3. Por medio de una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación $2xy - x - y + 4 = 0$. *Sol.* $4xy + 7 = 0$.

4. Por medio de una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$. *Sol.* $2x^2 + 4xy + 6y^2 - 13 = 0$.

5. Hallar la naturaleza de las cónicas siguientes teniendo en cuenta el valor del discriminante $B^2 - 4AC$.

a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$. *Sol.* Hipérbola.

b) $41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168$. *Sol.* Elipse.

c) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$. *Sol.* Parábola.

d) $xy + x - 2y + 3 = 0$. *Sol.* Hipérbola.

e) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 4$. *Sol.* Dos rectas paralelas.

6. Por medio de una rotación de ejes, simplificar la ecuación $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$ y hallar la naturaleza de la figura que representa. *Sol.* $x^2 - 2x - 6y = 0$. Parábola.

7. Por medio de una rotación de ejes de valor $\theta = \text{arc tg } \frac{4}{3}$, simplificar la ecuación

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0.$$

Hacer un esquema con ambos sistemas de ejes. *Sol.* $x^2 - 4y = 0$.

8. Simplificar las ecuaciones siguientes por medio de una transformación adecuada de ejes y dibujar la figura que representan así como los sistemas de ejes.

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$. *Sol.* $2x^2 + y^2 = 2$.

b) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$. *Sol.* $32x^2 - 48y^2 = 9$.

c) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 16$.

d) $2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$. *Sol.* Imaginaria.

9. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos (5, 2), (1, —2), (—1, 1), (2, 5) y (—1, —2). *Sol.* $49x^2 - 55xy + 36y^2 - 110x - 19y - 231 = 0$. Elipse.

10. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos (1, 1), (—1, 2), (0, —2), (—2, —1), (3, —3). *Sol.* $16x^2 + 46xy + 49y^2 + 16x + 23y - 150 = 0$. Elipse.

11. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos (4, 1), (2, 2), (3, —2), (4, —1), (1, —3). *Sol.* $17x^2 - 16xy + 54y^2 + 11x + 64y - 370 = 0$. Elipse.

12. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos (1, 6), (—3, —2), (—5, 0), (3, 4), (0, 10) *Sol.* $xy - 2x + y - 10 = 0$. Hipérbola.

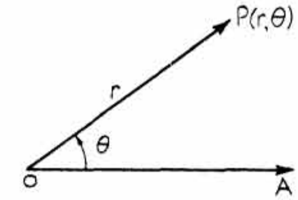
CAPITULO 9

Coordenadas polares

COORDENADAS POLARES. En lugar de fijar la posición de un punto del plano en función de sus distancias a dos rectas perpendiculares es preferible, a veces, hacerlo en función de su distancia a un punto fijo y de la dirección con respecto a una recta fija que pase por este punto. Las coordenadas de un punto, en esta referencia, se llaman *coordenadas polares*.

El punto fijo O se denomina *polo* y la recta fija OA se llama *eje polar*.

Las coordenadas polares de un punto P se representan por $(r; \theta)$, siendo r la distancia OP y θ el ángulo AOP. La distancia r medida desde O hasta P es positiva. Igual que en trigonometría, el ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las agujas del reloj; r es positivo cuando se mide desde el polo al punto, y negativo en caso contrario.



Si r y θ están relacionados por una ecuación cualquiera, se pueden asignar valores a θ y determinar los correspondientes de r. Los puntos que resultan constituyen una línea, recta o curva, definida.

SIMETRIAS. Igual que ocurre en el caso de coordenadas cartesianas rectangulares, cuando se emplean coordenadas polares también se dispone de criterios para averiguar las simetrías que puede presentar una línea o lugar geométrico cualquiera.

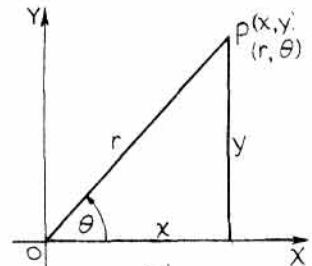
Si la ecuación no se modifica al sustituir θ por $-\theta$, la curva es simétrica con respecto al eje polar.

La curva es simétrica con respecto a la perpendicular al eje polar que pasa por el polo cuando la ecuación no varía al sustituir θ por $\pi - \theta$.

Una curva es simétrica con respecto al polo cuando la ecuación no varía al sustituir r por $-r$, o cuando se sustituye θ por $\pi + \theta$.

RELACION ENTRE LAS COORDENADAS RECTANGULARES Y POLARES.

Consideremos al punto $P(r; \theta)$ y supongamos que el eje polar OX y el polo O son, respectivamente, el eje x y el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Sean (x, y) las coordenadas rectangulares del mismo punto P. En estas condiciones,



$$x = r \cos \theta,$$

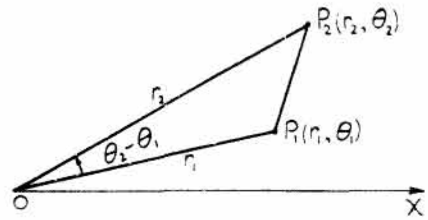
$$y = r \operatorname{sen} \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

y $$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(r_1;\ \theta_1)$ y $P_2(r_2;\ \theta_2)$.



Como se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, el tercer lado se puede determinar mediante el teorema del coseno.

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

2. Hallar la distancia entre los puntos $(6;\ 15^\circ)$ y $(8;\ 75^\circ)$.

Aplicando la fórmula del Problema 1, $d = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2(6)(8)\cos(75^\circ - 15^\circ)}$

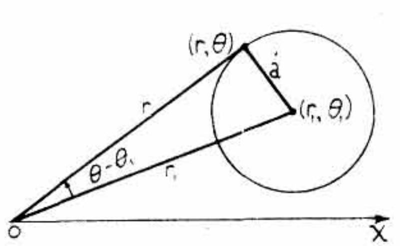
$$= \sqrt{36 + 64 - 96(\tfrac{1}{2})} = 2\sqrt{13}.$$

3. Hallar la ecuación en coordenadas polares de la circunferencia de centro $(r_1;\ \theta_1)$ y radio a.

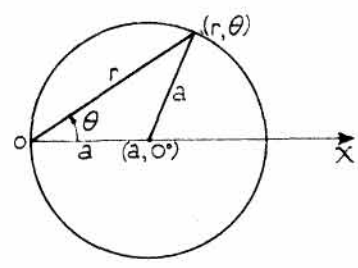
Sea $(r;\ \theta)$ un punto genérico cualquiera de la circunferencia.

Del triángulo de la figura se obtiene la ecuación $a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1)$

o bien, $r^2 - 2r_1r\cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2$.



Problema 3



Problema 4

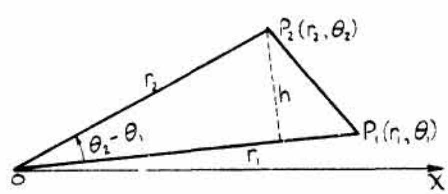
4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(a;\ 0^\circ)$ y radio a.

Se tiene, $\theta_1 = 0^\circ$. Del triángulo se deduce, $a^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$.

Luego la ecuación pedida es $r^2 = 2ar\cos\theta$ o $r = 2a\cos\theta$.

5. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0;\ 0)$, $(r_1;\ \theta_1)$ y $(r_2;\ \theta_2)$.

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}(OP_1)(h)$$
$$= \tfrac{1}{2}(r_1)r_2\,\text{sen}\,(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}r_1r_2\,\text{sen}\,(\theta_2 - \theta_1).$$



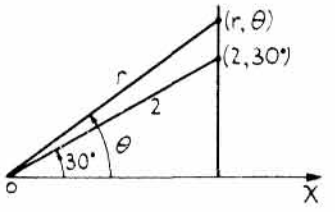
6. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0;\ 0)$, $(6;\ 20^\circ)$ y $(9;\ 50^\circ)$.

Area $= \tfrac{1}{2}r_1r_2\,\text{sen}\,(\theta_2 - \theta_1) = \tfrac{1}{2}(6)(9)\,\text{sen}\,(50^\circ - 20^\circ) = 13{,}5$ unidades de superficie.

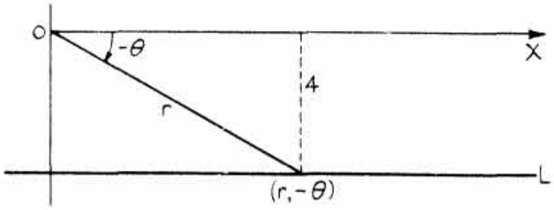
7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2;\ 30^\circ)$ y es perpendicular al eje polar OX.

Sea $(r;\ \theta)$ un punto genérico cualquiera de la recta.

Se tiene $r\cos\theta = 2\cos 30^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$, o bien, $r\cos\theta = \sqrt{3}$.



Problema 7



Problema 8

8. Hallar la ecuación en coordenadas polares de una recta paralela al eje polar OX y situada por debajo de él a una distancia de 4 unidades.

Sea $(r;\ -\theta)$ un punto cualquiera de la recta L.

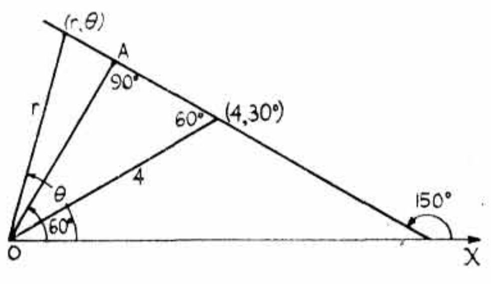
Se tiene $r\,\text{sen}\,(-\theta) = 4$, o sea, $r\,\text{sen}\,\theta + 4 = 0$.

Nota. $\cos(-\theta) = \cos\theta$; $\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

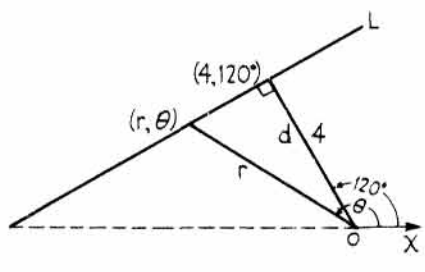
9. Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto $(4;\ 30^\circ)$ y forme en ángulo de 150° con el eje polar.

Sea $(r;\ \theta)$ un punto cualquiera de la recta.

Se tiene, $OA = r\cos(\theta - 60^\circ) = 4\,\text{sen}\,60^\circ$, o bien, $r\cos(\theta - 60^\circ) = 2\sqrt{3}$.



Problema 9



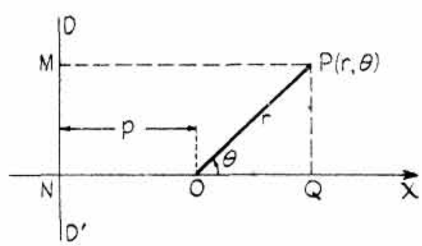
Problema 10

10. Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto $(4;\ 120^\circ)$ y sea perpendicular a la que une $(4;\ 120^\circ)$ con el polo $(0;\ 0)$. Sea $(r;\ \theta)$ un punto genérico cualquiera de la recta.

Las rectas L y d son perpendiculares. Por tanto, $d = r\cos(\theta - 120^\circ)$ y la ecuación de L es $r\cos(\theta - 120^\circ) = 4$.

La ecuación $r\cos(\theta - 120^\circ) = 4$ es la forma polar de la forma normal de la ecuación de la recta en coordenadas rectangulares, siendo $p = 4$ y $\omega = 120^\circ$.

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(r;\ \theta)$ de manera que $\dfrac{OP}{MP} = e$ (constante).



$MP = NO + OQ = p + r\cos\theta$.

Como $OP = e(MP)$, $r = e(p + r\cos\theta)$

o $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$.

Si $D'D$ estuviera a la derecha del polo O, la ecuación sería

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

Como el punto $(r; \theta)$ se mueve de forma que la relación de sus distancias al punto fijo O, polo, y a la recta fija $D'D$ es constante e igual a e, la curva es una cónica cuya naturaleza depende del valor de e.

Si la recta fija $D'D$ es paralela al eje polar, la ecuación toma la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

12. Hallar la naturaleza de la cónica definida por la ecuación $r = \dfrac{12}{4 + 3\cos\theta}$.

Dividiendo numerador y denominador por 4 se obtiene la ecuación $r = \dfrac{3}{1 + \frac{3}{4}\cos\theta}$.

Luego $e = \frac{3}{4}$ y la curva es una elipse.

Como $ep = 3$, o sea, $\frac{3}{4}p = 3$, se obtiene $p = 4$, con lo cual, la directriz $D'D$ es perpendicular al eje polar y está a 4 unidades a la derecha del polo.

13. Hallar la ecuación en coordenadas polares de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Aplicando las relaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, y sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$9r^2\cos^2\theta + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\theta = 36, \text{ o bien, } r^2(4 + 5\cos^2\theta) = 36.$$

14. Escribir la ecuación siguiente en coordenadas rectangulares:

$$r^2 - 2r(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) - 7 = 0.$$

Sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$, se obtiene la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - 7 = 0, \text{ o bien, } x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0,$$

que es una circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 3.

15. Escribir la ecuación siguiente en coordenadas rectangulares:

$$r = \frac{4}{1 - \cos\theta}, \text{ o bien } r(1 - \cos\theta) = 4.$$

Sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se obtiene $\sqrt{x^2 + y^2}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 4$.

Simplificando, $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4$, o bien $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$.

Elevando al cuadrado, $x^2 + y^2 = x^2 + 8x + 16$, o bien, $y^2 - 8x - 16 = 0$, que es la ecuación de una parábola de vértice $(-2, 0)$ y simétrica con respecto al eje x.

16. Escribir la ecuación siguiente en coordenadas rectangulares e identificar la curva.

$$r = \frac{1}{1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

Sustituyendo, $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

Simplificando, $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} - 2y}$, o bien, $\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2} - 2y - 1) = 0$.

Pero $\sqrt{x^2+y^2} = 0$ solo para $x = y = 0$.

Elevando al cuadrado y simplificando la ecuación $\sqrt{x^2+y^2} - 2y - 1 = 0$ se obtiene $x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$; se trata de una hipérbola.

17. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas siguientes:

$$(1)\quad r = 1 - \cos\theta$$
$$(2)\quad r = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta.$$

Sabemos por trigonometría que $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$.

Por tanto, $2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$, o bien, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\,(2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta - 1) = 0$. De donde, sen $\theta = 0, \frac{1}{2}$.

Para sen $\frac{1}{2}\theta = 0$, $\theta = 0°$; para sen $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\theta = 30°, 150°$, y $\theta = 60°, 300°$.

Luego las coordenadas de los puntos de intersección son $(0, 0°)$, $(\frac{1}{2}, 60°)$, $(\frac{1}{2}, 300°)$.

18. Hallar el centro y el radio de la circunferencia $r^2 + 4r\cos\theta - 4\sqrt{3}\,r\operatorname{sen}\theta - 20 = 0$.

Aplicando la ecuación de la circunferencia dada en el Problema 3 y desarrollando se obtiene

$$r^2 - 2r(r_1\cos\theta_1\cos\theta + r_1\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta) + r_1^2 - a^2 = 0$$

o bien, $$r^2 - 2r_1\cos\theta_1\, r\cos\theta - 2r_1\operatorname{sen}\theta_1\, r\operatorname{sen}\theta + r_1^2 - a^2 = 0.$$

Comparando la ecuación dada con esta última,

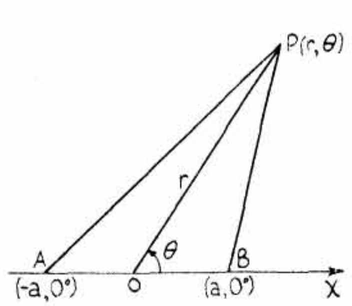
$$(1)\quad -2r_1\cos\theta_1 = 4,\qquad (2)\quad 2r_1\operatorname{sen}\theta_1 = 4\sqrt{3},\quad \text{y}\quad (3)\quad r_1^2 - a^2 = -20.$$

Dividiendo la ecuación (2) por (1), tg $\theta_1 = -\sqrt{3}$, $\theta_1 = 120°$.

Sustituyendo en (1), $-2r_1(-\frac{1}{2}) = 4$, de donde, $r_1 = 4$. De (3), $16 - a^2 = -20$, $a = 6$.

Luego el centro de la circunferencia es el punto $(4; 120°)$ y su radio vale 6.

19. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a los dos fijos $(-a; 0°)$ y $(a; 0°)$ sea igual a a^2.



Del triángulo AOP se deduce,

$AP = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos(180° - \theta)} = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta}$.

Del triángulo BOP, $PB = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}$.

$(AP)(PB) = \sqrt{(a^2+r^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta} = a^2$.

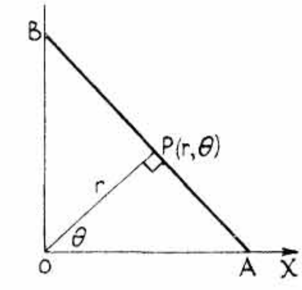
Elevando al cuadrado, $a^4 + 2a^2r^2 + r^4 - 4a^2r^2\cos^2\theta = a^4$.

Simplificando, $r^4 + 2a^2r^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = 0$, o bien, $r^2(r^2 + 2a^2 - 4a^2\cos^2\theta) = 0$.

Luego la ecuación pedida es $r^2 + 2a^2 - 4a^2\cos^2\theta = 0$.

o sea, $r^2 = 2a^2(2\cos^2\theta - 1) = 2a^2\cos 2\theta$. (Lemniscata. Ver Problema 25.)

20. Un segmento de longitud $2a$ tiene sus extremos sobres dos rectas fijas perpendiculares. Hallar el lugar geométrico del pie de la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las rectas al segmento.



Sea una de las rectas fijas el eje polar y el punto de intersección de las rectas dadas el polo.

Se tiene $OA = OP \sec\theta = AB\cos(90^\circ - \theta)$

es decir, $r\sec\theta = 2a\cos(90^\circ - \theta)$

o bien, $\dfrac{r}{\cos\theta} = 2a \operatorname{sen}\theta.$

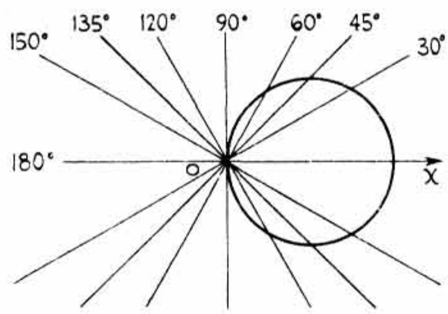
Luego $r = 2a\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, de donde, $r = a\operatorname{sen}2\theta$. (Trébol de cuatro hojas.)

21. Estudiar y dibujar el lugar geométrico de ecuación $r = 10\cos\theta$.

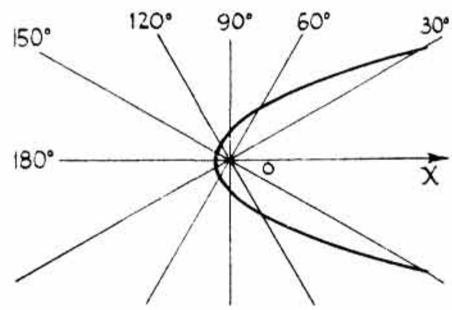
Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la curva es simétrica con respecto al eje polar. El ángulo θ puede tomar cualquier valor, pero r varía de 0 a ± 10; luego la curva es cerrada.

Para hallar puntos de ella, damos valores a θ y calculamos los correspondientes de r. Por el Problema 4 sabemos que el lugar dado es una circunferencia de radio $a = 5$ y centro en el eje polar.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	10	8,7	7,1	5	0	—5	—7,1	—8,7	—10



Problema 21



Problema 22

22. Dibujar la curva o lugar geométrico de ecuación $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$.

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la curva es simétrica con respecto al eje polar.

Para $\theta = 0^\circ$, r es infinito; para $\theta = 180^\circ$, $r = 1$. La curva es abierta.

Según el Problema 11, se trata de una parábola.

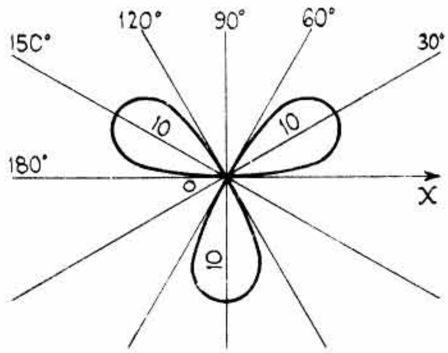
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
r	∞	14,9	4	2	1,3	1,1	1	1,1	1,3	2	4	14,9	∞

23. Dibujar el trébol de tres hojas de ecuación $r = 10\operatorname{sen}3\theta$.

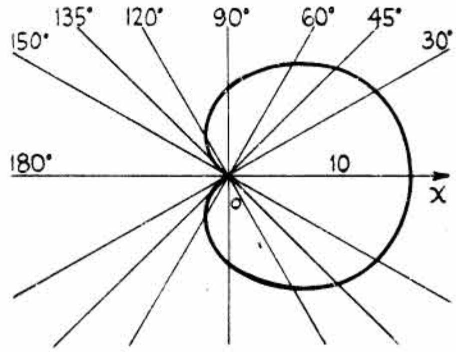
Como el seno es positivo en los cuadrantes 1.° y 2.° y negativo en los 3.° y 4.°, la curva es simétrica con respecto a la recta perpendicular al eje polar trazada por el polo.

El valor de r es cero cuando 3θ sea 0°, 180°, o algún múltiplo de 180°, es decir, para $\theta = 0°$, 60°, 120°, . . . Por el contrario, r alcanza un máximo cuando $3\theta = 90°$, 270°, o algún múltiplo impar de 90°, es decir, para $\theta = 30°$, 90°, 150°, . . .

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
r	0	10	0	—10	0	10	0	—10	0	10	0	—10



Problema 23



Problema 24

24. Dibujar la *cardioide* de ecuación $r = 5(1 + \cos\theta)$.

La curva es simétrica con respecto al eje polar.

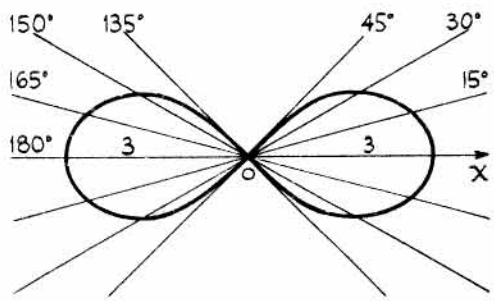
Como $\cos\theta$ varía entre 1 y —1, r no puede ser negativo.

El valor de r varía de 10 a 0 cuando θ lo hace de 0° a 180°.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	10	9,3	8,5	7,5	5	2,5	1,5	0,67	0

25. Dibujar la *lemniscata* de ecuación:

$$r^2 = 9\cos 2\theta.$$



Si se sustituye r por $-r$ y θ por $-\theta$, la ecuación no se modifica, ya que $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ y $(-r)^2 = r^2$. La curva es, pues, simétrica con respecto al polo y con respecto al eje polar.

El valor de r alcanza un máximo para $\theta = 0°$, ya que $\cos 0° = 1$, con lo que $r = 3$.

Para $45° < \theta < 135°$, y $225° < \theta < 315°$, r es imaginario.

Para $\theta = \pm 45°$, $\cos 2\theta = 0$; de donde $r = 0$, y las rectas $\theta = \pm\pi/4$ son tangentes a la curva en el origen.

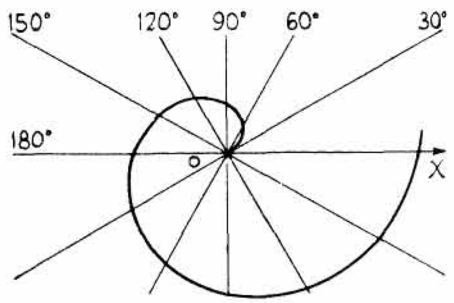
$$r = \pm 3\sqrt{\cos 2\theta}.$$

θ	2θ	$\cos 2\theta$	r
0	0	1	± 3
15°	30°	0,866	$\pm 2,8$
30°	60°	0,5	$\pm 2,1$
45°	90°	0	0

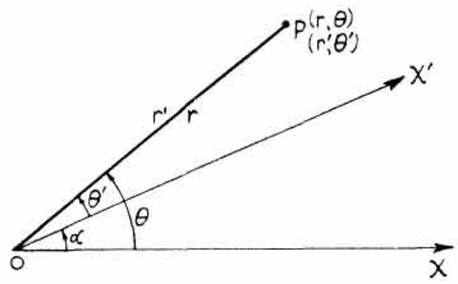
26. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo radio vector sea proporcional al ángulo.

La ecuación es $r = a\theta$. La curva que cumple esta condición se llama *espiral de Arquímedes.*

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	0	$0{,}52a$	$1{,}0a$	$1{,}6a$	$3{,}1a$	$4{,}7a$	$6{,}3a$



Problema 26



Problema 27

27. Siendo $P(r;\theta)$ un punto cualquiera, demostrar que cuando el eje polar gira alrededor del polo O un ángulo α se verifica, $r' = r$ y $\theta' = \theta - \alpha$, siendo $(r';\theta')$ las nuevas coordenadas del punto.

Las fórmulas de la rotación de ejes en coordenadas polares son $\theta = \theta' + \alpha$ y $r = r'$.

28. Demostrar que si se gira el eje polar un ángulo de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj, la ecuación de la cardioide del Problema 24 se transforma en $r = 5(1 - \text{sen}\,\theta)$.

Se sustituye θ por $90° + \theta'$.

Entonces, $r' = 5[1 + \cos(90° + \theta')] = 5(1 - \text{sen}\,\theta')$, ya que $\cos(90° + \theta') = -\text{sen}\,\theta'$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representar los puntos: (2; 30°), (—3; 30°), (5; 75°), (3; 210°), (2; $\pi/2$), (—2; 270°), (—4; 300°), (—3; —$5\pi/6$), (4; 0°), (0; 30°), (0; 60°).

2. Hallar la distancia entre los pares de puntos siguientes, expresando los resultados con una cifra decimal.

a) (5; 45°) y (8; 90°). *Sol.* 5,7.
b) (—5; —120°) y (4; 150°). *Sol.* 6,4.
c) (50; 30°) y (50; —90°). *Sol.* 86,6.
d) (3; 150°) y (—2; 60°). *Sol.* 3,6.

3. Hallar el área de los triángulos cuyos vértices son el polo y los pares de puntos del Problema 2.
Sol. *a*) 14,14; *b*) 10; *c*) 1082,5; *d*) 3.

4. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (4; 120°) y es perpendicular a OX.
Sol. $r\cos\theta + 2 = 0$.

5. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (3; —30°) y es paralela a OX.
Sol. $2r\,\text{sen}\,\theta + 3 = 0$.

6. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (2; 120°) y por el polo. *Sol.* $\theta = 2\pi/3$.

7. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (4; $2\pi/3$) y es perpendicular a la recta que une el origen con dicho punto. *Sol.* $r\cos(\theta - 2\pi/3) = 4$.

8. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (3; 0°) y forma un ángulo de $3\pi/4$ con el eje polar. Hallar r para $\theta = -\pi/4$ y razonar la respuesta. *Sol.* $\sqrt{2}\, r\cos(\theta - \pi/4) = 3$.

9. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4; 20°) y forma un ángulo de 140° con el eje polar. *Sol.* $r\cos(\theta - 50°) = 2\sqrt{3}$.

10. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el polo y radio igual a 5. *Sol.* $r = 5$.

11. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro (4; 30°) y radio igual a 5. *Sol.* $r^2 - 8r\cos(\theta - \pi/6) - 9 = 0$.

12. Hallar la ecuación de las circunferencias siguientes:
    a) Centro (3; 0°) y que pasa por el polo. *Sol.* $r = 6\cos\theta$.
    b) Centro (4; 45°) y que pasa por el polo. *Sol.* $r = 8\cos(\theta - 45°)$.
    c) Centro (5; 90°) y que pasa por el polo. *Sol.* $r - 10\operatorname{sen}\theta = 0$.
    d) Que pasa por el polo, por (3; 90°) y por (4; 0°). *Sol.* $r = 4\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta$.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (8; 120°) y que pasa por el punto (4; 60°). *Sol.* $r^2 - 16r\cos(\theta - 120°) + 16 = 0$.

14. Por comparación con la ecuación del Problema 3 de la sección de resueltos, hallar el centro y el radio de la circunferencia $r^2 - 4r\cos(\theta - \pi/4) - 12 = 0$. *Sol.* $(2, \pi/4)$, radio 4.

15. Dada la circunferencia $r^2 - 4\sqrt{3}\, r\cos\theta - 4r\operatorname{sen}\theta + 15 = 0$, hallar las coordenadas del centro y el radio. *Sol.* Centro (4; $\pi/6$), radio 1.

16. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (8; $\pi/4$) y que sea tangente al eje polar. *Sol.* $r^2 - 16r\cos(\theta - \pi/4) + 32 = 0$.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (4; 30°) y que sea tangente al eje polar OX. *Sol.* $r^2 - 8r\cos(\theta - \pi/6) + 12 = 0$.

18. Demostrar que la ecuación de la circunferencia que pasa por el polo y por los puntos (a; 0°) y (b; 90°) es $r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$.

19. Hallar el centro y el radio de la circunferencia $r = 5\cos\theta - 5\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$. *Sol.* (5; $-60°$), 5.

20. En el Problema 11 de la sección de resueltos se demostró que la ecuación de una sección cónica con su foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a p unidades a la izquierda del foco, viene dada por

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}.$$

Si la directriz está a p unidades del foco y a su derecha, la ecuación es:

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

Demostrar que la ecuación polar de la cónica con su foco en el polo y directriz paralela al eje polar y a p unidades de él es

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}.$$

donde el signo *más* corresponde al caso en que la directriz esté por encima del eje polar y el *menos* cuando esté por debajo.

21. Hallar la naturaleza de las cónicas siguientes que tienen un foco en el polo. Hallar e y situar la directriz en función de sus dirección con respecto al eje polar y su distancia al polo.

a) $r = \dfrac{4}{2 - 3 \cos \theta}$. *Sol.* Hipérbola; $e = 3/2$; una directriz perpendicular al eje polar y a 4/3 unidades del foco correspondiente.

b) $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$. *Sol.* Parábola; $e = 1$; directriz perpendicular al eje polar y a 2 unidades a la izquierda del foco.

c) $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen} \theta}$. *Sol.* Elipse; $e = \frac{1}{2}$; directriz paralela al eje polar y a 6 unidades debajo del polo.

22. Identificar y dibujar las cónicas siguientes:

a) $r = \dfrac{4}{2 + \cos \theta}$; *b*) $r = \dfrac{5}{1 - \cos \theta}$; *c*) $r = \dfrac{2}{2 + 3 \operatorname{sen} \theta}$.

23. Hallar la ecuación polar de la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.
Sol. $r^2(9 \cos^2\theta + 16 \operatorname{sen}^2\theta) = 144$.

24. Pasar a coordenadas polares: $2x^2 - 3y^2 - x + y = 0$. *Sol.* $r = \dfrac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{2 \cos^2\theta - 3 \operatorname{sen}^2\theta}$.

En los Problemas 25-30 pasar las ecuaciones a coordenadas polares.

25. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. *Sol.* $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

26. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$. *Sol.* $r = 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$.

27. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$. *Sol.* $r^2 = \operatorname{sen}^2 2\theta$.

28. $x - 3y = 0$. *Sol.* $\theta = \operatorname{arc\,tg} 1/3$.

29. $x^4 + x^2y^2 - (x + y)^2 = 0$. *Sol.* $r = \pm(1 + \operatorname{tg} \theta)$.

30. $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2$. *Sol.* $r = \pm \csc 4\theta$.

31. Pasar a coordenadas polares la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y demostrar que la ecuación polar de la recta que pasa por $(r_1; \theta_1)$ y $(r_2; \theta_2)$ es

$$rr_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1) + r_1r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) + r_2r \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) = 0.$$

32. Pasar a coordenadas polares y simplificar, suprimiendo los radicales, la ecuación $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Sol. $r = \dfrac{9}{5 - 4 \cos \theta}$, o bien, $r = \dfrac{-9}{5 + 4 \cos \theta}$. ¿Por qué son idénticas estas ecuaciones?

En los Problemas 33-39, pasar las ecuaciones a coordenadas polares.

33. $r = 3\cos\theta$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

34. $r = 1 - \cos\theta$. *Sol.* $(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$.

35. $r = 2\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$.

36. $\theta = 45^\circ$. *Sol.* $x - y = 0$.

37. $r = \dfrac{3}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}$. *Sol.* $4x^2 - 5y^2 + 18y - 9 = 0$.

38. $r = a\theta$. *Sol.* $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

39. $r^2 = 9\cos 2\theta$. *Sol.* $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$.

40. Hallar los puntos de intersección de los pares de curvas siguientes: $r - 4(1 + \cos\theta) = 0$, $r(1 - \cos\theta) = 3$. *Sol.* $(6, 60^\circ)$, $(2, 120^\circ)$, $(2, 240^\circ)$, $(6, 300^\circ)$.

41. Hallar los puntos de intersección de las curvas: $r = \sqrt{2}\cos\theta$, $r = \text{sen}\,2\theta$.
Sol. $(1, 45^\circ)$, $(0, 90^\circ)$, $(-1, 135^\circ)$.

42. Hallar los puntos de intersección de las curvas: $r = 1 + \cos\theta$, $r = \dfrac{1}{2(1 - \cos\theta)}$.
Sol. $\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm 45^\circ\right)$, $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm 135^\circ\right)$.

43. Hallar los puntos de intersección de las curvas: $r = \sqrt{6}\cos\theta$, $r^2 = 9\cos 2\theta$.
Sol. $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 30^\circ\right)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 150^\circ\right)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 210^\circ\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 330^\circ\right)$.

44. Dibujar la curva de ecuación $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$.

45. Dibujar la curva de ecuación $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\theta}$.

46. Dibujar la curva $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$.

47. Dibujar la curva $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$.

48. Dibujar la curva $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$.

49. Dibujar la espiral $r\theta = 4$.

50. Deducir la ecuación polar de la elipse cuando el polo es el centro. Ind.: Aplicar el teorema del coseno y la propiedad de que la suma de los radios focales es igual a $2a$.
Sol. $r^2(1 - e^2\cos^2\theta) = b^2$.

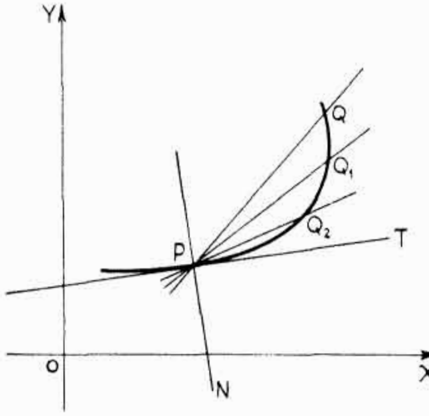
51. Un segmento, de 20 unidades de longitud, tiene sus extremos sobre dos rectas perpendiculares. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto de intersección de las rectas fijas a la recta de longitud constante. Tómese una de las rectas fijas como eje polar.
Sol. $r = 10\,\text{sen}\,2\theta$.

52. Hallar el lugar geométrico del vértice de un triángulo cuya base es una recta fija de longitud $2b$ y el producto de los otros dos lados es b^2. Tómese la base del triángulo como eje polar y el polo en su punto medio. *Sol.* $r^2 = 2b^2\cos^2\theta$. Esta curva es la *lemniscata*.

Tangentes y normales

TANGENTE Y NORMAL. La definición de la tangente a una curva en uno de sus puntos es como sigue:

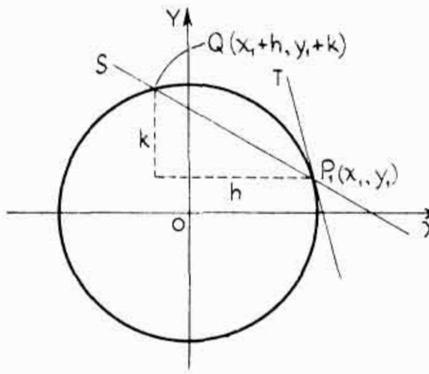
Sean P y Q dos puntos de la curva y tracemos la secante PQ. Si el punto Q se desplaza a lo largo de la curva hacia P, la secante PQ irá girando alrededor de P, y cuando Q tienda a confundirse con P, la secante PQ coincide, en el límite, con la recta PT que se llama *tangente* a la curva en P.



La *normal* PN a una curva es la perpendicular a la tangente en el punto de contacto P.

Para hallar la ecuación de la tangente a la curva en uno de sus puntos, $P_1(x_1, y_1)$, hay que determinar la pendiente de dicha tangente.

Ejemplo: Hallar la pendiente de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$.



Sea $Q(x_1 + h, y_1 + k)$ otro punto cualquiera de la circunferencia. La pendiente de la secante es k/h. Al girar la tangente alrededor de P_1, el punto Q tiende hacia P_1, y los valores de k y h lo hacen hacia cero. La pendiente m de la tangente es el límite de la relación k/h cuando ambos tienden a cero.

Como (x_1, y_1) y $(x_1 + h, y_1 + k)$ pertenecen a la circunferencia, estas coordenadas deben satisfacer a la ecuación de aquélla; sustituyendo valores se obtiene

$$(1)\ x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

y $$(2)\ (x_1 + h)^2 + (y_1 + k)^2 = r^2, \quad \text{o bien,} \quad x_1^2 + 2hx_1 + h^2 + y_1^2 + 2ky_1 + k^2 = r^2.$$

Restando (1) de (2), resulta $2hx_1 + h^2 + 2ky_1 + k^2 = 0$

o bien, $k(2y_1 + k) = -h(2x_1 + h)$.

Por tanto, $\dfrac{k}{h} = -\dfrac{2x_1 + h}{2y_1 + k}$. El límite de esta expresión cuando h y k tienden a cero es $-\dfrac{2x_1}{2y_1}$, o sea, $m = -\dfrac{x_1}{y_1}$.

Como la tangente pasa por $P_1(x_1, y_1)$, su ecuación es

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Quitando denominadores, $y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$, o bien,

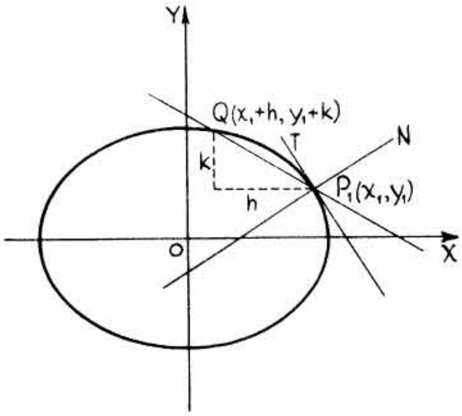
$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

La ecuación de la normal es $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$,

o bien, $x_1y - y_1x = x_1y_1 - x_1y_1 = 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$.



Sea Q un punto de coordenadas $(x_1 + h, y_1 + k)$. Sustituyendo las coordenadas de P_1 y Q en la ecuación dada,

(1) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ y

(2) $\frac{(x_1 + h)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + k)^2}{b^2} = 1$.

Desarrollando (2) y restando (1) de (2),

$$2b^2hx_1 + b^2h^2 + 2a^2ky_1 + k^2a^2 = 0.$$

Despejando, $\frac{k}{h} = -\frac{b^2(2x_1 + h)}{a^2(2y_1 + k)}$, y $\lim \frac{k}{h} = -\lim \frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

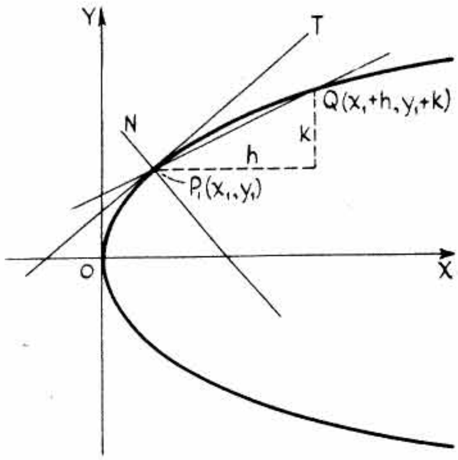
Teniendo en cuenta $y - y_1 = m(x - x_1)$ resulta $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

o bien $a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2x_1x + b^2x_1^2$.

Como $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, se tiene $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, o bien, $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$, que es la ecuación de la tangente.

La pendiente de la normal es $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$, y su ecuación $a^2y_1x - b^2x_1y = (a^2 - b^2)x_1y_1$.

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y^2 = 4ax$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$.



Sustituyendo las coordenadas de $P_1(x_1, y_1)$ y $Q(x_1 + h, y_1 + k)$ en la ecuación dada,

$$y_1^2 = 4ax_1 \quad \text{y} \quad (y_1 + k)^2 = 4a(x_1 + h).$$

Desarrollando y despejando el valor k/h,

$$\frac{k}{h} = \frac{4a}{2y_1 + k}, \quad \text{y} \quad \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{4a}{2y_1 + k} = \frac{2a}{y_1}.$$

La ecuación de la tangente es

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1), \text{ o bien, } y_1y - y_1^2 = 2ax - 2ax_1.$$

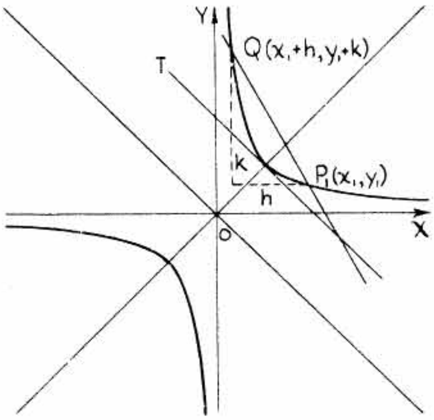
Como $y_1^2 = 4ax_1$, esta ecuación se puede escribir en la forma $y_1y = 2a(x + x_1)$.

La pendiente de la normal es $-\frac{y_1}{2a}$ y su ecuación, $y_1x + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1$.

3. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $xy = a^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $Q(x_1 + h, y_1 + k)$ en la ecuación dada, y despejando el valor k/h,

$$\frac{k}{h} = -\frac{y_1 + k}{x_1} \quad \text{y} \quad \text{lím.}\ \frac{k}{h} = -\text{lím.}\ \frac{y_1 + k}{x_1} = -\frac{y_1}{x_1}.$$



La ecuación de la tangente es

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1);$$

quitando denominadores, $x_1y - x_1y_1 = -y_1x + x_1y_1$

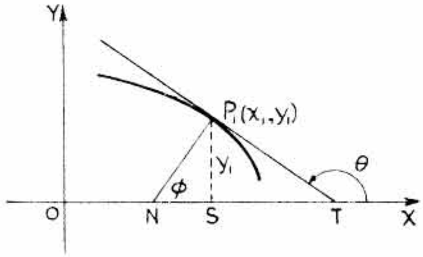
o bien, $y_1x + x_1y = 2x_1y_1 = 2a^2$,

que se puede escribir $\frac{1}{2}(y_1x + x_1y) = a^2$.

Así, pues, para establecer la ecuación de la tangente en un punto $P_1(x_1, y_1)$ de una curva dada por una ecuación de segundo grado basta con sustituir

x^2 por x_1x, y^2 por y_1y, xy por $\frac{1}{2}(y_1x + x_1y)$, x por $\frac{1}{2}(x + x_1)$ e y por $\frac{1}{2}(y + y_1)$.

4. Sea P_1T y P_1N las longitudes de la tangente y de la normal, respectivamente, a una curva en el punto P_1. Las proyecciones ST y SN se denominan subtangente y subnormal, respectivamente, en P_1.



Llamando m a la pendiente de la tangente en $P_1(x_1, y_1)$,

resulta $\quad -\dfrac{y_1}{m} =$ longitud de subtangente,

e $\quad y_1m =$ longitud de subnormal.

Esto es evidente ya que $\dfrac{ST}{y_1} = -\cot\theta = -\dfrac{1}{m}$ y $ST = -\dfrac{y_1}{m}$.

También, $\dfrac{SN}{y_1} = -\cot\phi = -\cot(\theta - 90^\circ) = \operatorname{tg}\theta = m$ y $SN = my_1$.

Las subtangente y subnormal se miden en sentidos opuestos, es decir, son de signo contrario.

Para hallar las longitudes de la tangente y de la normal se aplican las relaciones pitagóricas en un triángulo rectángulo.

5. Hallar las pendientes de la tangente y de la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(2, 1)$.

Teniendo en cuenta que $m = -\dfrac{x_1}{y_1}$, la pendiente de la tangente es $-\dfrac{2}{1}$ y la correspondiente de la normal vale $\dfrac{1}{2}$.

6. Hallar las pendientes de la tangente y de la normal a la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en el punto $\left(2, \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)$.

La pendiente de la tangente es $m = -\dfrac{a^2x_1}{b^2y_1}$. Sustituyendo las coordenadas del punto dado,

$m = -\dfrac{16(2)}{9(4\sqrt{5}/3)} = -\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$, y la pendiente de la normal $\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$.

7. Demostrar que la pendiente de la tangente a la curva $4x^2 + 4xy + y^2 - 9 = 0$ en un punto cualquiera de ella es $m = -2$.

Tomemos los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $Q(x_1 + h, y_1 + k)$, y hallemos el límite de $\frac{k}{h}$.

Sustituyendo, (1) $4(x_1 + h)^2 + 4(x_1 + h)(y_1 + k) + (y_1 + k)^2 - 9 = 0$ y
(2) $4x_1^2 + 4x_1y_1 + y_1^2 - 9 = 0$.

Desarrollando (1) y restando (2) de dicho desarrollo,

$$\text{lím.}\ \frac{k}{h} = -\frac{8x_1 + 4y_1}{4x_1 + 2y_1} = -2.$$

Otro método. La ecuación original se puede escribir en la forma $(2x + y)^2 - 9 = 0$.

Descomponiendo en factores, $(2x + y + 3)(2x + y - 3) = 0$, que son dos rectas paralelas de pendiente igual a -2.

8. Hallar la pendiente de la tangente a la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ en el punto $\left(3, -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Tomemos los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $Q(x_1 + h, y_1 + k)$, y hallemos el límite de $\frac{k}{h}$.

Sustituyendo, (1) $9(x_1 + h)^2 - 4(y_1 + k)^2 = 36$ y (2) $9x_1^2 - 4y_1^2 = 36$.

Desarrollando y despejando $\frac{k}{h}$, se obtiene $\frac{4k}{9h} = \frac{2x_1 + h}{2y_1 + k}$ y $\text{lím.}\ \frac{k}{h} = \frac{9x_1}{4y_1} = m$.

La pendiente en $\left(3, -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ es $m = -\frac{27}{6\sqrt{5}} = -\frac{9\sqrt{5}}{10}$.

9. Hallar las pendientes de la tangente y de la normal a la curva $y^2 = 2x^3$ en el punto (2, 4).

Tomemos los puntos de la curva $P_1(x_1, y_1)$ y $Q(x_1 + h, y_1 + k)$.

Sustituyendo, (1) $(y_1 + k)^2 = 2(x_1 + h)^3$, o bien, $y_1^2 + 2ky_1 + k^2 = 2x_1^3 + 6x_1^2h + 6x_1h^2 + 2h^3$
y (2) $y_1^2 = 2x_1^3$.

Restando (2) del desarrollo de (1) se obtiene, $2ky_1 + k^2 = 6x_1^2h + 6x_1h^2 + 2h^3$.

Por tanto, $\frac{k}{h} = \frac{6x_1^2 + 6x_1h + 2h^2}{2y_1 + k}$ y $\text{lím.}\ \frac{k}{h} = \frac{6x_1^2}{2y_1} = \frac{3x_1^2}{y_1}$.

En el punto (2, 4), $m = \text{lím.}\ \frac{k}{h} = \frac{12}{4} = 3$. La pendiente de la normal vale $-\frac{1}{3}$.

10. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y^2 = 2x^3$ en el punto (2, 4).

En el Problema 9 se vio que la pendiente de esta curva en el punto (2, 4) vale 3.
Por tanto, la ecuación de la tangente es $y - 4 = 3(x - 2)$, o bien, $y = 3x - 2$.
La ecuación de la normal es $y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, o bien, $x + 3y = 14$.

11. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x - y + 1 = 0$ en el punto (2, —1).

Aplicando la norma dada en el Problema 3,

$$x_1x + 3\left(\frac{x_1y + y_1x}{2}\right) - 4y_1y + 2\left(\frac{x + x_1}{2}\right) - \left(\frac{y + y_1}{2}\right) + 1 = 0.$$

Sustituyendo $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, resulta $3x + 13y + 7 = 0$, ecuación de la tangente de pendiente $-3/13$.

La ecuación de la normal es $y + 1 = \frac{13}{3}(x - 2)$, o bien, $13x - 3y - 29 = 0$.

12. Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente m tangentes a la elipse

$$(1) \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Las ecuaciones pedidas son de la forma (2) $y = mx + k$.

Del sistema (1) y (2) se obtiene $b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2$.

Desarrollando y reduciendo términos, (3) $(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$.

Para que las rectas sean tangentes a la curva, las raíces de (3) deben ser iguales, es decir, el discriminante ha de ser igual a cero. Por consiguiente,

$4a^4m^2k^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2k^2 - a^2b^2) = 0$, o bien, $k^2 = a^2m^2 + b^2$, y $k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

Las ecuaciones de las rectas de pendiente m y tangentes a la elipse son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

13. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 100$ paralelas a la recta $3x + 8y = 7$.

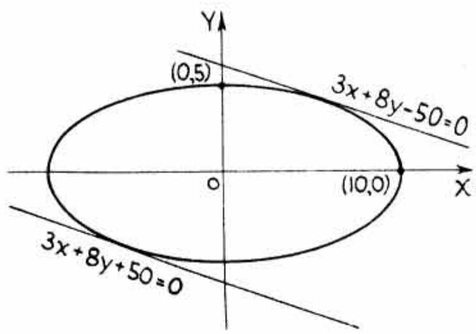
La pendiente de la recta dada es $-3/8$. Luego las ecuaciones pedidas son de la forma $y = -\frac{3}{8}x + k$, siendo k una constante a determinar.

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la correspondiente de la elipse e imponiendo la condición de que las raíces sean iguales, se deduce el valor de k. Así, pues,

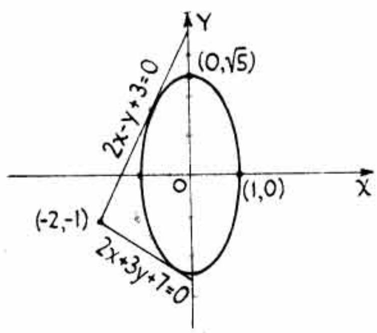
$$x^2 + 4\left(-\frac{3}{8}x + k\right)^2 - 100 = 0, \text{ o bien, } 25x^2 - 48kx + (64k^2 - 1.600) = 0.$$

Para que las raíces sean iguales, el discriminante ha de ser cero, o sea, $(-48k)^2 - 4(25)(64k^2 - 1.600) = 0$.

Resolviendo, $16k^2 = 625$, $k = \pm\frac{25}{4}$. Luego las ecuaciones pedidas son $y = -\frac{3}{8}x \pm \frac{25}{4}$, o bien, $3x + 8y \pm 50 = 0$.



Problema 13



Problema 14

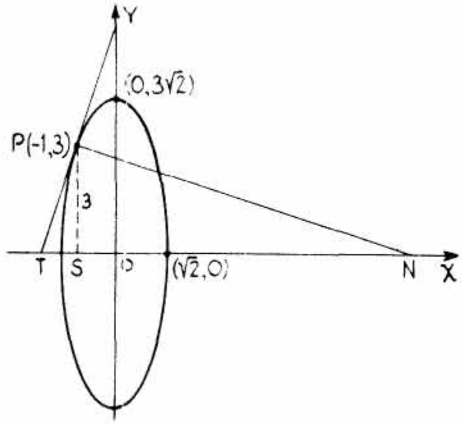
14. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(-2, -1)$ y sean tangentes a la elipse $5x^2 + y^2 = 5$.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto de contacto. La ecuación de la tangente es de la forma $5x_1x + y_1y = 5$; como el punto $(-2, -1)$ pertenece a la tangente, $-10x_1 - y_1 = 5$. Por otra parte, el punto (x_1, y_1) pertenece a la elipse, con lo que $5x_1^2 + y_1^2 = 5$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene para (x_1, y_1) los dos puntos de contacto $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{15}{7}\right)$. Sustituyendo estos valores en $5x_1x + y_1y = 5$ resultan, $2x - y + 3 = 0$ y $2x + 3y + 7 = 0$.

15. Hallar, en el punto $(-1, 3)$, las longitudes de subtangente, subnormal, tangente y normal a la elipse

$$9x^2 + y^2 = 18.$$



Para hallar la tangente, aplicamos la fórmula

$$9x_1x + y_1y = 18.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto

$-9x + 3y = 18$, o bien, $3x - y + 6 = 0$. Luego $m = 3$.

Subtangente $ST = -y_1/m = -3/3 = -1$.

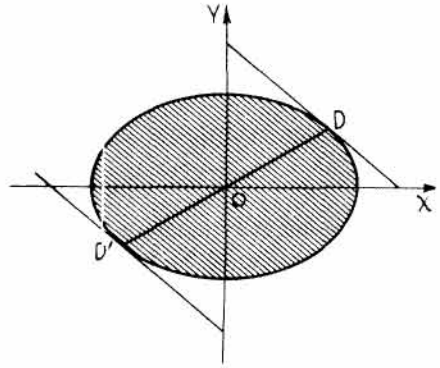
Subnormal $SN = my_1 = 3(3) = 9$.

Longitud de tangente, $PT = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Longitud de normal, $PN = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

DEFINICION. El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas a una cónica cualquiera recibe el nombre de *diámetro* de la misma

Si la pendiente de las cuerdas paralelas es m, la ecuación del diámetro determinado por los puntos medios de ellas es:



Para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad y = -\dfrac{b^2x}{a^2m}$.

Para la parábola $y^2 = 4ax$, $\quad y = \dfrac{2a}{m}$.

Para la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad y = \dfrac{b^2x}{a^2m}$.

Para la hipérbola $xy = a^2$, $\quad y = -mx$.

Para el caso general de la cónica $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, la ecuación del diámetro toma la forma $(ax + hy + g) + m(hx + by + f) = 0$.

16. Hallar la ecuación del diámetro de la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ correspondiente a las cuerdas de pendiente $\dfrac{1}{3}$.

Aplicando $y = -\dfrac{b^2x}{a^2m}$, la ecuación del diámetro es $y = -\dfrac{4x}{9(1/3)}$, o bien, $4x + 3y = 0$.

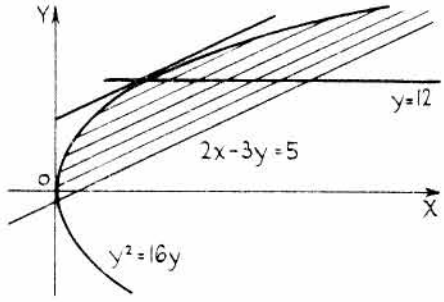
17. Hallar la ecuación del diámetro de la cónica $3x^2 - xy - y^2 - x - y = 5$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 4.

Aplicando $(ax + hy + g) + m(hx + by + f) = 0$, siendo $a = 3$, $h = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $g = -\frac{1}{2}$, $f = -\frac{1}{2}$ y $c = -5$, se obtiene $3x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} + 4(-\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}) = 0$, o bien, $2x - 9y - 5 = 0$.

18. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ que pase por los puntos medios de las cuerdas paralelas a la recta $2x - 3y = 5$.

La pendiente de la recta $2x - 3y - 5 = 0$ es $\dfrac{2}{3}$.

Para la parábola $y^2 = 4ax$, la ecuación del diámetro es $y = \dfrac{2a}{m}$. Luego la ecuación pedida es $y = \dfrac{8}{2/3}$, o bien, $y - 12 = 0$.



19. Hallar la ecuación del diámetro de la hipérbola $xy = 16$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 2.

La ecuación del diámetro de la hipérbola $xy = a^2$ que pasa por los puntos medios de las cuerdas de pendiente m es $y = -mx$. Luego la ecuación pedida es $y = -2x$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las circunferencias siguientes en los puntos dados:

a) $x^2 + y^2 = 25, (3, 4)$. *Sol.* $3x + 4y = 25;\ \ 4x - 3y = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 2 = 0, (2, 0)$. *Sol.* $x + y - 2 = 0;\ \ x - y - 2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0, (-2, 1)$. *Sol.* $x - y + 3 = 0;\ \ x + y + 1 = 0$.

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la elipse $2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$ en el punto $(-3, 2)$. *Sol.* $x - y + 5 = 0;\ \ x + y + 1 = 0$.

3. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la elipse $3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 45 = 0$ en el punto $(-3, -2)$. *Sol.* $3x + y + 11 = 0;\ \ x - 3y - 3 = 0$.

4. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 - 4y = 0$ en el punto $(2, 1)$. *Sol.* $x - y - 1 = 0;\ \ x + y - 3 = 0$.

5. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las hipérbolas siguientes en los puntos dados:

a) $6x^2 - 9y^2 - 8x + 3y + 16 = 0, (-1, 2)$. *Sol.* $20x + 33y - 46 = 0;\ 33x - 20y + 73 = 0$.

b) $x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 4y + 4 = 0, (2, -2)$. *Sol.* $3x + 2y - 2 = 0;\ \ 2x - 3y - 10 = 0$.

c) $xy - 4 = 0, (2, 2)$. *Sol.* $x + y - 4 = 0;\ \ x - y = 0$.

6. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 4$ en los puntos de intersección con la recta $5x - 2y - 4 = 0$. *Sol.* $5x - 2y - 4 = 0$.

7. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 12 = 0$ que pasen por el punto $(1, 4)$. *Sol.* $x - y + 3 = 0;\ \ 19x + 11y - 63 = 0$.

8. Hallar los puntos de la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ en los cuales las tangentes son perpendiculares a la recta $4x + 5y - 2 = 0$. *Sol.* $\left(\dfrac{10\sqrt{34}}{17}, \dfrac{4\sqrt{34}}{17}\right), \left(\dfrac{-10\sqrt{34}}{17}, \dfrac{-4\sqrt{34}}{17}\right)$.

9. Hallar la pendiente de la curva $y^2 = x^3 + 2x^2$ en el punto (x_1, y_1). *Sol.* $\lim. \dfrac{k}{h} = \dfrac{3x_1^2 + 4x_1}{2y_1}$.

10. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva del problema anterior en el punto $(2, -4)$. *Sol.* $5x + 2y - 2 = 0$; $2x - 5y - 24 = 0$.

11. *a*) Hallar las longitudes de la subtangente y de la subnormal a la curva $y^2 = x^3 + 2x^2$ en el punto $(2, -4)$. *Sol.* $-8/5$, 10.

b) Hallar las longitudes de la tangente y de la normal a dicha curva. *Sol.* $\dfrac{4\sqrt{29}}{5}$, $2\sqrt{29}$.

12. Hallar la ecuación de las tangentes a la hipérbola $2xy + y^2 - 8 = 0$ de pendiente $m = -2/3$. *Sol.* $2x + 3y - 8 = 0$; $2x + 3y + 8 = 0$.

13. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de la subtangente y de la subnormal, a la curva $y^2 - 6y - 8x - 31 = 0$ en el punto $(-3, -1)$. *Sol.* $x + y + 4 = 0$; $x - y + 2 = 0$; -1, 1.

14. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$ en un punto cualquiera, (x_1, y_1), de ella. *Sol.* $m = 2/3$. Interpretar este resultado.

15. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $4x^2 - 2y^2 - 3xy + 2x - 3y - 10 = 0$ paralelas a la recta $x - y + 5 = 0$. *Sol.* $x - y - 1 = 0$; $41x - 41y + 39 = 0$.

16. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 2$ perpendiculares a la recta $x - 2y = 7$. *Sol.* $2x + y - 4 = 0$; $2x + y + 4 = 0$.

17. ¿En qué puntos de la elipse $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ las tangentes son paralelas al eje x? ¿En qué puntos son paralelas al eje y? *Sol.* $(1, -2)$, $(-1, 2)$; $(2, -1)$, $(-2, 1)$.

18. ¿En qué puntos de la curva $x^2 - 2xy + y + 1 = 0$ las tangentes son paralelas a la recta $2x + y = 5$? *Sol.* $(1, 2)$ y $(0, -1)$.

19. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(5, 6)$ y sean tangentes a la parábola $y^2 = 4x$ *Sol.* $x - y + 1 = 0$; $x - 5y + 25 = 0$.

20. Demostrar que las tangentes a la parábola $y^2 = 4ax$ en los extremos del *latus rectum* son perpendiculares, es decir, sus pendientes son ± 1.

21. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 5y$ en el punto de abscisa 3. *Sol.* $6x - 5y - 9 = 0$; $25x + 30y - 129 = 0$.

22. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la parábola $y^2 = 4ax$ son

$$y = mx + \frac{a}{m}, (m \neq 0).$$

23. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ son

$$y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}.$$

24. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, y a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$, $y = mx \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2}$.

25. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $5x^2 + 7y^2 = 35$ perpendiculares a la recta $3x + 4y - 12 = 0$. *Sol.* $3y = 4x \pm \sqrt{157}$.

26. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ paralelas a la recta $4x - y - 14 = 0$. *Sol.* $y = 4x \pm 8\sqrt{2}$.

27. La parábola $y^2 = 4ax$ pasa por el punto $(-8, 4)$. Hallar la ecuación de su tangente paralela a la recta $3x + 2y - 6 = 0$. *Sol.* $9x + 6y = 2$.

28. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^3 + y^3 = 3axy$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$.
Sol. $(y_1^2 - ax_1)y + (x_1^2 - ay_1)x = ax_1y_1$.

29. Hallar el valor de b para que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la parábola $x^2 = 4ay$.
Sol. $b = -am^2$.

30. Teniendo en cuenta el resultado del Problema 29, hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = -2y$ que sea paralela a la recta $x - 2y - 4 = 0$. *Sol.* $4x - 8y + 1 = 0$.

31. Hallar la ecuación del diámetro de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 9$ que pase por los puntos medios de las cuerdas

a) de pendiente 4. *Sol.* $x - 16y = 0$.
b) de dirección $3x - 5y - 2 = 0$. *Sol.* $5x - 12y = 0$.
c) de dirección la tangente en $(5, 2)$. *Sol.* $2x - 5y = 0$.
d) de dirección la asíntota de pendiente positiva. *Sol.* $x - 2y = 0$.

32. Hallar la ecuación del diámetro conjugado del de ecuación $x - 16y = 0$ en el Problema 31 *a*).
Sol. $4x - y = 0$.

33. Hallar la ecuación del diámetro de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 3. *Sol.* $3x + 25y = 0$.

34. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 8x$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 2/3. *Sol.* $y = 6$.

35. Hallar la ecuación del diámetro de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ conjugado del diámetro de la ecuación $y = 3x$. *Sol.* $x + 12y = 0$.

36. Hallar la ecuación del diámetro de la cónica $xy + 2y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 2/3. *Sol.* $2x + 11y = 16$.

37. Hallar el diámetro de la cónica $x^2 - 3xy - 2y^2 - x - 2y - 1 = 0$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendientes 3. *Sol.* $7x + 15y + 7 = 0$.

38. Hallar la ecuación del diámetro de la elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$ que pase por los puntos medios de las cuerdas,

a) de pendiente $-2/3$. *Sol.* $6x - 5y = 0$.
b) de dirección $3x - 5y = 6$. *Sol.* $4x + 3y = 0$.

39. Hallar la ecuación del diámetro de la hipérbola $xy = 16$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de dirección $x + y = 1$. *Sol.* $y = x$.

CAPITULO 11

Curvas planas de orden superior

CURVAS PLANAS DE ORDEN SUPERIOR. Una *curva algebraica* es aquella que se puede representar por medio de un polinomio en x e y igualado a cero. Las curvas que no se pueden representar de esta forma, como, por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$, $y = e^x$, $y = \log x$, se llaman *curvas trascendentes.*

Las curvas algebraicas de grado superior al segundo junto con las trascendentes reciben el nombre de *curvas planas de orden superior.*

Para el estudio de las simetrías, intersecciones con los ejes y campos de variación, véase el Capítulo 2.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Representar la curva $y^2 = (x-1)(x-3)(x-4)$.

Es simétrica con respecto al eje x, ya que la ecuación no varía cuando se sustituye y por $-y$.

Los puntos de intersección con el eje x son 1, 3, 4. Para $x = 0$, $y^2 = -12$; por tanto, la curva no corta al eje y.

Para $x < 1$, todos los factores del segundo miembro son negativos, con lo que y es imaginario.

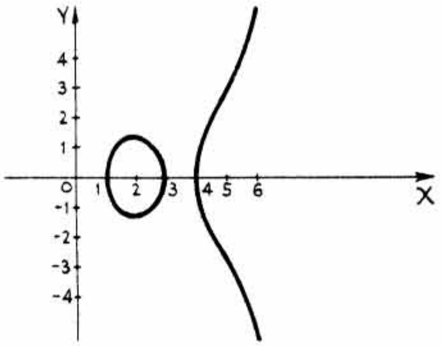
Para $1 \leqq x \leqq 3$, y es real. Para $3 < x < 4$, y^2 es negativo y, por tanto, y es imaginario.

Para $x \geqq 4$, y^2 es positivo, con lo que y es real aumentando indefinidamente de valor numérico a medida que lo hace x.

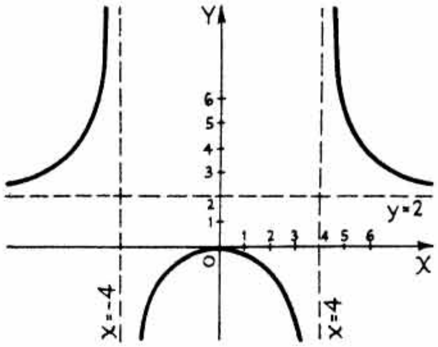
Formamos un cuadro de valores para determinar puntos de la curva.

$$y = \pm\sqrt{(x-1)(x-3)(x-4)}.$$

x	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6
y	0	$\pm 1{,}37$	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}06$	0	0	$\pm 1{,}62$	$\pm 2{,}83$	$\pm 4{,}11$	$\pm 5{,}48$



Problema 1



Problema 2

2. Dibujar la curva $x^2y - 2x^2 - 16y = 0$.

Corte con los ejes. Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$.

Simetrías. La curva es simétrica con respecto al eje y, ya que la ecuación no varía al sustituir x por $-x$. No es simétrica con respecto al eje x ni con respecto al origen.

Despejando x e y se obtiene (1) $y = \dfrac{2x^2}{x^2-16} = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+4)}$

y (2) $x = \pm 4\sqrt{\dfrac{y}{y-2}}$.

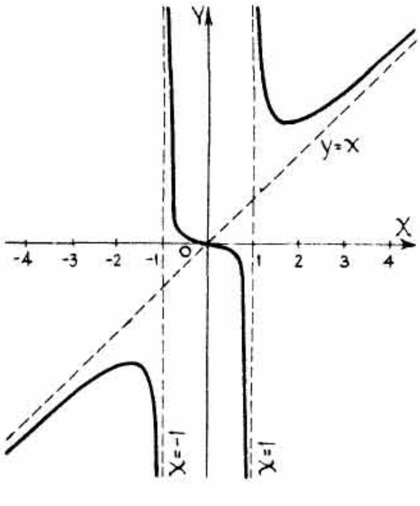
De (1) se deduce que y se hace infinito cuando x tiende a 4 y a -4, tomando valores mayores y menores que estos. La curva existe para todos los demás valores de x.

De (2) se deduce que no existe curva para $0 < y < 2$. Cuando y tiende a 2, tomando valores mayores que éste, x se hace infinito.

Las rectas $x = \pm 4$ e $y = 2$ son asíntotas.

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	$\pm \infty$
y	0	$-0{,}13$	$-0{,}67$	$-2{,}6$	$\pm\infty$	5,6	3,6	3,0	2,7	2

3. Representar la curva $x^3 - x^2y + y = 0$.



Despejando y, $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Para $x = \pm 1$, y se hace infinito; luego $x = 1$ y $x = -1$ son dos asíntotas verticales.

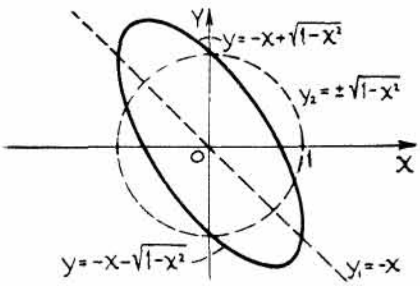
Expresemos $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ por $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$. Cuando x aumenta indefinidamente, y también lo hace, y la fracción $\dfrac{x}{x^2-1}$ tiende a cero. Por tanto, la recta $y = x$ es una asíntota de la curva. Para $x > 1$, una rama de la curva está situada por encima de la recta $y = x$; para $x < -1$, la otra rama está por debajo de $y = x$.

La curva pasa por el origen y es simétrica con respecto a él. En la tabla siguiente figuran algunos valores de x e y.

x	$\pm 1/2$	0	± 1	$\pm 1{,}5$	± 2	$\pm 2{,}5$	± 3	± 4
y	$\mp 1/6$	0	∞	$\pm 2{,}7$	$\pm 2{,}67$	$\pm 3{,}0$	$\pm 3{,}4$	$\pm 4{,}3$

Esta curva también se puede representar por el método de la *suma de ordenadas*. Para ello, sean $y_1 = x$ e $y_2 = \dfrac{x}{x^2-1}$. Tracemos las gráficas de estas dos ecuaciones sobre un mismo sistema de coordenadas y, a continuación, sumemos las órdenes, y_1 e y_2, correspondientes a idéntica abscisa

4. Dibujar la elipse $2x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ por el método de la suma de ordenadas.



Despejando y, $y = \dfrac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 8x^2 + 4}}{2}$

$= -x \pm \sqrt{1-x^2}$.

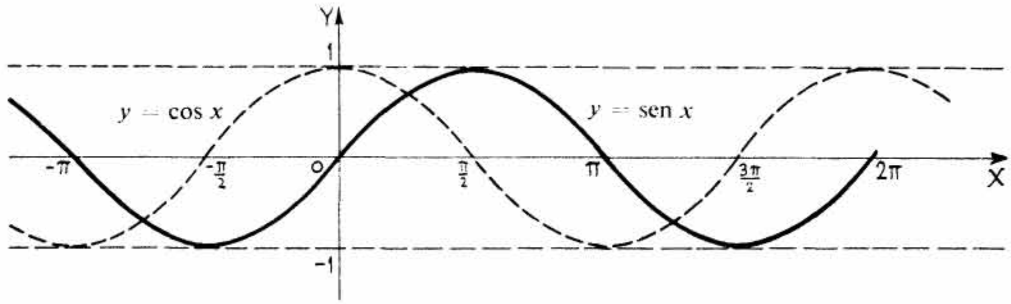
Tracemos la recta $y_1 = -x$ y la circunferencia $y_2 = \pm\sqrt{1-x^2}$, o bien, $x^2 + y_2^2 = 1$. La elipse que resulta es simétrica con respecto al origen.

5. *Funciones trigonométricas.* Dibujar la función $y = \operatorname{sen} x$.

El ángulo x ha de expresarse en radianes. (π radianes $= 180°$.)

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{7\pi}{6}$	$\pm\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{3}$	$\pm\frac{11\pi}{6}$	$\pm 2\pi$
$\operatorname{sen} x$	0	$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}87$	± 1	$\pm 0{,}87$	$\pm 0{,}5$	0	$\mp 0{,}5$	$\mp 0{,}87$	∓ 1	$\mp 0{,}87$	$\mp 0{,}5$	0

Como los valores de $\operatorname{sen} x$ se repiten periódicamente, la función $\operatorname{sen} x$ se llama periódica, siendo el periodo igual a 2π; así, pues, la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ se compone de tramos exactamente iguales, uno por cada intervalo de 2π radianes. Como además $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, la curva es simétrica con respecto al origen. Existe para todos los valores de x, y para valores de y comprendidos, únicamente, entre $y = 1$ e $y = -1$.



De forma análoga se puede dibujar la gráfica de $y = \cos x$. Véase la línea de trazos de la figura.

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{7\pi}{6}$	$\pm\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{3}$	$\pm 2\pi$
$\cos x$	1	0,87	0,5	0	$-0{,}5$	$-0{,}87$	-1	$-0{,}87$	$-0{,}5$	0	0,5	1

Como $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$, un punto cualquiera de la curva coseno tiene la misma ordenada que otro punto de la curva seno situado $\pi/2$ unidades a la derecha del primero. La curva es simétrica con respecto al eje vertical, ya que $\cos(-x) = \cos x$.

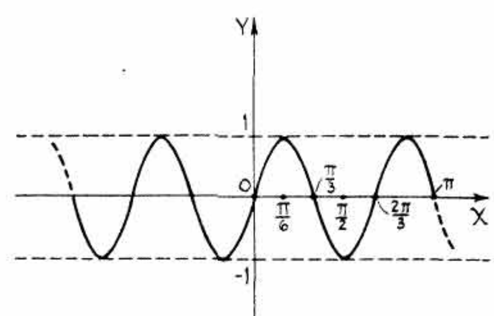
6. Dibujar la curva $y = \operatorname{sen} 3x$.

Cuando x varía de 0 a 2π, la función $\operatorname{sen} x$ toma todos los valores de su campo de variación. En general, cuando x varía de 0 a $2\pi/n$, o bien cuando nx lo hace de 0 a 2π, la función $\operatorname{sen} nx$ (siendo n una constante cualquiera) toma todos los valores de su campo de variación.

En este problema $n = 3$, por lo que el periodo de $\operatorname{sen} 3x$ es $2\pi/3$.

La curva es simétrica con respecto al origen.

Existe para todos los valores de x, y para los valores de y comprendidos, únicamente, entre $-1 \leqq y \leqq 1$.

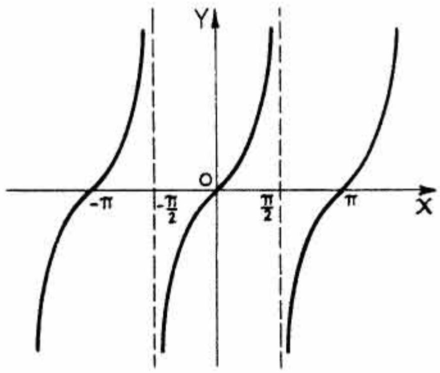


x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen} 3x$	0	1	0	-1	0	1	0

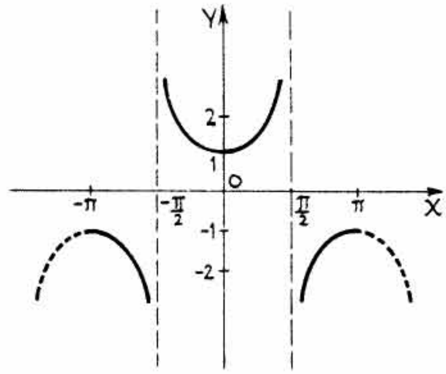
7. Dibujar la función $y = \operatorname{tg} x$.

La curva es simétrica con respecto al origen, ya que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
El periodo de la función es π.
La función se hace infinito cuando x sea un múltiplo impar de $\pi/2$, y la curva toma todos los valores de y comprendidos entre $x = -\pi/2$ y $\pi/2$. Existe para todos los demás valores de x e y.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	∞	-1	$-0{,}58$	0	0,58	1	1,73	∞



Problema 7



Problema 8

8. Dibujar la función $y = \sec x$.

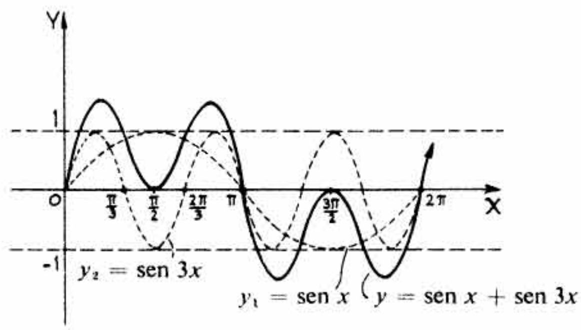
La curva es simétrica con respecto al eje y, ya que $\sec(-x) = \sec x$.
El periodo de la función es 2π.
Como $\sec x = 1/\cos x$, los valores de $\sec x$ se pueden hallar fácilmente a partir de una tabla de valores de $\cos x$.
Al ser el campo de variación de $\cos x$ de -1 a $+1$, el correspondiente de $\sec x$ es el conjunto de valores de $-\infty$ a -1 y de 1 a $+\infty$.

x	0	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\pi$
$\sec x$	1	2	∞	-2	-1

9. Dibujar la función $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x$ por el método de la suma de ordenadas.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen} x$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
$\operatorname{sen} 3x$	0	1	0	-1	0	1	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen} x$	$-0{,}5$	$-0{,}87$	-1	$-0{,}87$	$-0{,}5$	0
$\operatorname{sen} 3x$	-1	0	1	0	-1	0



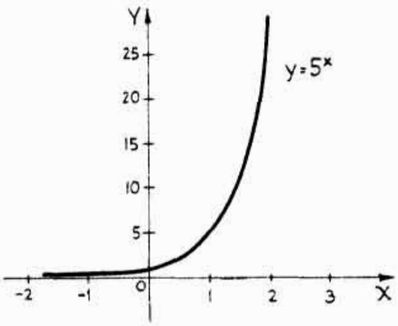
10. *Funciones exponenciales.* Dibujar la función $y = a^x$, siendo a una constante positiva y mayor que la unidad.

Para concretar, supongamos $a = 5$. La ecuación a representar es $y = 5^x$.

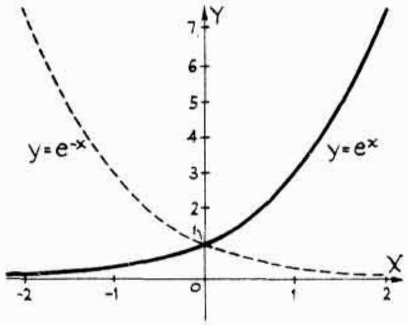
Para $x = 0$, $y = 5^0 = 1$. Cuando x aumenta, y también aumenta. Para valores negativos de x, 5^x es positivo pero disminuye de valor. Luego la curva está situada, toda ella, por encima del eje x.

La curva no es simétrica ni con respecto a los ejes ni con respecto al origen. Para valores negativos de x, al aumentar x en valor absoluto, la curva tiende asintóticamente hacia el eje x.

x	0	1	2	—1	—2	—3	—4
y	1	5	25	0,2	0,04	0,008	0,0016



Problema 10



Problema 11

11. Dibujar la función $y = e^x$.

El número $e = 2{,}718$ es la base del sistema de los logaritmos naturales o neperianos.

x	—3	—2	—1	—0, 5	0	0, 5	1	2
e^x	0,050	0,135	0,368	0,606	1	1,65	2,72	7,39

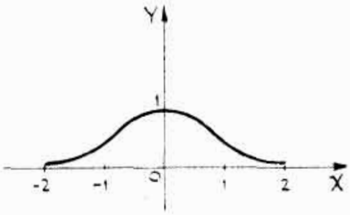
La gráfica de $y = e^{-x}$ es, como indica la figura, simétrica de la correspondiente a la función $y = e^x$ con respecto al eje y.

12. Representar la función normal de probabilidad $y = e^{-x^2}$.

La curva corta al eje y a una unidad del origen, y no corta al eje x.

Es simétrica con respecto al eje y. El eje x es una asíntota; cuando $x \to \pm \infty$, $y \to 0$.
La curva está situada, toda ella, por encima del eje x, ya que $e^{-x^2} > 0$ para todos los valores de x.

x	0	$\pm 0{,}5$	± 1	$\pm 1{,}5$	± 2
y	1	0,78	0,37	0,11	0,02

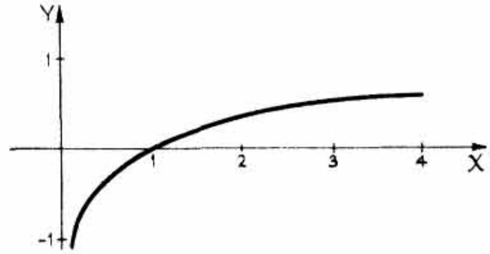


13. *Funciones logarítmicas*

La gráfica de $y = \log_a x$, llamada curva logarítmica, difiere de la correspondiente a la función $y = a^x$ en la posición relativa de los ejes. En efecto, ambas ecuaciones se pueden escribir en la misma forma, exponencial o logarítmica. Sea, por ejemplo, $a = 10$ y dibujemos la función

$$y = \log_{10} x, \text{ (o bien, } x = 10^y).$$

Como x no puede tomar valores negativos, toda la curva estará a la derecha del eje y. Para valores positivos de $x < 1$, y es negativa. Para $x = 1$, $y = 0$. Al aumentar x, y también aumenta. La curva no tiene simetrías. El eje y es una asíntota.



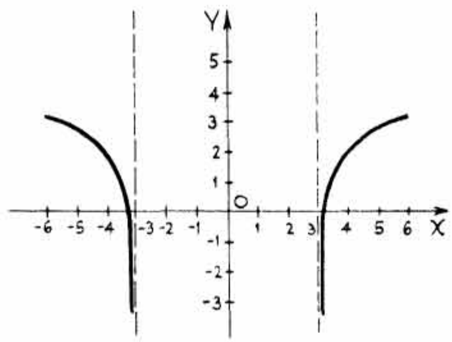
x	0,1	0,5	1	2	3	4	5	10
y	—1	—0,30	0	0,30	0,48	0,60	0,70	1

14. Dibujar la función $y = \log_e (x^2 - 9)$.

Para $y = 0$, $\log_e (x^2 - 9) = 0$, de donde, $x^2 - 9 = 1$, $x = \pm\sqrt{10}$. La curva no corta al eje y.

Para $|x| < 3$, y es imaginario. Si $|x| > \sqrt{10}$, y es positivo. Para $3 < |x| < \sqrt{10}$, y es negativo. Las rectas $x = \pm 3$ son dos asíntotas.

La curva es simétrica con respecto al eje y.

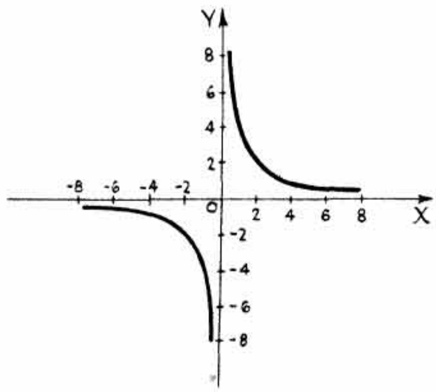


x	$\pm 3{,}1$	$\pm 3{,}2$	$\pm 3{,}5$	± 4	± 5	± 6
y	—0,49	0,22	1,18	1,95	2,77	3,29

15. *Ecuaciones paramétricas.* Algunas veces conviene expresar x e y en función de una tercera variable o parámetro. Las dos ecuaciones de x e y en función del parámetro se llaman ecuaciones paramétricas. Dando valores al parámetro se obtienen pares de valores correspondientes de x e y. Uniendo los puntos así determinados resulta una curva, que es la representación gráfica de las ecuaciones paramétricas.

Dibujar la curva $x = 2t$, $y = \dfrac{2}{t}$.

t	$\pm 1/4$	$\pm 1/2$	± 1	± 2	± 3	± 4
x	$\pm 1/2$	± 1	± 2	± 4	± 6	± 8
y	± 8	± 4	± 2	± 1	$\pm 2/3$	$\pm 1/2$



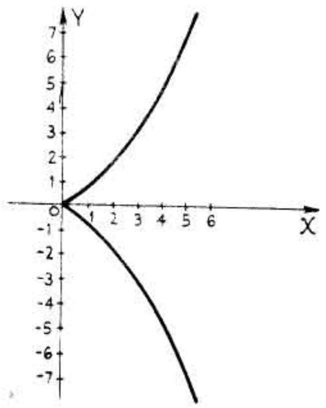
La curva es simétrica con respecto al origen. Los ejes x e y son dos asíntotas.

Eliminando el parámetro t se obtiene la ecuación de la curva en coordenadas rectangulares, $xy = 4$. Esta es la ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

Para eliminar el parámetro t, sustituimos $t = \dfrac{x}{2}$ en $y = \dfrac{2}{t}$, es decir, $y = \dfrac{2}{x/2}$, o bien, $xy = 4$.

16. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{4}t^3$.

t	—3	—2	—1	0	1	2	3
x	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
y	—6,75	—2	—0,25	0	0,25	2	6,75



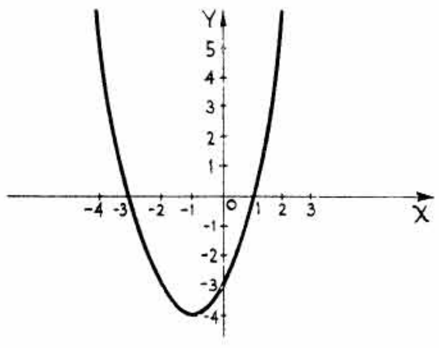
Eliminando t, la ecuación de la curva en coordenadas rectangulares es $2y^2 = x^3$, que es una parábola semicúbica. La curva es simétrica con respecto al eje x.

Eliminemos el parámetro t:
De $x = \frac{1}{2}t^2$ o $2x = t^2$, se obtiene $(2x)^3 = (t^2)^3$.
De $y = \frac{1}{4}t^3$ o $4y = t^3$, se obtiene $(4y)^2 = (t^3)^2$.
Luego $(2x)^3 = t^6 = (4y)^2$, o bien, $x^3 = 2y^2$.

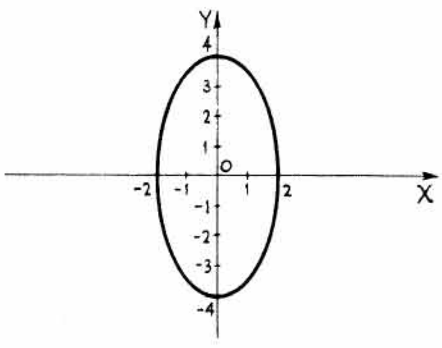
17. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t + 1$, $y = t(t + 4)$.

t	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2
x	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	5	0	—3	—4	—3	0	5	12

Eliminando el parámetro t, la ecuación en coordenadas rectangulares es $y = x^2 + 2x - 3$, que es una parábola.



Problema 17



Problema 18

18. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 2 \cos \theta$, $y = 4 \operatorname{sen} \theta$.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x	2	1,7	1	0	—1	—1,7	—2	—1,7	—1	0	1	1,7	2
y	0	2	3,5	4	3,5	2	0	—2	—3,5	—4	—3,5	—2	0

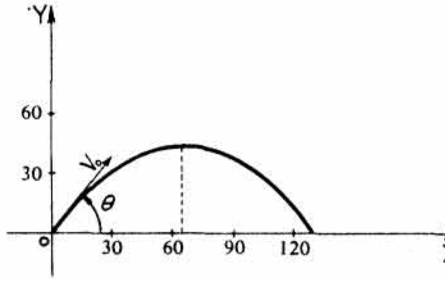
Eliminando el parámetro θ, la ecuación en coordenadas rectangulares es $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, que representa una elipse.

Eliminemos el parámetro θ:

$\cos \theta = \frac{x}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{4}$. Luego $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$.

19. La posición, con respecto al tiempo t, de un proyectil lanzado con una velocidad inicial V_0 que forma con la horizontal un ángulo θ viene dada por las ecuaciones $x = (V_0 \cos \theta)t$, $y = (V_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, siendo g la aceleración de la gravedad-igual a 9,8 metros por segundo en cada segundo (m/s²)— y en las que x e y se expresan en metros (m) y t en segundos (s).

Dibujar la trayectoria de un proyectil siendo $\theta = \operatorname{arc} \cos 3/5$ y $V_0 = 40$ metros por segundo (m/s). Para mayor facilidad de cálculo, tómese $g = 10$ m/s².



Como $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{4}{5}$ se tiene, $x = 72t$,

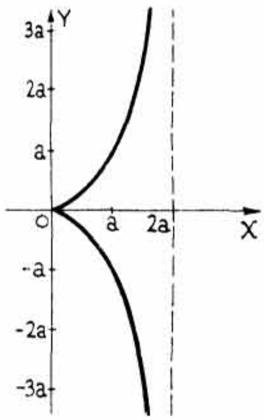
$$y = 96t - 16t^2.$$

t	0	1	2	3	4	5	6
x	0	24	48	72	96	120	144
y	0	27	44	51	48	35	12

Eliminando t, $y = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{5x^2}{576}$, que es una parábola de eje vertical. La ordenada del vértice es 51,2 metros, y el alcance máximo 153,6 metros.

20. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \dfrac{2at^2}{t^2 + 1}$, $y = \dfrac{2at^3}{t^2 + 1}$.

Para $t = 0$, $x = 0$ e $y = 0$. Para todos los valores de t positivos y negativos, x es positivo o cero; y es positivo para $t > 0$ y negativo para $t < 0$. La curva es simétrica con respecto al eje x.



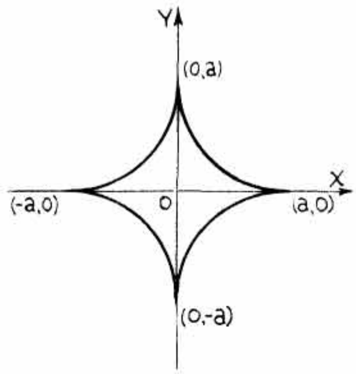
Si ponemos $x = \dfrac{2at^2}{t^2 + 1} = 2a - \dfrac{2a}{t^2 + 1}$, se observa que cuando t aumenta indefinidamente, x tiende hacia $2a$, y el valor absoluto de y crece también indefinidamente. Luego $x = 2a$ es una asíntota vertical.

t	0	± 1	± 2	± 3	± 4
x	0	a	$1{,}6a$	$1{,}8a$	$1{,}9a$
y	0	$\pm a$	$\pm 3{,}2a$	$\pm 5{,}4a$	$\pm 7{,}5a$

Eliminando t, se obtiene la ecuación en coordenadas rectangulares $y^2(2a - x) = x^3$, que representa la *Cisoide de Diocles*.

21. Representar la función

$$x = a \cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta.$$



Como $\cos(-\theta) = \cos \theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$, esta curva es simétrica con respecto al eje x, y como $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ y $\cos(180° - \theta) = -\cos \theta$, también lo es con respecto al eje y. Teniendo en cuenta que tanto el seno como el coseno son siempre menores que la unidad,

$$-a \leqq x \leqq a, \quad \text{y} \quad -a \leqq y \leqq a.$$

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x	a	$0{,}65a$	$0{,}13a$	0	$-0{,}13a$	$-0{,}65a$	$-a$
y	0	$0{,}13a$	$0{,}65a$	a	$0{,}65a$	$0{,}13a$	0

Eliminando θ, la ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, que representa una *hipocicloide* de cuatro lóbulos.

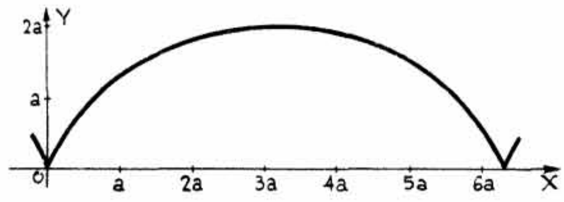
Eliminemos el parámetro θ:

$(x/a)^{2/3} + (y/a)^{2/3} = (\cos^3\theta)^{2/3} + (\operatorname{sen}^3\theta)^{2/3} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, o bien, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

22. Representar la curva

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta).$$

Para $\theta = 0$, $x = 0$, $y = 0$.
Para $\theta = 180°$, $x = \pi a$, $y = 2a$.
Para $\theta = 360°$, $x = 2\pi a$, $y = 0$.



θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x	0	$0{,}02a$	$0{,}18a$	$0{,}57a$	$1{,}2a$	$2{,}1a$	πa	$4{,}2a$	$5{,}1a$	$5{,}7a$	$6{,}1a$	$6{,}3a$	$2\pi a$
y	0	$0{,}13a$	$0{,}5a$	a	$1{,}5a$	$1{,}9a$	$2a$	$1{,}9a$	$1{,}5a$	a	$0{,}5a$	$0{,}13a$	0

Eliminando el parámetro θ, la ecuación de esta curva en coordenadas cartesianas es $x = a \operatorname{arc} \cos \dfrac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$, que representa una cicloide.

Eliminemos el parámetro θ:

De $y = a(1 - \cos\theta)$ se obtiene, $\cos\theta = \dfrac{a-y}{a}$, de donde $\theta = \operatorname{arc}\cos\dfrac{a-y}{a}$, y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2ay - y2}}{a}$.

Sustituyendo en $x = a\theta - a \operatorname{sen}\theta$ se tiene, $x = a \operatorname{arc}\cos\dfrac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$.

23. Expresar en forma paramétrica la ecuación $x^2 + 3xy + 3y^2 - ax = 0$.

Haciendo $y = tx$, resulta $x^2 + 3x^2t + 3x^2t^2 - ax = 0$.

Dividiendo por x se obtiene, $x + 3xt + 3xt^2 - a = 0$.

Despejando x, $x = \dfrac{a}{3t^2 + 3t + 1}$, $y = tx = \dfrac{at}{3t^2 + 3t + 1}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Representar las funciones de los Problemas 1-14.

1. $(y^2 - 4)x - 9y = 0$.

2. $y = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$.

3. $y^2 = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$.

4. $y^2(4 - x) = x^3$.

5. $x^3 - x^2y + 4y = 0$.

6. $x^2y - 3x^2 - 9y = 0$.

7. $x^2y + 4y - 8 = 0$.

8. $x^2 + 2xy - 4 + y^2 = 0$.

9. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$.

10. $y^2 = \dfrac{x - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

11. $4x^2 - 12x - 4xy + y^2 + 6y - 7 = 0$.

12. $x^3 + 4x^2 + xy^2 - 4y^2 = 0$.

13. $xy^2 - xy - 2x - 4 = 0$.

14. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Representar las funciones de los Problemas 15-22.

15. $y = 2 \text{ sen } 3x$.

16. $y = 2 \text{ sen } x/3$.

17. $y = \text{tg } 2x$.

18. $y = \cos (x - \pi/4)$.

19. $y = 2 \sec x/2$.

20. $y = \cot (x + \pi/3)$.

21. $y = 3 \cos \frac{\pi}{2}(x - 1)$.

22. $y = \frac{1}{3} \csc 3x$.

Representar las funciones de los Problemas 23-28.

23. $y = \text{arc sen } x$.

24. $y = 2 \text{ arc tg } 2x$.

25. $y = 3 \text{ arc cos } x/3$.

26. $y = \text{arc sec } x$.

27. $y = \text{arc csc } 2x$.

28. $y = \text{arc cot } x/2$.

Representar las funciones de los Problemas 29-35.

29. $y = 2e^{x/2}$.

30. $y = 4^{-x}$.

31. $y = 10^{x/3}$.

32. $y = \log_e(3 + x)$.

33. $y = \log_{10} \sqrt{x^2 - 16}$.

34. $y = \log_e \sqrt{27 - x^3}$.

35. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Catenaria.

Representar las funciones dadas en los Problemas 36-49 por el método de la suma de ordenadas.

36. $4x^2 - 4xy + y^2 - x = 0$.

37. $x^2 - 2xy + y^2 + x - 1 = 0$.

38. $3x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 4y + 3 = 0$.

39. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y = 0$.

40. $2x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$.

41. $y = 2 \cos x + \text{sen } 2x$.

42. $y = e^{x/2} + x^2$.

43. $y = x/2 + \cos 2x$.

44. $y = e^{-x} + 2e^{x/2}$.

45. $y = \text{sen } 2x + 2 \cos x$.

46. $y = x \text{ sen } x$.

47. $y = e^{-x/2} \cos \dfrac{\pi x}{2}$

48. $y = xe^{-x^2}$.

49. $y = x - \text{sen } \dfrac{\pi x}{3}$.

Expresar en forma paramétrica las funciones de los Problemas 50-55, teniendo en cuenta el valor que aparece de x o de y.

50. $x - xy = 2, \quad y = 1 - t$. *Sol.* $x = \dfrac{2}{t}, \quad y = 1 - t$.

51. $x^2 - 4y^2 = K^2, \quad x = K \sec \theta$. *Sol.* $x = K \sec \theta, \quad y = \dfrac{K \text{ tg } \theta}{2}$.

52. $x^3 + y^3 = 6xy, \quad y = tx$. *Sol.* $x = \dfrac{6t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{6t^2}{1 + t^3}$.

53. $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2a^2, \quad x = 2a \cos t$. *Sol.* $x = 2a \cos t, \quad y = a(\cos t \pm \text{sen } t)$.

54. $x^2y + b^2y - a^2x = 0, \quad x = b \cot \dfrac{t}{2}$. *Sol.* $x = b \cot \dfrac{t}{2}, \quad y = \dfrac{a^2}{2b} \text{ sen } t$.

55. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad y = a \text{ sen}^3\theta$. *Sol.* $x = a \cos^3\theta, \quad y = a \text{ sen}^3\theta$.

Eliminar el parámetro de las funciones de los Problemas 56-59 y hallar sus ecuaciones cartesianas.

56. $x = a \sec \theta, \quad y = b \text{ tg } \theta$. *Sol.* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

57. $x = 2 \cos \theta - 1, \quad y = 3 \text{ sen } \theta - 2$. *Sol.* $\dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y + 2)^2}{9} = 1$.

58. $x = \frac{1}{2} \cos t, \quad y = \cos 2t$. *Sol.* $y = 8x^2 - 1$.

59. $x = \dfrac{3am}{1 + m^3}, \quad y = \dfrac{3am^2}{1 + m^3}$. *Sol.* $x^3 + y^3 = 3axy$.

60. Se lanza un proyectil desde un punto A con una velocidad inicial de 1.000 metros por segundo (m/s) formando un ángulo de 35° con la horizontal. Hallar el alcance del proyectil y la duración de la trayectoria. *Sol.* 95.800 m, 118 s.

61. Hallar el ángulo con el que se debe lanzar un proyectil a una velocidad de 400 metros por segundo (m/s) para que su alcance sea de 12.000 metros (m). Hallar, asimismo, la duración de la trayectoria. *Sol.* 23° 42'; 32,8 s.

62. Se lanza un proyectil con un ángulo de elevación de 60° y una velocidad inicial de 800 metros por segundo (m/s). Hallar el alcance y el vértice de la trayectoria. *Sol.* 56.500 m, 24.500 m.

Representar las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son las indicadas en los Problemas 63-70.

63. $x = 4\cos t, \quad y = 4 \operatorname{sen} t.$

64. $x = t + \dfrac{1}{t}, \quad y = t - \dfrac{1}{t}.$

65. $x = t^2 + 2, \quad y = t^3 - 1.$

66. $x = 4 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 4 \sec \theta.$

67. $x = \dfrac{1}{1+t}, \quad y = \dfrac{1}{1+t^2}.$

68. $x = 1 + t^2, \quad y = 4t - t^3.$

69. $x = \operatorname{sen} t + \cos t, \quad y = \cos 2t.$

70. $x = \theta - \operatorname{sen} \theta, \quad y = 1 - \cos \theta.$

71. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 8\cos^3\theta, \quad y = 8 \operatorname{sen}^3\theta.$

72. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \dfrac{6t}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{6t^2}{1+t^3}.$

73. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 4\cos^2\theta.$

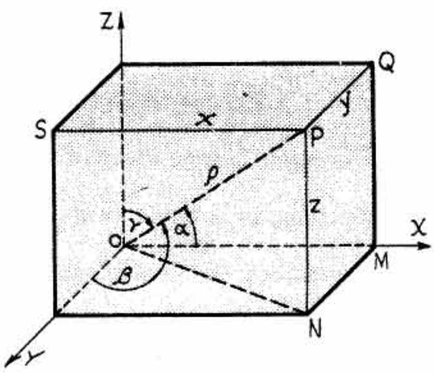
74. Representar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad y = 4 \operatorname{tg} \theta\,(1 + \operatorname{sen} \theta).$

CAPITULO 12

Introducción a la geometría analítica en el espacio

COORDENADAS CARTESIANAS. La posición de un punto en un plano se define por medio de las dos distancias de éste a dos ejes que se cortan y que, normalmente, son perpendiculares entre sí (rectangulares). En el espacio, un punto se determina mediante sus distancias a tres planos perpendiculares dos a dos y que se llaman planos coordenados. Las distancias del punto a estos planos se denominan *coordenadas* del punto.

Las rectas de intersección de los planos coordenados son los ejes OX, OY y OZ que se llaman *ejes coordenados* y cuyo sentido positivo se indica mediante flechas. Los planos coordenados dividen al espacio en ocho octantes numerados de la forma siguiente: el octante I está limitado por los semiejes positivos; los octantes II, III y IV son los situados por encima del plano xy y numerados en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del eje OZ. Los octantes V, VI, VII y VIII son los situados por debajo del plano xy, correspondiéndose el V con I, etc.



En la figura adjunta, las distancias SP, QP y NP son, respectivamente, las coordenadas x, y y z del punto P, y se representan por (x, y, z), o bien, $P(x, y, z)$.

La distancia OP del punto P al origen O es

$$OP = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{NP}^2} = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Luego si $OP = \varrho$, se tiene $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

ANGULOS DE DIRECCION Y COSENOS DIRECTORES

Sean α, β y γ los ángulos que OP forma con los ejes OX, OY y OZ, respectivamente. Se verifica,

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = \varrho \cos \beta, \quad z = \varrho \cos \gamma.$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 = \varrho^2 \cos^2\alpha + \varrho^2 \cos^2\beta + \varrho^2 \cos^2\gamma,$$

o bien, $$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

También se verifican las relaciones $\cos \alpha = \dfrac{x}{\varrho}$, $\cos \beta = \dfrac{y}{\varrho}$, $\cos \gamma = \dfrac{z}{\varrho}$,

o bien, $$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

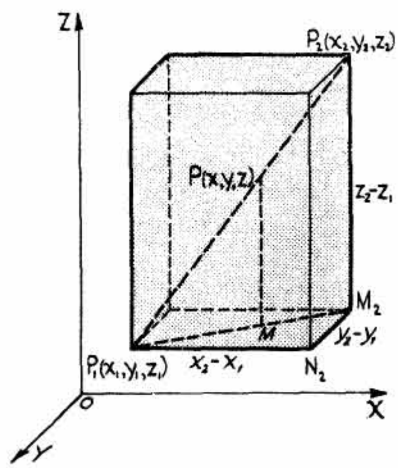
Los ángulos α, β y γ son los *ángulos de la dirección de OP* y sus cosenos se llaman *cosenos directores de OP*.

Si una recta no pasa por el origen O, sus ángulos de dirección α, β y γ son los que forman con los ejes una recta paralela a la dada que pase por O.

COMPONENTES DE UNA RECTA. Tres números cualesquiera, a, b y c, proporcionales a los cosenos directores de una recta se llaman *componentes* de la misma. Para hallar los cosenos directores de una recta cuyas componentes son a, b y c, se dividen estos tres números por $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Se tomará el signo adecuado para que los cosenos directores tengan el que les corresponde.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$



DIRECCION DE UNA RECTA. Los cosenos directores de P_1P_2 son

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

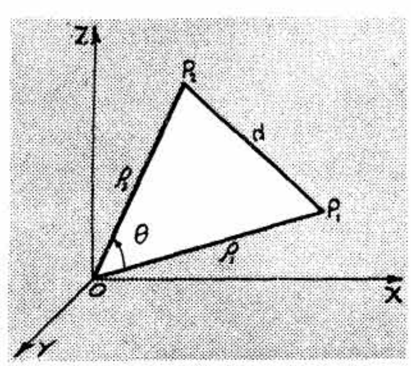
$$\cos\beta = \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

PUNTO DE DIVISION. Si el punto $P(x, y, z)$ divide a la recta que une $P_1(x_1, y_1, z_1)$ con $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en la relación $\dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{r}{1}$ se verifica,

$$x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}, \quad z = \frac{z_1+rz_2}{1+r}.$$

ANGULO DE DOS RECTAS. El ángulo de dos rectas que no se cortan se define como el ángulo de dos rectas que se corten y sean paralelas a las dadas.



Sean OP_1 y OP_2 dos rectas paralelas a las dadas pero que pasan por el origen, y θ el ángulo que forman. Del triángulo de la figura se deduce,

$$\cos\theta = \frac{\varrho_1^2+\varrho_2^2-d^2}{2\varrho_1\varrho_2}.$$

Ahora bien, $\varrho_1^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $\varrho_2^2 = x_2^2+y_2^2+z_2^2$, y $d^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$. Sustituyendo y simplificando,

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Ahora bien, $\dfrac{x_1}{\varrho_1} = \cos \alpha_1$, $\dfrac{x_2}{\varrho_2} = \cos \alpha_2$, etc. Por tanto,

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Si las dos rectas son paralelas, $\cos \theta = 1$ y, por consiguiente,

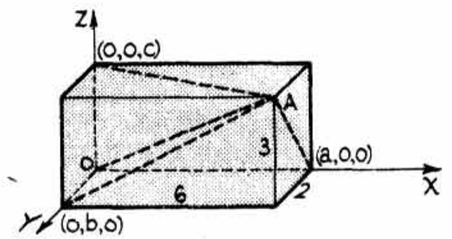
$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

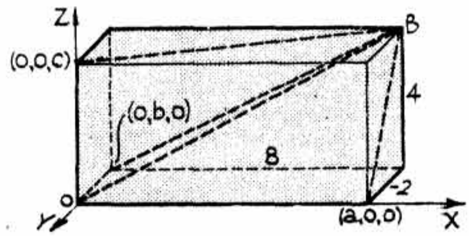
Si las dos rectas son perpendiculares, $\cos \theta = 0$, con lo cual

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Representar los puntos siguientes y hallar sus distancias al origen y a los ejes coordenados: $A(6, 2, 3)$, $B(8, -2, 4)$.





$$OA = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7 \qquad OB = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{21}$$

$$Aa = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \qquad Ba = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$Ab = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \qquad Bb = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$Ac = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \qquad Bc = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$$

2. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(5, -2, 3)$ y $P_2(-4, 3, 7)$.

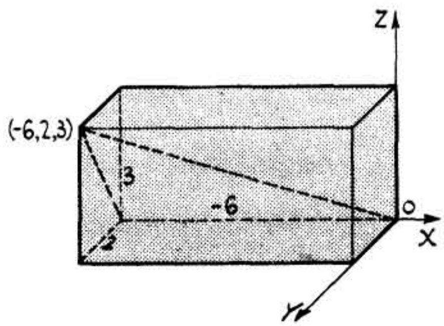
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (3 + 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{122}$$

3. Hallar los cosenos directores y los ángulos de dirección de la recta que une el origen con el punto $(-6, 2, 3)$.

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$= \frac{-6 - 0}{\sqrt{(-6 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 0)^2}} = \frac{-6}{7},$$

con lo que $\alpha = 149°$.



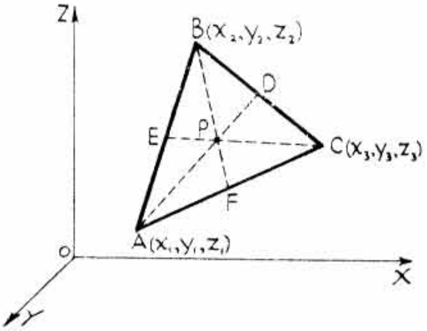
$\cos \beta = \dfrac{y_2 - y_1}{7} = \dfrac{2 - 0}{7} = \dfrac{2}{7}$, con lo que $\beta = 73°24'$.

$\cos \gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{7} = \dfrac{3 - 0}{7} = \dfrac{3}{7}$, con lo que $\gamma = 64°37'$.

4. Demostrar que las coordenadas del centro geométrico (baricentro o centro del área), es decir, el punto de intersección de las medianas, del triángulo de vértices $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$ son

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

Las medianas del triángulo ABC se cortan en un punto $P(x,y,z)$ de forma que $\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PF} = \frac{CP}{PE} = \frac{2}{1} = r$.



Las coordenadas del punto D son

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

Luego las coordenadas del punto P, que divide a AD en la relación $r = \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}$, son

$$x = \frac{x_1 + r\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+r} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}. \text{ Análogamente, } y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

5. Hallar los cosenos directores y los ángulos de dirección de una recta cuyas componentes son 2, —3, 6.

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7}, \alpha = 73°24'. \quad \cos\beta = \frac{-3}{7}, \beta = 115°23'. \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}, \gamma = 31°.$$

6. Demostrar que la recta determinada por los puntos $A(5, 2, -3)$ y $B(6, 1, 4)$ es paralela a la que une $C(-3, -2, -1)$ y $D(-1, -4, 13)$.

Las componentes de AB son $6 - 5$, $1 - 2$, $4 + 3$, o sea, 1, —1, 7.
Las componentes de CD son $-1 + 3$, $-4 + 2$, $13 + 1$, o sea, 2, —2, 14.

Si dos rectas cuyas componentes son a, b, c y a' b' c' son paralelas, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Por tanto, como $\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{14}{7}$, ambas rectas son paralelas.

7. Dados los puntos $A(-11, 8, 4)$, $B(-1, -7, -1)$ y $C(9, -2, 4)$, demostrar que las rectas AB y BC son perpendiculares.

Las componentes de AB son $-1 + 11$, $-7 - 8$, $-1 - 4$, es decir, 10, —15, —5, o bien, 2, —3, —1.
Las componentes de BC son $9 + 1$, $-2 + 7$, $4 + 1$, es decir, 10, 5, 5, o bien, 2, 1, 1.

Si dos rectas, de componentes a, b, c y a', b', c', son perpendiculares se verifica, $aa' + bb' + cc' = 0$. Sustituyendo, $(2)(2) + (-3)(1) + (-1)(1) = 0$. Por tanto, las rectas AB y BC son perpendiculares.

8. Hallar el ángulo θ formado por las rectas AB y CD siendo $A(-3, 2, 4)$, $B(2, 5, -2)$, $C(1, -2, 2)$ y $D(4, 2, 3)$.

Las componentes de AB son $2 + 3$, $5 - 2$, $-2 - 4$, o bien 5, 3, —6.
Las componentes de CD son $4 - 1$, $2 + 2$, $3 - 2$, o bien, 3, 4, 1.

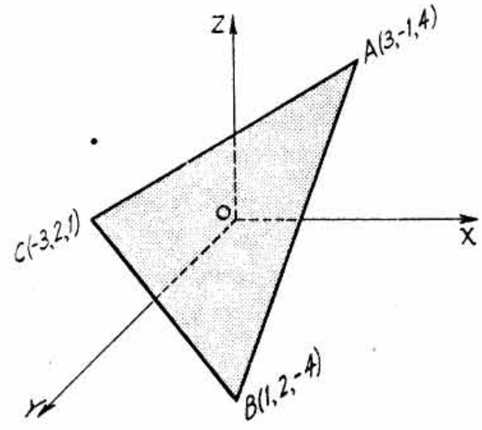
Los cosenos directores de AB son $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{25+9+36}} = \frac{5}{\sqrt{70}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{70}}, \cos\gamma = \frac{-6}{\sqrt{70}}$.

Los cosenos directores de CD son $\cos\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{3}{\sqrt{26}}, \cos\beta_1 = \frac{4}{\sqrt{26}}, \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Por tanto, $\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$

$$= \frac{5}{\sqrt{70}}\cdot\frac{3}{\sqrt{26}} + \frac{3}{\sqrt{70}}\cdot\frac{4}{\sqrt{26}} - \frac{6}{\sqrt{70}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = 0{,}49225, \text{ de donde } \theta = 60°30{,}7'.$$

9. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(3, -1, 4)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-3, 2, 1)$.



Cosenos directores de $AB = \left(\frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-8}{\sqrt{77}}\right)$.

Cosenos directores de $BC = \left(\frac{-4}{\sqrt{41}}, 0, \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$.

Cosenos directores de $AC = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$.

Nota. Los cosenos directores de la recta AB son opuestos de los cosenos directores de BA.

$$\cos A = \frac{-2}{\sqrt{77}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{77}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{-8}{\sqrt{77}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{462}}. \qquad A = 45°44,\ 7'.$$

$$\cos B = \frac{2}{\sqrt{77}}\cdot\frac{-4}{\sqrt{41}} + \frac{-3}{\sqrt{77}}\cdot 0 + \frac{8}{\sqrt{77}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{32}{\sqrt{3157}}. \qquad B = 55°16,\ 9'.$$

$$\cos C = \frac{4}{\sqrt{41}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{-5}{\sqrt{41}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{246}}. \qquad C = 78°58,\ 4'. \qquad A + B + C = 180°.$$

10. Hallar el área del triángulo del Problema 9.

El área de un triángulo conocidos dos de sus lados, b y c, y el ángulo que forman, A, es igual a $\frac{1}{2}bc$ sen A.

Longitud de AB, $c = \sqrt{77}$, longitud de AC, $b = 3\sqrt{6}$.

Por tanto, área $= \frac{1}{2}(3\sqrt{6})(\sqrt{77})$ sen $45°\ 44{,}7' = 23{,}1$ unidades de superficie.

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos que disten r unidades del punto fijo (x_0, y_0, z_0).

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$, o bien, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, ecuación de una esfera de centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r.

La forma general de la ecuación de una esfera es $x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$.

12. Hallar la ecuación de la esfera de centro $(2, -2, 3)$ tangente al plano XY.

Como la esfera es tangente al plano XY su radio es 3. Luego,

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2} = 3$. Elevando al cuadrado y simplificando, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$.

13. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z = 7$.

Completando cuadrados, $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = 36$

$$\text{o bien, } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 36.$$

Comparando con la expresión $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ se deduce que el centro tiene de coordenadas (3, —2, 4) y el radio de la esfera en cuestión es 6.

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias al punto fijo (2, —3, 4) son el doble de la correspondiente al (—1, 2, —2).

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico cualquiera del lugar. Entonces,

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 2\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2}.$$

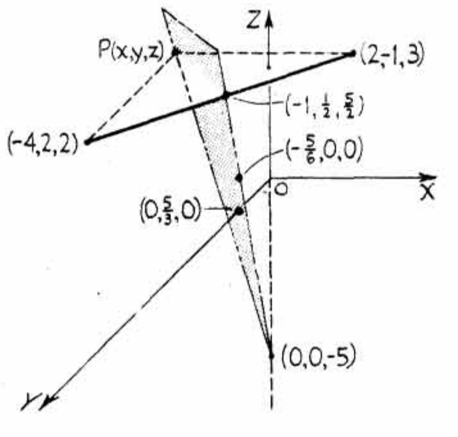
Elevando al cuadrado y simplificando, $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12x - 22y + 24z + 7 = 0$, que es una esfera de centro $\left(-2, \frac{11}{3}, -4\right)$ y radio $r = \frac{2}{3}\sqrt{70}$.

15. Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta que une los puntos (2, —1, 3) y (—4, 2, 2) en su punto medio.

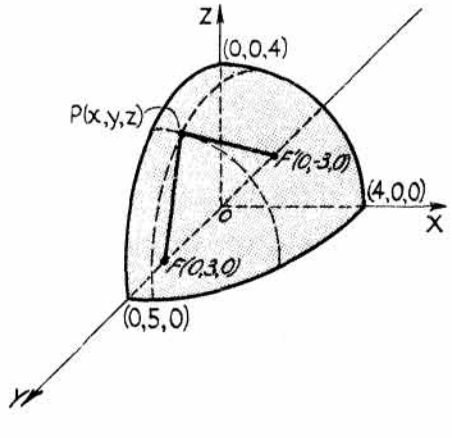
Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico cualquiera del plano. Entonces,

$$\sqrt{(x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $6x - 3y + z + 5 = 0$. Esta es la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de los dos dados. El plano corta a los ejes en los puntos (—5/6, 0, 0), (0, 5/3, 0) y (0, 0, —5), y a la recta dada en (—1, 1/2, 5/2).



Problema 15



Problema 16

16. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los dos puntos fijos (0, 3, 0) y (0, —3, 0) sea igual a 10.

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico cualquiera del lugar. Entonces, $FP + PF' = 10$, o sea,

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2 + (z - 0)^2} = 10.$$

Pasando uno de los radicales al otro miembro y elevando al cuadrado se obtiene, después de reducir términos, $3y + 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9 + z^2}$.

Elevando al cuadrado y simplificando, $25x^2 + 16y^2 + 25z^2 = 400$, que representa un elipsoide de centro el origen.

17. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia a los dos puntos fijos (4, 0, 0) y (—4, 0, 0) sea igual a 6.

Sea (x, y, z) un punto genérico cualquiera del lugar. Entonces,

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=6,$$

o bien, $\sqrt{(x^2-8x+16+y^2+z^2}=6+\sqrt{x^2+8x+16+y^2+z^2}.$

Elevando al cuadrado de nuevo y simplificando, $7x^2-9y^2-9z^2=63$, que representa un hiperboloide de revolución alrededor del eje x.

18. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje z sean tres veces la correspondiente al punto $(-1, 2, -3)$.

Distancia al eje z = distancia al punto $(-1, 2, -3)$.

Es decir, $\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}.$

Elevando al cuadrado y simplificando, $8x^2+8y^2+9z^2+18x-36y+54z+126=0$, que es un elipsoide.

19. Demostrar que los puntos $A(-2, 0, 3)$, $B(3, 10, -7)$, $C(1, 6, -3)$ están en línea recta.

Componentes de $AB = 5, 10, -10$, o bien, $1, 2, -2$; componentes de $BC = -2, -4, 4$, o bien, $-1, -2, 2$.

Como las componentes son proporcionales, las rectas son paralelas. Ahora bien, como B pertenece a ambas, AB y BC serán una misma recta y, por consiguiente, los puntos dados son colineales.

20. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidisten de los puntos fijos $(1, 3, 8)$, $(-6, -4, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Sea (x, y, z) un punto genérico que satisfaga las condiciones del problema.

Entonces (1) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-8)^2=(x+6)^2+(y+4)^2+(z-2)^2,$

y (2) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-8)^2=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2.$

Desarrollando y simplificando, se obtiene, (1) $7x+7y+6z-9=0$ y (2) $2x-y-7z+30=0$.
Solución: $7x+7y+6z-9=0$ y $2x-y-7z+30=0$.

21. Demostrar que el triángulo $A(3, 5, -4)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(-5, -5, -2)$ es isósceles.

Longitud de $AB=\sqrt{(3+1)^2+(5-1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{17}.$

Longitud de $BC=\sqrt{(-5+1)^2+(-5-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{17}.$

Longitud de $AC=\sqrt{(-5-3)^2+(-5-5)^2+(-2+4)^2}=2\sqrt{42}.$

Como $AB=BC=2\sqrt{17}$, el triángulo es isósceles.

22. Demostrar, por dos métodos diferentes, que los puntos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$, y $C(-3, -2, 1)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.

1. Aplicando el teorema de Pitágoras, $AB=\sqrt{(5-4)^2+(1-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{14}.$

$BC=\sqrt{(4+3)^2+(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{75}.$

$CA=\sqrt{(-3-5)^2+(-2-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{89}.$

$(AB)^2+(BC)^2=(CA)^2$, o $14+75=89$.

2. Demostrando que AB y BC son perpendiculares.

Cosenos directores de AB, $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$. Cosenos directores de BC, $\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{5}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{7}{5\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{5}{5\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{7-10+3}{5\sqrt{42}} = 0.$$

De otra forma: La suma de los productos de las componentes de las dos rectas es igual a cero. $7(1) + 5(-2) + 1(3) = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representar los puntos $(2, 2, 3), (4, -1, 2), (-3, 2, 4), (3, 4, -5), (-4, -3, -2), (0, 4, -4), (4, 0, -2), (0, 0, -3), (-4, 0, -2), (3, 4, 0)$.

2. Hallar la distancia del origen a los puntos del Problema 1.
Sol. $\sqrt{17}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{29}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 3, $2\sqrt{5}$, 5.

3. Hallar la distancia entre los pares de puntos siguientes:
(*a*) $(2, 5, 3)$ y $(-3, 2, 1)$. *Sol.* $\sqrt{38}$.
(*b*) $(0, 3, 0)$ y $(6, 0, 2)$. *Sol.* 7.
c) $(-4, -2, 3)$ y $(3, 3, 5)$. *Sol.* $\sqrt{78}$.

4. Hallar el perímetro de los triángulos siguientes:
a) $(4, 6, 1), (6, 4, 0), (-2, 3, 3)$. *Sol.* $10 + \sqrt{74}$.
b) $(-3, 1, -2), (5, 5, -3), (-4, -1, -1)$. *Sol.* $20 + \sqrt{6}$.
c) $(8, 4, 1), (6, 3, 3), (-3, 9, 5)$. *Sol.* $14 + 9\sqrt{2}$.

5. Representar los puntos siguientes y hallar la distancia de cada uno de ellos al origen así como los cosenos de la dirección que con él definen.
a) $(-6, 2, 3)$. *Sol.* 7, $\cos\alpha = -6/7$, $\cos\beta = 2/7$, $\cos\gamma = 3/7$.
b) $(6, -2, 9)$. *Sol.* 11, $\cos\alpha = 6/11$, $\cos\beta = -2/11$, $\cos\gamma = 9/11$.
c) $(-8, 4, 8)$. *Sol.* 12, $\cos\alpha = -2/3$, $\cos\beta = 1/3$, $\cos\gamma = 2/3$.
d) $(3, 4, 0)$. *Sol.* 5, $\cos\alpha = 3/5$, · $\cos\beta = 4/5$, $\cos\gamma = 0$.
e) $(4, 4, 4)$. *Sol.* $4\sqrt{3}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$, $\cos\gamma = 1/\sqrt{3}$.

6. Hallar los ángulos de dirección de las rectas que unen el origen con los puntos del Problema 5 *a*), *d*) y *e*).
Sol. *a*) $\alpha = 148°59{,}8'$, $\beta = 73°23{,}9'$, $\gamma = 64°37{,}4'$.
d) $\alpha = 53°7{,}8'$, $\beta = 36°52{,}2'$, $\gamma = 90°$.
e) $\alpha = \beta = \gamma = 54°44{,}1'$.

7. Hallar las longitudes de las medianas de los triángulos cuyos vértices son los que se indican. Dar el resultado de las medianas correspondientes a los vértices A, B, C, por este orden.
a) $A(2, -3, 1)$, $B(-6, 5, 3)$, $C(8, 7, -7)$. *Sol.* $\sqrt{91}$, $\sqrt{166}$, $\sqrt{217}$.
b) $A(7, 5, -4)$, $B(3, -9, -2)$, $C(-5, 3, 6)$. *Sol.* $2\sqrt{41}$, $\sqrt{182}$, $\sqrt{206}$.
c) $A(-7, 4, 6)$, $B(3, 6, -2)$, $C(1, -8, 8)$. *Sol.* $\sqrt{115}$, $\sqrt{181}$, $\sqrt{214}$.

8. Hallar los cosenos directores de las rectas que unen el primero con el segundo de los puntos que se indican.
a) $(-4, 1, 7), (2, -3, 2)$. *c*) $(-6, 5, -4), (-5, -2, -4)$. *e*) $(3, -5, 4), (-6, 1, 2)$.
b) $(7, 1, -4), (5, -2, -3)$. *d*) $(5, -2, 3), (-2, 3, 7)$.

Sol. *a*) $\frac{6\sqrt{77}}{77}, -\frac{4\sqrt{77}}{77}, -\frac{5\sqrt{77}}{77}$. *d*) $-\frac{7\sqrt{10}}{30}, \frac{\sqrt{10}}{6}, \frac{2\sqrt{10}}{15}$.

b) $-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}$. *e*) $-\frac{9}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{2}{11}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10}, 0$.