^2 = -\frac{504}{17}\left(x - \frac{359}{119}\right)$.

**12.** La trayectoria descrita por un proyectil lanzado horizontalmente, desde un punto situado $y$ metros (m) sobre el suelo, con una velocidad $v$ metros por segundo (m/s), es una parábola de ecuación

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\, y,$$

siendo $x$ la distancia horizontal desde el lugar de lanzamiento y $g = 9{,}81$ metros por segundo en cada segundo (m/s²), aproximadamente. El origen se toma en el punto de salida del proyectil del arma.

En estas condiciones se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a 3 metros (m) de altura sobre el suelo. Sabiendo que la velocidad inicial es de 50 metros segundo (m/s), calcular la distancia horizontal al punto de caída.

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\, y = -\frac{2(50)^2}{9{,}8}(-3), \text{ con lo que } x = 50\sqrt{0{,}61} = 39 \text{ m.}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar las coordenadas del foco, la longitud del *latus rectum* y la ecuación de la directriz de las parábolas siguientes. Representarlas gráficamente.

*a*) $y^2 = 6x$. *Sol.* $(3/2, 0)$, 6, $x + 3/2 = 0$.
*b*) $x^2 = 8y$. *Sol.* $(0, 2)$, 8, $y + 2 = 0$.
*c*) $3y^2 = -4x$. *Sol.* $(-1/3, 0)$, $4/3$, $x - 1/3 = 0$.

**2.** Hallar la ecuación de las parábolas siguientes:

*a*) Foco $(3, 0)$, directriz $x + 3 = 0$. *Sol.* $y^2 - 12x = 0$.
*b*) Foco $(0, 6)$, directriz el eje $x$. *Sol.* $x^2 - 12y + 36 = 0$.
*c*) Vértice el origen, eje el de coordenadas $x$, y que pase por $(-3, 6)$. *Sol.* $y^2 = -12x$.

**3.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ sea igual a su distancia a la recta $x + 6 = 0$. *Sol.* $y^2 - 6y - 8x - 23 = 0$.

**4.** Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(-2, -1)$ y cuyo *latus rectum* es el segmento entre los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, 4)$.
*Sol.* $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$, $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$.

**5.** Hallar la ecuación de la parábola de vértice $(-2, 3)$ y foco $(1, 3)$.
*Sol.* $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

**6.** Dadas las parábolas siguientes, calcular *a*) las coordenadas del vértice, *b*) las coordenadas del foco, *c*) la longitud del *latus rectum* y *d*) la ecuación de la directriz.

(1) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$. *Sol.* *a*) $(2, 2)$, *b*) $(1/2, 2)$, *c*) 6, *d*) $x - 7/2 = 0$.
(2) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$. *Sol.* *a*) $(3/2, -7/4)$, *b*) $(3/2, -4/3)$, *c*) $5/3$.
(3) $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$. *Sol.* *a*) $(3/2, 2)$, *b*) $(3, 2)$, *c*) 6, *d*) $x = 0$.

**7.** Hallar la ecuación de una parábola cuyo eje sea paralelo al eje $x$ y que pase por los puntos $(3, 3)$, $(6, 5)$ y $(6, -3)$. *Sol.* $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$.

**8.** Hallar la ecuación de una parábola de eje vertical y que pase por los puntos $(4, 5)$, $(-2, 11)$ y $(-4, 21)$.
*Sol.* $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

**9.** Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice esté sobre la recta $2y - 3x = 0$, que su eje sea paralelo al de coordenadas $x$, y que pase por los puntos $(3, 5)$ y $(6, -1)$.
*Sol.* $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$, $11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0$.

**10.** El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros (m) y están separados una distancia de 500 metros (m), quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros (m) sobre la calzada del puente. Tomando como eje $x$ la horizontal que define el puente, y como eje $y$ el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros (m) del centro del puente. *Sol.* $x^2 - 1.250\,y + 12.500 = 0$; 15,12 m.

**11.** Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros (m) de altura con una velocidad de 15 metros por segundo (m/s). Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal. *Sol.* 92,5 m.

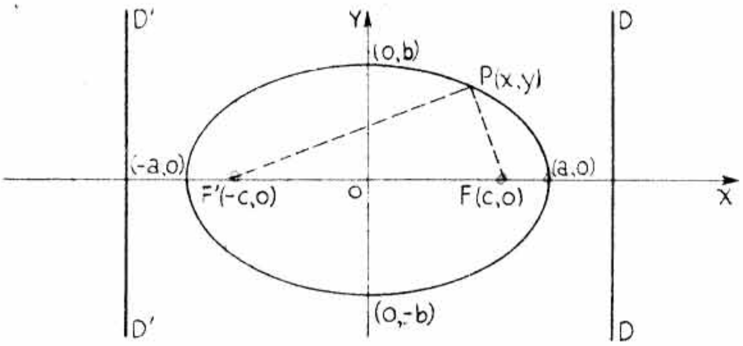
**12.** Un avión que vuela hacia el Sur a una altura de 1.500 metros (m) y a una velocidad de 200 kilómetros por hora (km/h) deja caer una bomba. Calcular la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto de lanzamiento. *Sol.* 972 m.

**13.** Un arco parabólico tiene una altura de 25 metros (m) y una luz de 40 metros (m). Hallar la altura de los puntos del arco situados 8 metros a ambos lados de su centro. *Sol.* 21 m.

CAPITULO 6

# La elipse

DEFINICION. Elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*.




Sean los dos puntos fijos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y $2a$ la suma constante, $(a > c)$. Consideremos un punto genérico $P(x, y)$ que pertenezca al lugar. Por definición,

$$F'P + PF = 2a,$$

es decir, $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$

o bien, $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes,

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Dividiendo por $a^2(a^2 - c^2)$ se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Como $a > c$, $a^2 - c^2$ es positivo. Haciendo $a^2 - c^2 = b^2$, resulta la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

o bien, $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como esta ecuación solo contiene potencias pares de $x$ e $y$, la curva es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas $x$ e $y$, y con respecto al origen. El punto $O$ es el centro de la elipse y los ejes se denominan *eje mayor* y *eje menor*.

Si los focos fueran los puntos de coordenadas $(0, c)$ y $(0, -c)$, el eje mayor estaría sobre el eje $y$, con lo que la ecuación resulta de la forma $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

La *excentricidad* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, o bien $c = ae$.

Como la elipse tiene dos focos, también tendrá dos directrices. Las ecuaciones de las directrices $D'D'$ y $DD$ son, respectivamente,

$$x + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{a}{e} = 0.$$

Si los focos estuvieran sobre el eje $y$, las ecuaciones de las directrices serían

$$y + \frac{a}{e} = 0 \quad \text{y} \quad y - \frac{a}{e} = 0.$$

Se denomina *latus rectum* de la elipse a la cuerda perpendicular al eje mayor por uno de los focos. Su longitud es $\dfrac{2b^2}{a}$.

Los puntos en los cuales la elipse corta al eje mayor se llaman *vértices*.

Si el centro de la elipse es el punto $(h, k)$ y el eje mayor tiene la dirección del eje $x$, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

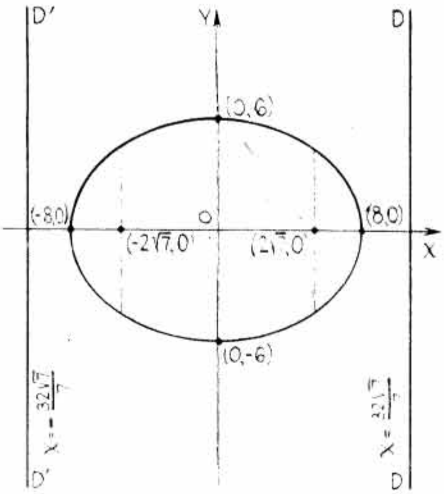
o bien, $\dfrac{(x - h)^2}{b^2} + \dfrac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ si el eje mayor fuera paralelo al eje $y$. En cualquier caso, la forma general de la ecuación de la elipse es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

siempre que $A$ y $B$ sean del mismo signo.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, hallar el semieje mayor, el semieje menor, la excentricidad, las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las directrices y la longitud del *latus rectum*.




Dividiendo por 576 se tiene $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. Luego $a = 8$ y $b = 6$.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{4}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7}.$$

Coordenadas de los focos: $(2\sqrt{7}, 0)$ y $(-2\sqrt{7}, 0)$.

Las ecuaciones de las directrices son

$$x = \pm \frac{a}{e} \quad \text{o} \quad x = \pm \frac{32\sqrt{7}}{7}.$$

La longitud del *latus rectum* de la elipse es $2b^2/a = 72/8 = 9$.

**2.** Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, foco en el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Datos: $c = 3$ y $a = 5$. Por consiguiente, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Aplicando la fórmula $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

**3.** Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, eje mayor sobre el eje $x$ y que pase por los puntos (4, 3) y (6, 2).

La fórmula a aplicar es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sustituyendo $x$ e $y$ por las coordenadas de los puntos dados se obtiene, $\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1$ y $\dfrac{36}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, $a^2 = 52$, $b^2 = 13$.

Luego la ecuación pedida es $\dfrac{x^2}{52} + \dfrac{y^2}{13} = 1$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 52$.

**4.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la correspondiente a la recta $x - 16 = 0$.

Del enunciado del problema se deduce,

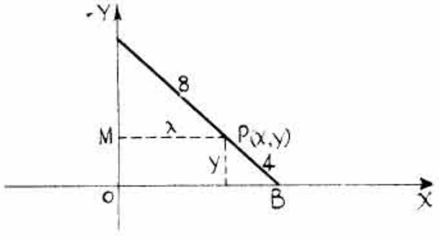
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \tfrac{1}{2}(x - 16), \text{ o sea, } x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{x^2 - 32x + 256}{4}.$$

Simplificando, se obtiene la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 192$, de la elipse.

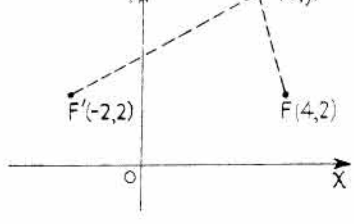
**5.** Se considera un segmento $AB$ de 12 unidades de longitud y un punto $P(x, y)$ situado sobre él a 8 unidades de $A$. Hallar el lugar geométrico de $P$ cuando el segmento se desplace de forma que los puntos $A$ y $B$ se apoyen constantemente sobre los ejes de coordenadas $y$ y $x$ respectivamente.

Por triángulos semejantes, $\dfrac{MA}{AP} = \dfrac{y}{PB}$, o sea, $\dfrac{\sqrt{64 - x^2}}{8} = \dfrac{y}{4}$.

Luego $64 - x^2 = 4y^2$, o bien, $x^2 + 4y^2 = 64$. El lugar es una elipse con su centro en el origen y de eje mayor sobre el eje $x$.




*Problema 5*




*Problema 6*

**6.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (4, 2) y (—2, 2) sea igual a 8.

$F'P + PF = 8$, o sea, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 8$.

Ordenando términos, $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, $3x - 19 = -4\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$.

Elevando de nuevo al cuadrado y reduciendo términos resulta la ecuación $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$, que es una elipse.

**7.** Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

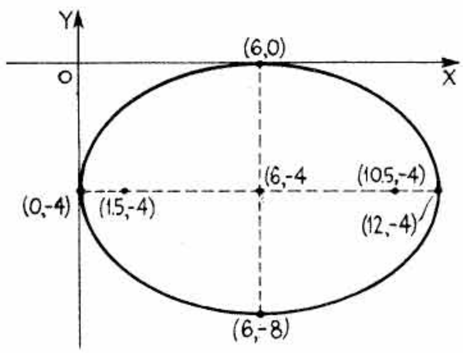
Esta ecuación se puede poner en la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, de la manera siguiente:

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = 144,$$

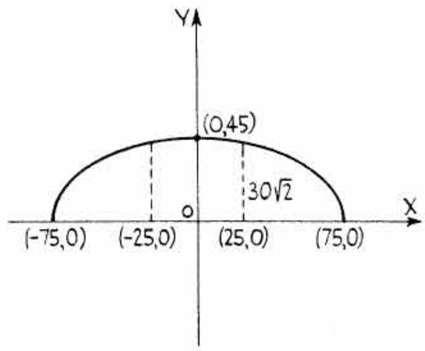
$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1.$$

Por tanto, el centro de la elipse es el punto de coordenadas $(6, -4)$; $a = 6$, $b = 4$; los vértices son los puntos $(0, -4)$, $(12, -4)$, y los focos $(6 + 2\sqrt{5}, -4)$, $(6 - 2\sqrt{5}, -4)$.




*Problema 7*




*Problema 8*

**8.** Un arco tiene forma de semielipse con una luz de 150 metros siendo su máxima altura de 45 metros. Hallar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco.

Supongamos el eje $x$ en la base del arco y el origen en su punto medio. La ecuación del arco será, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, siendo $a = 75$, $b = 45$.

Para hallar la altura de los soportes, hacemos $x = 25$ en la ecuación y despejamos el valor de $y$.

Es decir, $\dfrac{625}{5.625} + \dfrac{y^2}{2.025} = 1$, $y^2 = 8(225)$, e $y = 30\sqrt{2}$ metros.

**9.** La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse vale $1{,}485 \times 10^8$ kilómetros y que la excentricidad es, aproximadamente, $1/62$, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$. Luego $\dfrac{1}{62} = \dfrac{c}{148.500.000}$, o sea, $c = 2.400.000$.

La máxima distancia es $a + c = 1{,}509 \times 10^8$ km.
La mínima distancia es $a + c = 1{,}461 \times 10^8$ km.

**10.** Hallar la ecuación de la elipse de centro (1, 2), uno de los focos (6, 2) y que pase por el punto (4, 6).

Aplicamos la ecuación $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$.

Como (4, 6) pertenece a la curva, $\frac{(4-1)^2}{a^2} + \frac{(6-2)^2}{b^2} = 1$, o bien, $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$.

Como $c = 5$, resulta $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 25$ y $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2-25} = 1$.

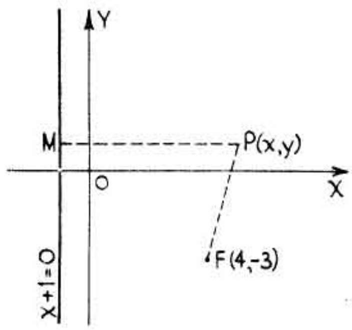
Resolviendo, $a^2 = 45$ y $b^2 = 20$. Sustituyendo, $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$.

**11.** Hallar la ecuación de la elipse de centro (—1, —1), uno de los vértices el punto (5, —1) y excentricidad $e = \frac{2}{3}$.

Como el centro es el punto (—1, —1) y el vértice (5, —1) se tiene, $a = 6$, $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{6} = \frac{2}{3}$, de donde $c = 4$. Por otra parte, $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

La ecuación pedida es $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$.

**12.** Hallar la ecuación de la elipse cuya directriz es la recta $x = -1$, uno de los focos el punto (4, —3) y excentricidad 2/3.




De la definición general de sección cónica, si $\frac{PF}{PM} = e$ y $e < 1$ la curva es una elipse.

Por consiguiente, $\frac{\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}}{x+1} = \frac{2}{3}$.

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación y simplificando resulta,

$$5x^2 + 9y^2 - 80x + 54y = -221.$$

Completando cuadrados, $5(x^2 - 16x + 64) + 9(y^2 + 6y + 9) = -221 + 320 + 81$,

es decir, $5(x-8)^2 + 9(y+3)^2 = 180$,

o bien, $\frac{(x-8)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$.

**13.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que unen $P(x, y)$ con los puntos fijos (3, —2) y (—2, 1) es igual a —6.

$\left(\frac{y+2}{x-3}\right)\left(\frac{y-1}{x+2}\right) = -6$, o bien, $6x^2 + y^2 + y - 6x = 38$, una elipse.

**14.** Hallar la ecuación de la elipse de focos $(0, \pm 4)$ y que pase por el punto $\left(\frac{12}{5}, 3\right)$.

Sustituyendo $x = \frac{12}{5}$, $y = 3$ en $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ se obtiene $\frac{144}{25b^2} + \frac{9}{a^2} = 1$.

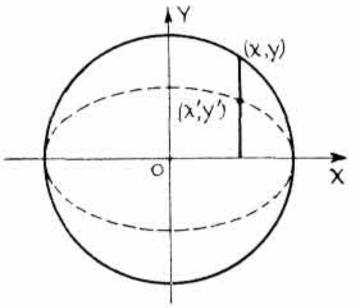
Como los focos son $(0, \pm 4)$, resulta $c = 4$ y $a^2 - b^2 = 4^2 = 16$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. Luego, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

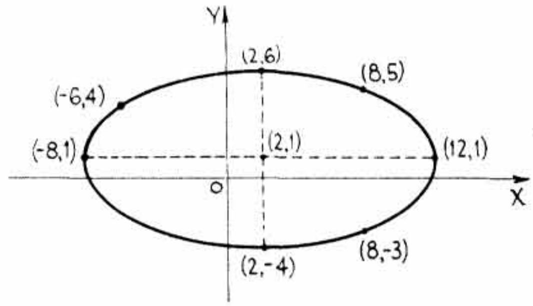
**15.** Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en la relación $\frac{3}{5}$.

Sea $y' = \frac{3}{5}y$, o bien, $y = \frac{5}{3}y'$, y $x = x'$. Entonces, $x'^2 + \frac{25}{9}y'^2 = 25$.

Suprimiendo las primas y simplificando se llega a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$, que es una elipse.




*Problema 15*




*Problema 16*

**16.** Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(-6, 4)$, $(-8, 1)$, $(2, -4)$ y $(8, -3)$ y cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas.

En la ecuación $x^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, sustituyendo $x$ e $y$ por las coordenadas de los cuatro puntos dados,

$$\begin{aligned} 16B - 6C + 4D + E &= -36, \\ B - 8C + D + E &= -64, \\ 16B + 2C - 4D + E &= -4, \\ 9B + 8C - 3D + E &= -64. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $B = 4$, $C = -4$, $D = -8$, y $E = -92$.

La ecuación pedida es $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$, o bien, $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$.

**17.** Hallar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia tangente a $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$.

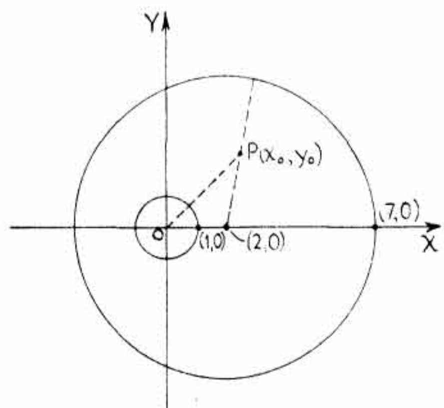
Sean $(x_0, y_0)$ las coordenadas del centro. Las circunferencias dadas tienen de radios 1 y 5 respectivamente.

*a*) $5 - \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1$.

Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas se llega a la ecuación $8x^2 + 9y^2 - 16x - 64 = 0$, que es una elipse. Poniendo esta ecuación en la forma

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{8} = 1,$$

se deduce que el centro de la elipse corresponde al punto $(1, 0)$.




*b*) $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + 1 = 5 - \sqrt{(x_0 - 2)^2 + y_0^2}$. Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas se llega a la ecuación $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$, o bien, $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-0)^2}{3} = 1$.

El centro de esta elipse es el punto $(1, 0)$.

**18.** En una elipse, los radios focales son las rectas que unen los focos con un punto cualquiera de ella. Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto (2, 3) de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$.

Escribiendo esta ecuación en la forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ se tiene, $c = \pm\sqrt{16 - 12} = \pm 2$.

Los focos son los puntos $(\pm 2, 0)$. La ecuación del radio focal del punto (2, 0) al (2, 3) es $x - 2 = 0$ y la del (—2, 0) al (2, 3) es $y - 0 = \frac{3 - 0}{2 + 2}(x + 2)$, o bien, $3x - 4y + 6 = 0$.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** En cada una de las elipses siguientes hallar *a*) la longitud del semieje mayor, *b*) la longitud del semieje menor, *c*) las coordenadas de los focos, *d*) la excentricidad.

(1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. *Sol.* *a*) 13, *b*) 12, *c*) $(\pm 5, 0)$, *d*) $\frac{5}{13}$.

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$. *Sol.* *a*) $2\sqrt{3}$, *b*) $2\sqrt{2}$, *c*) $(0, \pm 2)$, *d*) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $225x^2 + 289y^2 = 65.025$. *Sol.* *a*) 17, *b*) 15, *c*) $(\pm 8, 0)$, *d*) $\frac{8}{17}$.

**2.** Hallar las ecuaciones de las elipses siguientes de forma que satisfagan las condiciones que se indican.

(1) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$. *Sol.* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) Focos $(0, \pm 8)$, vértices $(0, \pm 17)$. *Sol.* $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{289} = 1$.

(3) Longitud del *latus rectum* = 5, vértices $(\pm 10, 0)$. *Sol.* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

(4) Focos $(0, \pm 6)$, semieje menor = 8. *Sol.* $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

(5) Focos $(\pm 5, 0)$, excentricidad $= \frac{5}{8}$. *Sol.* $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

**3.** Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, focos en el eje $x$, y que pase por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, 4\sqrt{5}/3)$. *Sol.* $4x^2 + 9y^2 = 144$.

**4.** Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, semieje mayor de 4 unidades de longitud sobre el eje $y$, y la longitud del *latus rectum* igual a 9/2. *Sol.* $16x^2 + 9y^2 = 144$.

**5.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (3, 1) y (—5, 1) sea igual a 10. ¿Qué curva representa dicho lugar?
*Sol.* $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$, una elipse.

**6.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (2, —3) y (2, 7) sea igual a 12. *Sol.* $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$.

**7.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (3, 2) sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$. ¿Qué curva representa dicho lugar?
*Sol.* $3x^2 + 4y^2 - 28x - 16y + 48 = 0$, una elipse.

**8.** Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$, hallar *a*) las coordenadas del centro, *b*) el semieje mayor, *c*) el semieje menor, *d*) los focos y *e*) la longitud del *latus rectum*.
*Sol.* *a*) $(2, -3)$, *b*) 4, *c*) 3, *d*) $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, *e*) 4,5.

**9.** Hallar la ecuación de la elipse de centro $(4, -1)$, uno de los focos en $(1, -1)$ y que pase por el punto $(8, 0)$. *Sol.* $\dfrac{(x-4)^2}{18} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$, o bien, $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$.

**10.** Hallar la ecuación de la elipse de centro $(3, 1)$, uno de los vértices en $(3, -2)$ y excentricidad $e = 1/3$.
*Sol.* $\dfrac{(x-3)^2}{8} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$, o bien, $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$.

**11.** Hallar la ecuación de la elipse uno de cuyos focos es el punto $(-1, -1)$, directriz $x = 0$, y excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Sol.* $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

**12.** Un punto $P(x, y)$ se mueve de forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen $P$ con los dos puntos fijos $(-2, 1)$ y $(6, 5)$ es constante e igual a $-4$. Demostrar que dicho lugar es una elipse y hallar su centro. *Sol.* $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$. Centro $(2, 3)$.

**13.** Un segmento $AB$, de 18 unidades de longitud, se mueve de forma que $A$ está siempre sobre el eje $y$ y $B$ sobre el eje $x$. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ sabiendo que $P$ pertenece al segmento $AB$ y está situado a 6 unidades de $B$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 144$, una elipse.

**14.** Un arco de 80 metros de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro. *Sol.* $15\sqrt{55}/4$ metros.

**15.** La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0,017, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol. *Sol.* (152, 146) millones de kilómetros.

**16.** Hallar la ecuación de la elipse de focos $(\pm 8, 0)$ y que pasa por el punto $(8, 18/5)$.
*Sol.* $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

**17.** Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la relación $\frac{1}{2}$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 16$.

**18.** Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto $(1, -1)$ de la elipse

$$x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0.$$

*Sol.* $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

**19.** Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ y cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas. *Sol.* $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$.

**20.** Hallar el lugar geométrico del centro de la circunferencia tangente a

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0.$$

*Sol.* $220x^2 + 256y^2 - 660x - 3.025 = 0$ y $28x^2 + 64y^2 - 84x - 49 = 0$.

CAPITULO 7

# La hipérbola

DEFINICION. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ es constante e igual a $2a$. Ver Figura ($a$).

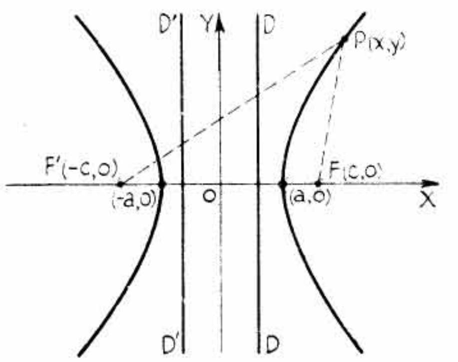



*Figura* ($a$)

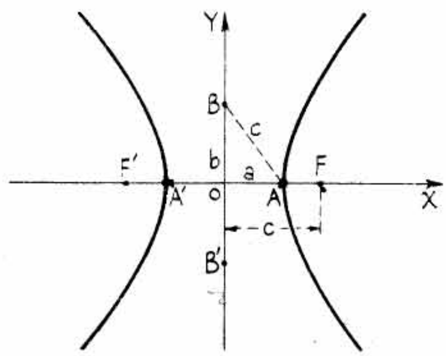



*Figura* ($b$)

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera de la curva.

Por definición, $F'P - PF = 2a$, o bien $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$.

Trasponiendo un radical, $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$.

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Elevando al cuadrado y simplificando, $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$.

Dividiendo por $a^2(c^2-a^2)$, se obtiene la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$.

Como $c > a$, $c^2 - a^2$ es positivo. Haciendo $c^2 - a^2 = b^2$ se obtiene la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje $x$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si los focos fueran $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación sería de la forma $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

La expresión general de la ecuación de la hipérbola de centro en el origen y cuyos focos estén sobre los ejes de coordenadas es $Ax^2 - By^2 = \pm 1$, correspondiendo el signo más cuando los focos pertenezcan al eje $x$.

Como la ecuación solo contiene potencias pares de $x$ e $y$, la curva es simétrica con respecto a los ejes $x$ e $y$ y con respecto al origen.

El eje real o transversal de la hipérbola es $A'A$ de longitud igual a $2a$. El eje imaginario es $B'B$ de longitud $2b$. Ver Figura ($b$).

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Como vemos $e > 1$, lo cual coincide con la definición general de sección cónica. Las ecuaciones de las directrices, $DD$ y $D'D$, son $x = \pm \frac{a}{e}$ cuando los focos están sobre el eje $x$, e $y = \pm \frac{a}{e}$ cuando estén sobre el eje $y$.

Los vértices reales de la hipérbola son los puntos en los que la curva corta al eje real. Los otros dos vértices son imaginarios.

La longitud del *latus rectum* es $\frac{2b^2}{a}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \text{ cuando el eje real o transversal es el eje } x.$$

e $$y = \pm \frac{a}{b} x \text{ cuando el eje real o transversal es el eje } y.$$

Si el centro de la hipérbola es el punto de coordenadas $(h, k)$ y el eje real es paralelo al eje $x$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje real es paralelo al eje $y$, la ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y - k = \pm \frac{b}{a} (x - h) \text{ si el eje real es paralelo al eje } x,$$

e $$y - k = \pm \frac{a}{b} (x - h) \text{ si el eje real es paralelo al eje } y.$$

La forma general de la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los de coordenadas $x$ e $y$ es

$$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

siendo $A$ y $B$ del mismo signo.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el de coordenadas $y$ y que pase por los puntos $(4, 6)$ y $(1, -3)$.

Sustituyendo $x$ e $y$ por las coordenadas de los puntos dados en la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ resultan, } \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \text{ y } \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, $a^2 = 36/5$ y $b^2 = 4$.

Sustituyendo y simplificando, $\frac{5y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$, o bien, $5y^2 - 9x^2 = 36$.

2. Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las directrices, las correspondientes de las asíntotas, la longitud del *latus rectum*, la excentricidad y la representación gráfica de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

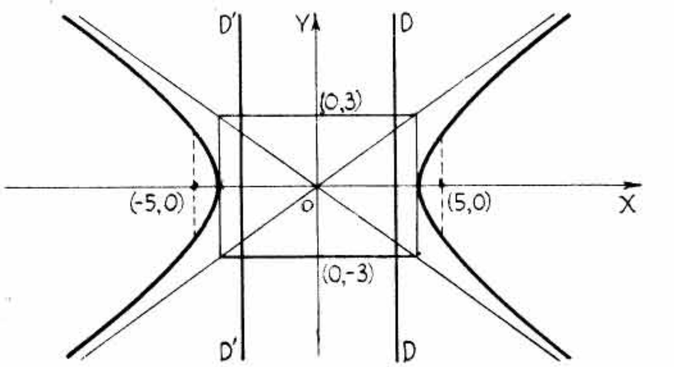
Escribiendo la ecuación en la forma $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ se tiene, $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Foco

Los puntos reales de corte con los ejes son $(\pm 4, 0)$, y los focos $(\pm 5, 0)$.

La excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, y las ecuaciones de las directrices son $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{16}{5}$.

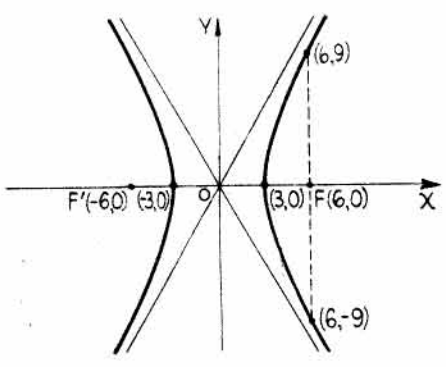
*Latus rectum* $= \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{3}{4} x$.

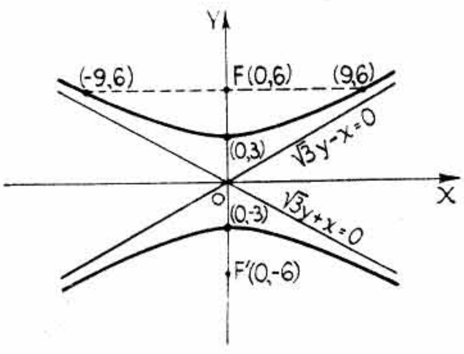



*Problema 2*

3. Hallar la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los de coordenadas y de centro el origen, sabiendo que el *latus rectum* vale 18 y que la distancia entre los focos es 12.




*Problema 3(a)*




*Problema 3(b)*

*Latus rectum* $= 2b^2/a = 18$, y $2c = 12$. Luego $b^2 = 9a$ y $c = 6$.
Como $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - a^2$, se tiene $9a = 36 - a^2$, o sea, $a^2 + 9a - 36 = 0$.
Resolviendo, $(a - 3)(a + 12) = 0$ y $a = 3, -12$. Se desecha $a = -12$.
Para $a^2 = 9$, $b^2 = 36 - 9 = 27$ y las dos ecuaciones pedidas son

*a*) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$, o bien, $3x^2 - y^2 = 27$, y *b*) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$, o bien, $3y^2 - x^2 = 27$.

**4.** Hallar la ecuación de la hipérbola de focos $(0, \pm 3)$ y de eje imaginario igual a 5.

Datos: $c = 3$ y $b = \dfrac{5}{2}$. Luego $a^2 = c^2 - b^2 = 9 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{11}{4}$.

Sustituyendo en $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, se obtiene $\dfrac{y^2}{11/4} - \dfrac{x^2}{25/4} = 1$, o bien, $100y^2 - 44x^2 = 275$.

**5.** Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, el eje real sobre el eje $x$, excentricidad $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ y *latus rectum* igual a 6.

Datos: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, y *latus rectum* $= \dfrac{2b^2}{a} = 6$, o sea, $b^2 = 3a$.

Resolviendo el sistema $a^2 + b^2 = \dfrac{7}{4}a^2$ y $b^2 = 3a$, se obtiene $a^2 = 16$, $b^2 = 12$.

Sustituyendo en $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la ecuación pedida es $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{12} = 1$, o bien, $3x^2 - 4y^2 = 48$.

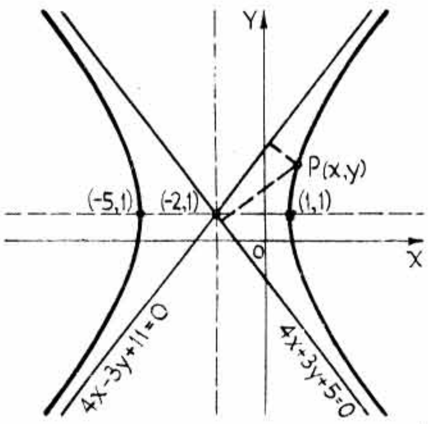
**6.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas $4x - 3y + 11 = 0$ y $4x + 3y + 5 = 0$ sea igual a $144/25$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico cualquiera del lugar. Entonces,

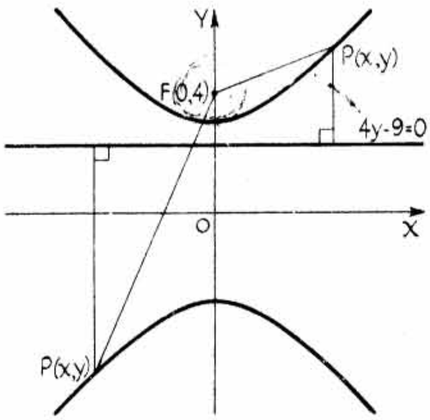
$$\left(\frac{4x - 3y + 11}{-5}\right)\left(\frac{4x + 3y + 5}{-5}\right) = \frac{144}{25}.$$

Simplificando, $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$, o bien, $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$.

que es la ecuación de una hipérbola que tiene por asíntotas las rectas dadas.




*Problema 6*




*Problema 7*

**7.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $(0, 4)$ sea igual a $4/3$ de la correspondiente a la recta $4y - 9 = 0$.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{4y-9}{4}\right).$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$, o bien, $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{7} = 1$, que es una hipérbola.

**8.** Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en (6, 0) y por una de sus asíntotas la recta $4x - 3y = 0$.

Escribimos la ecuación de la asíntota dada en la forma $y = \frac{4}{3}x$.

Las asíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son $y = \pm\frac{b}{a}x$. Luego $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$.

Como un vértice es (6, 0), $a = 6$ y $b = \frac{4a}{3} = 8$, con lo que la ecuación es $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

**9.** Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en $(-4, 1)$, un vértice en $(2, 1)$ y semieje imaginario igual a 4.

La distancia entre el centro y el vértice es 6; luego $a = 6$.

El semieje imaginario es 4; luego $b = 4$.

Sustituyendo en $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, se obtiene $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.

**10.** Dada la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$, hallar *a*) el centro, *b*) los vértices, *c*) los focos, *d*) las ecuaciones de las asíntotas y *e*) efectuar su representación gráfica.

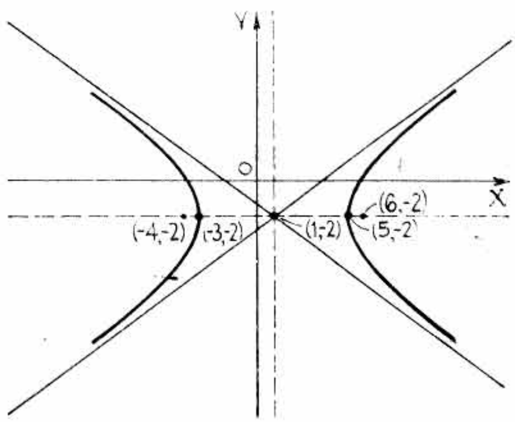
Procediendo como se indica, escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) = 199 - 64 + 9,$$

$$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$




*Sol.* *a*) $(1, -2)$; *b*) $(-3, -2)$, $(5, -2)$; *c*) $(-4, -2)$, $(6, -2)$; *d*) $y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$.

**11.** Hallar la ecuación de la hipérbola que pase por el punto (4, 6) y cuyas asíntotas sean $y = \pm\sqrt{3}x$.

Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Operando, $\frac{y}{b} = \pm\frac{x}{a}$, o bien, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Como el producto $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, se deduce que las ecuaciones de las asíntotas de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se pueden determinar anulando el término independiente y descomponiendo en factores.

En este problema, pues, la ecuación de la hipérbola toma la forma

$$(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x) = C \text{ (constante)}.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto (4, 6), $(6 - 4\sqrt{3})(6 + 4\sqrt{3}) = C = -12$.

Luego la ecuación pedida es $(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x) = -12$, o bien, $3x^2 - y^2 = 12$.

*Definición*. Dos hipérbolas son *conjugadas* si los ejes real e imaginario de una de ellas son, respectivamente, el imaginario y real de la otra. Para hallar la ecuación de la hipérbola conjugada de una dada no hay más que cambiar en ésta los signos de los coeficientes de $x^2$ e $y^2$.

**12.** Deducir la ecuación de la hipérbola conjugada de $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

La ecuación de la hipérbola conjugada es $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

En las dos hipérbolas, $c = \sqrt{9 + 16} = 5$. Luego las coordenadas de los focos de la hipérbola dada son $(\pm 5, 0)$, y los de la conjugada $(0, \pm 5)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm \dfrac{4}{3} x$, son las mismas para las dos hipérbolas.

**13.** Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos $(-2, 1)$ y $(4, 5)$ es igual a 3.

$\left(\dfrac{y - 1}{x + 2}\right)\left(\dfrac{y - 5}{x - 4}\right) = 3$. Simplificando, $3x^2 - y^2 + 6y - 6x - 29 = 0$, una hipérbola.

**14.** Demostrar que la diferencia de las distancias del punto $\left(8, \dfrac{8\sqrt{7}}{3}\right)$ de la hipérbola $64x^2 - 36y^2 = 2.304$ a los focos es igual a la longitud del eje real. Estas distancias son los radios focales del punto.

Escribiendo la ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. Por tanto, $c = \pm\sqrt{36 + 64} = \pm 10$.

La longitud del eje real es $2a = 12$.

Las diferencias de las distancias del punto $\left(8, \dfrac{8\sqrt{7}}{3}\right)$ a los focos $(\pm 10, 0)$ es

$$\sqrt{(8 + 10)^2 + \left(\frac{8\sqrt{7}}{3} - 0\right)^2} - (8 - 10)^2 + \left(\frac{8\sqrt{7}}{3} - 0\right)^2 = \frac{58}{3} - \frac{22}{3} = 12.$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar *a*) los vértices, *b*) los focos, *c*) la excentricidad, *d*) el *latus rectum*, y *e* las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas siguientes:

(1) $4x^2 - 45y^2 = 180$; (2) $49y^2 - 16x^2 = 784$; (3) $x^2 - y^2 = 25$.

*Sol.* (1) *a*) $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$; *b*) $(\pm 7, 0)$; *c*) $\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$; *d*) $\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$; *e*) $y = \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{15} x$.

(2) *a*) $(0, \pm 4)$; *b*) $(0, \pm\sqrt{65})$; *c*) $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$; *d*) $\dfrac{49}{2}$; *e*) $y = \pm \dfrac{4}{7} x$.

(3) *a*) $(\pm 5, 0)$; *b*) $(\pm 5\sqrt{2}, 0)$; *c*) $\sqrt{2}$; *d*) 10; *e*) $y = \pm x$.

**2.** Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

*a*) Eje real 8, focos $(\pm 5, 0)$. *Sol.* $9x^2 - 16y^2 = 144$.
*b*) Eje imaginario 24, focos $(0, \pm 13)$. *Sol.* $144y^2 - 25x^2 = 3.600$.
*c*) Centro (0, 0), un foco (8, 0), un vértice (6, 0). *Sol.* $7x^2 - 9y^2 = 252$.

**3.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los dos puntos fijos (0, 3) y (0, —3) sea igual a 5. *Sol.* $44y^2 - 100x^2 = 275$.

**4.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (0, 6) sea igual a 3/2 de la correspondiente a la recta $y - 8/3 = 0$. *Sol.* $5y^2 - 4x^2 = 80$.

**5.** Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas $y$, longitud del *latus rectum* 36 y distancia entre los focos igual a 24. *Sol.* $3y^2 - x^2 = 108$.

**6.** Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas $y$, excentricidad $2\sqrt{3}$ y longitud del *latus rectum* igual a 18. *Sol.* $121y^2 - 11x^2 = 81$.

**7.** Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, ejes sobre los de coordenadas y que pase por los puntos (3, 1) y (9, 5). *Sol.* $x^2 - 3y^2 = 6$.

**8.** Hallar la ecuación de la hipérbola de vértices $(\pm 6, 0)$ y asíntotas $6y = \pm 7x$.
*Sol.* $49x^2 - 36y^2 = 1.764$.

**9.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia a los puntos fijos (—6, —4) y (2, —4) sea igual a 6. *Sol.* $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$.

**10.** Hallar las coordenadas de *a*) el centro, *b*) los focos, *c*) los vértices, y *d*) las ecuaciones de las asíntotas, de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.
*Sol.* *a*) (2, —1); *b*) (7, —1), (—3, —1); *c*) (6, —1), (—2, —1); *d*) $y + 1 = \pm \frac{3}{4}(x - 2)$.

**11.** Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos (—2, 1) y (3, 2) es igual a 4, representa una hipérbola.
*Sol.* $4x^2 - y^2 - 4x + 3y - 26 = 0$.

**12.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $3x + 4y - 7 = 0$ sea 144/25. ¿Qué curva representa dicho lugar?
*Sol.* $9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$. Hipérbola.

**13.** Hallar la ecuación de la hipérbola de centro (0, 0), un vértice en (3, 0) y ecuación de una asíntota $2x - 3y = 0$. *Sol.* $4x^2 - 9y^2 = 36$.

**14.** Hallar la ecuación de la hipérbola conjugada a la del Problema 13. *Sol.* $9y^2 - 4x^2 = 36$.

**15.** Dibujar las hipérbolas siguientes y hallar sus puntos de intersección.

$$x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0,$$

$$3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0.$$

*Sol.* (1, 1), (1, 3), (—2, 1), (—2, 3).

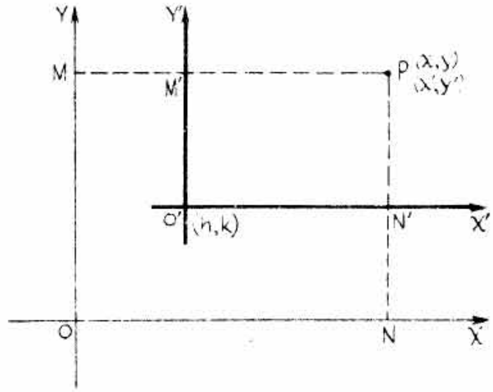
**16.** Demostrar que la diferencia de distancias del punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ a los focos es igual a la longitud del eje real. Estas distancias son los radios focales del punto.

CAPITULO 8

# Transformación de coordenadas

INTRODUCCION. En geometría analítica, al igual que en física, es muy importante elegir un sistema de coordenadas, o referencia, adecuado con objeto de simplificar al máximo las ecuaciones y que el proceso de resolución sea lo más rápido posible. Ello se realiza mediante una transformación de ejes coordenados cuyo proceso general se puede considerar reducido a dos movimientos, uno de *traslación* y otro de *rotación*.

TRASLACION DE EJES. Sean $OX$ y $OY$ los ejes primitivos y $O'X'$ y $O'Y'$, paralelos respectivamente a los anteriores, los nuevos ejes. Sean también $(h, k)$ las coordenadas de $O'$ con respecto al sistema inicial.



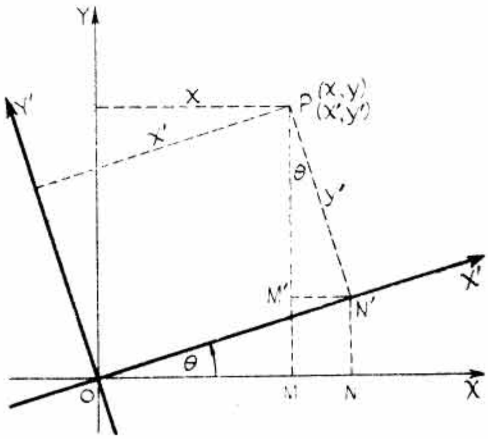

Supongamos que $(x, y)$ son las coordenadas de un punto $P$ con respecto a los ejes primitivos, y $(x', y')$ las coordenadas, del mismo punto, respecto de los nuevos. Para determinar $x$ e $y$ en función de $x'$, $y'$, $h$ y $k$ se tiene:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x' \quad \text{e}$$
$$y = NP = NN' + N'P = k + y'$$

Por tanto, las ecuaciones de la traslación de ejes son:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k.$$

ROTACION DE EJES. Sean $OX$ y $OY$ los ejes primitivos y $OX'$ y $OY'$ los nuevos, siendo $O$ el origen común de ambos sistemas. Representemos por $\theta$ el ángulo $X'OX$ de la rotación. Supongamos que $(x, y)$ son las coordenadas de un punto $P$ del plano con respecto a los ejes primitivos, y $(x', y')$ las coordenadas, del mismo punto, respecto de los nuevos. Para determinar $x$ e $y$ en función de $x'$, $y'$ y $\theta$, se tiene:




$$x = OM = ON - MN$$
$$= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \quad \text{e}$$
$$y = MP = MM' + M'P = NN' + M'P$$
$$= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$

Por tanto, las fórmulas de la rotación $\theta$ de los ejes coordenados son:

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** Hallar la ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$ cuando se traslada el origen de coordenadas al punto $(2, -1)$.

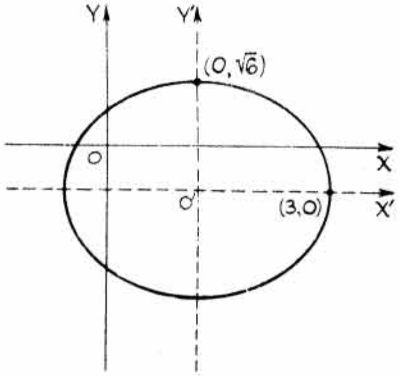
Sustituyendo $x = x' + 2$, $y = y' - 1$ en la ecuación dada se obtiene

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7.$$

Desarrollando y simplificando, se llega a la ecuación de la curva referida a los nuevos ejes.

$$2x'^2 + 3y'^2 = 18.$$

Esta es la ecuación de la elipse con centro en el nuevo origen, con el eje mayor sobre el eje $x'$ y de semiejes $a = 3$, $b = \sqrt{6}$.




**2.** Por medio de una traslación de ejes, transformar la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135$ en otra en la cual los coeficientes de los términos de primer grado sean nulos.

Sustituyendo $x$ e $y$ por los valores $x' + h$ e $y' + k$, respectivamente,

$$3(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 24(y' + k) = 135, \text{ o bien}$$

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' - (8k - 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k = 135.$$

De $6h + 6 = 0$ y $8k - 24 = 0$ se obtiene $h = -1$ y $k = 3$, con lo cual resulta

$$3x'^2 - 4y'^2 = 102.$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, eje real o transversal sobre el eje $x$ y semieje real igual a $\sqrt{34}$.

*Otro método.* A veces, para eliminar los términos de primer grado de una ecuación, se sigue el método que se da a continuación.

Sumando y restando los términos que se indican (para completar cuadrados) en la ecuación dada $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135$,

resulta $$3(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 102,$$

o bien, $$3(x + 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 102.$$

Sustituyendo $x + 1$ por $x'$ e $y - 3$ por $y'$ resulta

$$3x'^2 - 4y'^2 = 102.$$

**3.** Deducir la ecuación de la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ cuando se giran los ejes un ángulo de 45°.

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0.$$

Desarrollando y simplificando se obtiene $2y'^2 - \sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' + 3 = 0$, que es la misma paralela con su vértice en $\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ y su eje paralelo el nuevo eje $x$.

**4.** Hallar el ángulo de rotación de ejes necesario para eliminar el término en $xy$ de la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

Sustituyendo en la ecuación dada $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$

e $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$. Se obtiene,

$$7(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 - 6\sqrt{3}(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)$$
$$+ 13(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 = 16.$$

Desarrollando y reduciendo términos semejantes,

$$(7\cos^2\theta - 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 13\operatorname{sen}^2\theta)x'^2 + [12\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)]x'y'$$
$$+ (7\operatorname{sen}^2\theta + 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 13\cos^2\theta)y'^2 = 16.$$

Para eliminar el término en $x'y'$, igualamos a cero el coeficiente de dicho término y despejamos $\theta$,

$$12\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0, \quad \text{o}$$

$$6\operatorname{sen}2\theta - 6\sqrt{3}(\cos 2\theta) = 0.$$

Luego $\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3}$, $2\theta = 60°$, de donde $\theta = 30°$.

Sustituyendo este valor de $\theta$, la ecuación se reduce a $x'^2 + 4y'^2 = 4$, que representa una elipse de centro en el origen y que tiene sus ejes sobre los nuevos. Los semiejes mayor y menor son, respectivamente, $a = 2$, $b = 1$.

LA FORMA MAS GENERAL de la ecuación de segundo grado es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

En el estudio general de esta ecuación, se demuestra que el ángulo $\theta$ que se deben girar los ejes para eliminar el término en $xy$ viene dado por

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

**5.** Mediante una traslación y una rotación de ejes, reducir la ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

a su forma más simple. Hacer un esquema en el que figuren los tres sistemas de ejes coordenados.

Para eliminar los términos de primer grado hacemos $x = x' + h$, $y = y' + k$.

$$5(x' + h)^2 + 6(x' + h)(y' + k) + 5(y' + k)^2 - 4(x' + h) + 4(y' + k) - 4 = 0.$$

Desarrollando y agrupando términos,

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + (10h + 6k - 4)x' + (10k + 6h + 4)y' + 5h^2 + 6hk + 5k^2 - 4h + 4k - 4 = 0.$$

Resolviendo el sistema formado por $10h + 6k - 4 = 0$ y $10k + 6h + 4 = 0$ se obtiene $h = 1$, $k = -1$. Luego la ecuación se reduce a

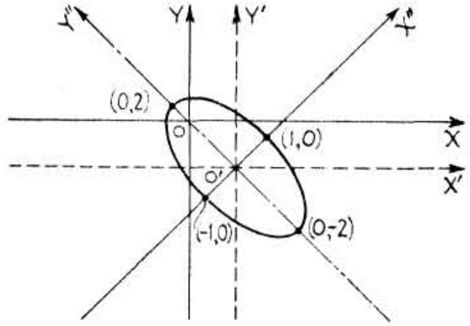
$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 8.$$

Para hallar $\theta$, se emplea la fórmula $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{6}{5 - 5} = \infty$. Por tanto, $2\theta = 90°$, $\theta = 45°$.

Las ecuaciones de la rotación son $x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}$.

Sustituyendo,

$$5\left(\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}\right)^2+6\left(\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}\right)+5\left(\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}\right)^2=8.$$




Desarrollando y simplificando, la ecuación se reduce a

$$4x''^2+y''^2=4,$$

que es una elipse con sus ejes sobre los $x''$ e $y''$, con centro en el nuevo origen, semieje mayor 2 y semieje menor igual a 1.

LA ECUACION GENERAL $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, excepto en *casos particulares*, corresponde a una sección cónica. Se demuestra que si el discriminante

$B^2-4AC<0$, la curva es una elipse,

$B^2-4AC=0$, la curva es una parábola,

$B^2-4AC>0$, la curva es una hipérbola.

En los casos particulares, la ecuación puede representar (degeneración) dos rectas, un punto o rectas imaginarias.

**6.** Hallar la naturaleza de la curva representada por la ecuación: $4x^2-4xy+y^2-6x+3y+2=0$.

Como $B^2-4AC=16-16=0$, puede ser una parábola.
Agrupando términos, esta ecuación se puede descomponer en factores.

$$(4x^2-4xy+y^2)-3(2x-y)+2=0,$$
$$(2x-y)^2-3(2x-y)+2=0,$$
$$(2x-y-1)(2x-y-2)=0.$$

Se trata de las dos rectas paralelas, $2x-y-1=0$ y $2x-y-2=0$.

**7.** Determinar la naturaleza del lugar geométrico representado por la ecuación $9x^2-12xy+7y^2+4=0$.

En este caso, $B^2-4AC=(144-252)<0$, que es la condición necesaria para la elipse.
Sin embargo, escribiendo esta ecuación en la forma

$$(3x-2y)^2+3y^2+4=0$$

se observa que no se satisface para valores reales de $x$ e $y$. Por tanto, el lugar en cuestión es imaginario.

Otro método consiste en despejar $y$ en función de $x$,

$$y=\frac{+12x\pm\sqrt{(12x)^2-4(7)(9x^2+4)}}{2(7)}=\frac{+6x\pm\sqrt{-(27x^2+28)}}{7}.$$

El lugar geométrico dado es imaginario para todos los valores reales de $x$.

**8.** Eliminar los términos de primer grado en la ecuación $3x^2+4y^2-12x+4y+13=0$.

Sumando y restando términos, para completar cuadrados, $3(x^2-4x+4)+4(y^2+y+\frac{1}{4})=0$, o sea, $3(x-2)^2+4(y+\frac{1}{2})^2=0$.

Haciendo $x-2=x'$ e $y+\frac{1}{2}=y'$ se obtiene $3x'^2+4y'^2=0$.

Esta ecuación solo se satisface para $x'=0$, $y'=0$, que es el nuevo origen.

El lugar geométrico representado por la ecuación original se reduce a un punto $(2,-\frac{1}{2})$.

**9.** Simplificar la ecuación siguiente: $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$.

Como $B^2 - 4AC = 0$, puede tratarse de una parábola.
En el caso de la parábola, conviene girar los ejes antes de efectuar la traslación.

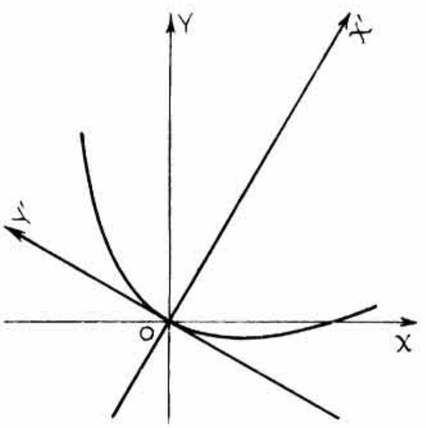
$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-4}{4-1} = -\frac{4}{3}$. De donde $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$.

Como $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{3}{5}$, $\cos^2\theta = \frac{1}{5}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

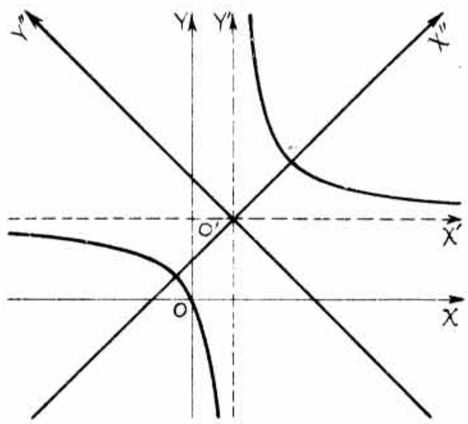
Las ecuaciones de la rotación son $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$. Sustituyendo,

$$4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 8\sqrt{5}\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right) - 16\sqrt{5}\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Desarrollando y simplificando se obtiene $y'^2 - 8x' = 0$, que es una parábola.




*Problema 9*




*Problema 10*

**10.** Simplificar la ecuación $xy - 2y - 4x = 0$. Hacer un esquema con los tres sistemas de ejes.

Como $B^2 - 4AC = 1 > 0$, la curva, si existe, es una hipérbola.

Sustituyendo $x = x' + h$, $y = y' + k$, se obtiene,

$(x' + h)(y' + k) - 2(y' + k) - 4(x' + h) = 0$, o bien,

$x'y' + (k - 4)x' + (h - 2)y' + hk - 2k - 4h = 0$.

Para $k = 4$, $h = 2$, se llega a la ecuación $x'y' = 8$.

Para hallar el ángulo de la rotación: $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{0} = \infty$, $2\theta = 90°$, $\theta = 45°$.

Luego $x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}$, y $\left(\frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}\right) = 8$.

Simplificando, la ecuación final es $x''^2 - y''^2 = 16$, una hipérbola equilátera.

**11.** Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, -1)$, $(-3, 2)$, $(-2, -1)$.
Dividiendo por $A$ la ecuación general de segundo grado,

$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Sustituyendo las coordenadas de los puntos por $x$ e $y$,

$$\begin{aligned} B' + C' + D' + E' + F' &= -1 \\ 6B' + 9C' + 2D' + 3E' + F' &= -4 \\ -3B' + C' + 3D' - E' + F' &= -9 \\ -6B' + 4C' - 3D' + 2E' + F' &= -9 \\ 2B' + C' - 2D' - E' + F' &= -4 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $B' = \frac{8}{9}$, $C' = -\frac{13}{9}$, $D' = -\frac{1}{9}$, $E' = \frac{19}{9}$, $F' = -\frac{22}{9}$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación original y simplificando resulta

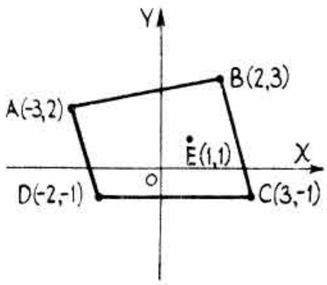
$$9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y - 22 = 0.$$

Como $B^2 - 4AC = (64 + 468) > 0$, la cónica es una hipérbola.

*Otro método* de resolver este problema es el siguiente.

La ecuación de la recta $AB$ es $x - 5y + 13 = 0$, y la de $CD$ es $y + 1 = 0$. La ecuación de este par de rectas es $(y + 1)(x - 5y + 13) = xy - 5y^2 + x + 8y + 13 = 0$.

Análogamente, la ecuación del par de rectas $AD$ y $BC$ es $12x^2 + 7xy + y^2 - 5x - 4y - 77 = 0$.




La familia de curvas que pasan por los puntos de intersección de estas rectas es

$$xy - 5y^2 + x + 8y + 13 + k(12x^2 + 7xy + y^2 - 5x - 4y - 77) = 0.$$

Para determinar la curva de esta familia que pase por el quinto punto $(1, 1)$, se sustituyen $x$ e $y$ por las coordenadas de éste y se despeja el valor de $k$; se obtiene $k = 3/11$.

Para este valor de $k$, la ecuación es

$$9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y - 22 = 0.$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Aplicando las fórmulas de la traslación de ejes, $x = x' + h$, $y = y' + k$, reducir las ecuaciones siguientes a su forma más simple y establecer la naturaleza de la figura que representan.

*a*) $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$. *Sol.* $y^2 = 4x$. Parábola.

*b*) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 = 25$. Circunferencia.

*c*) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$. *Sol.* $3x^2 - 4y^2 = 12$. Hipérbola.

*d*) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$. *Sol.* $2x^2 + 3y^2 = 34$. Elipse.

*e*) $x^2 + 5y^2 + 2x - 20y + 25 = 0$. *Sol.* $x^2 + 5y^2 + 4 = 0$. Elipse imaginaria.

**2.** Eliminar los términos de primer grado de las ecuaciones siguientes completando cuadrados perfectos.

*a*) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$. *Sol.* $2x^2 + 4y^2 = 33$.

*b*) $3x^2 - 4y^2 + 6x - 8y - 10 = 0$. *Sol.* $3x^2 - 4y^2 = 9$.

*c*) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y - 17 = 0$. *Sol.* $2x^2 + 5y^2 = 40$.

*d*) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 12y - 1 = 0$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 = 25$.