14. Desde un punto P, se trazan tangentes a las circunferencias

$$C_1: \quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad C_2: \quad x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0.$$

Si la longitud de la tangente trazada a C_1 es siempre igual al doble de la longitud de la tangente trazada a C_2, hallar y construir el lugar geométrico de P.

15. Un punto P se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las dos rectas $3x - y + 4 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2. Hallar, identificar y trazar el lugar geométrico de P.

16. Desde un punto fijo de una circunferencia dada se trazan cuerdas. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

17. Se han trazado dos tangentes a una circunferencia, paralelas entre sí, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro son perpendiculares entre sí.

18. Desde un punto exterior P, se trazan una tangente y una secante a una circunferencia dada, siendo A y B los puntos de intersección de la secante con la circunferencia. Demostrar que la longitud de la tangente es media proporcional entre la longitud $\overline{PB}$ de la secante y la longitud $\overline{PA}$ de su segmento externo.

19. Por medio del teorema del ejercicio 18, resolver el ejercicio 35 del grupo 16.

Ver Pag 72

20. Demostrar que si desde cualquier punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo, se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, los pies de estas perpendiculares son colineales. La recta que determinan se llama *recta de Simpson para el punto* P.

21. Demostrar que el punto $P(7, 3)$ está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, y hallar la ecuación de la recta de Simpson para el punto P.

22. Demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 20; es decir, demostrar que, si el punto P se mueve de tal manera que los pies de las perpendiculares bajadas desde él a los lados de un triángulo cualquiera son colineales, el lugar geométrico de P es la circunferencia circunscrita al triángulo.

23. Demostrar que en un triángulo cualquiera los pies de las alturas, los pies de las medianas, y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro (punto de intersección de las alturas) a los vértices son concíclicos. Esta circunferencia se llama con toda propiedad la *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo.

24. Hallar la ecuación de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $(3, 7)$, $(1, -1)$ y $(7, 3)$ obteniendo la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, demostrando que los otros seis puntos están sobre la circunferencia.

25. Demostrar que en un triángulo cualquiera el centro de la circunferencia de los nueve puntos está sobre la recta de Euler (ver el ejercicio 26 del grupo 10).

Pag 72

CAPITULO V

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

47. Introducción. Uno de los objetivos principales de la Geometría analítica es la determinación de las propiedades de las diversas figuras geométricas. Apoyándonos en algunos de los conceptos fundamentales hemos hecho ya un estudio detallado de la recta y la circunferencia. En adelante continuaremos estas investigaciones con referencia a otras curvas. Encontraremos, sin embargo, que, a medida que progresemos en nuestro estudio, las ecuaciones de las curvas se van haciendo más y más difíciles de analizar; por esto, se hace necesario en algunas ocasiones introducir ciertos artificios con el fin de facilitar el estudio de estas curvas. Uno de estos artificios, que nos permite simplificar las ecuaciones de muchas curvas, consiste en la transformación de coordenadas.

48. Transformaciones. Una transformación es el proceso que consiste en cambiar una relación, expresión o figura en otra. El estudiante ya ha encontrado este término en su estudio de Algebra y Trigonometría. Así, podemos transformar una ecuación algebraica en otra ecuación cada una de cuyas raíces sea el triple de la raíz correspondiente de la ecuación dada; o podemos transformar una expresión trigonométrica en otra usando las relaciones trigonométricas fundamentales.

Definición. Una *transformación* es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada.

Analíticamente, la ley se expresa por una o más ecuaciones llamadas *ecuaciones de transformación*.

49. Transformación de coordenadas. Consideremos una circunferencia de radio r cuya ecuación está dada en la forma ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2, \tag{1}$$

siendo las coordenadas (h, k) del centro O' diferentes de cero (figura 65). Si esta circunferencia, sin cambiar ninguna de sus características, se coloca con su centro en el origen O, su ecuación toma la forma más simple, o forma canónica,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pero se puede obtener lo mismo sin mover la figura. En vez de llevar la circunferencia a que su centro coincida con el origen, podemos mover los ejes coordenados paralelamente a sí mismos, respectivamente, en el plano coordenado, de manera que el origen O coincida con el centro $O'(h, k)$ de la circunferencia y los ejes coordenados tomen las posiciones paralelas designadas por los nuevos ejes X' y Y' en la figura 65. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia. Las coordenadas de P referido a los ejes originales X y Y son (x, y), pero son diferentes, evidentemente, si se le refiere a los nuevos ejes X' y Y'. Designemos las nuevas coordenadas de P por (x', y'). Entonces la ecuación de la circunferencia referida al nuevo sistema de ejes está dada por la simple forma canónica

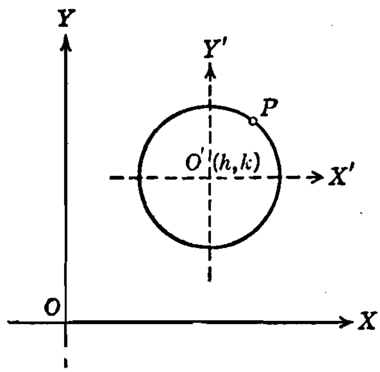

Fig. 65

$$x'^2 + y'^2 = r^2. \qquad (2)$$

Vemos entonces, que moviendo los ejes coordenados paralelamente a sí mismos, hemos *transformado las coordenadas* (x, y) de un punto cualquiera de la circunferencia en las coordenadas (x', y') y como resultado hemos transformado la ecuación (1) en la forma más simple (2). La operación de mover los ejes coordenados en el plano coordenado a una posición diferente, de manera que los nuevos ejes sean, respectivamente, paralelos a los ejes primitivos, y dirigidos en el mismo sentido, se llama *traslación de los ejes coordenados*.

Veremos más adelante (Art. 51) que algunas ecuaciones pueden transformarse también en ecuaciones de forma más simple por una rotación de los ejes coordenados en torno de su origen como punto fijo.

NOTA. En las figuras de los capítulos precedentes hemos designado cada uno de los ejes coordenados por dos letras, el eje X por XX' y el eje Y por YY'. Con el fin de evitar confusión más adelante, usaremos, en general, solamente una letra para cada uno de los ejes coordenados, la letra X para el eje X original y la letra Y para el eje Y original. Reservaremos las letras X', Y', X'', Y'', para los nuevos ejes coordenados obtenidos por traslación o rotación. Esta nueva convención ya ha sido adoptada en la figura 65.

50. Traslación de los ejes coordenados. Para simplificar las ecuaciones, mediante traslación de los ejes coordenados, se requiere el siguiente teorema :

TEOREMA 1. *Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen* O' (h, k), *y si las coordenadas de cualquier punto* P *antes y después de la traslación son* (x, y) *y* (x', y'), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son*

$$x = x' + h,$$
$$y = y' + k.$$

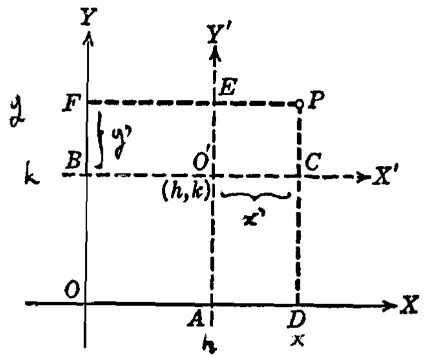

Fig. 66

DEMOSTRACIÓN. Sean (fig. 66) X y Y los ejes primitivos y X' y Y' los nuevos ejes, y sean (h, k) las coordenadas del nuevo origen O' con referencia al sistema original. Desde el punto P, trazamos perpendiculares a ambos sistemas de ejes, y prolongamos los nuevos ejes hasta que corten a los originales, tal como aparece en la figura.

Usando la relación fundamental para segmentos rectilíneos dirigidos, dada en el Artículo 2, tenemos, inmediatamente, de la figura,

$$x = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{O'C} = h + x'.$$

Análogamente,

$$y = \overline{OF} = \overline{OB} + \overline{BF} = \overline{OB} + \overline{O'E} = k + y'.$$

Ejemplo 1. Transformar la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0 \qquad (1)$$

trasladando los ejes coordenados al nuevo origen (1, 2). Trazar el lugar geométrico, y los dos sistemas de ejes.

Solución. Por el teorema 1, las ecuaciones de transformación son

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2.$$

Si sustituímos estos valores de x y y en la ecuación (1), obtenemos

$$(x' + 1)^3 - 3(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 + 3(x' + 1) + 4(y' + 2) - 5 = 0.$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación, obtenemos la ecuación transformada buscada

$$x'^3 - y'^2 = 0. \qquad (2)$$

Por los métodos estudiados en el Artículo 19, podemos fácilmente (fig. 67) trazar el lugar geométrico de la ecuación (2) con respecto a los nuevos ejes X' y Y'. El lector reconocerá este lugar geométrico como la parábola semicúbica (Art. 17). Debe observarse que la figura es también la gráfica de la ecuación (1) referida a los ejes originales X y Y. Evidentemente que es mucho más fácil trazar el lugar geométrico usando la ecuación (2) que usando la (1).

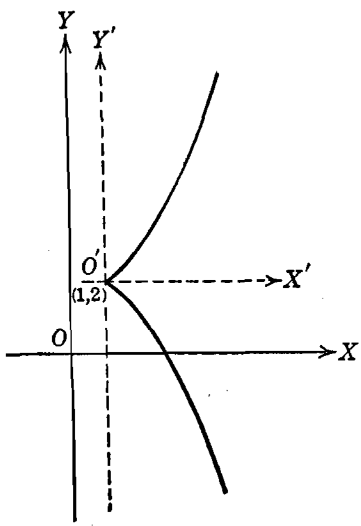

Fig. 67

En el ejemplo 1, se especificó el nuevo origen. Usualmente, sin embargo, no se dan las coordenadas del nuevo origen, sino que deben ser determinadas. El procedimiento a seguir en tal caso está indicado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Por una traslación de los ejes coordenados, transformar la ecuación

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0 \qquad (3)$$

en otra ecuación que carezca de términos de primer grado. Trazar su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. En este caso particular podemos usar dos métodos diferentes, siendo el primero el más general.

Primer método. Si sustituímos en la ecuación (3) los valores de x y y dados por las ecuaciones de transformación en el teorema 1, obtenemos la ecuación transformada

$$(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 8(y' + k) + 1 = 0,$$

la cual, después de desarrollar y agrupar términos semejantes, toma la forma

$$x'^2 - 4y'^2 + (2h + 6)x' - (8k - 8)y' + h^2 - 4k^2 + 6h + 8k + 1 = 0. \qquad (4)$$

Como la ecuación transformada debe carecer de términos de primer grado, igualaremos a cero los coeficientes de x' y y' en la ecuación (4). Tendremos

$$2h + 6 = 0 \quad y \quad 8k - 8 = 0,$$

de donde,

$$h = -3 \quad y \quad k = 1.$$

Por tanto, el nuevo origen es el punto $(-3, 1)$. Si sustituímos estos valores de h y k en (4), obtenemos la ecuación buscada

$$x'^2 - 4y'^2 - 4 = 0. \tag{5}$$

El lugar geométrico, una hipérbola, está trazado en la figura 68.

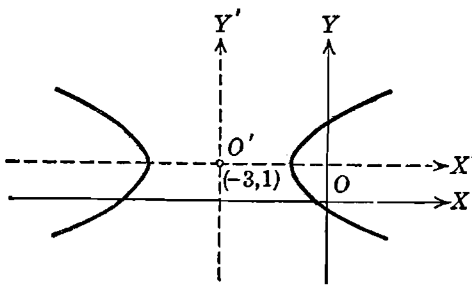

Fig. 68

Segundo método. En el caso de ecuaciones de segundo grado que carezcan del término en xy, es posible efectuar la transformación completando los cuadrados. Este método se enseñó previamente en el Artículo 40 para la circunferencia. Así, los términos de la ecuación (3) pueden ordenarse en la forma

$$(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 2y) = -1.$$

Completando cuadrados, obtenemos

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -1 + 9 - 4,$$

de donde,

$$(x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 4. \tag{6}$$

Si en la ecuación (6) hacemos las sustituciones

$$x + 3 = x', \quad y - 1 = y', \tag{7}$$

obtenemos la ecuación (5). Evidentemente, de (7) se deducen las ecuaciones de transformación:

$$x = x' - 3, \quad y = y' + 1.$$

En el enunciado del ejemplo 2 se ha indicado el tipo de simplificación deseado ; si en algún problema no se especifica , debemos efectuar la máxima simplificación posible.

Ejemplo 3. Por una traslación de ejes simplificar la ecuación

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0. \tag{8}$$

Solución. Procediendo como en el primer método del ejemplo 2, sustituiremos en la ecuación (8) los valores de x y y dados por las ecuaciones de trasformación en el teorema 1. Tendremos:

$$(y' + k)^2 - 4(x' + h) - 6(y' + k) + 17 = 0.$$

que puede escribirse en la forma

$$y'^2 - 4x' + (2k - 6)y' + k^2 - 4h - 6k + 17 = 0. \qquad (9)$$

Nuestro siguiente paso es determinar los valores de h y k que simplifiquen la ecuación (9). En este caso no podemos hacer que se anule el término en x', ya que su coeficiente es -4, pero podemos eliminar el término en y' y el término independiente. De acuerdo con esto escribimos

$$2k - 6 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 - 4h - 6k + 17 = 0,$$

de donde,

$$k = 3 \quad \text{y} \quad h = 2.$$

Para estos valores de h y k, la ecuación (9) se reduce a la forma

$$y'^2 - 4x' = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 20

Para cada ejercicio es conveniente trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

En cada uno de los ejercicios 1-5, transfórmese la ecuación dada trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$; $(-1, 3)$.
2. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$; $(-2, 1)$.
3. $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0$; $(1, -5)$.
4. $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$; $(-2, -1)$.
5. $xy - 3x + 4y - 13 = 0$; $(-4, 3)$.

En cada uno de los ejercicios 6 10, por una traslación de ejes, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Usese el primer método del ejemplo 2, Artículo 50.

6. $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$.
7. $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$.
8. $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$.
9. $xy - x + 2y - 10 = 0$.
10. $8x^3 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11-15, por una traslación de los ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Usese el segundo método del ejemplo 2, Artículo 50.

11. $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$.
12. $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$.

13. $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0.$
14. $12x^2 + 18y^2 - 12x + 12y - 1 = 0.$
15. $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 16-20, simplifíquese la ecuación dada por una traslación de los ejes coordenados.

16. $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0.$
17. $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0.$
18. $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0.$
19. $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0.$
20. $30xy + 24x - 25y - 80 = 0.$

51. Rotación de los ejes coordenados. Para simplificar las ecuaciones por rotación de los ejes coordenados, necesitamos el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si los ejes coordenados giran un ángulo ϕ en torno de su origen como centro de rotación, y las coordenadas de un punto cualquiera* P *antes y después de la rotación son* (x, y) *y* (x′, y′), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas están dadas por*

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta,$$

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean (figura 69) X y Y los ejes originales y X' y Y' los nuevos ejes. Desde el punto P tracemos la ordenada AP correspondiente al sistema X, Y, la ordenada $A'P$ correspondiente al sistema X', Y', y la recta OP. Sea el ángulo $POA' = \phi$ y $\overline{OP} = r$. Por Trigonometría (Apéndice IC, 1), tenemos

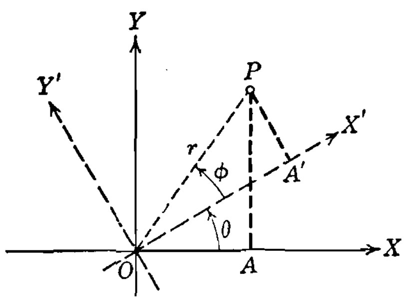

Fig. 69

$$x = \overline{OA} = r\cos(\theta + \phi), \tag{1}$$

$$y = \overline{AP} = r \operatorname{sen}(\theta + \phi), \tag{2}$$

$$x' = \overline{OA'} = r\cos\phi, \quad y' = \overline{A'P} = r \operatorname{sen}\phi. \tag{3}$$

De (1), por el Apéndice IC, 6, tenemos

$$x = r\cos(\theta + \phi) = r\cos\theta\cos\phi - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi.$$

Si en esta última ecuación sustituímos los valores dados por (3), obtenemos la primera ecuación de transformación,

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta .$$

Análogamente, de (2),

$$y = r \operatorname{sen} (\theta + \phi) = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi ,$$

por tanto, de (3), tenemos la segunda ecuación de transformación,

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta .$$

NOTA. Para nuestras aplicaciones, será necesario girar los ejes coordenados solamente un ángulo suficientemente grande para hacer coincidir uno de los ejes coordenados con una recta dada fija cualquiera, o para hacer que sea paralelo a ella en el plano coordenado. De acuerdo con esto, restringiremos, en general, los valores del ángulo de rotación θ al intervalo dado por

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ .$$

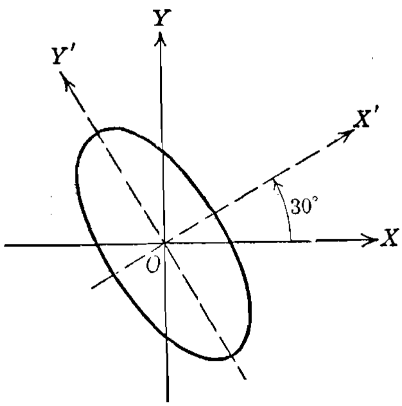

Fig. 70

Ejemplo 1. Transformar la ecuación

$$2x^2 + \sqrt{3}\, xy + y^2 = 4 \qquad (4)$$

girando los ejes coordenados un ángulo de 30°. Trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

$x \operatorname{sen}\theta - y \cos\theta = -y'$ ⇑

$x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = x'$ ⇑

Solución. Por el teorema 2, las ecuaciones de transformación son

$$x = x' \cos 30^\circ - y' \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y',$$

$$y = x' \operatorname{sen} 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'.$$

Si sustituímos estos valores de x y y en la ecuación (4), obtenemos

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right)\left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 4.$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación, obtenemos la ecuación transformada

$$5x'^2 + y'^2 = 8. \qquad (5)$$

El lugar geométrico (fig. 70) es una elipse.

$\underbrace{x \operatorname{sen}\theta = x' \cos\theta \operatorname{sen}\theta - y' \operatorname{sen}^2\theta \quad y \cos\theta = x' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + y' \cos^2\theta}$

$\underbrace{x \cos\theta = x' \cos^2\theta - y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad y \operatorname{sen}\theta = x' \operatorname{sen}^2\theta + y' \cos\theta \operatorname{sen}\theta}$

$\sqrt{3}\cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2\theta = \pi/3 \Rightarrow \theta = \pi/6$

$2(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + \sqrt{3}(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + (x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 = 4$

$(x')^2[2\cos^2\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta] + (y')^2[2\operatorname{sen}^2\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta] + x'y'[-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta] = 4$

En este ejemplo se ha dado el ángulo de rotación. Sin embargo, generalmente, el ángulo de rotación debe determinarse de modo que se cumpla alguna condición establecida. La aplicación principal de la rotación de ejes es la eliminación del término en xy de las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 2. Por una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0 \qquad (6)$$

en otra que carezca del término en $x'y'$. Trazar su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. Si en la ecuación (6) sustituímos los valores de x y y dados por las ecuaciones de transformación del teorema 2, obtenemos

$$\begin{aligned}9(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 &- 24(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)\\ &+ 16(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 - 40(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)\\ &- 30(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) = 0,\end{aligned}$$

la cual, después de efectuar el desarrollo y agrupar los términos, toma la forma

$$\begin{aligned}(9\cos^2\theta - 24\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta)x'^2 &+ (14\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 24\operatorname{sen}^2\theta\\ - 24\cos^2\theta)x'y' &+ (9\operatorname{sen}^2\theta + 24\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 16\cos^2\theta)y'^2\\ -(40\cos\theta + 30\operatorname{sen}\theta)x' &+ (40\operatorname{sen}\theta - 30\cos\theta)y' = 0. \qquad (7)\end{aligned}$$

Como la ecuación transformada debe carecer del término en $x'y'$, igualamos el coeficiente de $x'y'$ en (7) a cero y obtenemos

$$14\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 24\operatorname{sen}^2\theta - 24\cos^2\theta = 0.$$

Ahora bien, $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ (Apéndice IC, 7). Por tanto, la última relación puede escribirse

$$7\operatorname{sen} 2\theta - 24\cos 2\theta = 0,$$

de donde,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{24}{7}.$$

Por la nota del teorema 2, el ángulo θ estará restringido a estar en el primer cuadrante, de manera que 2θ estará en el primero o en el segundo cuadrante en donde el coseno y la tangente de un ángulo tiene el mismo signo. De manera semejante, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ no serán negativos. Por tanto, por el valor de $\operatorname{tg} 2\theta$ dado arriba, tenemos

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}.$$

Para efectuar la simplificación de la ecuación (7), necesitamos los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, que pueden obtenerse por las fórmulas del ángulo mitad de Trigonometría (Apéndice IC, 8).

Luego,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

y

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Si sustituímos estos valores de sen θ y cos θ en la ecuación (7), tenemos

$$\left(\frac{144}{25} - \frac{288}{25} + \frac{144}{25}\right) x'^2 + \left(\frac{168}{25} + \frac{216}{25} - \frac{384}{25}\right) x'y' + \left(\frac{81}{25} + \frac{288}{25} + \frac{256}{25}\right) y'^2$$
$$- (32 + 18)\, x' + (24 - 24)\, y' = 0,$$

la cual se reduce a la ecuación transformada buscada,

$$y'^2 - 2x' = 0. \tag{8}$$

El lugar geométrico, una parábola, está representada en la figura 71.

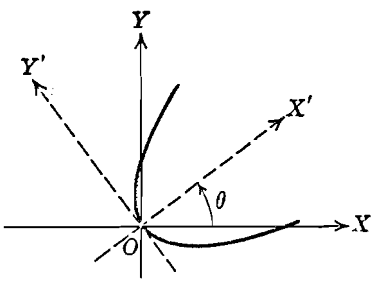

Fig. 71

NOTA. Evidentemente, es mucho más fácil trazar el lugar geométrico de la ecuación (8) con respecto a los ejes X' y Y' que trazar el de la ecuación (6) con respecto a los ejes X y Y. Más aún, las propiedades de la parábola pueden obtenerse más fácilmente a partir de la ecuación (8) que es la más sencilla. El estudiante puede, sin embargo, pensar que estas ventajas no son sino una compensación de los cálculos necesarios para transformar la ecuación (6) en la (8). El problema general de la supresión del término en xy de la ecuación de segundo grado será considerado más adelante (Capítulo IX), y se verá entonces como la cantidad de cálculos se reduce considerablemente.

EJERCICIOS. Grupo 21

Para cada ejercicio el estudiante debe dibujar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

1. Hallar las nuevas coordenadas del punto $(3, -4)$ cuando los ejes coordenados giran un ángulo de $30°$.

2. Hallar las nuevas coordenadas de los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ cuando los ejes coordenados giran un ángulo de $90°$.

En cada uno de los ejercicios 3-8, hallar la transformada de la ecuación dada, al girar los ejes coordenados un ángulo igual al indicado.

3. $2x + 5y - 3 = 0$; arc tg 2,5.

4. $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$; $45°$.

5. $\sqrt{3}\,y^2 + 3xy - 1 = 0$; $60°$.

6. $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{10}}{10}$.

7. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 20 = 0$; arc tg $0{,}75$.

8. $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $45°$.

9. Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $2x - y - 2 = 0$ en otra que carezca del término en x'.

10. Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $x + 2y - 2 = 0$ en otra que carezca del término en y'.

En cada uno de los ejercicios 11-16, por una rotación de los ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca del término en $x'y'$.

11. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$.
12. $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$.
13. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$.
14. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.
15. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$.
16. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$.

17. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. Demostrar que la forma de esta ecuación no se altera cuando se refiere a los ejes coordenados que han girado cualquier ángulo θ. Se dice que esta ecuación es *invariante* por rotación.

18. Deducir las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51) cuando el ángulo θ es obtuso.

19. Las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51) pueden considerarse como un sistema de dos ecuaciones en las dos incógnitas x' y y'. Para cualquier valor de θ, demuéstrese que el determinante de este sistema es la unidad y, por tanto, que por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6) el sistema tiene una única solución para x' y y' dada por

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones recíprocas* de las originales de transformación.

20. Por una rotación de $45°$ de los ejes coordenados, una cierta ecuación se transformó en $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Hállese la ecuación original usando el resultado del ejercicio 19.

52. Simplificación de ecuaciones por transformación de coordenadas. Acabamos de ver que, por una traslación o una rotación de los ejes coordenados, es posible transformar muchas ecuaciones en formas más simples. Es entonces lógico inferir que se puede efectuar una simplificación mayor aún aplicando *ambas* operaciones a la vez. Si una ecuación es transformada en una forma más simple por una traslación o una rotación de los ejes coordenados, o por ambas, el proceso se llama *simplificación por transformación de coordenadas*.

Consideremos primero el caso en que una traslación de los ejes coordenados a un nuevo origen $O'(h, k)$ es seguida por una rotación de los ejes trasladados en torno de O' de un ángulo θ, tal como se indica en la figura 72. Si P es un punto cualquiera del plano coordenado, sean (x, y), (x', y') y (x'', y'') sus coordenadas referido, respectivamente, a los ejes originales X y Y, a los ejes trasladados X' y Y', y a los ejes girados X'' y Y''. Por el teorema 1 del Artículo 50,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

y por el teorema 2 del Artículo 51,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta, \\ y' &= x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

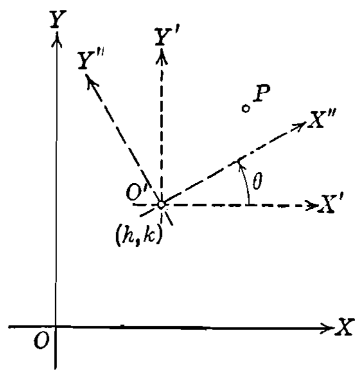

Fig. 72

Si sustituímos en (1) los valores de x' y y' dados por (2) obtenemos las ecuaciones buscadas de transformación:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta + h, \\ y &= x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta + k. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Puede demostrarse que las ecuaciones de transformación (3) son verdaderas aun cuando el orden de transformación se invierta, es decir, cuando una rotación vaya seguida de una traslación. Tenemos pues, el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Si efectuamos un cambio de ejes coordenados mediante una traslación y una rotación, tomadas en cualquier orden, y las coordenadas de cualquier punto* P *referido a los sistemas original y final* *son* (x, y) *y* (x'', y''), *respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas son*

$$x = x'' \cos\theta - y'' \operatorname{sen}\theta + h,$$

$$y = x'' \operatorname{sen}\theta + y'' \cos\theta + k,$$

en donde θ *es el ángulo de rotación y* (h, k) *son las coordenadas del nuevo origen referido a los ejes coordenados originales.*

NOTAS. 1. Las ecuaciones de transformación dadas por el teorema 1 del Artículo 50, teorema 2 del Artículo 51 y teorema 3 anterior son todas relaciones *lineales*. De aquí que el grado de la ecuación transformada no pueda ser mayor que el de la ecuación original. Ni tampoco puede ser menor; porque si lo fuera, podríamos, por transformación de coordenadas, regresar la ecuación transformada a su forma original y elevar así el grado de la ecuación. Pero acabamos de ver que esto es imposible. Por tanto, *el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas.*

2. Aunque las ecuaciones de transformación del teorema 3 pueden emplearse cuando se van a efectuar simultáneamente una traslación y una rotación, es, generalmente, más sencillo, efectuar estas operaciones separadamente en dos pasos diferentes. El teorema 3 explica que el orden de estas operaciones no tiene importancia. Sin embargo, en el caso de una ecuación de segundo grado en la cual los términos en x^2, y^2 y xy forman un cuadrado perfecto, los ejes deben girarse primero y trasladarse después (ver el ejercicio 10 del grupo 22). Este caso particular será estudiado más adelante en el Capítulo IX.

Ejemplo. Por transformación de coordenadas, simplificar la ecuación

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0. \tag{4}$$

Trácese el lugar geométrico y todos los sistemas de ejes coordenados.

Solución. Como los términos de segundo grado en (4) no forman un cuadrado perfecto, podemos primero trasladar los ejes a un nuevo origen (h, k). Por tanto, usando las ecuaciones de transformación del teorema 1 (Art. 50), obtenemos, de la ecuación (4),

$$3(x' + h)^2 - 2(x' + h)(y' + k) + 3(y' + k)^2$$
$$- 2(x' + h) - 10(y' + k) + 9 = 0,$$

la que, después de desarrollar, simplificar y agrupar términos, toma la forma

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 + (6h - 2k - 2)x' + (-2h + 6k - 10)y'$$
$$+ (3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9) = 0. \tag{5}$$

Para eliminar los términos de primer grado en (5), igualamos sus coeficientes a cero. Esto nos da el sistema

$$6h - 2k - 2 = 0,$$

$$-2h + 6k - 10 = 0,$$

cuya solución es $h = 1$, $k = 2$. Sustituyendo estos valores de h y k en (5), obtenemos

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 - 2 = 0. \tag{6}$$

A continuación, por rotación de los ejes, usando las ecuaciones de transformación del teorema 2 (Art. 51), obtenemos, de la ecuación (6),

$$3(x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta)^2 - 2(x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta)(x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta) + 3(x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta)^2 - 2 = 0,$$

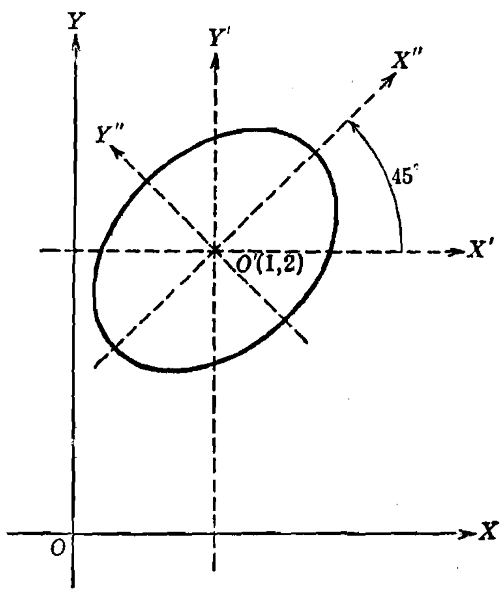

Fig. 73

la cual se reduce a

$$(3\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta)x''^2 + (2\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta)x''y'' + (3\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta)y''^2 - 2 = 0. \tag{7}$$

Para eliminar el término en $x''y''$ de (7), igualamos sus coeficiente a cero, y obtenemos

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta = 0,$$

de donde $\theta = 45°$ de acuerdo con la nota al teorema 2 (Art. 51). Sustituyendo este valor de θ en (7), y simplificando, obtenemos la ecuación buscada,

$$x''^2 + 2y''^2 - 1 = 0. \tag{8}$$

En la figura 73 se han trazado el lugar geométrico de la ecuación (8), una elipse, y todos los sistemas de ejes coordenados.

EJERCICIOS. Grupo 22

Para cada ejercicio el estudiante debe dibujar el lugar geométrico y todos los sistemas de ejes coordenados.

En cada uno de los ejercicios 1-5, simplifíquese la ecuación dada por transformación de coordenadas.

1. $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0.$
2. $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0.$
3. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0.$
4. $3x + 2y - 5 = 0.$
5. $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0.$

6. Trazar el lugar geométrico del ejercicio 1 aplicando directamente los métodos del Artículo 19.

7. Trazar el lugar geométrico del ejercicio 2 directamente por los métodos del Artículo 19.

8. Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $y'' = 0$, que es la ecuación del eje X''.

9. Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $x'' = 0$, que es la ecuación del eje Y''.

10. Hallar las coordenadas del nuevo origen si los ejes coordenados se trasladan de manera que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se transforma en otra ecuación que carezca de términos de primer grado.

11. Hallar las nuevas ordenadas del punto $(-1, 3)$ cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen $(4, 5)$ y después se les gira un ángulo de $60°$.

12. Hallar las nuevas coordenadas del punto $(2, 2)$ cuando los ejes coordenados son girados primero un ángulo de $45°$ y después son trasladados al nuevo origen $(-1, 1)$.

13. Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(3, 3)$ y después rotación en un ángulo de $30°$, las coordenadas de un cierto punto P se transforman en $(7, 6)$. Hállense las coordenadas de P con respecto a los ejes originales.

14. Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(1, 1)$ y luego rotación de los ejes en un ángulo de $45°$, la ecuación de cierto lugar geométrico se transformó en $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Hallar la ecuación del lugar geométrico con respecto a los ejes originales.

15. Demostrar, analíticamente, que la distancia entre dos puntos en el plano coordenado no se altera (es invariante) con la transformación de coordenadas.

En cada uno de los ejercicios 16-20, hállese la ecuación del lugar geométrico del punto móvil y simplifíquese por transformación de coordenadas.

16. El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(-2, 2)$ es siempre igual a su distancia a la recta $x - y + 1 = 0$.

17. El punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ es siempre igual a 4.

18. El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto (2, 1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2y - 2 = 0$.

19. El punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta

$$x + 2y - 2 = 0$$

es siempre igual al doble de su distancia del punto $(-1, 1)$.

20. El punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos (1, 4) y $(-2, 1)$ es siempre igual a 3.

CAPITULO VI

LA PARABOLA

53. Introducción. En su estudio previo de Geometría elemental, el estudiante conoció dos líneas: la línea recta y la circunferencia. Las dos líneas ya han sido estudiadas desde el punto de vista analítico. Ahora comenzamos el estudio de ciertas curvas planas no incluídas, ordinariamente, en un curso de Geometría elemental. Empezaremos con la curva conocida con el nombre de parábola.

54. Definiciones. La ecuación de la parábola la deduciremos a partir de su definición como el lugar geométrico de un punto que se mueve de acuerdo con una ley especificada.

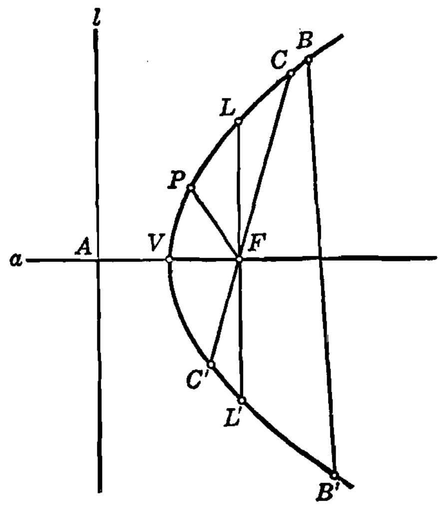

Fig. 74

DEFINICIÓN. Una *parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

Designemos por F y l (fig. 74), el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. La recta a que pasa por F y es perpendicular a l se llama *eje* de la parábola. Sea A el punto de intersección del eje y la directriz. El punto V, punto medio del segmento AF, está, por definición, sobre la parábola; este punto se llama *vértice*. El segmento de recta, tal como BB', que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama *cuerda;* en particular, una cuerda que pasa por el foco como CC', se llama *cuerda focal*. La cuerda focal LL' perpendicular al eje se llama *lado recto*. Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta FP que une el foco F con el punto P se llama *radio focal* de P, o *radio vector*.

55. Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado. Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen (fig. 75) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X; sean $(p, 0)$ sus coordenadas. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz l es $x = -p$. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a l. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

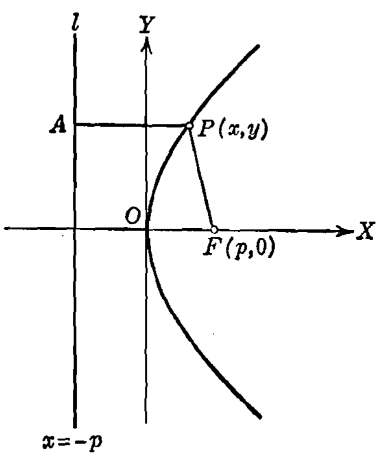

Fig. 75

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|. \qquad (1)$$

Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2};$$

y por el teorema 9 (Art. 33), tenemos

$$|\overline{PA}| = |x + p|.$$

Por tanto, la condición geométrica (1) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos

$$y^2 = 4px. \qquad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfagan (2). Tendremos:

$$y_1^2 = 4px_1.$$

Si sumamos $(x_1 - p)^2$ a ambos miembros de esta ecuación, y extraemos la raíz cuadrada, obtenemos, para la raíz positiva,

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} = |x_1 + p|,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la parábola cuya ecuación está dada por (2).

Ahora discutiremos la ecuación (2) siguiendo el método explicado en el Artículo 19. Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico de (2) es con respecto al eje X. Despejando y de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2\sqrt{px}. \qquad (3)$$

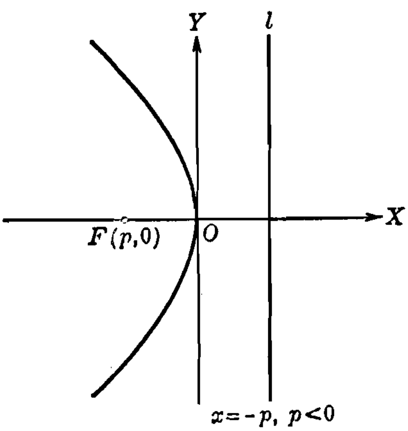

Fig. 76

Por tanto, para valores de y reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo. Según esto, podemos considerar dos casos: $p > 0$ y $p < 0$.

Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x, y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Como no se excluye ningún valor positivo de x, y como y puede tomar todos los valores reales, el lugar geométrico de (2) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X. Esta posición es la indicada en la figura 75, y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.

Análogamente, si $p < 0$, todos los valores positivos de x deben excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométrico aparece a la izquierda del eje Y. Esta posición está indicada en la figura 76, y, en este caso, se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.

Es evidente que la curva correspondiente a la ecuación (2) no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada $2p$ y el otro la ordenada $-2p$. Como la abscisa del foco es p, se sigue (Art. 54) que la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se demuestra, análogamente, que la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py, \tag{4}$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$. Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 77 [a]); y, si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 77 [b]). La discusión completa de la ecuación (4) se deja como ejercicio al estudiante.

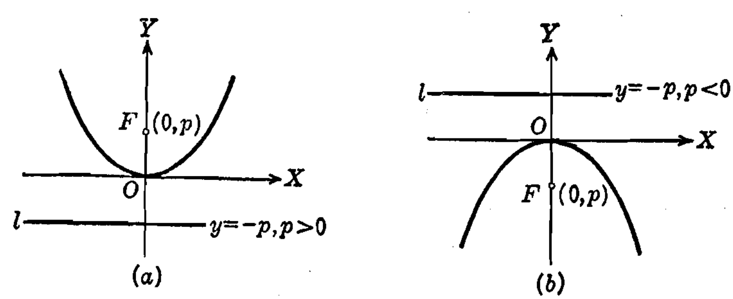

Fig. 77

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la *primera ecuación ordinaria de la parábola*. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje* X, *es*

$$y^2 = 4px,$$

en donde el foco es el punto (p, 0) *y la ecuación de la directriz es* x = − p. *Si* p > 0, *la parábola se abre hacia la derecha; si* p < 0, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, *y el vértice está en el origen, su ecuación es*

$$x^2 = 4py,$$

en donde el foco es el punto (0, p), *y la ecuación de la directriz es* y = − p. *Si* p > 0, *la parábola se abre hacia arriba; si* p < 0, *la parábola se abre hacia abajo.*

En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de 4p, *que es el coeficiente del término de primer grado.*

Ejemplo. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py. \tag{4}$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos

$$16 = 4p(-2),$$

de donde, $p = -2$, y la ecuación buscada es

$$x^2 = -8y.$$

También, por el teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$, o sea, $(0, -2)$, la ecuación de la directriz es

$$y = -p,$$

o sea, $\qquad y = 2,$

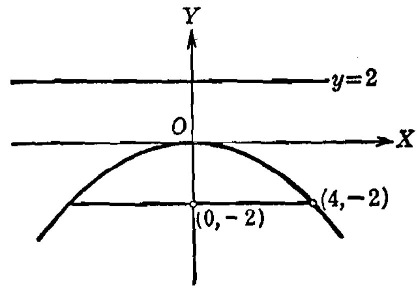

Fig. 78

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 78, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJERCICIOS. Grupo 23

Dibujar para cada ejercicio la gráfica correspondiente.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1. $y^2 = 12x.$
2. $x^2 = 12y.$
3. $y^2 + 8x = 0.$
4. $x^2 + 2y = 0.$
5. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.
6. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, cuando se conocen el foco y la directriz.
7. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, si se dan el foco y el vértice.
8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3, 0)$.
9. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$.
10. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.

12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.

16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.

17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.

Faltó

19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

21. Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X y Y, el eje y la directriz respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 22-25, aplicando la definición de la parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22. Foco $(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.
23. Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.
24. Vértice $(2, 0)$, foco $(0, 0)$.
25. Foco $(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado. Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola (fig. 79) cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), se sigue, por el teorema 1 del Artículo 55, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \qquad (1)$$

en donde las coordenadas del foco F son $(p, 0)$ referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales X y Y, podemos obtener la ecuación (1) usando las ecuaciones de trasformación del teorema 1, Artículo 50, a saber,

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde,

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \qquad (2)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \qquad (3)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, *segunda ecuación ordinaria de la parábola*.

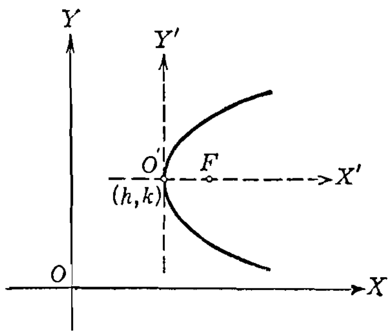

Fig. 79

Los resultados anteriores, junto con los obtenidos en el teorema 1 del Artículo 55, conducen al siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación de una parábola de vértice* (h, k) *y eje paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$(\mathrm{y} - \mathrm{k})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{x} - \mathrm{h}),$$

siendo $|\mathrm{p}|$ *la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.*

Si $\mathrm{p} > 0$, *la parábola se abre hacia la derecha; si* $\mathrm{p} < 0$, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el vértice es el punto (h, k) *y el eje de la parábola es paralelo al eje* Y, *su ecuación es de la forma*

$$(\mathrm{x} - \mathrm{h})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{y} - \mathrm{k}).$$

Si $\mathrm{p} > 0$, *la parábola se abre hacia arriba; si* $\mathrm{p} < 0$, *la parábola se abre hacia abajo.*

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3, 4) y cuyo foco es el punto (3, 2). Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se

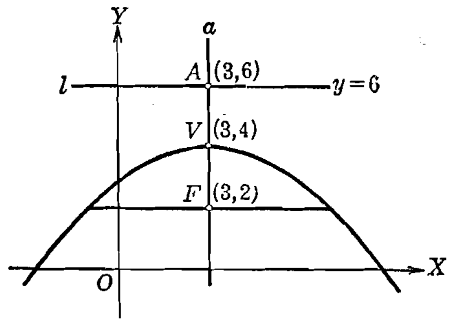

Fig. 80

sigue que el eje a es paralelo al eje Y, como se indica en la figura 80. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la parábola es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Como el vértice V es el punto (3, 4), la ecuación puede escribirse

$$(x-3)^2 = 4p(y-4).$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |4-2| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p=-2$, y la ecuación de la parábola es

$$(x-3)^2 = -8(y-4),$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje a corta a la directriz l. Como $V(3, 4)$ es el punto medio del segmento AF, se sigue que las coordenadas de A son (3, 6). Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

obtenemos

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \qquad (4)$$

en donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2k$ y $a_3 = k^2 + 4ph$. Recíprocamente, completando el cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación de la forma (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Al discutir la ecuación de la forma (4) suponemos que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma

$$y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \tag{5}$$

que es una ecuación cuadrática en la única variable y. Si las raíces de (5) son reales y desiguales, digamos r_1 y r_2, entonces la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente consta de dos rectas diferentes, $y = r_1$ y $y = r_2$, paralelas ambas al eje X. Si las raíces de (5) son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje X. Finalmente, si las raíces de (5) son complejas, no existe ningún lugar geométrico.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Los resultados se resumen en el siguiente

TEOREMA 3. *Una ecuación de segundo grado en las variables* x *y* y *que carezca del término en* xy *puede escribirse en la forma*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si $A = 0$, $C \neq 0$ *y* $D \neq 0$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* X. *Si, en cambio,* $D = 0$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* X, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* X, *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $Cy^2 + Ey + F = 0$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Si $A \neq 0$, $C = 0$ *y* $E \neq 0$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* Y. *Si, en cambio,* $E = 0$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* Y, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* Y *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $Ax^2 + Dx + F = 0$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Por el teorema 3, la ecuación

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0 \tag{6}$$

representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si reducimos la ecuación (6) a la segunda forma ordinaria, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3). \tag{7}$$

De esta ecuación vemos inmediatamente que las coordenadas del vértice son $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$. Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$, y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje y el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son $\left(\frac{5}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right)$, o sea, $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$. La ecuación de la directriz es $y = 3 - \frac{3}{2}$, o sea, $y = \frac{3}{2}$, y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$.

Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo. También se recomienda resolver el problema por traslación de los ejes coordenados.

En las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola, dadas por el teorema 2, hay tres constantes arbitrarias independientes o parámetros, h, k y p. Por tanto, la ecuación de cualquier parábola cuyo eje sea paralelo a uno de los ejes coordenados puede determinarse a partir de tres condiciones independientes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

Solución. Por el teorema 2, la ecuación buscada es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Podemos, sin embargo, tomar también la ecuación en la forma dada por el teorema 3, a saber,

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como $C \neq 0$, podemos dividir toda la ecuación por C, obteniendo así

$$y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \tag{8}$$

en donde $D' = \frac{D}{C}$, $E' = \frac{E}{C}$ y $F' = \frac{F}{C}$ son tres constantes por determinarse.

Como los tres puntos dados están sobre la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (8). Por tanto, expresando este hecho, obtenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}, -1\right), & 1 + \frac{3}{2}D' - E' + F' = 0, \\ (0, 5), & 25 + 5E' + F' = 0, \\ (-6, -7), & 49 - 6D' - 7E' + F' = 0, \end{cases}$$

que pueden escribirse así,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1, \\ 5E' + F' = -25, \\ 6D' + 7E' - F' = 49. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, \quad E' = -2, \quad F' = -15.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0,$$

que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo y verificar el hecho de que las coordenadas de cada uno de los tres puntos dados satisfacen la ecuación de la parábola. También debe obtener la misma ecuación usando la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

EJERCICIOS. Grupo 24

Dibujar para cada ejercicio la figura correspondiente.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la parábola.

3. Demostrar que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, las coordenadas de su foco son $(h + p, k)$, y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

4. Demostrar que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k + p)$, y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

5. Por medio de la primera ecuación ordinaria, deducir la siguiente propiedad geométrica de la parábola: Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicular es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice. Toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados, posee esta propiedad geométrica llamada *propiedad intrínseca* de la parábola.

6. Por medio de la propiedad intrínseca de la parábola, establecida en el ejercicio 5, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de dicha curva.

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (3, 3) y (3, 1), respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

10. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto (0, 3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.
12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.
13. $y^2 + 4x = 7$.
14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.
15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común (3, 4) y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos (2, 8) y $(-1, 5)$.

24. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos (0, 0), $(8, -4)$ y (3, 1).

25. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

26. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

27. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

28. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola

$$y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$$

cuya ordenada es igual a 3.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto (1, 1).

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$

57. Ecuación de la tangente a una parábola. La determinación de la tangente a la parábola no requiere la introducción de ningún concepto nuevo. Como la ecuación de una parábola es de segundo grado, su tangente puede obtenerse empleando la condición para tangencia estudiada en el Artículo 44.

Como para la circunferencia (Art. 45), consideraremos tres casos:

1. *Tangente en un punto de contacto dado.* Vamos a determinar la ecuación de la tangente a la parábola

$$y^2 = 4px, \tag{1}$$

en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola.

La ecuación de la tangente buscada es de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{2}$$

en donde está por determinarse la pendiente m. Si el valor de y dado por la ecuación (2) es sustituído en la ecuación (1), se obtiene

$$(y_1 + mx - mx_1)^2 = 4px,$$

la cual se reduce a

$$m^2x^2 + (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0.$$

Para la tangencia, el discriminante de esta ecuación debe anularse, y escribimos

$$(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0,$$

la cual se reduce a

$$x_1m^2 - y_1m + p = 0, \tag{3}$$

de donde,

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}.$$

Pero, como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), tenemos

$$y_1^2 = 4px_1, \tag{4}$$

de donde $m = \frac{y_1}{2x_1}$. Si sustituímos este valor de m en (2), obtenemos, después de simplificar y ordenar los términos,

$$2x_1y = y_1(x + x_1).$$

De la ecuación (4), $2x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, y si se sustituye este valor en la última ecuación se obtiene la forma más común de la ecuación de la tangente,

$$y_1y = 2p(x + x_1).$$

Muchas propiedades interesantes e importantes de la parábola están asociadas con la tangente en un punto cualquiera de la curva. La deducción de tales propiedades es más sencilla, en general, usando la forma canónica (1) y, por tanto, la ecuación de la tangente que acabamos de obtener es especialmente útil. Según la ecuación obtenida, tenemos el teorema que damos a continuación.

TEOREMA 4. *La tangente a la parábola* $y^2 = 4px$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$y_1 y = 2p(x + x_1).$$

2. *Tangente con una pendiente dada.* Consideremos ahora el problema general de determinar la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola (1).

La ecuación buscada es de la forma

$$y = mx + k, \tag{5}$$

en donde k es una constante cuyo valor debe determinarse. Si sustituímos el valor de y dado por (5) en la ecuación (1), obtenemos

$$(mx + k)^2 = 4px,$$

o sea,

$$m^2x^2 + (2mk - 4p)x + k^2 = 0.$$

La condición para la tangencia es

$$(2mk - 4p)^2 - 4k^2m^2 = 0,$$

de donde,

$$k = \frac{p}{m},$$

valor que, sustituído en (5), nos da la ecuación buscada

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

TEOREMA 5. *La tangente de pendiente* m *a la parábola* $y^2 = 4px$ *tiene por ecuación*

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

3. *Tangente trazada desde un punto exterior.* Veamos el siguiente problema:

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto (2, −4) a la parábola $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (2, − 4) es

$$y + 4 = m(x - 2), \tag{6}$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (6), $y = mx - 2m - 4$, valor que sustituído en la ecuación de la parábola nos da

$$x^2 - 6x - 4(mx - 2m - 4) + 17 = 0.$$

Esta ecuación se reduce a

$$x^2 - (4m + 6)x + (8m + 33) = 0.$$

Para que haya tangencia,

$$(4m + 6)^2 - 4(8m + 33) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $m = 2, -3$. Por tanto, por (6), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y + 4 = 2(x - 2) \quad \text{y} \quad y + 4 = -3(x - 2),$$

o sea,

$$2x - y - 8 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + y - 2 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este problema.

EJERCICIOS. Grupo 25

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y el punto de contacto dados.

1. $y^2 - 4x = 0$; $(1, 2)$.
2. $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$; $(-6, 3)$.
3. $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$; $(-2, -1)$.

4. Por medio del teorema 4 (Art. 57) hallar la ecuación de la tangente del ejercicio 1.
5. Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ en $P_1(x_1, y_1)$ es $y_1x + 2py = x_1y_1 + 2py_1$.
6. Por medio del resultado del ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal del ejercicio 1.

alto

7. Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre sí.
8. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el ejercicio 19 del grupo 23, Art. 55.)
9. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$.
10. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.
11. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 7 = 0$.
12. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(-3, 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.
13. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$.
14. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola

$$y^2 - x + 4y + 6 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

15. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

   a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes;
   b) son tangentes a la parábola;
   c) no cortan a la parábola.

16. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $x - y - 4 = 0$ y la parábola $y^2 = 2x$ en cada uno de sus puntos de intersección.

17. Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus dos puntos de intersección.

18. Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre sí en cada uno de sus puntos de intersección.

19. Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

20. Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $y^2 = 4\,px$ tiene por ecuación $y = mx - 2pm - pm^3$.

21. Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

22. En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

23. Por medio del resultado del ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de una parábola dada.

24. Demostrar que la tangente a la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, de pendiente m, tiene por ecuación $y = mx - mh + k + \dfrac{p}{m}$, $m \neq 0$.

25. Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

26. Se han trazado dos círculos cada uno de los cuales tiene por diámetro una cuerda focal de una parábola. Demostrar que la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

27. Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P para esa parábola (véase el ejercicio 25 del grupo 18, Art. 45). Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $y_1 y = 2p(x + x_1)$. (Ver el teorema 4, Art. 57.)

Revis.

28. Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

29. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

30. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

58. La función cuadrática. La forma

$$ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

en donde, a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama *función cuadrática* de x, o *trinomio de segundo grado*, y puede ser investigada por medio de la relación

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2}$$

Vimos en el Artículo 56 que la ecuación (2) se representa gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y. Por tanto, las propiedades analíticas de la función cuadrática (1) pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola (2). Si reducimos la ecuación (2) a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2}{4a}-c\right),$$

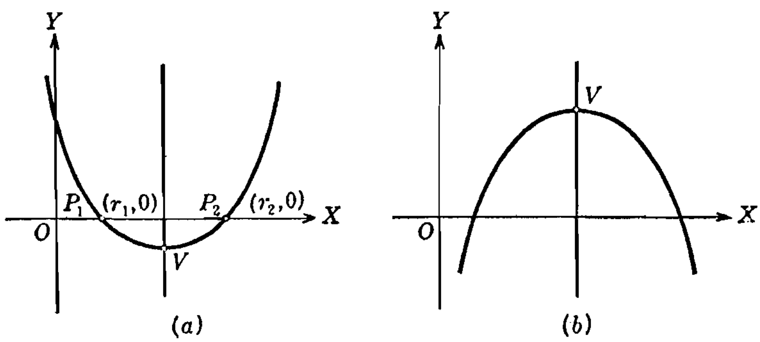

Fig. 81

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, y cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Si $a>0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 81 [a]); si $a<0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 81 [b]).

Un punto de una curva continua cuya ordenada sea algebraicamente mayor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto máximo* de la curva. Análogamente, un punto cuya ordenada sea algebraicamente menor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto mínimo* de la curva. Evidentemente, si $a>0$ (fig. 81 [a]) la parábola (2) tiene un solo punto mínimo, el vértice V. De manera semejante, si $a<0$ (fig. 81 [b]) la parábola (2) tiene un único punto máximo, el vértice V. La interpretación analítica es bien obvia. Como las coordenadas del vértice V de la parábola (4) son $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$, se sigue que si $a>0$ la función cuadrática (3) tiene, para $x=-\frac{b}{2a}$, un valor mínimo igual a

$c - \frac{b^2}{4a}$, y si $a < 0$ tiene, para $x = -\frac{b}{2a}$, un valor máximo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$ Resumimos estos resultados en el siguiente

Teorema 6. *La función cuadrática*

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

está representada gráficamente por la parábola

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{2}$$

cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, *y cuyo vértice es el punto* $\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Si $a > 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, y la función cuadrática* (1) *tiene un valor mínimo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $= -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo, y la función cuadrática* (1) *tiene un valor máximo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $x = -\frac{b}{2a}$.

Acabamos de discutir los valores extremos de la función cuadrática (1). Pero podemos también determinar fácilmente los valores de x para los cuales la función es positiva, negativa o cero. Por ejemplo, supongamos que la función cuadrática (1) es tal que tiene por gráfica a la figura 81 (a) en donde la parábola corta al eje X en los dos puntos diferentes P_1 y P_2. Como las ordenadas de P_1 y P_2 son nulas, se sigue, de (1) y (2), que sus abscisas r_1 y r_2, respectivamente, son las las raíces de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Además, como aparece en la gráfica, la función (1) es negativa para los valores de x comprendidos entre r_1 y r_2, y es positiva para valores de x menores que r_1 y mayores que r_2. El estudiante debe desarrollar una discusión semejante para la función cuadrática representada por la figura 81 (b). También debe discutir la función cuadrática cuya gráfica es tangente al eje X, y la función cuadrática cuya gráfica no corta al eje X.

Ejemplo. Determinar el máximo o mínimo de la función cuadrática

$$6 + x - x^2, \tag{3}$$

y los valores de x para los cuales esta función es positiva, negativa y cero. Ilustrar los resultados gráficamente.

Solución. La función (3) está representada gráficamente por la parábola

$$y = 6 + x - x^2,$$

que reducida a la forma ordinaria queda

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{25}{4}\right),$$

de modo que la parábola se abre hacia abajo y su vértice es el punto máximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ como se ve en la figura 82. Luego la función (3) tiene el valor máximo $\frac{25}{4}$ cuando $x = \frac{1}{2}$.

Para determinar los valores de x para los cuales la función (3) es positiva, necesitamos simplemente determinar, como en Algebra, los valores de x para los cuales la desigualdad

$$-x^2 + x + 6 > 0$$

es verdadera. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$(-x - 2)(x - 3) > 0.$$

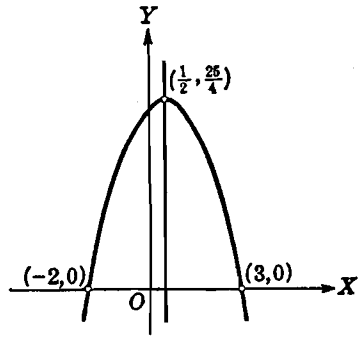

Fig. 82

Considerando los signos de los dos factores del primer miembro de esta desigualdad, vemos que es verdadera para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $-2 < x < 3$.

Análogamente, considerando la desigualdad

$$(-x - 2)(x - 3) < 0,$$

vemos que la función (3) es negativa para todos los valores de x tales que $x < -2$ y $x > 3$.

Finalmente, considerando la igualdad

$$(-x - 2)(x - 3) = 0,$$

vemos que la función (3) se anula cuando $x = -2$ y $x = 3$.

59. Algunas aplicaciones de la parábola. La parábola se presenta frecuentemente en la práctica. El propósito de este artículo es estudiar brevemente algunas aplicaciones de esta curva.

a) *Arco parabólico.* De las diversas formas de arcos usadas en construcción, una tiene la forma de un arco parabólico. Tal forma, llamada *arco parabólico*, es la indicada en la figura 83 (*a*). La longitud $\overline{AC}$ en la base se llama *claro* o *luz*; la altura máxima $\overline{OB}$ sobre la base se llama *altura* del arco. Si el arco parabólico se coloca de tal manera que su vértice esté en el origen y su eje coincida con el eje Y, y si la longitud del claro es $2s$ y la altura es h, entonces podemos demostrar fácilmente que la ecuación de la parábola toma la forma

$$x^2 = -\frac{s^2}{h}y.$$

En un puente colgante, cada cable cuelga de sus soportes A y C en la forma del arco de una curva, como se indica en la figura 83 (b).

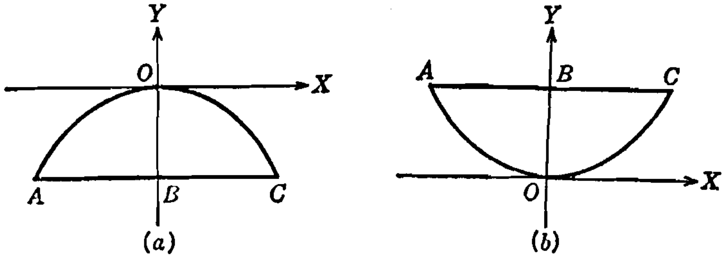

Fig. 83

La distancia $\overline{AC}$ comprendida entre los soportes del cable es la *luz*; la distancia $\overline{BO}$, altura vertical de los soportes del cable sobre el punto más bajo, se llama *depresión* del cable. Si los pesos de los cables son pequeños comparados con el de la carga, y si la distribución del peso de la carga es uniforme en la dirección horizontal, se demuestra en Mecánica que cada cable toma muy aproximadamente la forma de un arco parabólico.

b) *Propiedad focal de la parábola.* La parábola tiene una importante propiedad focal basada en el siguiente teorema.

TEOREMA 7. *La normal a la parábola en un punto* $P_1(x_1, y_1)$ *cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de* P_1 *y la recta que pasa por* P_1 *y es paralela al eje de la parábola.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema no se particulariza si tomamos como ecuación de la parábola la forma canónica

$$y^2 = 4px. \qquad (1)$$

Designemos por n la normal a la parábola en P_1, por l la recta que pasa por P_1 paralela al eje, y por r el radio vector FP_1, tal como se indica en la figura 84. Sea α el ángulo formado por n y r, y β el formado por n y l. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

La pendiente de la parábola en $P_1(x_1, y_1)$ es $\frac{2p}{y_1}$, según el teorema 4 del Artículo 57. Por tanto, la pendiente de n es $-\frac{y_1}{2p}$. También la pendiente de r es $\frac{y_1}{x_1 - p}$. Por tanto, por el teorema 5 del Artículo 10,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 - \frac{y_1^2}{2p(x_1 - p)}} = \frac{-x_1 y_1 + p y_1 - 2p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2} = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2}.$$

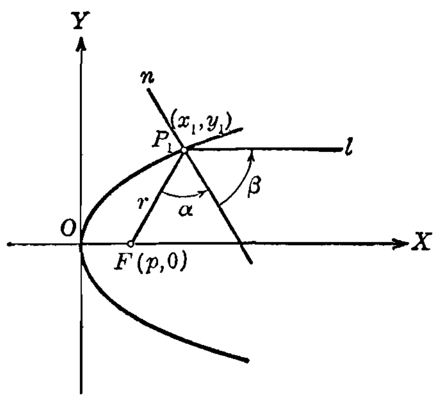

Fig. 84

Como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), sus coordenadas satisfacen la ecuación (1), y $y_1^2 = 4px_1$. Sustituyendo este valor de y_1^2 en la última igualdad, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - 4p x_1} = \frac{-y_1(x_1 + p)}{-2p(x_1 + p)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (2)$$

Y como la pendiente de l es 0, resulta:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0 - \left(-\frac{y_1}{2p}\right)}{1 + 0\left(-\frac{y_1}{2p}\right)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3), $\alpha = \beta$, y el teorema queda demostrado.

Si un rayo de luz l_1 toca a una superficie pulida m en el punto P, es reflejado a lo largo de otra recta, digamos l_2, tal como se indica en la figura 85 (a). Sea n la normal a m en P. El ángulo α formado por el rayo incidente l_1 y n se llama *ángulo de incidencia;* el ángulo β formado por el rayo reflejado l_2 y n se llama *ángulo de reflexión.* En Física se demuestra que la ley de la reflexión establece: 1) que l_1, n y l_2 son coplanares, y 2) que $\alpha = \beta$. Por esta ley y por el teorema 7, vemos que si un foco luminoso se coloca en el foco F de una parábola, los rayos inciden sobre la parábola, y se reflejan según rectas paralelas al eje de la parábola, tal como se indica en la figura 85 (b). Este es el principio del reflector parabólico usado en las locomotoras y automóviles y en los faros buscadores.

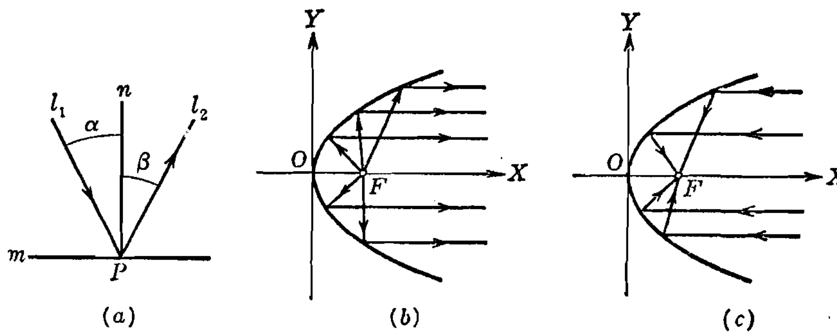

Fig. 85

Como el Sol está tan distante de la Tierra, sus rayos, en la superficie terrestre, son, prácticamente, paralelos entre sí. Si un reflector parabólico se coloca de tal manera que su eje sea paralelo a los rayos del Sol, los rayos incidentes sobre el reflector se reflejan de manera que todos pasan por el foco, tal como se ve en la figura 85 (c). Esta concentración de los rayos solares en el foco es el principio en que se basa el hacer fuego con una lente; también es el origen de la palabra foco, que es el término latino (focus) empleado para designar el hogar o chimenea. Esta propiedad también se emplea en el telescopio de reflexión en el cual los rayos paralelos de luz procedentes de las estrellas se concentran en el foco.

EJERCICIOS. Grupo 26

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar el valor máximo o mínimo de la función dada, y comprobar el resultado gráficamente.

1. $4x^2 + 16x + 19$.
2. $24x - 3x^2 - 47$.
3. $x^2 - 6x + 9$.
4. $4x - 2x^2 - 5$.

En cada uno de los ejercicios 5-8, hallar los valores de x, si los hay, para los cuales es verdadera la desigualdad dada. Comprobar el resultado gráficamente.

5. $4x^2 + 11x - 3 > 0$.
6. $8x - x^2 - 16 < 0$.
7. $12x - x^2 - 37 > 0$.
8. $x^2 + 14x + 49 > 0$.

En cada uno de los ejercicios 9-12, hallar los valores de x para los cuales la función dada es positiva, negativa y cero, y tiene un máximo o un mínimo, Comprobar los resultados gráficamente.

9. $x^2 - 5x + 4$.
10. $3 - 5x - 2x^2$.
11. $x^2 - 4x + 4$.
12. $4x^2 - 7x + 53$.

En cada uno de los ejercicios 13-15, sea $y = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática tal que las raíces de $y = 0$ sean r_1 y r_2.

13. Si r_1 y r_2 son reales y desiguales, y $r_1 > r_2$, demostrar que y tiene el mismo signo que a cuando $x > r_1$ y $x < r_2$, y es de signo contrario a a cuando $r_1 > x > r_2$.
14. Si r_1 y r_2 son reales e iguales, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a cuando $x \neq r_1$.
15. Si r_1 y r_2 son números complejos conjugados, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a para todos los valores de x.
16. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor máximo igual a 4 para $x = -2$.
17. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor mínimo igual a 5 para $x = 3$.

Los problemas enunciados en los ejercicios 18-23 deben comprobarse gráficamente.

18. La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es constante e igual a 14 cm. Hallar las longitudes de los catetos si el área del triángulo debe ser máxima.
19. La suma de dos números es 8. Hallar estos números si la suma de sus cuadrados debe ser mínima.
20. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Hallar sus dimensiones si su área debe ser máxima.
21. Hallar el número que excede a su cuadrado en un número máximo.
22. Demostrar que de todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo el cuadrado es el de área máxima.

23. Una viga simplemente apoyada de longitud l pies está uniformemente cargada con w libras por pie. En Mecánica se demuestra que a una distancia de x pies de un soporte, el momento flexionante M en pies-libras está dado por la fórmula $M = \frac{1}{2} wlx - \frac{1}{2} wx^2$. Demostrar que el momento flexionante es máximo en el centro de la viga.

24. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro o luz es de 12 m y cuya altura es de 6 m.

25. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 m y la depresión de 20 metros.

CAPITULO VII

LA ELIPSE

60. Definiciones. Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

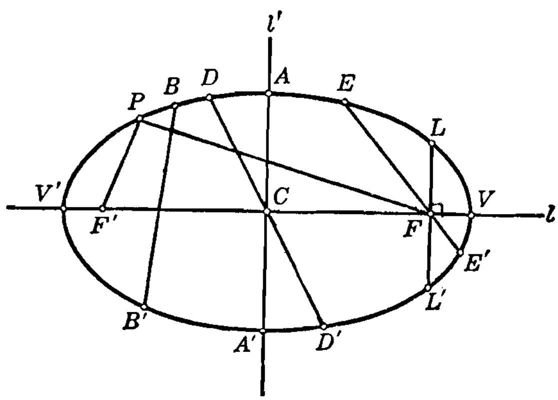

Fig. 86

Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Designemos por F y F' (fig. 86) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje mayor*. El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama *centro*. La recta l' que pasa por

C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término *eje normal* para designarla. El eje normal l' corta a la elipse en dos puntos, A y A', y el segmento AA' se llama *eje menor*. Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama *cuerda*. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE', se llama *cuerda focal*. Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama un *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

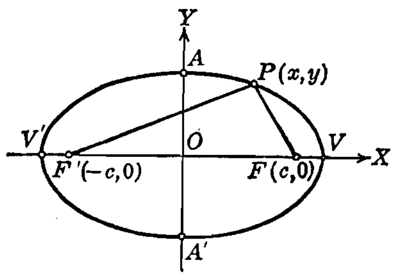

Fig. 87

61. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse. Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 87). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (1)$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

de donde,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2, es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, x_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (5), de manera que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas para pasar de la ecuación (2) a la (5), y dando la debida interpretación a los signos de los radicales, podemos demostrar que la ecuación (6) conduce a la relación

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = 2a,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Ahora discutiremos la ecuación (5) de acuerdo con el Artículo 19. Por ser a y $-a$ las intersecciones con el eje X, las coordenadas de los vértices V y V' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje mayor es igual a $2a$, la constante que se menciona en la definición de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son b y $-b$. Por tanto, las coordenadas de los extremos A y A' del eje menor son $(0, b)$ y $(0, -b)$, respectivamente, y la longitud del eje menor es igual a $2b$.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{7}$$

Luego, se obtienen valores reales de y solamente para valores de x del intervalo

$$-a \leq x \leq a. \tag{8}$$

Si de la ecuación (5) despejamos x, obtenemos

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

de manera que se obtienen valores reales de x, solamente para valores de y dentro del intervalo

$$-b \leq y \leq b. \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

Evidentemente, la elipse no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

La abscisa del foco F es c. Si en (7) sustituímos x por este valor se obtienen las ordenadas correspondientes que son

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2},$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$. Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

Un elemento importante de una elipse es su *excentricidad* que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente por la letra e. De (4) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{10}$$

Como $c < a$, *la excentricidad de una elipse es menor que la unidad.*

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y. Las coordenadas de los focos son entonces $(0, c)$ y $(0, -c)$. En este caso, por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{11}$$

en donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$. La discusión completa de la ecuación (11) se deja al estudiante como ejercicio.

Las ecuaciones (5) y (11) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse*. Son las ecuaciones más simples de la elipse y, por tanto, nos referiremos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje* X, *distancia focal igual a* 2c *y cantidad constante igual a* 2a *es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, — c), *la ecuación de la elipse es*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *la del semieje menor, y* a, b *y* c *están ligados por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ *y la excentricidad* e *está dada por la fórmula*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

NOTA. Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma canónica, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Ejemplo. Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (0, 3) y la excentricidad es igual a ½, hallar las coordenadas de otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

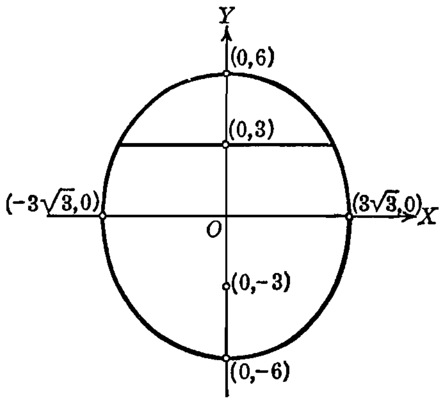

Fig. 88

Solución. Como uno de los focos es el punto (0, 3), tenemos $c = 3$, y las coordenadas del otro foco son (0, −3). Como la excentricidad es ½, tenemos

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$

de donde, $a = 6$. Tenemos, también,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

La longitud de cada lado recto es $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot 27}{6} = 9.$

El lugar geométrico es el representado en la figura 88.

EJERCICIOS. Grupo 27

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir la ecuación ordinaria $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ a partir de la definición de la elipse.

2. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

3. Dados los focos y la longitud de su eje mayot, demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadras y compás.

4. Demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadra y compás si se conocen sus ejes mayor y menor.

5. Demostrar que la circunferencia es un caso particular de la elipse cuya excentricidad vale cero.

En cada uno de los ejercicios 6-9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.

6. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

9. $x^2 + 3y^2 = 6$.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

11. Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$, y sus focos son los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$. Hallar su ecuación,

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

13. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

14. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

15. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

17. Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

$$\frac{2a}{2b} = \frac{2b}{\frac{2b^2}{a}}$$

18. Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

19. Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

20. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

21. Hallar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

las longitudes.

22. Los puntos extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores FP_1 y FP_2 es igual a la longitud del eje mayor.

23. Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene de excentricidad $\frac{1}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 24-26, usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

24. Focos $(3, 8)$ y $(3, 2)$; longitud del eje mayor $= 10$.
25. Vértices $(-3, -1)$ y $(5, -1)$; excentricidad $= \frac{3}{4}$.
26. Vértices $(2, 6)$ y $(2, -2)$; longitud del lado recto $= 2$.

27. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(0, -2)$.

28. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón $1 : 4$. (Dos soluciones.)

30. Un segmento AB de longitud fija se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Si P es un punto cualquiera, distinto de A y B, y que no esté sobre el segmento AB o en su prolongación, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una elipse. Un instrumento basado sobre este principio se usa para construir elipses teniendo como datos los ejes mayor y menor.

62. Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados. Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X tal como se indica en la figura 89. Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, del teorema 1, Artículo 61, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

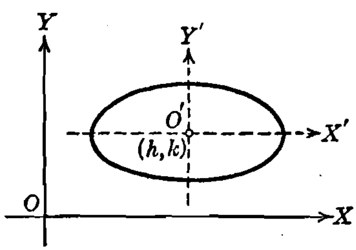

Fig. 89

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

De la ecuación (1) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciones de transformación del teorema 1, Artículo 50, a saber:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde:

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y.

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, la *segunda ecuación ordinaria de la elipse*. Los resultados precedentes, juntos con el teorema 1 del Artículo 61, nos dan el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación de la elipse de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *está dada por la segunda forma ordinaria,*

$$\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{b}^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria*

$$\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{a}^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *es la del semieje menor,* c *es la distancia del centro a cada foco, y* a, b *y* c *están ligadas por la relación*

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$\mathrm{e} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}}{\mathrm{a}} < 1.$$

Ejemplo 1. Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 90) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

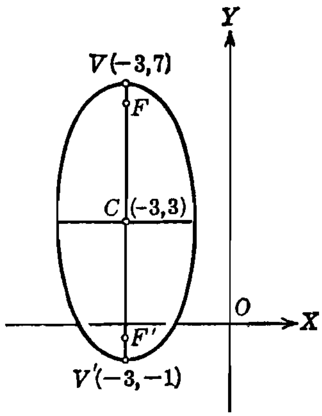

Fig. 90

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto, $(-3, 3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente. Por tanto, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Como $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son $F(-3, 3 + 2\sqrt{3})$ y $F'(-3, 3 - 2\sqrt{3})$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0, \qquad (4)$$

la cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (5)$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo.