GEOMETRÍA ANALÍTICA

LEHMANN

LIMUSA

Noriega Editores

Temas que trata la obra:

Sistemas de coordenadas
Gráfica de una ecuación y lugares geométricos
La línea recta
Ecuación de la circunferencia
Transformación de coordenadas
La parábola
La elipse
La hipérbola
Ecuación general de segundo grado
Coordenadas polares
Ecuaciones paramétricas
Curvas planas de grado superior
El punto en el espacio
El plano
La recta en el espacio
Superficies
Curvas en el espacio

GEOMETRIA
ANALITICA

GEOMETRIA ANALITICA

CHARLES H. LEHMANN

Profesor de Matemáticas
The Cooper Union School of Engineering

NORIEGA EDITORES

EDITORIAL LIMUSA

MEXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Título de la obra en inglés:
ANALYTIC GEOMETRY

Traducción al español:
Ing. Rafael García Díaz

Revisión de la traducción:
Marcelo Santaló Sors
Catedrático de Matemáticas

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro Núm. 121

Primera reimpresión: 1980
Segunda reimpresión: 1980
Tercera reimpresión: 1980
Cuarta reimpresión: 1981
Quinta reimpresión: 1982
Sexta reimpresión: 1982
Séptima reimpresión: 1984
Octava reimpresión: 1984
Novena reimpresión: 1985
Décima reimpresión: 1986
Decimaprimera reimpresión: 1986
Decimasegunda reimpresión: 1988
Decimatercera reimpresión: 1989
Impreso en México
(7911)

ISBN 968 – 18 – 1176 – 3

PROLOGO

El libro que presentamos constituye un curso de Geometría analítica plana y del espacio. Supone el conocimiento, por parte del lector, de los principios fundamentales de Geometría elemental, Trigonometría plana y Algebra.

En su preparación el autor se ha esforzado, principalmente, en satisfacer las necesidades de maestros y alumnos. Una simple lectura del índice mostrará que los temas considerados son aquellos incluídos generalmente en los libros de texto de Geometría analítica. Creemos que el maestro encontrará en este libro todo el material que puede considerar como esencial para un curso de esta materia, ya que no es conveniente, por lo general, el tener que complementar un libro de texto con material de otros libros.

El método didáctico empleado en todo el libro consta de las siguientes partes: orientación, motivo, discusión y ejemplos, a la manera de una lección oral.

Para orientación del estudiante, el autor ha usado el método de presentar primero ideas familiares y pasar luego paulatinamente y de una manera natural a nuevos conceptos. Por esta razón, cada capítulo comienza con un artículo preliminar. Este enlace de los conocimientos anteriores del estudiante con los nuevos conceptos de la Geometría analítica es de considerable importancia, porque un mal entendimiento del método analítico en los principios conducirá, inevitablemente, a dificultades continuas en las partes más avanzadas.

En el desarrollo de los temas se ha puesto especial cuidado en fijar el motivo. Esto es necesario si se quiere que el alumno obtenga un conocimiento básico de los métodos analíticos y no haga una simple adquisición de hechos geométricos. Se ha hecho todo lo posible por encauzar el proceso de razonamiento de tal manera que aparte al estudiante de la tarea de memorizar.

En general, hemos resumido en forma de teoremas los resultados de la discusión de un problema o una proposición particular. Este procedimiento no solamente sirve para llamar la atención sobre los resultados importantes, sino también clasifica a dichos resultados para futura referencia.

El maestro verá que este libro se presta en sí a ser dividido en lecciones para las tareas diarias. El estudio de cada asunto va seguido usualmente de uno o más ejemplos y de un conjunto de ejercicios relacionados con la teoría explicada.

Queremos ahora llamar la atención sobre algunas características especiales del libro. El estudio de la Geometría analítica no alcanza uno de sus principales objetivos si no da un análisis completo de cualquiera investigación particular que se trate. El ser conciso en la presentación no se justifica ciertamente si una conclusión está basada en la discusión de uno o varios casos posibles. Es por esto que la investigación de cada cuestión se ha hecho tan completa como ha sido posible, y los casos excepcionales no han sido considerados. Algunos ejemplos de esto pueden verse en la discusión de las posiciones relativas de dos rectas (Art. 30), la determinación de la distancia de una recta a un punto dado (Art. 33) y el estudio de las familias o haces de circunferencias (Art. 42).

Otra particularidad de esta obra es el dar en forma de tabla o cuadro sinóptico, un resumen de fórmulas y resultados estrechamente relacionados. Una larga experiencia ha convencido al autor de que para los estudiantes es una gran ayuda el uso de tales resúmenes.

Se observará que se han introducido varios términos nuevos. Por ejemplo el *eje focal* y el *eje normal* para las secciones cónicas (Art. 60), el nombre *indicador* para el invariante $B^2 - 4AC$ de la ecuación general de segundo grado con dos variables (Art. 74) y el término *par principal* de coordenadas polares (Art. 80). Creemos que el uso de estos términos y el de los paréntesis rectangulares para encerrar los números directores de una recta en el espacio (Art. 111) es muy conveniente.

El desarrollo de la Geometría analítica del espacio es considerablemente más completo que el que aparece en la mayoría de los libros de texto. Un buen fundamento en Geometría analítica del espacio es de gran valor para estudios posteriores de Matemáticas. Por ejemplo, un estudio razonado de intersección de superficies y curvas en el espacio será una gran ayuda para la comprensión de muchos temas de Cálculo infinitesimal. Creemos, también, que se ha incluído suficiente material para que el libro pueda ser fácilmente adaptado a un curso de Geometría analítica del espacio.

Como es deseable que el estudiante enfoque su atención sobre un mínimo de conceptos a la vez, se han agrupado los temas semejantes en artículos y capítulos individuales. Esto evita las desventajas de la distracción causada por la dipersión de los temas en todo el libro. Por ejemplo, toda la parte fundamental sobre coordenadas polares está contenida en un solo capítulo. Esta concentración de material hace que el libro sea más útil para consulta aun después que el estudiante haya terminado su curso de Geometría analítica y esté dedicado a estudios más avanzados.

El libro contiene suficiente materia para un curso semestral de cinco horas por semana pero es fácilmente adaptable a cursos más cortos. El maestro puede también omitir ciertas partes de Geometría analítica del espacio y ver solamente aquellas indispensables para estudiar Cálculo infinitesimal.

Se ha dado especial atención a los ejercicios, de los cuales hay 1 920 ordenados en 71 grupos. Esto es mucho más de lo que normalmente resuelven los alumnos en un curso, pero permite una variación de tareas de año a año. Al final del libro se dan las soluciones a la mayoría de estos ejercicios. Además hay 134 ejemplos resueltos completamente.

Se incluyen dos apéndices. El primero consiste en una lista resumen de fórmulas, definiciones y teoremas, de Geometría elemental, Algebra y Trigonometría plana. El segundo apéndice consiste en una serie de tablas numéricas para ser usadas en los cálculos.

El autor desea expresar a su amigo y colega el profesor F. H. Miller su sincera gratitud por el constante estímulo y valiosa cooeperación en la realización de su tarea. El profesor Miller ha leído el manuscrito completo cuidadosamente y ha contribuído mucho al valor del libro por sus útiles sugestiones y crítica constructiva.

CHARLES H. LEHMANN

INDICE

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

CAPITULO III

LA LINEA RECTA

CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

CAPITULO V

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

CAPITULO VI

LA PARABOLA

CAPITULO XI

ECUACIONES PARAMETRICAS

CAPITULO XII

CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

CAPITULO XIII

EL PUNTO EN EL ESPACIO

CAPITULO XIV

EL PLANO

CAPITULO XV

LA RECTA EN EL ESPACIO

CAPITULO XVI

SUPERFICIES

CAPITULO XVII

CURVAS EN EL ESPACIO

APENDICE I

RESUMEN DE FORMULAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

APENDICE II

TABLAS

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

1. Introducción. El objeto de este capítulo es presentar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría analítica plana. Estos conceptos son fundamentales en el sentido de que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica. En particular, se hará notar cómo se generalizan muchas de las nociones de la Geometría elemental por los métodos de la Geometría analítica. Esto se ilustrará con aplicaciones a las propiedades de las líneas rectas y de las figuras rectilíneas.

2. Segmento rectilíneo dirigido. La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama *segmento rectilíneo* o simplemente *segmento*. Los dos puntos se llaman *extremos* del seg-

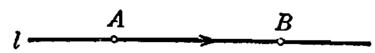

Fig. 1

mento. Así, en la figura 1, para la recta l, AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La *longitud* del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.

El lector ya está familiarizado con el concepto geométrico de segmento rectilíneo. Para los fines de la Geometría analítica añadiremos, al concepto geométrico de segmento, la idea de *sentido* o *dirección*. Desde este punto de vista consideramos que el segmento AB es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta l de A hacia B. Decimos entonces que el segmento AB está *dirigido* de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como en la figura 1. En este caso, el punto A se llama *origen* o *punto inicial* y el punto B *extremo* o *punto final*. Podemos también obtener el mismo segmento dirigiéndolo de B a A; entonces B es el origen y A el extremo, y el segmento se designa por BA. El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial.

Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos, AB y BA, son las mismas. En Geometría analítica, sin embargo, se hace una distinción entre los *signos* de estas longitudes. Así, especificamos, arbitrariamente, que un segmento dirigido en un sentido será considerado de longitud *positiva*, mientras que otro, dirigido en sentido opuesto, será considerado como un segmento de longitud *negativa*. De acuerdo con esto, si especificamos que el segmento dirigido AB tiene una longitud positiva, entonces el segmento dirigido BA tiene una longitud negativa, y escribimos

$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \tag{1}$$

Consideremos ahora tres puntos distintos A, B y C sobre una línea recta cuya dirección positiva es de izquierda a derecha. Hay

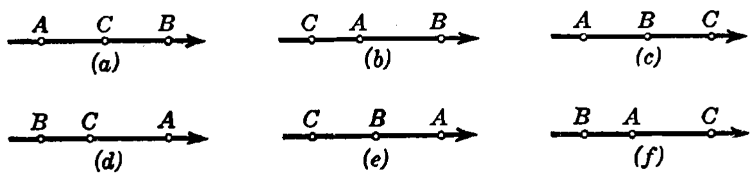

Fig. 2

$3! = 6$ ordenaciones posibles de estos puntos, como se muestra en la figura 2. Considerando solamente segmentos dirigidos de longitudes positivas, tenemos las seis relaciones siguientes correspondientes a estas ordenaciones:

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}, \tag{a}$$

$$\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}, \tag{b}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \tag{c}$$

$$\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}, \tag{d}$$

$$\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}, \tag{e}$$

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}. \tag{f}$$

Demostraremos en seguida que todas estas relaciones están incluídas en la *relación fundamental:*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{2}$$

En efecto, por (1), $\overline{CB} = -\overline{BC}$, de manera que la relación (a) puede escribirse

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB},$$

de donde, pasando $-\overline{BC}$ al segundo miembro, obtenemos (2). Análogamente, por ser $\overline{CA} = -\overline{AC}$ y $\overline{CB} = -\overline{BC}$ por (1), la relación (b) se convierte en

$$-\overline{AC} + \overline{AB} = -\overline{BC},$$

en donde, por transposición, obtenemos también (2). La relación (c) está ya en la forma (2). Como anteriormente, usando (1), vemos que (d), (e) y (f) se reducen cada una a (2).

3. Sistema coordenado lineal. En el Artículo anterior hemos introducido los conceptos de dirección y signo con respecto a los segmentos rectilíneos. Ahora vamos a dar un paso más introduciendo la idea de correspondencia entre un punto geométrico y un número

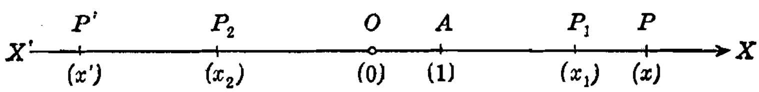

Fig. 3

real. Consideremos (fig. 3) una recta $X'X$ cuya dirección positiva es de izquierda a derecha, y sea O un punto fijo sobre esta línea. Tomemos una longitud conveniente como unidad de medida; si A es un punto de $X'X$ distinto de O y situado a su derecha, la longitud $\overline{OA}$ puede considerarse como unidad de longitud. Si P es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la *derecha* de O y tal que el segmento dirigido OP, de longitud *positiva*, contiene x veces a la unidad adoptada de longitud, entonces diremos que el punto P *corresponde* al número *positivo* x. Análogamente, si P' es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la *izquierda* de O y tal que el segmento dirigido OP' tenga una longitud *negativa* de x' unidades, entonces diremos que el punto P' *corresponde* al número *negativo* x'. De esta manera, cualquier número real x puede representarse por un punto P sobre la recta $X'X$. Y recíprocamente, cualquier punto dado P situado sobre la recta $X'X$ representa un número real x, cuyo valor numérico es igual a la longitud del segmento OP y cuyo signo es positivo o negativo según que P esté a la derecha o a la izquierda de O.

De acuerdo con esto, hemos construído un esquema por medio del cual se establece una correspondencia biunívoca entre puntos de una recta y los números reales. Tal esquema se llama un *sistema coordenado*. En el caso particular considerado, como todos los puntos están sobre la misma recta, el sistema se llama *sistema unidimensional* o *sistema coordenado lineal*. Refiriéndonos a la figura 3, la recta $X'X$ se llama *eje* y el punto O es el *origen* del sistema coordenado lineal. El número real x correspondiente al punto P se llama *coordenada* del punto P y se representa por (x). Evidentemente, de acuerdo con las convenciones adoptadas, el origen O tiene por coordenada (0) y el punto A tiene por coordenada (1). El punto P con su coordenada (x) es la *representación geométrica* o *gráfica* del número real x, y la coordenada (x) es la *representación analítica* del punto P. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: $P(x)$.

Es importante hacer notar que la correspondencia establecida por el sistema coordenado lineal es *única*. Es decir, a cada número corresponde uno y solamente un punto sobre el eje, y a cada punto del eje correspode uno y solamente un número real.

Vamos a determinar ahora la longitud del segmento que une dos puntos dados cualesquiera, tales como $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ de la figura 3. En Geometría analítica, se dice que los puntos están dados cuando se conocen sus coordenadas. Por tanto, x_1 y x_2 son números conocidos. Por la relación (2) del Artículo 2, tenemos:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}.$$

Pero, $\overline{OP_1} = x_1$ y $\overline{OP_2} = x_2$. Luego,

$$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2,$$

de donde,

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

La longitud del segmento dirigido $\overline{P_2P_1}$, obtenida de $\overline{P_1P_2}$ por medio de la relación (1) del Artículo 2, es

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2.$$

En cualquier caso, la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final. Este resultado se enuncia como sigue:

TEOREMA 1. *En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo, restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.*

La *distancia* entre dos puntos se define como el valor numérico o valor *absoluto* de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si representamos la distancia por d, podemos escribir:

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = |x_2 - x_1|,$$

o también,

$$d = |\overline{P_2 P_1}| = |x_1 - x_2|.$$

Ejemplo. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(5)$ y $P_2(-3)$.

Solución. Por el teorema 1, las longitudes de los segmentos dirigidos son

$$\overline{P_1 P_2} = -3 - 5 = -8$$

y

$$\overline{P_2 P_1} = 5 - (-3) = 8$$

Entonces, para *cualquiera* de los dos segmentos dirigidos, la distancia está dada por

$$d = |-8| = |8| = 8.$$

4. Sistema coordenado en el plano. En un sistema coordenado lineal, cuyos puntos están restringidos a estar sobre una recta, el eje, es evidente que estamos extremadamente limitados en nuestra investigación analítica de propiedades geométricas. Así, por ejemplo, es imposible estudiar las propiedades de los puntos de una circunferencia. Para extender la utilidad del método analítico, consideraremos ahora un sistema coordenado en el cual un punto puede moverse en todas direcciones manteniéndose siempre en un plano. Este se llama *sistema coordenado-bidimensional* o *plano*, y es el sistema coordenado usado en la Geometría analítica plana.

El primer ejemplo que estudiaremos de uno de estos sistemas, y, además, el más importante, es el *sistema coordenado rectangular*, familiar al estudiante desde su estudio previo de Algebra y Trigonometría. Este sistema, indicado en la figura 4, consta de dos rectas dirigidas $X'X$ y $Y'Y$, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí. La recta $X'X$ se llama *eje X;* $Y'Y$ es el *eje Y;* y su punto de intersección O, el *origen*. Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* numerados tal como se indica en la figura 4. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha; la dirección positiva del eje Y, hacia arriba.

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular. En efecto, se traza PA perpendicular al eje X y PB perpendicular al eje Y. La longitud del segmento dirigido OA se representa por x y se llama *abscisa* de P; la longitud del segmento dirigido OB se representa por y y se llama *ordenada* de P. Los dos números reales, x y y, se llaman *coordenadas* de P y se representan por (x, y). Las abscisas medidas sobre el eje X a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas sobre Y arriba de O son positivas y abajo son negativas. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes están indicados en la figura 4.

Es evidente que a cada punto P del plano coordenado le corresponden uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíproca-

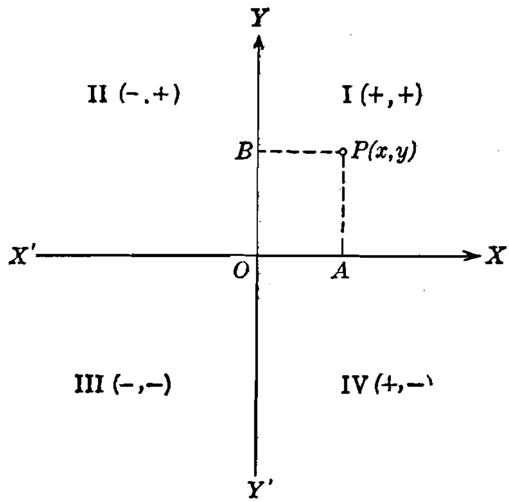

Fig. 4

mente, un par de coordenadas (x, y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado.

Dadas las coordenadas (x, y), $x \neq y$, quedan determinados dos puntos, uno de coordenadas (x, y) y otro de coordenadas (y, x) que son diferentes. De aquí que sea importante escribir las coordenadas en su propio orden, escribiendo la abscisa en el primer lugar y la ordenada en el segundo. Por esta razón un par de coordenadas en el plano se llama un par *ordenado* de números reales. En vista de nuestra discusión anterior, podemos decir que *el sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales*.

La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado* del punto. Por ejemplo, para trazar el punto $(-5, -6)$, señalaremos primero el punto A, sobre el eje X, que está 5 unidades a la izquierda de O; después, a partir de A, sobre una paralela al eje Y, mediremos seis unidades hacia abajo del eje X, obteniendo así al punto $P(-5, -6)$. La construcción está indicada en la figura 5, en la que se han trazado también los puntos $(2, 6)$, $(-6, 4)$ y $(4, -2)$.

El trazado de los puntos se facilita notablemente usando papel coordenado rectangular, dividido en cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes coordenados. La figura 5 es un modelo de papel

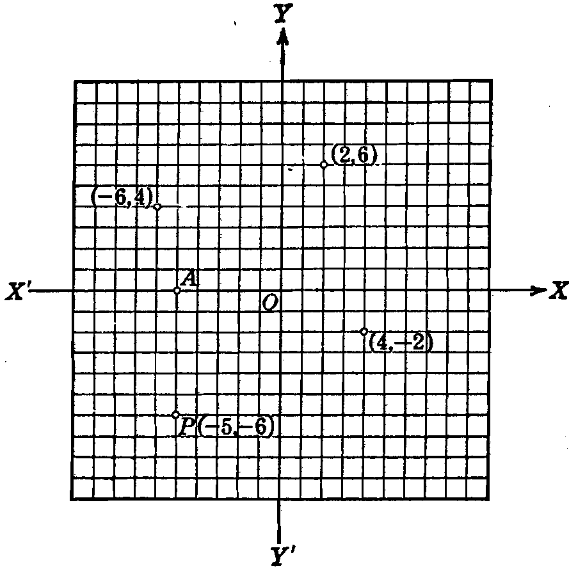

Fig. 5

de esta clase. Se recomienda al estudiante el empleo de papel coordenado milimetrado cuando se requiera un trazado de gran exactitud.

Si consideramos solamente aquellos puntos cuyas ordenadas son cero, veremos que todos ellos están sobre el eje X, y el sistema coordenado plano se reduce al sistema coordenado lineal. Por lo tanto, el sistema coordenado lineal es, simplemente, un caso especial del sistema plano.

Otro sistema plano que tendremos ocasión de usar es el *sistema de coordenadas polares*. Las coordenadas polares se estudiarán más adelante en un capítulo especial.

El lector deberá observar que en los sistemas coordenados que han sido estudiados, se establece una correspondencia entre los puntos y el conjunto de los números *reales*. No se ha hecho mención de los números *complejos* del Algebra. Como nuestros sistemas coordenados no especifican nada para los números complejos, no consideraremos tales números en nuestro estudio de la Geometría analítica.

Ejemplo. Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

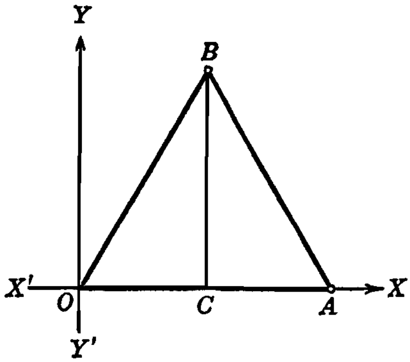

Fig. 6

Solución. Con referencia a los ejes coordenados, el triángulo está en la posición indicada en la figura 6. Como $\overline{OA} = a$, la abscisa del punto A es a. También, por estar A sobre el eje de las X, su ordenada es 0. Por tanto, las coordenadas del vértice A son $(a, 0)$.

Si trazamos la altura BC, perpendicular al lado OA, sabemos, por la Geometría elemental, que C es el punto medio de OA. Por tanto, la abscisa de C es $\frac{a}{2}$. Como BC es paralela al eje Y, la abscisa del punto B es también $\frac{a}{2}$. La ordenada de B se obtiene ahora muy fácilmente por el teorema de Pitágoras; dicha ordenada es

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Las coordenadas del vértice B son, pues, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

El área del triángulo (Apéndice IA, 1) es

$$K = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

EJERCICIOS. Grupo 1

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si A y B son dos puntos diferentes de una recta dirigida, demostrar que $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ y $\overline{AA} = \overline{BB} = 0$.

2. Demostrar que las relaciones (d), (e) y (f) son casos particulares de la relación (2) del Artículo 2.

3. Si A, B, C y D son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta dirigida, demostrar que, para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}.$$

4. Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (-5) y (6); (3) y (-7); (-8) y (-12).

5. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto. (Dos casos.)

6. En un sistema coordenado lineal, $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos dados de un segmento dirigido. Demostrar que la coordenada (x) de un punto P que divide a P_1P_2 en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ es

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

7. Haciendo $r = 1$ en la fórmula obtenida en el ejercicio 6, demostrar que la coordenada del punto medio de un segmento rectilíneo es la media aritmética de las coordenadas de sus puntos extremos.

8. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19).

9. Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

10. Los extremos de un segmento dirigido son los puntos $P_1(4)$ y $P_2(-2)$. Hallar la razón $\overline{P_2P} : \overline{PP_1}$ en que el punto $P(7)$ divide a este segmento.

11. Un cuadrado, de lado igual a $2a$, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

12. Tres vértices de un rectángulo son los puntos $(2, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

13. Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $(1, -2)$, $(4, -2)$, $(4, 2)$. Determinar las longitudes de los catetos, y después calcular el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

14. En el triángulo rectángulo del ejercicio 13, determinar primero los puntos medios de los catetos y, después, el punto medio de la hipotenusa.

15. Hallar la distancia del origen al punto (a, b).

16. Hallar la distancia entre los puntos $(6, 0)$ y $(0, -8)$.

17. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $(1, 3)$, $(7, 3)$, $(9, 8)$ y $(3, 8)$. Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.

18. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos.)

19. Demostrar que los puntos $(-5, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles, y calcular su área.

20. Demostrar que los puntos $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(8, 4)$ y $(5, 0)$ son los vértices de un rombo, y calcular su área.

5. Carácter de la Geometría analítica. La Geometría elemental, conocida ya del lector, se llama Geometría *pura* para distinguirla del presente estudio. Acabamos de ver que por medio de un sistema coordenado es posible obtener una correspondencia biunívoca entre puntos y números reales. Esto, como veremos, nos permitirá aplicar los métodos del Análisis a la Geometría, y de ahí el nombre de *Geometría analítica*. Al ir avanzando en nuestro estudio veremos, por ejemplo, cómo pueden usarse, ventajosamente, los métodos algebraicos en la resolución de problemas geométricos. Recíprocamente, los métodos de la Geometría analítica pueden usarse para obtener una representación geométrica de las ecuaciones y de las relaciones funcionales.

[redacted] de sistema coordenado, que caracteriza a la Geometría analítica, fué introducido por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596–1650). Por esta razón, la Geometría analítica se conoce también con el nombre de *Geometría cartesiana*. Por la parte que toma en la unificación de las diversas ramas de las matemáticas, la introducción de la Geometría analítica representa uno de los adelantos más importantes en el desarrollo de las matemáticas.

En Geometría pura, el estudiante recordará que, generalmente, era necesario aplicar un método especial o un artificio, a la solución de cada problema; en Geometría analítica, por el contrario, una gran variedad de problemas se pueden resolver muy fácilmente por medio de un procedimiento uniforme asociado con el uso de un sistema coordenado. El estudiante debe tener siempre presente que está siguiendo un curso de Geometría *analítica* y que la solución de un problema geométrico no se ha efectuado por Geometría *analítica* si no se ha empleado un sistema coordenado. Según esto, un buen plan para comenzar la solución de un problema es trazar un sistema de ejes coordenados propiamente designados. Esto es de particular importancia en los primeros pasos de la Geometría analítica, porque un defecto muy común del principiante es que si el problema que trata de resolver se le dificulta, está propenso a caer en los métodos de la Geometría pura. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para evitar esta tendencia y para adquirir el método y espíritu analítico lo más pronto posible [redacted]

6. Distancia entre dos puntos dados. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos dados cualesquiera (fig. 7). Vamos a determinar la distancia d entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P_1 P_2}|$. Por $P_1\,P_2$ tracemos las perpendiculares $P_1 A$ y $P_2 D$ a ambos ejes coordenados, como se indica en la figura, y sea E su punto de intersección. Consideremos el triángulo rectángulo $P_1 E P_2$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = \overline{P_1 P_2}^2 = \overline{P_2 E}^2 + \overline{EP_1}^2. \qquad (1)$$

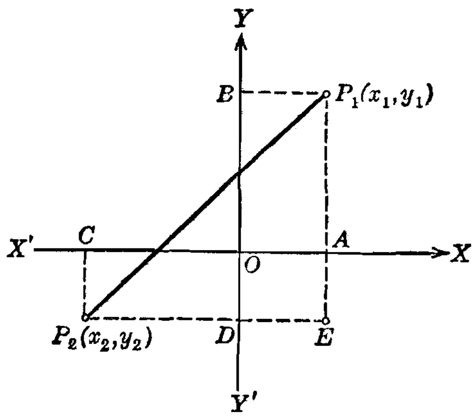

Fig. 7

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$, $D(0, y_2)$. Luego, por el teorema 1 (Art. 3) tenemos

$$\overline{P_2 E} = \overline{CA} = x_1 - x_2, \quad \overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este resultado se enuncia como sigue:

TEOREMA 2. *La distancia* d *entre dos puntos* $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ *está dada por la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

NOTAS. 1. En la demostración del teorema 2, no se hizo mención de los cuadrantes en que se encuentran los puntos P_1 y P_2. Según esto el resultado del teorema 2 es completamente general e independiente de la situación de los puntos P_1 y P_2. La posición de un punto en un cuadrante particular está determinada por los signos de sus coordenadas.

2. La distancia d es *positiva*, siendo P_1P_2 el valor numérico o *absoluto* de la longitud del segmento rectilíneo. Por esta razón no aparece en la fórmula ningún signo delante del radical. Debe entenderse, *por convenio*, que si no aparece ningún signo delante de la raíz cuadrada indicada de una cantidad, *se considera siempre que se trata del valor positivo*. Si se debe tomar la raíz cuadrada negativa, debe aparecer el signo menos delante del radical. Así, el valor positivo de la raíz cuadrada de una cantidad a se expresa por $\sqrt{a}$, el valor negativo por $-\sqrt{a}$, y *ambos* valores, el positivo y el negativo por $\pm\sqrt{a}$.

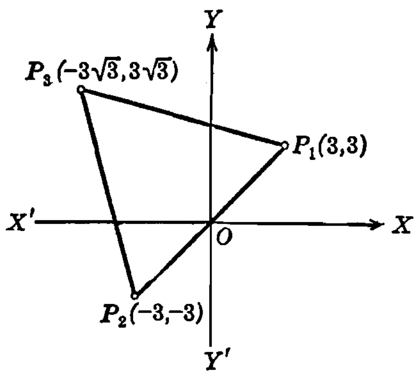

Fig. 8

Ejemplo. Demostrar que los puntos

$$P_1(3,\ 3),\quad P_2(-3,\ -3),\quad P_3(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$$

son vértices de un triángulo equilátero.

Solución. El triángulo del problema es el indicado en la figura 8. Por el teorema 2, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\overline{P_1P_2}| &= \sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2} = 6\sqrt{2},\\
|\overline{P_2P_3}| &= \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2+(-3-3\sqrt{3})^2}\\
&= \sqrt{(9-18\sqrt{3}+27)+(9+18\sqrt{3}+27)}\\
&= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2},\\
|\overline{P_3P_1}| &= \sqrt{(-3\sqrt{3}-3)^2+(3\sqrt{3}-3)^2} = 6\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Luego el triángulo es equilátero, ya que todos sus lados son de igual longitud.

7. División de un segmento en una razón dada.

TEOREMA 3. *Si* $P_1(x_1,\ y_1)$ *y* $P_2(x_2,\ y_2)$ *son los extremos de un segmento* P_1P_2, *las coordenadas* $(x,\ y)$ *de un punto* P *que divide a este segmento en la razón dada* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r},\quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r},\quad r \neq -1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por los puntos P_1, P, P_2, tracemos perpendiculares a los ejes coordenados, tal como se indica en la figura 9.

Por Geometría elemental, las tres rectas paralelas P_1A_1, PA y P_2A_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2. Por tanto, podemos escribir

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}. \qquad (1)$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje X son $A_1(x_1, 0)$, $A(x, 0)$, $A_2(x_2, 0)$. Por tanto, por el teorema 1, del Artículo 3, tenemos

$$\overline{A_1A} = x - x_1,$$
$$\overline{AA_2} = x_2 - x.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

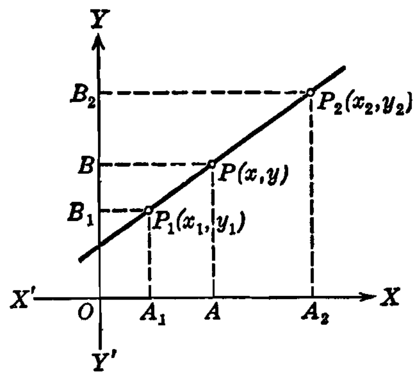

Fig. 9

Por un procedimiento semejante para las ordenadas, obtenemos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \qquad (2)$$

de donde,

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

En el caso particular en que P es el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, es $r = 1$, de manera que los resultados anteriores se reducen a

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Según esto tenemos el siguiente

COROLARIO. *Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *son*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

NOTAS. 1. En Geometría elemental, las relaciones (1) y (2) se escriben sin considerar el signo. En Geometría analítica, en cambio, las razones deben ser consideradas con su signo, ya que estamos tratando con segmentos rectilíneos dirigidos.

2. Al usar las fórmulas del teorema 3, debe cuidarse de que la sustitución de las coordenadas sea correcta. Por esta razón, frecuentemente es preferible no sustituir en estas fórmulas sino escribir directamente los valores de las razones, tal como los dan las fórmulas (1) y (2). Esto se muestra en el ejemplo que damos a continuación.

3. Si el punto de división P es externo al segmento dirigido P_1P_2, la razón r es negativa.

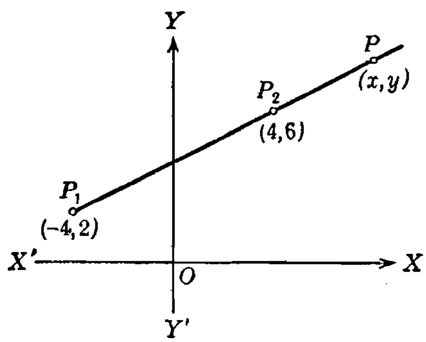

Fig. 10

Ejemplo. Si $P_1(-4, 2)$ y $P_2(4, 6)$ son los puntos extremos del segmento dirigido P_1P_2, hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = -3$.

Solución. Como la razón r es negativa, el punto de división P es externo, tal como se indica en la figura 10. Si aplicamos el teorema 3 directamente, obtenemos

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + (-3)4}{1 - 3} = 8,$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{2 + (-3)6}{1 - 3} = 8.$$

Si, como se sugiere en la nota 2 anterior, escribimos las razones directamente, obtenemos también

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - (-4)}{4 - x} = -3, \text{ de donde, } x = 8;$$

y

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{y - 2}{6 - y} = -3, \text{ de donde, } y = 8.$$

EJERCICIOS. Grupo 2

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $(-2, -1)$, $(2, 2)$, $(5, -2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

4. Demostrar que los tres puntos $(12, 1)$, $(-3, -2)$, $(2, -1)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta.

5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$, $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Los vértices de un triángulo son $A(3, 8)$, $B(2, -1)$ y $C(6, -1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

7. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(11, 6)$, $(9, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$. *Sugestión.* Usese la segunda fórmula del Apéndice IA, 1.

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones.)

10. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y) equidista de los dos puntos $(-3, 5)$, $(7, -9)$.

11. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$.

12. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2, 4)$ y $P_2(8, -4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$.

13. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$, y su punto medio es $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.

14. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7, 4)$ y $P_2(-1, -4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(1, -2)$ divide al segmento.

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2, 5)$, $(4, 2)$ y $(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

16. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, demostrar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

17. En el triángulo rectángulo del ejercicio 3, demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

18. Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero del ejercicio 1 forman un paralelogramo.

19. Los vértices de un triángulo son $(2, -1)$, $(-4, 7)$, $(8, 0)$. Hallar, para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demostrar que este punto es el mismo para cada una de las medianas y, por tanto, que las medianas concurren en un punto. Este punto se llama *baricentro* del triángulo.

20. En el triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), demostrar que las coordenadas del baricentro son

$$(\tfrac{1}{3}[x_1 + x_2 + x_3],\ \tfrac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3]).$$

Utilizar este resultado para comprobar el ejercicio 19.

8. Pendiente de una recta. Dos rectas al cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice (fig. 11). Por tanto, la expresión "el ángulo comprendido entre dos rectas" es ambigua, ya

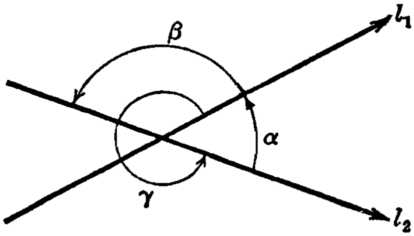

Fig. 11

que tal ángulo puede ser el α o bien su suplemento el β. Para hacer una distinción entre estos dos ángulos, consideramos que las rectas están dirigidas y luego establecemos la siguiente

DEFINICIÓN. Se llama *ángulo de dos rectas dirigidas* al formado por los dos lados que se alejan del vértice.

Así, por ejemplo, según esta definición, el ángulo que forman las rectas dirigidas l_1 y l_2 (fig. 11) es el ángulo α. Sin embargo, si la dirección de una de estas rectas, digamos l_2, se invierte, el ángulo formado por las dos rectas es el ángulo suplementario β.

Si l_1 y l_2 son paralelas, diremos que el ángulo comprendido entre ellas es de $0°$ cuando tienen la misma dirección, y de $180°$ cuando tienen direcciones opuestas.

NOTA. En la figura 11, teniendo las rectas sus direcciones marcadas, el ángulo $\gamma = 360° - \alpha$ también, según la definición 1, es el ángulo de las rectas l_1 y l_2. Este ángulo $\gamma > 180°$ se llama *ángulo cóncavo*. Siempre que hablemos de ángulo de dos rectas, sólo consideraremos ángulos $\leq 180°$.

DEFINICIÓN 2. Se llama *ángulo de inclinación* de una recta el formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba.

Así, de acuerdo con las definiciones 1 y 2, el ángulo de inclinación de la recta l (fig. 12) es α, y el de l' es α'. Evidentemente, α puede tener cualquier valor comprendido entre 0° y 180°; es decir, su intervalo de variación está dado por

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ. \qquad (1)$$

Para la mayor parte de los problemas de Geometría analítica, emplearemos más la tangente del ángulo de inclinación que el ángulo mismo. Según esto:

DEFINICIÓN 3. Se llama *pendiente* o *coeficiente angular* de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por tanto, podemos escribir

$$m = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

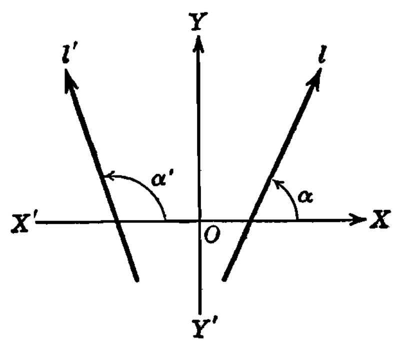

Fig. 12

Por (1) y (2) se ve que la pendiente puede tomar *todos* los valores reales. Si α es agudo, la pendiente es positiva, como para la recta l en la figura 12; si α' es obtuso, como para la recta l', la pendiente es negativa. Cualquier recta que coincida o sea paralela al eje Y será perpendicular al eje X, y su ángulo de inclinación será de 90°. Como $\operatorname{tg} 90^\circ$ no está definida, la pendiente de una recta paralela al eje Y no existe. Podemos establecer, por lo tanto, que *toda recta perpendicular al eje* X *no tiene pendiente*. El estudiante recordará, probablemente, la igualdad $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$, cuyo significado debe considerar muy cuidadosamente ya que ∞ no es un número. Esta igualdad es una manera simbólica de expresar que, a medida que el ángulo α se aproxima más y más a 90°, $\operatorname{tg} \alpha$ se hace y permanece mayor que cualquier número positivo por grande que se suponga.

TEOREMA 4. *Si* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es*

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \qquad (3)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la recta $P_1 P_2$ de la figura 13, determinada por los puntos P_1 y P_2, y sea α su ángulo de inclinación. Por P_1 y P_2 tracemos las perpendiculares $P_1 A_1$ y $P_2 A_2$ al eje X, y por P_2 tracemos una paralela al eje X que corte a $P_1 A_1$ en B. El ángulo $P_1 P_2 B = \alpha$, y, por Trigonometría, tendremos

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2 B}}. \tag{4}$$

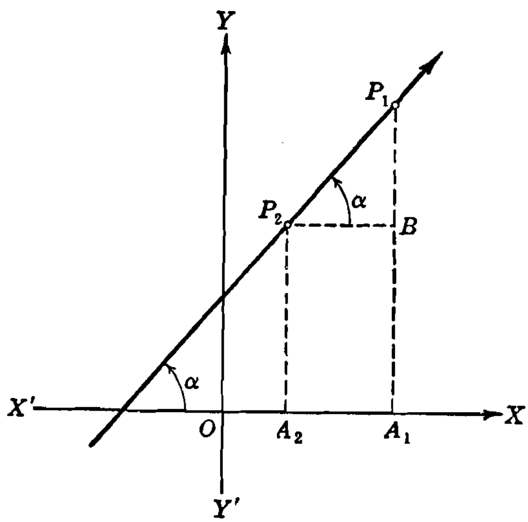

Fig. 13

Las coordenadas de los puntos A_1, A_2 y B son $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ y $B(x_1, y_2)$. Por tanto, por el teorema 1, Art. 3, tenemos

$$\overline{BP_1} = y_1 - y_2, \quad \overline{P_2 B} = \overline{A_2 A_1} = x_1 - x_2.$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos lo que se quería demostrar.

NOTAS. 1. El valor de m dado por la fórmula (3) no está definido analíticamente para $x_1 = x_2$. En este caso, la interpretación geométrica es que una recta determinada por dos puntos diferentes con abscisas iguales es paralela al eje Y y, por tanto, como se anotó anteriormente, no tiene pendiente.

2. El orden en que se toman las coordenadas en (3) no tiene importancia, ya que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. El estudiante debe evitar, en cambio, el error muy frecuente de tomar las ordenadas en un orden y las abscisas en el orden contrario, ya que esto cambia el signo de m.

Ejemplo. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1, 6), (5, − 2).

Solución. Esta recta se muestra en la figura 14. Por el teorema 4 tenemos, para la pendiente,

$$m = \frac{6-(-2)}{1-5} = \frac{8}{-4} = -2.$$

De la tabla B del Apéndice II tenemos, para ángulo de inclinación,

$$\alpha = \text{arc tg } (-2) = 116^\circ 34'.$$

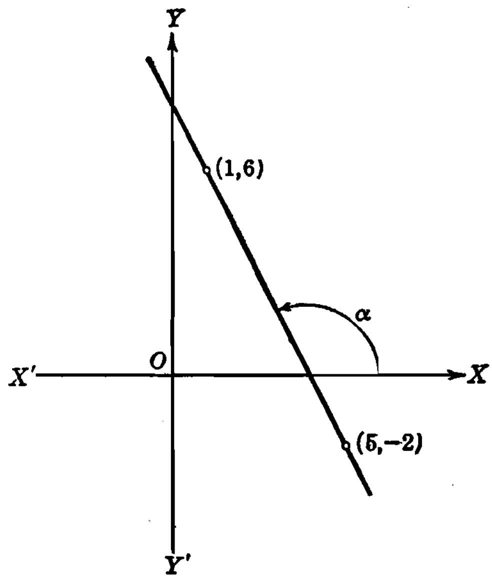

Fig. 14

9. Significado de la frase "condición necesaria y suficiente". En este artículo nos apartaremos momentáneamente de nuestro estudio de la Geometría analítica para considerar el significado de una expresión que se presenta frecuentemente en Matemáticas. La expresión particular a que nos referimos es "una condición necesaria y suficiente". Veamos primero su significado con un ejemplo.

Consideremos el sencillo teorema siguiente de la Geometría elemental:

Si un triángulo es isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Este teorema establece que si un triángulo es isósceles *necesariamente* se verifica que los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Por tanto, podemos decir que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición necesaria* para que el triángulo sea isósceles.

Pero el *recíproco* de este teorema también es verdadero, a saber:

Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos son también iguales, y el triángulo es isósceles.

Este teorema establece que la existencia de dos ángulos iguales es *suficiente* para que un triángulo sea isósceles. De ahí deducimos que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición suficiente* para que el triángulo sea isósceles.

Podemos entonces combinar ambos teoremas, directo y recíproco, en el siguiente enunciado único:

Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos sean iguales.

Una frase de uso frecuente en lugar de "una condición necesaria y suficiente" es "*si y solamente si*". Así el enunciado precedente puede escribirse:

Un triángulo es isósceles ***si y solamente si*** dos de sus ángulos son iguales.

De una manera más general, si la hipótesis A de un teorema implica la verdad de una tesis B, entonces B es una *condición necesaria* para A. Por otra parte, si, recíprocamente, B implica la verdad de A, entonces B es una *condición suficiente* para A

Debemos hacer notar, sin embargo, que una condición puede ser necesaria sin ser suficiente, y viceversa. Por ejemplo, para que un triángulo sea equilátero, es *necesario* que sea isósceles; pero la condición no es suficiente, ya que un triángulo puede ser isósceles sin ser equilátero.

Puede haber más de una condición necesaria y suficiente para la verdad de un teorema. Así, una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es que sea equiángulo. Y otra condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es la igualdad de sus tres alturas.

A medida que vayamos avanzando en nuestro estudio de la Geometría analítica, tendremos ocasiones frecuentes de deducir condiciones necesarias y suficientes de naturaleza analítica para diversas propiedades geométricas.

10. Angulo de dos rectas. Consideremos (fig. 15) las dos rectas l_1 y l_2. Sea C su punto de intersección y A y B los puntos en que cortan al eje X. Sean θ_1 y θ_2 los dos ángulos suplementarios que forman. Cada uno de estos ángulos, θ_1 y θ_2, se miden, tal como indican las flechas curvadas, en *sentido contrario al de las manecillas de un reloj*, o sea, en *sentido positivo*, como en Trigonometría. La recta a partir de la cual se mide el ángulo se llama *recta inicial;* la recta hacia la cual se dirige el ángulo se llama *recta final*. Las pendientes de las rectas inicial y final se llaman *pendiente inicial* y *pendiente final*, respectivamente.

Designemos por α_1 el ángulo de inclinación de la recta l_1 y por m_1 la pendiente; para la recta l_2, sean α_2 y m_2 el ángulo de inclinación y la pendiente, respectivamente. Para el ángulo θ_1, la recta inicial es l_1, la pendiente inicial es m_1, la recta final es l_2 y la pendiente final es m_2; para el ángulo θ_2, la recta y la pendiente iniciales, y la

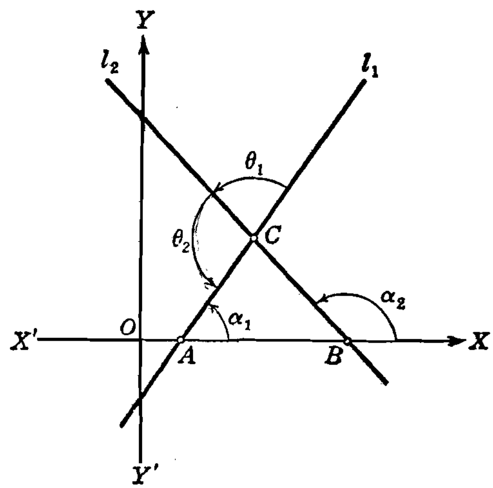

Fig. 15

recta y pendiente finales, están dadas por l_2, m_2, l_1 y m_1, respectivamente. Vamos ahora a calcular cada uno de los ángulos θ_1 y θ_2 cuando se conocen las pendientes m_1 y m_2 de los lados que forman estos ángulos.

Por Geometría elemental, un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Por tanto, en el triángulo ABC, siendo $\theta_1 =$ ángulo ACB, tendremos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1,$$

o sea,

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \qquad (1)$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de (1), tenemos (Apéndice IC, 6)

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}. \qquad (2)$$

Pero $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ y $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Luego, de (2),

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad (3)$$

Para el triángulo ABC, con θ_2 por ángulo exterior, tenemos

$$\theta_2 = \alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2).$$

Tomando tangentes de ambos miembros, obtenemos (Apéndice IC, 6 y 3)

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha_2)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha_2)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

de donde obtenemos el resultado buscado:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \qquad (4)$$

Comparando (3) y (4), vemos que solamente difieren en el signo, lo cual era de esperarse, ya que θ_1 y θ_2 son ángulos suplementarios. Para calcular un ángulo especificado es esencial saber si se debe usar la fórmula (3) o la (4), es decir, debemos tener la seguridad de que estamos calculando un ángulo particular o su suplemento. Esto se resuelve muy sencillamente si observamos que, en *ambos resultados*, el numerador se obtiene *restando la pendiente inicial de la pendiente final*. De acuerdo con esto tenemos el siguiente

TEOREMA 5. *Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula*

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1, \qquad (5)$$

en donde m_1 *es la pendiente inicial y* m_2 *la pendiente final correspondiente al ángulo* θ.

NOTA. Si $m_1 m_2 = -1$, $\operatorname{tg} \theta$ no está definida por la fórmula (5). Este caso será considerado más adelante en el corolario 2.

Del teorema 5 podemos deducir las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, conocidas sus pendientes.

En efecto, según vimos en el Artículo 8, si dos rectas son paralelas, el ángulo formado por ellas es 0° ó 180°. En cualquiera de los dos casos, la fórmula (5) se reduce a

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

de donde, $m_1 = m_2$; es decir, las pendientes son iguales.

Recíprocamente, si $m_1 = m_2$, (5) se reduce a

$$\operatorname{tg} \theta = 0,$$

de donde se deduce que θ es igual a $0°$ ó $180°$, y, en consecuencia, los rectas son paralelas. Por tanto, de acuerdo con el Artículo 9, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas es que sus pendientes sean iguales. De aquí se deduce el siguiente corolario de gran importancia práctica:

COROLARIO 1. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.*

Si dos rectas son perpendiculares, el ángulo comprendido entre ellas es de $90°$. En este caso, como no puede usarse la relación (5) para hallar el valor de θ, escribiremos (5) en la forma

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}. \qquad (6)$$

Como $\operatorname{ctg} 90° = 0$, para que la fracción sea cero debe anularse el numerador, es decir,

$$0 = 1 + m_1 m_2,$$

de donde, $m_1 m_2 = -1$.

Recíprocamente, si $m_1 m_2 = -1$, la fórmula (6) se anula y, por lo tanto,

$$\operatorname{ctg} \theta = 0,$$

de donde, $\theta = 90°$, y las rectas son perpendiculares. Según esto tenemos el

COROLARIO 2. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a* -1.

NOTA. El corolario 2 se enuncia frecuentemente en la siguiente forma equivalente: Dos rectas son perpendiculares entre sí si la pendiente de una de las rectas es recíproca y de signo contrario de la pendiente de la otra recta, o, más brevemente, si las pendientes son negativamente recíprocas.

Ejemplo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(10, 7)$ y $D(7, 3)$.

Solución. El primer paso es indicar la dirección positiva del ángulo que se busca que, en este caso, es el ángulo C de la figura 16. Entonces el lado BC da la pendiente inicial m_1 y el lado CD la pendiente final m_2.

Por el teorema 4 del Artículo 8 tenemos para las pendientes

$$m_1 = \frac{7-5}{10-1} = \frac{2}{9}, \quad m_2 = \frac{7-3}{10-7} = \frac{4}{3}.$$

Después, por el teorema 5, tenemos

$$\operatorname{tg} C = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{9}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{36 - 6}{27 + 8} = \frac{6}{7},$$

de donde, $C = 40° 36'$.

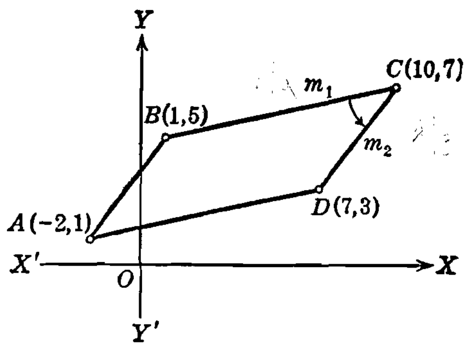

Fig. 16

EJERCICIOS. Grupo 3

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Dígase el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) El eje Y. *c*) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la derecha. *d*) Una recta paralela al eje X v dirigida hacia la izquierda.

2. Dígase la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) Una recta paralela al eje X y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda. *c*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante I. *d*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II

3. Demostrar el teorema 4 del Artículo 8, empleando una figura en la cual el ángulo de inclinación α sea obtuso.

4. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(7, -3)$.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ y $(4, 5)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

6. Demostrar, por medio de pendientes, que los puntos $(9, 2)$, $(11, 6)$, $(3, 5)$ y $(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2, 7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B?

9. Tres de los vértices de un paralelogramo son $(-1, 4)$, $(1, -1)$ y $(6, 1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿cuál es su abscisa?

10. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$. Comprobar los resultados.

11. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

12. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$ y $(6, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

13. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2, 5)$, $(7, 3)$, $(6, 1)$ y $(0, 0)$. Comprobar los resultados.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $135°$. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

15. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $45°$. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

16. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, -3)$, $B(3, 3)$ y $C(6, -1)$ empleando el seno del ángulo BAC. *Sugestión.* Ver Apéndice IC, 12.

17. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos $(6, -2)$, $(2, 1)$ y $(-2, 4)$ son colineales.

18. Una recta pasa por los dos puntos $(-2, -3)$, $(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

19. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los dos puntos $(2, -1)$, $(7, 3)$.

20. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

21. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 5)$ y $(4, 1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1, 1)$ y $(3, 7)$.

22. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7, 1)$ y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

23. Demostrar que los tres puntos $(2, 5)$, $(8, -1)$ y $(-2, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

24. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

25. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 9)$ y $(6, 5)$ son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

11. Demostración de teoremas geométricos por el método analítico. Con los resultados obtenidos en este capítulo es posible demostrar muy fácilmente muchos teoremas de la Geometría elemental por los métodos de la Geometría analítica. El estudiante comprenderá el alcance de la Geometría analítica comparando la demostración analítica de un teorema con la demostración del mismo teorema dada en Geometría elemental.

En relación con la demostración analítica de un teorema, son necesarias ciertas precauciones. Como en la demostración se emplea un sistema coordenado, es muy útil construir la figura de manera que se facilite la demostración. Una figura debe colocarse siempre en la posición más simple, es decir, en una posición tal que las coordenadas de los puntos de la figura simplifiquen lo más posible los cálculos algebraicos. Por ejemplo, en un teorema relativo a un triángulo cualquiera, la figura puede suponerse tal como se indica en la figura 17 (a), teniendo los vértices las coordenadas que se indican. Pero es más sencillo suponer el triángulo en la posición indicada en la figura 17 (b); en efecto, para esta posición solamente tenemos tres cantidades, a, b y c, que considerar, mientras que si consideramos

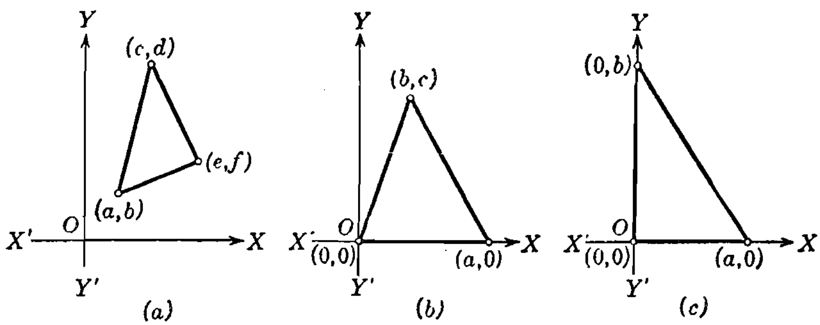

Fig. 17

el triángulo dado en la figura 17 (a) serán seis las cantidades que entrarán en nuestros cálculos. Una posición análoga a la dada en la figura 17 (b) es aquella en que ningún vértice está en el origen, pero un vértice está sobre uno de los ejes coordenados y los otros dos están sobre el otro eje coordenado. El estudiante dibujará las figuras correspondientes a este caso.

Por afán de simplificación no se debe caer, sin embargo, en el extremo opuesto y situar la figura de tal manera que el teorema quede restringido. Por ejemplo, las coordenadas para los vértices del triángulo de la figura 17 (c) contienen solamente dos cantidades a y b, pero esta figura es el caso especial de un triángulo rectángulo y no serviría para la demostración de un teorema relativo a un triángulo cualquiera. También es muy útil el usar letras y no números para las coordenadas de los puntos.

Como primer paso en la demostración analítica de un teorema, se debe dibujar un sistema de ejes coordenados y, después, colocar la figura en una de las posiciones más simples, sin particularizar el teorema, tal como se explicó en el párrafo anterior. A continuación, todos los puntos comprendidos por el teorema deberán designarse por coordenadas apropiadas marcadas sobre la figura. El procedimiento a seguir después de esto depende de la propiedad o propiedades particulares que van a demostrarse y se comprenderá mejor por medio de ejemplos.

Ejemplo 1. Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

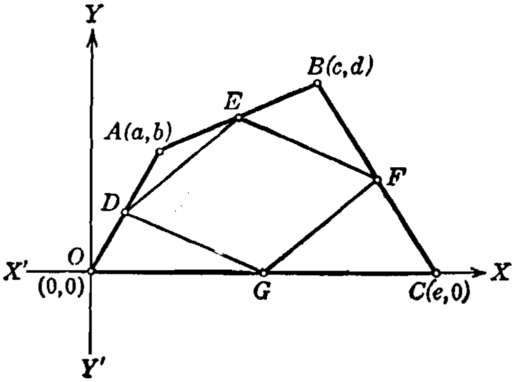

Fig. 18

Demostración. Una de las posiciones más simples para un cuadrilátero cualquiera es la mostrada en la figura 18. Sean D, E, F y G los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero $OABC$. Tenemos que demostrar que el cuadrilátero $DEFG$ es un paralelogramo. Esto sugiere la obtención de las pendientes de los lados de $DEFG$. Estas pendientes se obtienen muy fácilmente siempre que se conozcan las coordenadas de los puntos D, E, F y G. Para calcular estas coordenadas observemos que, por ser los puntos medios de los lados del cuadrilátero dado, bastará aplicar las fórmulas del punto medio de un segmento. Según esto, la obtención de las coordenadas será el punto de partida de la demostración.

Por el corolario del teorema 3 del Artículo 7, tenemos, para las coordenadas de los puntos medios:

$$D:\quad \left(\frac{0+a}{2},\ \frac{0+b}{2}\right),\quad \text{o sea,}\quad \left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right),$$

$$E:\quad \left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right).$$

$$F:\quad \left(\frac{c+e}{2},\ \frac{d+0}{2}\right),\quad \text{o sea,}\quad \left(\frac{c+e}{2},\ \frac{d}{2}\right),$$

$$G:\quad \left(\frac{0+e}{2},\ \frac{0+0}{2}\right),\quad \text{o sea,}\quad \left(\frac{e}{2},\ 0\right).$$

Por el teorema 4, Artículo 8, tenemos, para las pendientes de los lados de $DEFG$:

$$\text{Pendiente de } DE = \frac{\frac{b}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{a+c}{2}} = \frac{d}{c};$$

$$\text{Pendiente de } EF = \frac{\frac{b+d}{2} - \frac{d}{2}}{\frac{a+c}{2} - \frac{c+e}{2}} = \frac{b}{a-e};$$

$$\text{Pendiente de } FG = \frac{\frac{d}{2} - 0}{\frac{c+e}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{d}{c};$$

$$\text{Pendiente de } GD = \frac{\frac{b}{2} - 0}{\frac{a}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{b}{a-e}.$$

Siendo idénticas las pendientes de DE y FG, estos dos lados son paralelos, según el corolario 1 del teorema 5, Artículo 10. Análogamente, los lados EF y DG son paralelos. Por tanto, la figura $DEFG$ es un paralelogramo, y el teorema está demostrado.

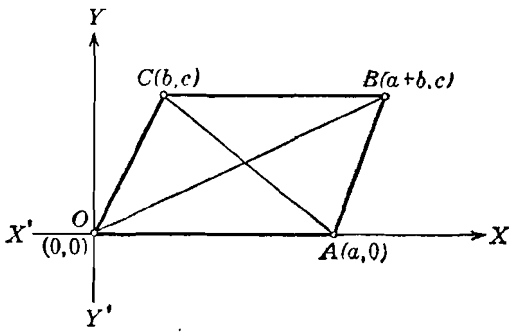

Fig. 19

Ejemplo 2. Demostrar analíticamente que, si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.

Demostración. Una de las posiciones más sencillas para un paralelogramo cualquiera es la indicada en la figura 19. Podemos entonces asignar a los vertices A y C sus coordenadas como está indicado. Como $OABC$ es un paralelogramo, el lado BC es paralelo e igual al lado OA. Luego, la ordenada de B es igual a la ordenada de C, y la abscisa de B es a unidades mayor que la abscisa de C. Todo esto lo indicamos analíticamente asignando las coordenadas $(a + b,\ c)$ al vértice B.

Por hipótesis, las diagonales OB y AC son perpendiculares entre sí. Según el corolario 2 del teorema 5 del Artículo 10, este hecho se expresa, analíticamente, por la relación

$$\frac{c}{a+b} \cdot \frac{c}{b-a} = -1,$$

de donde,

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ y } a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Pero a es la longitud del lado OA, y, por el teorema 2, Artículo 6, $\sqrt{b^2+c^2}$ es la longitud del lado OC. Por tanto, por ser iguales dos lados adyacentes de $OABC$ el paralelogramo es un rombo, como se quería demostrar.

EJERCICIOS. Grupo 4

Los teoremas enunciados en los siguientes ejercicios deben demostrarse *analíticamente*. Para cada ejercicio dibújese una figura colocada, con respecto a los ejes coordenados, de manera que facilite la demostración.

1. Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

2. Enunciar y demostrar el teorema recíproco del anterior.

3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

4. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

5. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

6. Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

7. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 6.

8. Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un rectángulo.

9. Las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

10. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 9.

11. Los dos segmentos que se obtienen uniendo dos vértices opuestos de un paralelogramo con los puntos medios de dos lados opuestos son iguales y paralelos.

12. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a su semisuma.

13. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de los lados paralelos.

14. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

15. Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan entre sí.

16 Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados contiguos de un rectángulo forman un rombo,

17. Los segmentos que unen los puntos medios de cada par de lados contiguos de un rombo forman un rectángulo.

18. Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

19. Los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales son los vértices de un paralelogramo.

20. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras.

21. El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y el que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero se bisecan entre sí.

22. El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca a ambas diagonales.

23. La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto de un plano a dos vértices opuestos de cualquier rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los otros dos vértices.

24. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 23.

25. Si O, A, B y C son los vértices sucesivos de un paralelogramo, y D y E los puntos medios de los lados AO y BC, respectivamente, los segmentos DB y OE trisecan a la diagonal AC.

12. Resumen de fórmulas. A intervalos apropiados el estudiante debe construir tablas que comprendan un sumario de los resultados obtenidos. En tales tablas se apreciará a simple vista no solamente las relaciones importantes sino también algunas analogías o propiedades comunes; también servirán para reducir a un mínimo los resultados que deben aprenderse de memoria. Como ejemplo, presentamos a continuación un resumen, en forma de tabla, de los principales resultados obtenidos en este capítulo. El estudiante debe tener estos resultados claramente definidos en su mente, y, en particular, debe notar el paralelismo entre la condición geométrica por una parte y su representación analítica por otra.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Longitud P_1P_2 de un segmento de recta dirigido, $\overline{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto final P_2.	
P_1P_2 coincidiendo con el eje X: $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$. P_1P_2 paralelo al eje X: $P_1(x_1, y)$, $P_2(x_2, y)$, $y \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$.
P_1P_2 coincidiendo con el eje Y: $P_1(0, y_1)$, $P_2(0, y_2)$. $\overline{P_1P_2}$ paralelo al eje Y; $P_1(x, y_1)$, $P_2(x, y_2)$, $x \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$.
Distancia d entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Coordenadas (x, y) del punto P que divide al segmento rectilíneo dirigido P_1P_2, con puntos extremos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$.	$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} \\ y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r} \end{array}\right\} r \neq -1.$
Coordenadas (x, y) del punto medio del segmento dirigido, P_1P_2 cuyos extremos dados son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}.$
Pendiente m de la recta que pasa por los dos puntos dados diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2.$
Angulo θ formado por dos rectas con pendiente inicial m_1 y pendiente final m_2.	$\operatorname{tg} \theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}, \quad m_1m_2 \neq -1.$
Condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1 = m_2.$
Condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1m_2 = -1.$

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

13. Dos problemas fundamentales de la Geometría analítica. En este capítulo haremos un estudio preliminar de *dos problemas fundamentales* de la Geometría analítica.

I. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.

II. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

El lector observará que estos problemas son esencialmente inversos entre sí. Estrictamente hablando, sin embargo, ambos problemas están tan estrechamente relacionados que constituyen juntos el problema fundamental de toda la Geometría analítica. Por ejemplo, veremos más adelante que, después de obtener la ecuación para una condición geométrica dada, es posible, frecuentemente, determinar por un estudio de esta ecuación posteriores características geométricas y propiedades para la condición dada. Nuestro propósito al considerar inicialmente separados los dos problemas no es de mucha necesidad sino, más bien, de conveniencia; de esta manera tenemos que enfocar nuestra atención sobre un número menor de ideas a la vez.

14. Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación. Supongamos que se nos da una ecuación de dos variables, x y y, que podemos escribir, brevemente, en la forma

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

En general, hay un número infinito de pares de valores de x y y que satisfacen esta ecuación. Cada uno de tales pares de valores *reales* se toma como las *coordenadas* (x, y) *de un punto en el plano*. Este convenio es la base de la siguiente definición:

Definición 1. El conjunto de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación (1), se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, su *lugar geométrico*.

Otro concepto importante está dado por la

Definición 2. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) *pertenece a la gráfica de la ecuación*.

No debe insistirse mucho en aquello de que *solamente* aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación pertenecen a su lugar geométrico. Lo importante es que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Esto es, evidentemente, el enunciado de una condición necesaria y suficiente (Art. 9). Como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

Como ejemplo de las notas precedentes consideremos la ecuación

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \tag{2}$$

Dando diversos valores a x y calculando los valores correspondientes de y, obtenemos los pares de valores que figuran en la tabla. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, nos permite trazar varios puntos, tal como se muestra en la figura 20.

En Algebra se estudia el trazado de gráficas del tipo (2). El procedimiento consiste en trazar un cierto número de puntos y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos. tal como está indicado en la figura 20. Pero, al hacer esto, se supone que la gráfica entre dos puntos sucesivos cualesquiera tiene la forma de la curva continua que se dibuja uniendo los puntos. Aunque esto es verdadero para la gráfica particular que estamos considerando, no es verdadero para las gráficas de todas las ecuaciones. Por tanto, bajo este supuesto, podemos introducir muchos errores en el trazado de la gráfica *entre* dos de sus puntos. Para evitar errores de este tipo, debemos hacer una investigación preliminar de la ecuación para ciertas características *antes* de proceder al trazado de la curva. Esto se llama *discutir la ecuación* y se describirá en los artículos que siguen inmediatamente al presente.

El lector no debe creer que toda ecuación del tipo (1) tiene, necesariamente, una gráfica. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \tag{3}$$