Ejemplo 1. Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 90) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

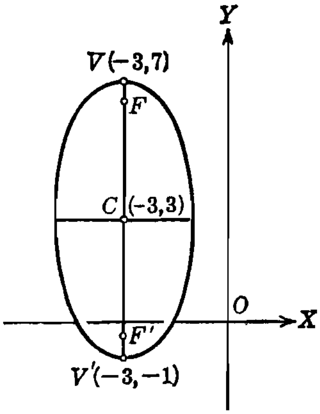

Fig. 90

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto, $(-3, 3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente. Por tanto, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Como $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son $F(-3, 3 + 2\sqrt{3})$ y $F'(-3, 3 - 2\sqrt{3})$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0, \tag{4}$$

la cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{5}$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (5) y reduzcámosla a la forma ordinaria (2) completando cuadrados. Obtenemos

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2} \qquad (6)$$

Sea $M=\dfrac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$. Si $M\neq 0$, la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1, \qquad (7)$$

que es la ecuación ordinaria de la elipse.

Como A y C deben concordar en signo, podemos suponer, sin perder generalidad, que son ambos positivos. Por lo tanto, si (5) debe representar una elipse, la ecuación (7) demuestra que M debe ser positivo. El denominador $4A^2C^2$ de M es positivo; por tanto, el signo de M depende del signo de su numerador CD^2+AE^2-4ACF, al que designaremos por N. De acuerdo con esto, comparando las ecuaciones (6) y (7), vemos que, si $N>0$, (5) representa una elipse; de (6), si $N=0$, (5) representa el punto único

$$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2C}\right),$$

llamado usualmente una elipse punto, y si $N<0$, la ecuación (6) muestra que (5) no representa ningún lugar geométrico real.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 3. *Si los coeficientes* A *y* C *son del mismo signo, la ecuación*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplo 2. La ecuación de una elipse es $x^2+4y^2+2x-12y+6=0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Solución. Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. Resulta:

$$(x^2+2x)+4(y^2-3y)=-6$$

y

$$(x^2+2x+1)+4(y^2-3y+\tfrac{9}{4})=-6+1+9,$$

de donde, $$(x+1)^2 + 4(y - \tfrac{3}{2})^2 = 4,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} = 1.$$

Las coordenadas del centro C son, evidentemente, $(-1, \frac{3}{2})$, y el eje focal es paralelo al eje X. Como $a^2 = 4$, $a = 2$, y las coordenadas de los vértices V y V'

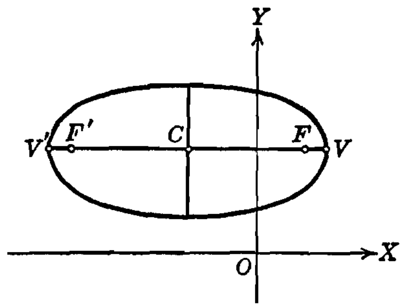

Fig. 91

son $(-1+2, \frac{3}{2})$ y $(-1-2, \frac{3}{2})$, o sea, $(1, \frac{3}{2})$ y $(-3, \frac{3}{2})$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 - b^2$, resulta, $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, y las coordenadas de los focos F y F' son $(-1+\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ y $(-1-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a = 4$, la del eje menor es $2b = 2$, y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
El lugar geométrico está representado en la figura 91.

EJERCICIOS. Grupo 28

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la elipse.

3. Si la ecuación de una elipse viene dada en la forma

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2,$$

demostrar que las coordenadas de sus vértices son $(h+a, k)$, $(h-a\ \ k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h+c, k)$, $(h-c, k)$, en donde, $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

4. Usar la primera ecuación de la elipse para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la elipse: Si O es el centro de una elipse cuyos semiejes mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2}+\frac{\overline{PQ}^2}{b^2}=1.$$

5. Aplicando la propiedad intrínseca de la elipse, establecida en el ejercicio 4, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse.

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$

14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$

15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$

16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 62 trasladando los ejes coordenados.

18. Resolver el ejercicio 16 por traslación de los ejes coordenados.

19. Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

20. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

21. Hallar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $(2, 3)$, un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual

a $\frac{1}{2}$. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

22. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 1)$.

23. La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

24. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

25. El punto medio de una cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

27. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

28. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

29. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2+y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

63. Propiedades de la elipse. Muchas de las propiedades más importantes de la elipse están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una elipse es de segundo grado, sus tangentes pueden determinarse empleando la condición para la tangencia estudiada en el Artículo 44. El procedimiento para la resolución de problemas relativos a tangentes a la elipse es, por lo tanto, idéntico al usado para la circunferencia (Art. 45) y la parábola (Art. 57). Por esto, se deja como ejercicio el demostrar los teoremas 4 y 5 que enunciamos a continuación:

TEOREMA 4. *La tangente a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

TEOREMA 5. *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente* m *a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Una importante propiedad focal de la elipse está basada en el siguiente teorema:

TEOREMA 6. *La normal a una elipse en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema no pierde generalidad tomando la ecuación de la elipse en su forma canónica

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

En este caso, sea n (fig. 92) la normal a la elipse en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la curva. Sea α el ángulo formado por n y el radio vector FP_1, y β el formado por n y el radio vector $F'P_1$. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

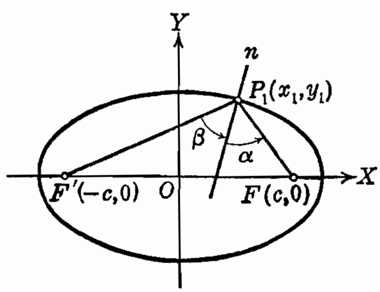

Fig. 92

Por el teorema 4 anterior, la pendiente de la elipse en $P_1(x_1, y_1)$ es $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$, de manera que la pendiente de la normal n es $\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$. Las pendientes de los radios vectores FP_1 y $F'P_1$ son $\dfrac{y_1}{x_1 - c}$ y $\dfrac{y_1}{x_1 + c}$, respectivamente. Entonces, por el teorema 5, Artículo 10, resulta:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - c} - \dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\dfrac{y_1}{x_1 - c}\right)\left(\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} = \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2x_1^2 - b^2cx_1 + a^2y_1^2}.$$

Como el punto P_1 está sobre la elipse, sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Usando esta relación y la relación $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} = \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)}$$

$$= \frac{cy_1(-cx_1 + a^2)}{b^2(-cx_1 + a^2)} = \frac{cy_1}{b^2}.$$

Análogamente, tenemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \dfrac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)\left(\dfrac{y_1}{x_1 + c}\right)} = \frac{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1{}^2 + b^2 c x_1 + a^2 y_1{}^2}$$

$$= \frac{x_1 y_1 (a^2 - b^2) + a^2 c y_1}{a^2 b^2 + b^2 c x_1} = \frac{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{b^2 (a^2 + c x_1)}$$

$$= \frac{c y_1 (c x_1 + a^2)}{b^2 (c x_1 + a^2)} = \frac{c y_1}{b^2}.$$

Por tanto, como $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = \beta$.

Aplicando la ley de la reflexión (Art. 59), el teorema 6 es evidente. En efecto, consideremos una superficie de reflexión que tenga como sección recta una elipse; supongamos que se coloca un foco luminoso en el foco F de la elipse, y que un rayo incide sobre la elipse en el punto P_1. Entonces este rayo será reflejado de tal manera que el ángulo de reflexión β sea igual al ángulo de incidencia α. Pero, por el teorema 6, tal rayo reflejado pasará por el otro foco F'. Luego los rayos de un foco luminoso colocado en un foco de la elipse al incidir sobre la curva se reflejan de manera que pasan por el otro foco. Como las ondas sonoras se reflejan como las luminosas. los sonidos originados en uno de los focos pueden ser oídos claramente en el otro foco y ser inaudibles en los puntos intermedios. Este es el principio en que se basa la construcción de las cámaras secretas.

Vamos a mencionar brevemente algunas otras aplicaciones de la elipse. Los arcos usados en la construcción tienen, frecuentemente, la forma de arcos elípticos. En ciertos tipos de máquinas se usan engranes elípticos. Algunas partes estructurales de metal se construyen de sección recta elíptica. Es también interesante notar que los planetas en su recorrido alrededor del Sol se mueven en órbitas elípticas en las cuales el Sol ocupa uno de los focos.

EJERCICIOS. Grupo 29

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 4 del Artículo 63.
2. Demostrar el teorema 5 del Artículo 63.
3. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 4 del Artículo 63: La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1 x + y_1 y = a^2$. (Véase el ejercicio 10 del grupo 18, Artículo 45.)

4. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 5 del Artículo 63: Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ son } y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}.$$

(Véase el ejercicio 16 del grupo 18, Art. 45.)

5. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6. $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, -1)$.

7. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$.

9. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2+y^2+4x-2y-3=0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

11. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;

b) son tangentes a la elipse;

c) no cortan a la elipse.

12. Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $3x^2 + 4y^2 = 43$ y $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

13. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

14. Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$.

15. Se tienen como datos una elipse y sus focos. Por medio del teorema 6 (Art. 63) demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la elipse.

16. Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por su centro, la elipse es una circunferencia.

17. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

18. Demostrar que la pendiente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

19. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

20. Por el punto $(2, 7)$ se trazan tangentes a la elipse

$$2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0.$$

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

21. Si desde un punto exterior P_1 se trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa elipse. (Véase el ejercicio 27 del grupo 25, Art. 57.) Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$. (Véase el teorema 4 del Art. 63.)

22. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto $(3, 1)$ para la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$.

23. Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = -\frac{b^2}{a^2m}x, \quad m \neq 0.$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una recta que pasa por el centro y, por tanto, es un *diámetro* de la elipse. (Véase el ejercicio 29 del grupo 25, Art. 57.)

24. Establecer y demostrar un teorema para la circunferencia que sea análogo al teorema dado en el ejercicio 23 para la elipse.

25. Demostrar que si un diámetro de una elipse biseca todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la elipse.

CAPITULO VIII

LA HIPERBOLA

64. Definiciones. Una *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento

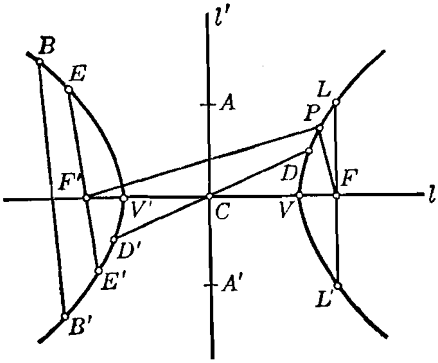

Fig. 93

comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

El lector debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de la hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En el artículo siguiente veremos que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la figura 93 se ha dibujado una porción de cada una de estas ramas; los focos están designados por F y F'. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje transverso*. El punto medio C del eje transverso se llama *centro*. La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; nosotros, como lo hicimos para la elipse, consideramos conveniente introducir el término *eje normal* para esta recta. El eje normal l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, el segmento AA' en la figura 93, que tiene C por punto medio, se llama *eje conjugado*. La longitud del eje conjugado se dará en el siguiente artículo. El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda;* estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como para la cuerda BB', o uno de una rama y el otro de la otra, como para el eje transverso VV'. En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama *cuerda focal* Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto;* evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

65. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola. Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 94). Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

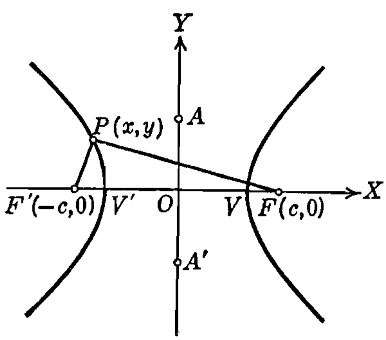

Fig. 94

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a, \tag{1}$$

en donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones,

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (2)$$

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = -2a. \qquad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a, \qquad (5)$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación (2) del Artículo 61 para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (6)$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación

$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad (7)$$

obtenemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Podemos demostrar recíprocamente, que si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (8), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y, por lo tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiemos ahora la ecuación (8) de acuerdo con el Artículo 19. Las intersecciones con el eje X son a y $-a$. Por tanto, las coordenadas de los vértices V y V son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje transverso es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.

La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Despejando y de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (9)$$

Por tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = -a$.

Despejando x de la ecuación (8) se obtiene

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}, \qquad (10)$$

de la cual vemos que x es real para todos los valores reales de y.

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntas, con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda y por arriba y abajo del eje X.

La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales ni horizontales. En el siguiente artículo demostraremos, sin embargo, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

Como para la elipse, la excentricidad e de una hipérbola está definida por la razón $\dfrac{c}{a}$. Por tanto, de (7), tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \qquad (11)$$

Como $c > a$, *la excentricidad de una hipérbola es* ***mayor*** *que la unidad*.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

La discusión completa de la ecuación (12) se deja al estudiante.

Las ecuaciones (8) y (12) las llamaremos *primera ecuación ordinaria de la hipérbola*. Son las más simples de esta curva por lo que nos referiremos a ellas como formas canónicas.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje* X, *y focos los puntos* (c, 0) *y* (– c, 0), *es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, – c), *entonces la ecuación es*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso,* b *la del semieje conjugado,* c *la distancia del centro a cada foco, y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

NOTA. La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota del teorema 1 del Artículo 61. Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ o $a = b$. La posición de la hipérbola se determina por los *signos* de los coeficientes de las variables en la forma canónica de su ecuación. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Ejemplo. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos los puntos $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Solución. Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente, en el origen. Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos es $2c = 10$. Por tanto, $a = 3$ y $c = 5$, de donde

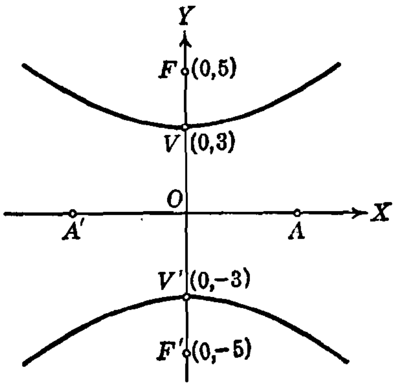

Fig. 95

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$, Por lo tanto, $b = 4$, y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, y la longitud de cada lado recto e $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$.

El lugar geométrico está representado en la figura 95, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X.

EJERCICIOS. Grupo 30

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar que las ecuaciones (4) y (5) del Artículo 65 se reducen cada una a la ecuación (6).

2. Demostrar que si P_1 es un punto cualquiera cuyas coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, entonces P_1 está sobre la hipérbola representada por esta ecuación.

3. Deducir la ecuación ordinaria $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ a partir de la definición de hipérbola.

4. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

5. Demostrar un procedimiento para obtener, con escuadras y compás, puntos de una hipérbola, dados los focos y la longitud de su eje transverso.

En cada uno de los ejercicios 6-9, para la ecuación dada de la hipérbola, hállense las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Trácese y discútase el lugar geométrico.

6. $9x^2 - 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

8. $9y^2 - 4x^2 = 36$.

9. $x^2 - 4y^2 = 4$.

10. Los vértices de una hiperbola son los puntos $V(2, 0)$, $V'(-2, 0)$, y sus focos son los puntos $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

11. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0, 5)$ y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

12. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

13. Los vértices de una hipérbola son $(0, 4)$, $(0, -4)$, y su excentricidad es igual a $3/2$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

14. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ y que la curva pasa por el punto $(2, 1)$.

15. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es $3/8$, y la hipérbola pasa por el punto $(-1, 2)$. Hallar su ecuación.

16. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

En cada uno de los ejercicios 17-19, usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados. Mediante un cambio de coordenadas, poner la ecuación en la primera forma ordinaria.

17. Focos $(-7, 3)$, $(-1, 3)$; longitud del eje transverso $= 4$.

18. Vértices $(1, 4)$, $(5, 4)$: longitud del lado recto $= 5$.

19. Vértices $(3, 4)$, $(3, -2)$; excentricidad $= 2$.

20. Demostrar que la longitud del eje conjugado de una hipérbola es media proporcional entre las longitudes de su eje transverso y su lado recto.

21. Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

22. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, demostrar que las longitudes de sus radios vectores son $|ex_1+a|$ y $|ex_1-a|$.

23. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(6, 5)$ de la hipérbola $5x^2-4y^2=80$.

24. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x-3=0$.

25. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus puntos extremos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4. Trazar el lugar geométrico.

66. Asíntotas de la hipérbola. Si de la forma canónica de la ecuación de la hipérbola

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2, \tag{1}$$

despejamos y, obtenemos

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

que puede escribirse en la forma

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \tag{2}$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. (Ver nota 3, Art. 18.) Si un punto de la hipérbola (1) se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro de (2) se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación tiende a la forma

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Como la ecuación (3) representa las rectas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota (Art. 18), que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas. Ahora demostraremos que esta deducción es correcta.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola (1), como se indica en la figura 96. La ecuación de la recta $y=\frac{b}{a}x$ puede escribirse en la forma

$$bx-ay=0. \tag{4}$$

Por el teorema 9 del Artículo 33, la distancia d de la recta (4) al punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}}. \qquad (5)$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro de (5) por $|bx_1 + ay_1|$, obtenemos

$$d = \frac{|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \qquad (6)$$

Pero como P_1 está sobre la hipérbola (1), $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, de manera que la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$d = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \qquad (7)$$

Si P_1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y se aleja indefinidamente del origen, sus coordenadas, x_1 y y_1, aumentan ambas

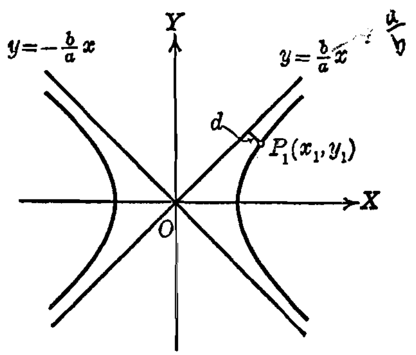

Fig. 96

de valor sin límite, de manera que, por la ecuación (7), d decrece continuamente y se aproxima a cero. Se sigue, de acuerdo con esto, por la definición de asíntota (Art. 18), que la recta (4) es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola (1).

Si P_1 está sobre la parte inferior de la rama izquierda de la hipérbola (1) y se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva alejándose indefinidamente del origen, entonces sus coordenadas x_1 y y_1 aumentan de valor ambas sin límite en la dirección negativa. La ecuación (7) muestra entonces que d decrece continuamente y tiende a cero, de donde se sigue que la recta (4) es también una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola (1).

Quedan dos casos por considerar que son, cuando P_1 está sobre la parte inferior de la rama derecha y cuando está sobre la parte superior de la rama izquierda. Empleando el mismo razonamiento que en los dos párrafos anteriores, podemos demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de ambas ramas de la hipérbola (1).

Estos resultados se resumen en el siguiente:

TEOREMA 2. *La hipérbola* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, *tiene por asíntotas las rectas* $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

NOTAS. 1. Si la ecuación de una hipérbola está en su forma canónica, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, tenemos $9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde, $(3x + 2y)(3x - 2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son $3x + 2y = 0$ y $3x - 2y = 0$.

2. La gráfica de una hipérbola puede esbozarse muy fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guía* (ver nota 4, Art. 18).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6, 2) tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución. Por el teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta $2x + 5y = 0$. Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación

$$(2x - 5y)(2x + 5y) = k,$$

o sea,

$$4x^2 - 25y^2 = k.$$

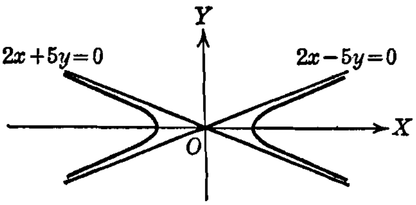

Fig. 97

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto (6, 2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto, si hacemos $x = 6$ y $y = 2$ en la última ecuación, hallamos $k = 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es

$$4x^2 - 25y^2 = 44.$$

La gráfica es la figura 97.

67. Hipérbola equilátera o rectangular. Consideremos la hipérbola especial cuyos ejes transverso y conjugado son de igual longitud. Entonces $a = b$, y la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ toma la forma más sencilla

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (1)$$

Debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola (1) se llama ***hipérbola equilátera***.

Por el teorema 2 del Artículo 66, las asíntotas de la hipérbola equilátera (1) son las rectas $x - y = 0$ y $x + y = 0$. Como estas rectas son perpendiculares, resulta que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Por esta razón la hipérbola equilátera se llama también *hipérbola rectangular*. Es un ejercicio fácil demostrar que, recíprocamente, una hipérbola rectangular es también equilátera.

Una forma particularmente simple y útil de la ecuación de la hipérbola equilátera es

$$xy = k, \tag{2}$$

en donde k es una constante cualquiera diferente de cero. Aplicando los métodos del Artículo 18, podemos demostrar que la curva (2) tiene por asíntotas a los ejes coordenados, y que, si k es positivo la gráfica es como se ve en la figura 98. El estudiante debe demostrar que si se giran los ejes coordenados un ángulo de 45°, la ecuación (2) se transforma en $x'^2 - y'^2 = 2k$, que es la ecuación de una hipérbola equilátera.

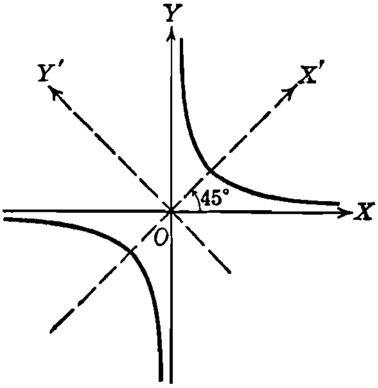

Fig. 98

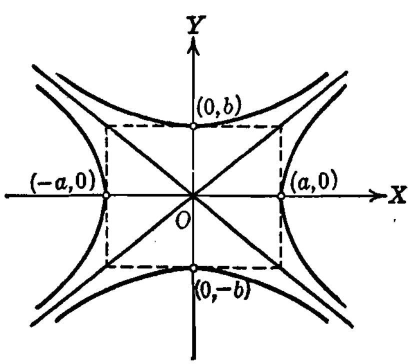

Fig. 99

68. Hipérbolas conjugadas. Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra, se llaman *hipérbolas conjugadas*. Cada hipérbola es entonces la *hipérbola conjugada* de la otra, y también se dice que cada hipérbola es *conjugada* con respecto a la otra.

Si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

entonces, de acuerdo con la definición, la hipérbola conjugada de (1) tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Evidentemente, la ecuación (2) puede obtenerse de la ecuación (1) cambiando simplemente el signo de uno de los miembros de (1). Así, si la ecuación de una hipérbola es $2x^2 - 7y^2 = 18$, entonces la ecuación de su hipérbola conjugada es $7y^2 - 2x^2 = 18$.

El par de hipérbolas conjugadas (1) y (2), junto con sus asíntotas, se han trazado en la figura 99. Es un ejercicio sencillo demostrar que un par de hipérbolas conjugadas tienen un centro común, un par común de asíntotas, y todos sus focos equidistan del centro.

El estudiante debe observar el rectángulo dibujado en la figura 99. Un bosquejo aproximado de un par de hipérbolas conjugadas pueden obtenerse fácilmente construyendo primero este rectángulo, ya que sus diagonales son las asíntotas.

EJERCICIOS. Grupo 31

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha.

2. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda.

3. Demostrar que la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas $by - ax = 0$ y $by + ax = 0$.

4. Hallar y trazar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$4x^2 - 5y^2 = 7.$$

5. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta

$$2x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

7. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

8. Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a una cualquiera de sus dos asíntotas.

9. Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre sí, la hipérbola es equilátera.

10. Discutir y trazar la gráfica de la ecuación $xy = -8$.

11. Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

12. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

13. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a dos rectas perpendiculares es siempre igual a una constante.

14. Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $(-1, -5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

15. Demostrar que la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional entre las longitudes de los radios vectores del punto. *Sugestión*: Véase el ejercicio 22 del grupo 30, Artículo 65, y el ejercicio 11 de este grupo.

16. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

17. Demostrar que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

18. Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugadas están sobre una circunferencia.

19. Demostrar que si una hipérbola es equilátera, su hipérbola conjugada es también equilátera.

20. La excentricidad de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es e_1. Si la excentricidad de su hipérbola conjugada es e_2 demostrar que $e_1 : e_2 = b : a$.

21. Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2, demostrar que $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$.

22. Demostrar que la distancia de un foco a una cualquiera de las asíntotas de una hipérbola es igual a la longitud de su semieje conjugado.

23. Si α es el ángulo agudo de inclinación de una asíntota de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que su excentricidad es igual a sec α.

24. Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de una hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

25. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

69. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola. Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse (Art. 62). Por esto, se deja al estudiante, como ejercicio, el demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *La ecuación de una hipérbola de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación es*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso*, b *la del semieje conjugado*, c *la distancia del centro a cada uno de los focos*, *y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Una discusión de la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, análoga a la discusión que para la elipse nos condujo al teorema 3 del Artículo 62, nos da el siguiente

TEOREMA 4. *Si los coeficientes* A y C *difieren en el signo*, *la ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, *o un par de rectas que se cortan*.

Ejemplo. Discutir el lugar geométrico de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0. \qquad (1)$$

Solución. Vamos a reducir la ecuación (1) a la forma ordinaria completando los cuadrados. Entonces,

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

y

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4,$$

de donde,

$$9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1, \qquad (2)$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto $(3, 1)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje Y (fig. 100).

Como $a^2 = 9$, $a = 3$, y las coordenadas de los vértices V y V' son $(3, 1+3)$ y $(3, 1-3)$, o sea, $(3, 4)$ y $(3, -2)$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, y las coordenadas de los focos F y F' son

$(3,\ 1+\sqrt{13})$ y $(3,\ 1-\sqrt{13})$, respectivamente. La longitud del eje transverso es $2a = 6$, la del eje conjugado es $2b = 4$, y la de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, aplicaremos el teorema 2 del Artículo 66, teniendo en cuenta que el centro de la hipérbola es el punto $(3,\ 1)$

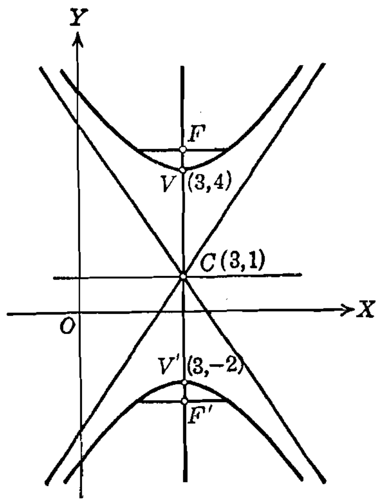

Fig. 100

y no el origen. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen sea el centro $C(3,\ 1)$, la ecuación (2) se reduce a la forma canónica

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1,$$

de modo que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los nuevos ejes se obtienen de la relación

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 0.$$

Pero esta última relación al ser referida a los ejes originales X y Y, toma la forma

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 0, \qquad (3)$$

de donde,

$$\left(\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2}\right) = 0,$$

de manera que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los ejes originales X y Y son

$$\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2} = 0$$

o sea, $$3x + 2y - 11 = 0, \quad y \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

El estudiante debe observar que la relación (3) puede obtenerse inmediatamente reemplazando el término constante por cero en el segundo miembro de la ecuación ordinaria (2). (Ver el ejercicio 13 del grupo 32, siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 32

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 3 del Artículo 69.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

3. Si la ecuación de una hipérbola está dada en la forma

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que las coordenadas de sus vértices son $(h + a, k)$, $(h - a, k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h + c, k)$, $(h - c, k)$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Emplear la primera ecuación ordinaria de la hipérbola para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la hipérbola: Si el punto O es el centro de una hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la hipérbola a su eje focal, se verifica que

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} - \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Por medio de la propiedad intrínseca de la hipérbola, establecida en el ejercicio 4, deducir ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.

6. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y de cada lado recto.

7. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

8. El centro de una hipérbola es el punto $(2, -2)$ y uno de sus vértices el punto $(0, -2)$. Si la longitud de su lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.

9. Los focos de una hipérbola son los puntos $(4, -2)$ y $(4, -8)$, y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

10. El centro de una hipérbola es el punto $(4, 5)$ y uno de sus focos es $(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

11. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

12. Demostrar el teorema 4 del Artículo 69.

13. Demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

son $bx + ay - ak - bh = 0$ y $bx - ay + ak - bh = 0$.

En cada uno de los ejercicios 14-18, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

14. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.

15. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$.

16. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.

17. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$.

18. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$.

19. Resolver el ejercicio 14 por traslación de los ejes coordenados.

20. Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

21. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

22. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

23. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

24. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

25. Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

70. Propiedades de la hipérbola. Muchas propiedades de la hipérbola están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición para tangencia discutida en el Artículo 44. Las demostraciones de los teoremas 5 y 6, enunciados a continuación, se dejan como ejercicios al estudiante. Debe comparar estos teoremas con los análogos establecidos para la elipse (Art. 63, teoremas 4 y 5).

TEOREMA 5. *La ecuación de la tangente a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva es*

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$ ("como" la elipse, pag 186)

TEOREMA 6. *Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

de pendiente m *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$

La hipérbola tiene una propiedad focal análoga a la de la elipse. Esta propiedad está basada en el siguiente teorema 7. La demostración es semejante a la del teorema análogo para la elipse (teorema 6, Art. 63) y, por tanto, se deja al estudiante como ejercicio.

TEOREMA 7. *La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

Para algunos de los teoremas que figuran en el siguiente grupo de ejercicios, hay teoremas análogos sobre la elipse; esto se hace notar en cada caso recomendando al lector que compare el teorema particular con su análogo en el grupo 29 del Artículo 63. También debe observarse que si en una ecuación relativa a una elipse se sustituye la cantidad b^2 por $-b^2$, la relación análoga se verifica entonces para la hipérbola.

EJERCICIOS. Grupo 33

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 5 del Artículo 70.
2. Demostrar el teorema 6 del Artículo 70.
3. En el teorema 6 del Artículo 70, ¿por qué la pendiente m está restringida a los valores comprendidos en el intervalo $|m| > \frac{b}{a}$? Interpretar el resultado cuando $|m| = \frac{b}{a}$.
4. Demostrar el teorema 7 del Artículo 70.

En cada uno de los ejercicios 6-8, hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la hipérbola dada, en el punto de contacto indicado.

5. $3x^2 - y^2 = 2$; $(1, 1)$.
6. $2x^2 - 3y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$; $(4, 2)$.
7. $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

9. Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas del punto (3, 6) a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

10. Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

11. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la hipérbola $b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$ son

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$

(elipse prob 13, pag 189)

(Ver el ejercicio 13 del grupo 29, Art. 63.)

12. Se dan una hipérbola y sus focos. Aplicando el teorema 7 del Artículo 70, demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la curva.

13. Demostrar que la ecuación de la normal a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x + b^2x_1y - a^2x_1y_1 - b^2x_1y_1 = 0$. (Ver el ejercicio 14 del grupo 29, Art. 63.)

14. Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales entre sí en sus puntos de intersección.

15. Demostrar que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos. Tales curvas se llaman *cónicas homofocales*. Demostrar que la elipse y la hipérbola del ejercicio 14 son también homofocales.

16. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje conjugado. (Ver el ejercicio 19 del grupo 29, Art. 63.)

17. Demostrar que la pendiente de una hipérbola en cualquier extremo de cualquiera de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad. (Ver el ejercicio 18 del grupo 29, Art. 63.)

18. Demostrar que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

19. En un punto cualquiera P, excepto el vértice, de una hipérbola equilátera, se traza una normal que corta al eje focal en el punto Q. Si O es el centro de la hipérbola, demuéstrese que $|\overline{OP}| = |\overline{PQ}|$.

20. Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

21. Las tangentes en los vértices de una hipérbola cortan a otra tangente cualquiera en los puntos P y Q. Demostrar que los puntos P y Q y los focos de la hipérbola están sobre una circunferencia.

22. Si desde un punto exterior P_1, se trazan tangentes a una hipérbola, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa hipérbola. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

(Ver el ejercicio 21 del grupo 29, Art. 63.)

23. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto $(-2, 4)$ de la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 3$.

24. Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = \frac{b^2}{a^2m}x; \quad m \neq 0, \quad m \neq \pm \frac{b}{a}.$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una línea recta que pasa por el centro; su ecuación es, por lo tanto, la ecuación de un *diámetro* de la hipérbola. (Ver el ejercicio 23 del grupo 29, Art. 63.)

25. Demostrar que si un diámetro de una hipérbola biseca a todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la hipérbola. (Ver el ejercicio 25 del grupo 29, Art. 63.)

71. Primer resumen relativo a las secciones cónicas. La parábola, elipse e hipérbola se llaman *secciones cónicas* o, simplemente, *cónicas*. Hemos visto que si la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa un lugar geométrico real, éste debe ser una sección cónica con uno de sus ejes paralelo (o coincidente) con uno de los ejes coordenados, o bien uno de los casos excepcionales de un punto, dos rectas coincidentes, dos rectas paralelas o dos rectas que se cortan. Estos casos excepcionales se llaman también *formas límite de las cónicas* o *cónicas degeneradas*.

En el cuadro que se da a continuación, hemos indicado los resultados principales obtenidos hasta aquí. Por conveniencia nos referimos al eje único de la parábola como a su eje focal. Además, para que el cuadro quede completo, hemos indicado que la parábola tiene una excentricidad igual a la unidad; esto será establecido en el capítulo siguiente. Como la elipse y la hipérpola tienen cada una un centro, se llaman *cónicas centrales*. La parábola, no teniendo centro, se llama *cónica no central*. La circunferencia puede considerarse como un caso especial de la elipse.

En la formación del cuadro, ha sido necesario, debido al tamaño limitado de la página, restringir algunos de los datos a referencias para otras partes del libro. El estudiante debe, por lo tanto, reproducir la tabla completa en una hoja de papel suficientemente grande e incluir todos los datos dados en las referencias. Puede añadir también otros datos, como, por ejemplo, las ecuaciones de las tangentes a las cónicas.

PRIMER RESUMEN RELATIVO A LAS CÓNICAS

Curva		Parábola	Elipse	Hipérbola
Definición		Art. 54	Art. 60	Art. 64
Constantes		p = distancia del vértice al foco = distancia del vértice a la directriz Foco sobre el eje	$2a$ = longitud del eje mayor $2b$ = longitud del eje menor $2c$ = distancia entre los focos $c^2 = a^2 - b^2$ Focos sobre el eje mayor	$2a$ = longitud del eje transverso $2b$ = longitud del eje conjugado $2c$ = distancia entre los focos $c^2 = a^2 + b^2$ Focos sobre el eje transverso
Primera ecuación ordinaria **Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el origen**	Eje focal coincidente con el eje X	$y^2 = 4px$ Directriz: $x = -p$: foco $(p, 0)$ (Art. 55, teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (Art. 61, teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (Art. 65, teorema 1)
	Eje focal coincidente con el eje Y	$x^2 = 4py$ Directriz: $y = -p$; foco $(0, p)$ (Art. 55, teorema 1)	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Focos $(0, c)$, $(0, -c)$ (Art. 61, teorema 1)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Focos $(0, c)$, $(0, -c)$ (Art. 65, teorema 1)
Segunda ecuación ordinaria **Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el punto (h, k)**	Eje focal paralelo al eje X	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ (Art. 56, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 62, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, teorema 3)
	Eje focal paralelo al eje Y	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ (Art. 56, teorema 2)	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ (Art. 62, teorema 2)	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, teorema 3)
Longitud del lado recto		$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Excentricidad		$e = 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$ (Para la circunferencia, $e = 0$)	$e = \frac{c}{a} > 1$
Ecuación general de la cónica careciendo del término en xy: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		Ya sea $A = 0$ ó $C = 0$ (Art. 56, teorema 3)	A y C del mismo signo (Art. 62, teorema 3) Para la circunferencia, $A = C$ (Art. 40, teorema 2)	A y C de signo distinto (Art. 69, teorema 4)
Casos excepcionales		Dos rectas coincidentes; dos rectas paralelas (Ningún lugar geométrico) (Art. 56, teorema 3)	Punto (Ningún lugar geométrico) (Art. 62, teorema 3)	Dos rectas que se cortan (Art. 69, teorema 4)

CAPITULO IX

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

72. Introducción. En este capítulo haremos un estudio de la ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

En particular, consideraremos el caso en que la ecuación (1) contiene un término en xy, es decir, el caso en que $B \neq 0$. Demostraremos que por medio de una rotación de los ejes coordenados siempre es posible transformar la ecuación (1) en otra de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

en la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos, es diferente de cero, y no aparece el término en $x'y'$.

Hemos visto (Art. 71) que si la ecuación (2) representa un lugar geométrico real, representa o bien una cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Como la naturaleza de un lugar geométrico no se altera por transformación de coordenadas, se sigue que, si la ecuación (1) tiene lugar geométrico, este lugar geométrico debe ser también o una sección cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Por lo tanto, la ecuación (1) se toma, generalmente, como la *definición analítica de cónica*. De esto podemos inferir la existencia de una *definición geométrica* que incluya a todas las cónicas. Veremos más adelante (Art. 75) que tal definición general existe para la parábola, la elipse e hipérbola.

73. Transformación de la ecuación general por rotación de los ejes coordenados. Apliquemos a la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, las ecuaciones de transformación por rotación

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \quad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta,$$

dadas en el teorema 2 del Artículo 51. Tenemos :

$$A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)$$
$$+ C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)$$
$$+ E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0.$$

Si desarrollamos y agrupamos los términos, obtenemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

en donde,

$$\left.\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta,\\
B' &= 2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta),\\
C' &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta,\\
D' &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta,\\
E' &= E\cos\theta - D\operatorname{sen}\theta,\\
F' &= F.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si la ecuación transformada (2) va a carecer del término en $x'y'$, el coeficiente ~~de~~ B' debe anularse. Por tanto, debemos tener

$$2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0.$$

Por medio de las fórmulas trigonométricas del ángulo doble (Apéndice IC, 7), esta última ecuación puede escribirse en la forma

$$(C-A)\operatorname{sen}2\theta + B\cos 2\theta = 0. \qquad (4)$$

Si $A \neq C$, de la ecuación (4) tenemos la relación

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}.$$

Si $A = C$, entonces la ecuación (4) se reduce a la forma

$$B\cos 2\theta = 0.$$

Como $B \neq 0$, por hipótesis, se sigue (Apéndice IB, 2) que

$$\cos 2\theta = 0. \qquad (5)$$

El ángulo de rotación θ queda restringido al intervalo $0° \leq \theta < 90°$ (nota, teorema 2, Art. 51), de manera que el intervalo de variación para 2θ es $0° \leq 2\theta < 180°$. Por tanto, de la ecuación (5), tenemos

$$2\theta = 90° \quad \text{y} \quad \theta = 45°.$$

Resumiendo:

TEOREMA 1. *La ecuación general de segundo grado*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, *puede transformarse siempre en otra de la forma*

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (6)$$

sin término en $x'y'$, *haciendo girar los ejes coordenados un ángulo positivo agudo* θ *tal que*

$$tg\ 2\theta = \frac{B}{A - C}, \quad si\ A \neq C,$$

y

$$\theta = 45°, \quad si\ A = C.$$

NOTA. Por medio del teorema 1, es posible determinar el ángulo θ y por tanto, los valores de sen θ y cos θ para usarlos en las ecuaciones de transformación por rotación. De aquí que las ecuaciones de transformación pueden obtenerse *antes* de hacer la sustitución en la ecuación original. Esto nos conduce a reducir considerablemente la cantidad de operaciones en los problemas del tipo del ejemplo 2 del Artículo 51.

Del teorema 1 podemos deducir una conclusión muy importante. El ángulo de rotación θ es de $45°$, si $A = C$, o bien tal que

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C}, \quad \text{si } A \neq C.$$

Como $B \neq 0$, tg $2\theta \neq 0$, y, por tanto, θ es diferente de cero en todos los casos. De acuerdo con esto, la ecuación general (1) puede transformarse en la forma (6) girando los ejes coordenados un ángulo diferente de cero. Pero hemos visto que, si la ecuación (6) representa una sección cónica, el eje focal es paralelo a (o coincidente con) uno de los ejes coordenados, y recíprocamente. Por tanto, si la ecuación (1) representa una cónica, el eje focal debe ser oblicuo con respecto a los ejes coordenados y recíprocamente. Este resultado lo enunciamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si la ecuación general de segundo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, *representa una sección cónica, el eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados, y recíprocamente.*

74. El indicador $I = B^2 - 4AC$. En el Artículo 73 vimos que, si los ejes coordenados giran un ángulo θ, la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad B \neq 0, \tag{1}$$

se transforma en la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \tag{2}$$

en donde,

$$\left.\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta, \\ B' &= 2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta), \\ C' &= A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, \\ D' &= D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta, \\ E' &= E \cos \theta - D \operatorname{sen} \theta, \\ F' &= F. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Más aún, si se selecciona el ángulo de rotación θ como lo especifica el teorema 1 del Artículo 73, la ecuación (2) toma la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \tag{4}$$

En el Artículo 71 presentamos un resumen de la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (4). Por ejemplo, si A' o C' son iguales a cero, uno u otro, la ecuación (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincidente con) uno de los ejes coordenados, o constituye uno de los casos excepcionales de dos rectas diferentes o coincidentes, paralelas a uno de los ejes coordenados, o ningún lugar geométrico. Ahora diremos, con el fin de una mayor brevedad de expresión, que la ecuación (4) representa una *cónica género parábola*. Para los demás casos se usarán términos semejantes al anterior según las siguientes definiciones:

DEFINICIONES. 1. Si uno de los dos coeficientes A' o C' es igual a cero, la ecuación (4) representa una cónica *género parábola*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 3 del Artículo 56.

2. Si A' y C' son del mismo signo, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del *género elipse*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 3 del Artículo 62.

3. Si A' y C' son de signo contrario, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del *género hipérbola*, es decir, uno cualquiera de los casos especificados en el teorema 4 del Artículo 69.

Usando las tres primeras relaciones de (3) y la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, podemos demostrar fácilmente que

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC. \tag{5}$$

El lector debe notar particularmente que la relación (5) es independiente de θ, el ángulo de rotación. Como la cantidad $B^2 - 4AC$ *no cambia* de valor para *ninguna* rotación de los ejes coordenados, se llama *invariante* y se dice que es *invariante por rotación*.

Cuando la ecuación (1) es transformada en la ecuación (4), $B' = 0$, y la relación (5) se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C'. \tag{6}$$

Si uno cualquiera de los coeficientes A' o C' es igual a cero, la ecuación (4) y, por tanto, la (1), es del género parábola. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC = 0$.

Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación (4) y, en consecuencia, la (1), es del género elipse. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC < 0$.

Si A' y C' difieren en el signo, la ecuación (4) y, en consecuencia la (1), es del género hipérbola. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC > 0$.

Como la expresión $B^2 - 4AC$ *indica* la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (1), llamaremos *indicador** a este invariante. Denotaremos el indicador por la letra mayúscula I, es decir,

$$I = B^2 - 4AC.$$

Los resultados precedentes se pueden resumir en el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *La ecuación general de segundo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según que el indicador, $I = B^2 - 4AC$, *sea cero, negativo o positivo.*

Ejemplo. Determinar la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0. \tag{7}$$

Reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico y todos los sistemas de coordenadas que hayan sido necesarios.

Solución. Para la ecuación (7), el indicador es

$$I = B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -24.$$

Como $I < 0$, la ecuación (7) es del género elipse.

---

* N DEL T. Muchos autores llaman *discriminante* a esta expresión.

Para suprimir el término en xy, hacemos girar los ejes coordenados un ángulo θ tal que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

De $\operatorname{tg} 2\theta$ podemos obtener $\cos 2\theta$ ya sea por medio de un triángulo rectángulo o por la relación

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sec 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\theta + 1}},$$

de donde,

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{(4/3)^2+1}} = \frac{3}{5}.$$

Obsérvese que por ser θ agudo, 2θ está en el primero o en el segundo cuadrantes en donde el coseno y la tangente de un ángulo son *del mismo* signo. De este valor de $\cos 2\theta$ podemos obtener los valores de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$ por medio de las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad (apéndice IC, 8). Así,

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-(3/5)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+(3/5)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Las ecuaciones de transformación por rotación son entonces

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = \frac{2x'-y'}{\sqrt{5}},$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}.$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación (7), obtenemos

$$5\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$- 24\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) - 12\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 29 = 0,$$

la cual, por simplificación, toma la forma

$$6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0. \qquad (8)$$

La ecuación (8) puede simplificarse, bien por una traslación de los ejes X' y Y' o completando los cuadrados. El estudiante debe verificar el resultado, que es la elipse (fig. 101)

$$6x''^2 + y''^2 = 1.$$

En los problemas del tipo considerado en este artículo, la gráfica se construye, generalmente, a partir de la ecuación más simple obtenida finalmente por transformación de coordenadas. Se puede hacer una comprobación parcial de la exactitud de esta gráfica comparando sus intersecciones con los ejes originales, cuando existen dichas inter-

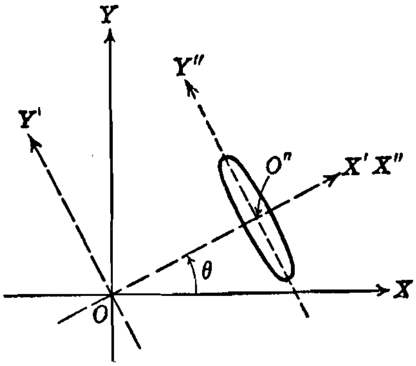

Fig. 101

secciones, con los valores de estas mismas intersecciones obtenidas a partir de la ecuación original.

El teorema 3 del Artículo 52 establece que el orden en que se efectúen la traslación y la rotación no tiene importancia. Fué anotado, sin embargo, en la nota 2 de este teorema que, si los términos de segundo grado forman un cuadrado perfecto, se debe hacer la rotación de los ejes antes de la traslación. En seguida demostraremos la razón de esto. Si reemplazamos x y y en la ecuación general (1) por sus valores dados en las ecuaciones de transformación para traslación

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

obtenemos

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0,$$

la cual, por desarrollo y agrupación de términos, toma la forma

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (Bh + 2Ck + E)y' + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0. \quad (9)$$

Para eliminar los términos de primer grado de la ecuación (9) basta determinar los valores de h y k que satisfacen a las ecuaciones

$$2Ah + Bk + D = 0, \qquad Bh + 2Ck + E = 0.$$

Este sistema tiene una solución única para h y k, dada por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6), solamente si el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2 \neq 0.$$

Por tanto, si la ecuación (1) es del género parábola, en donde

$$I = B^2 - 4AC = 0,$$

no podemos eliminar los términos de primer grado comenzando por una traslación. En general, por lo tanto, simplificaremos la ecuación (1) girando primero los ejes.

EJERCICIOS. Grupo 34

Los ejercicios 1-5 se refieren a las ecuaciones (1) y (2) del Artículo 74.

1. Demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante por rotación, demostrando que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. (Relación [5], Art. 74.)

2. Demostrar que la cantidad $A + C$ es invariante por rotación, haciendo ver que $A' + C' = A + C$. *Sugestión.* Usense la primera y tercera relaciones de (3), Art. 74.

3. Si $B \neq 0$ pero uno cualquiera de los coeficientes A o C es cero, o ambos A y C son cero, demuéstrese que la ecuación (1) es del género hipérbola.

4. Si A y C difieren en el signo, demuéstrese que la ecuación (1) es del género hipérbola ya sea que B sea positivo, negativo o nulo.

5. Demostrar que la ecuación (1) es del género parábola si los términos de segundo grado forman un cuadrado perfecto.

En los ejercicios 6-16, determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación dada, y reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico, cuando exista, y todos los sistemas de ejes coordenados.

6. $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0.$

7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0.$

8. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0.$

9. $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0.$

10. $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0.$

11. $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0.$

12. $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0.$

13. $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0.$

14. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0.$

15. $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0.$

16. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 51 por el método del Artículo 74.

18. Resolver el ejemplo del Artículo 52 por el método del Artículo 74.

19. Elevando al cuadrado dos veces, elimínense los radicales de la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$. Demostrar que el lugar geométrico de la ecuación resultante es una parábola, y determinar qué porción de esta curva representa el lugar geométrico de la ecuación original.

20. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen sea el punto (h, k), demostrar que la ecuación general

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en otra ecuación cuyo término constante es igual a $f(h, k)$.

75. Definición general de cónica. Veamos ahora una definición geométrica de cónica que incluye a la parábola, la elipse y la hipérbola.

DEFINICIÓN. Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva.

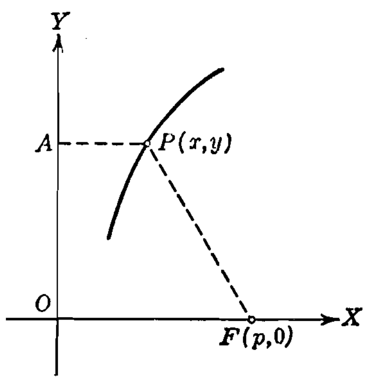

Fig. 102

La recta fija l se llama *directriz*, el punto fijo F, *foco*, y la constante positiva, a la que designaremos por e, *excentricidad* de la cónica. Cuando $e = 1$, la definición anterior es la de la parábola (Art. 54).

Sin ninguna pérdida de generalidad, podemos tomar el eje Y como directriz del punto $F(p, 0)$, $p \neq 0$, como foco (fig. 102). Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Desde P tracemos el segmento PA perpendicular al eje Y. Entonces, por la definición anterior, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e, \tag{1}$$

lo cual puede expresarse analíticamente por la ecuación

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, quitando denominadores y trasponiendo, resulta

$$(1 - e^2)\, x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0. \qquad (2)$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) es un punto que satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre el lugar geométrico. De acuerdo con esto, la ecuación (2) es la ecuación buscada.

Por lo anteriormente estudiado, reconocemos a primera vista que el lugar geométrico de la ecuación (2) es una cónica, pero su naturaleza depende, evidentemente, del valor de la excentricidad e. Hay entonces dos casos generales por considerar: I. $e = 1$; II. $e \neq 1$.

I. $e = 1$. En este caso, la ecuación (2) toma la forma

$$-2px + y^2 + p^2 = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

que representa una parábola cuyo vértice es el punto $\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$ y cuyo eje coincide con el eje X.

II. $e \neq 1$. En este caso, $1 - e^2 \neq 0$. Dividiendo la ecuación (2) por $1 - e^2$, obtenemos

$$x^2 - \frac{2p}{1 - e^2}\, x + \frac{y^2}{1 - e^2} = -\frac{p^2}{1 - e^2}.$$

Completando el cuadrado en x, podemos reducir esta ecuación a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una cónica central,

$$\frac{\left(x - \dfrac{p}{1 - e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2 e^2}{1 - e^2}} = 1. \qquad (3)$$

El que la ecuación (3) represente una elipse o una hipérbola depende del valor de e. Tenemos entonces dos subcasos:

$$a)\ \ e < 1; \qquad b)\ \ e > 1.$$

a) $e < 1$. En este caso, $1 - e^2 < 0$, y ambos denominadores en el primer miembro de (3) son positivos. Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (3) es una elipse. Vamos ahora a demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico al valor previamente definido de $\frac{c}{a}$ (Art. 61).

En efecto: Por ser

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{p^2 e^2}{1-e^2},$$

tenemos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{1-e^2}$$

$$= \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2 (1-e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2}.$$

Entonces

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2} \cdot \frac{(1-e^2)^2}{p^2 e^2} = e^2,$$

de donde, $\frac{c}{a} = e$, que es lo que se quería demostrar.

b) $e > 1$. En este caso, $1 - e^2 < 0$. Por tanto, con el fin de tener ambos denominadores positivos, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{e^2-1}} = 1. \qquad (4)$$

Evidentemente, el lugar geométrico de la ecuación (4) es una hipérbola. Análogamente a como hicimos para la elipse podemos demostrar que el valor de e dado por la ecuación (3) es idéntico con su valor previamente definido de $\frac{c}{a}$ (Art. 65).

Podemos ahora establecer el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Una cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que su excentricidad sea igual a, menor que, o mayor que la unidad.*

NOTA. El lector debe observar el paralelismo entre los valores del indicador $I = B^2 - 4AC$ y de la excentricidad e de las diversas cónicas, como aparece en el siguiente cuadro.

	PARABOLA	ELIPSE	HIPERBOLA
Indicador $I = B^2 - 4AC$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
Excentricidad e	$e = 1$	$e < 1$	$e > 1$

Ejemplo 1. Determinar la ecuación de la cónica que tiene por foco el punto $F(-1, -2)$, directriz la recta $l : x - y + 1 = 0$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

Solución. Por la definición general, el lugar geométrico es una elipse, y su ecuación puede obtenerse a partir de la relación

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}}{\dfrac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Si elevamos al cuadrado, quitamos denominadores, trasponemos y agrupamos términos, obtenemos la ecuación buscada,

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 14x + 34y + 39 = 0.$$

Esta ecuación representa la elipse de la figura 103.

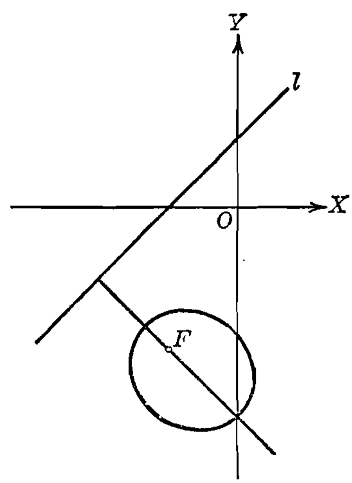

Fig. 103

La determinación de la ecuación de la directriz de una parábola ya ha sido considerada en el Capítulo VI. Ahora determinaremos las ecuaciones de las directrices de las cónicas centrales. Estas cónicas tienen cada una dos focos y, por tanto, dos directrices, *correspondiendo* una a cada foco.

De la simetría de las cónicas, se sigue, por la ecuación (2), que el eje focal es perpendicular a la directriz. Por tanto, si tomamos la ecuación de la elipse en su forma canónica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

las ecuaciones de sus directrices son de las formas $x = k$ y $x = l$, correspondiendo a los focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, tal como se indica en la figura 104. Para el foco $(c, 0)$ y su directriz correspondiente $x = k$, tenemos, de la definición general de las cónicas,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-k|} = e. \tag{6}$$

Se deja al lector, como ejercicio, la demostración de que la ecuación (6) se reduce a la forma ordinaria

$$\frac{\left(x+\dfrac{e^2k-c}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{e^2(k-c)^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2(k-c)^2}{1-e^2}} = 1. \tag{7}$$

Como las ecuaciones (5) y (7) representan un mismo lugar geométrico, una elipse cuyo centro está en el origen, de la ecuación (7) se sigue que

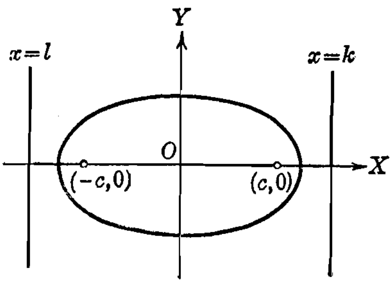

Fig 104

$$e^2k - c = 0,$$

de donde,

$$k = \frac{c}{e^2} = \frac{ae}{e^2} = \frac{a}{e}.$$

Por tanto, para el foco $(c, 0)$, de la elipse (5), la ecuación de la directriz es $x = \frac{a}{e}$. Análogamente, para el foco $(-c, 0)$ y la directriz correspondiente $x = l$, hallamos $x = -\frac{a}{e}$.

Exactamente por el mismo procedimiento, hallamos, para la hipérbola, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, que sus focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ tienen por directrices correspondientes a las rectas cuyas ecuaciones son, respectivamente, $x = \frac{a}{e}$ y $x = -\frac{a}{e}$.

Los resultados precedentes están comprendidos en el siguiente

TEOREMA 5. *Para la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *y la hipérbola* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, *cada una de excentricidad* e, *los focos* $(ae, 0)$ *y* $(-ae, 0)$ *tienen como directrices correspondientes las rectas cuyas ecuaciones son* $x = \frac{a}{e}$ *y* $x = -\frac{a}{e}$, *respectivamente.*

Ejemplo 2. Hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes de la hipérbola $3x^2 - y^2 = 12$.

Solución. Escribiendo la ecuación en la forma ordinaria,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1,$$

vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$. Por tanto, $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$. Entonces, por el teorema 5 anterior, la ecuación de la

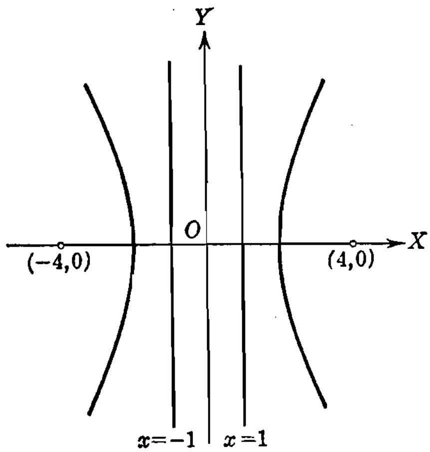

Fig. 105

directriz correspondiente al foco (4, 0) es $x = \frac{a}{e}$, o sea, $x = 1$, y la ecuación de la directriz correspondiente al otro foco $(-4, 0)$ es $x = -\frac{a}{e}$, o sea, $x = -1$ (fig. 105).

EJERCICIOS. Grupo 35

En cada uno de los ejercicios 1-5, hallar la ecuación de la cónica respectiva a partir de los datos dados.

1. Foco (0, 0); directriz: $x + 2y + 2 = 0$; excentricidad $= 1$.
2. Foco $(1, -2)$; directriz: $x - 2y = 0$; excentricidad $= \frac{\sqrt{5}}{3}$.
3. Foco $(-1, -1)$; directriz: $4x + 3y = 12$; excentricidad $= 5$.
4. Foco (3, 3); directriz: $x + 3y = 3$; excentricidad $= 2$.
5. Foco $(1, -3)$; directriz: $3x + y - 3 = 0$; excentricidad $= \frac{\sqrt{10}}{4}$.

6. Demostrar que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) es un punto que satisface la condición geométrica (1) del Artículo 75.

7. Hallar las coordenadas del vértice de la parábola del ejercicio 1.

8. Hallar las coordenadas del centro de la elipse del ejemplo 1, Artículo 75.

9. Demostrar que la ecuación (7) del Artículo 75 se deduce de la ecuación (6) del mismo artículo.

10. En la ecuación (7) del Artículo 75, demostrar que si $k = \frac{a}{e}$ el denominador $\frac{e^2(k-c)^2}{(1-e^2)^2}$ es igual a a^2 y el denominador $\frac{e^2(k-c)^2}{1-e^2}$ es igual a b^2.

11. Demostrar que el punto $(-ae, 0)$ y la recta $x = -\frac{a}{e}$ son un foco y una directriz correspondientes de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 12-16, hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes de la cónica cuya ecuación se da. Dibujar una figura para cada ejercicio.

12. $5x^2 + 9y^2 = 45$.

13. $16x^2 - 9y^2 = 144$.

14. $5x^2 + y^2 = 5$.

15. $2y^2 - 7x^2 = 14$.

16. $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$.

17. Demostrar el teorema 5 del Artículo 75 para la hipérbola.

18. Por medio del teorema 5, Artículo 75, resolver el ejercicio 20 del grupo 27, Artículo 61, y el ejercicio 22 del grupo 30, Artículo 65.

19. Para la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, demostrar el teorema correspondiente al teorema 5 del Artículo 75.

20. Para la hipérbola $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$, demostrar el teorema correspondiente al teorema 5 del Artículo 75.

76. Tangente a la cónica general. La determinación de las ecuaciones de las tangentes a las cónicas se facilita considerablemente por el uso de la ecuación de la tangente a la cónica general,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en un punto de contacto dado, tal como lo establece el teorema 6. La demostración de este teorema se apoya en la aplicación de la condición para tangencia (Art. 44) y, por tanto, se deja al estudiante como ejercicio.

TEOREMA 6. *La ecuación de la tangente a la cónica general*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en cualquier punto de contacto dado $P_1(x_1, y_1)$, *es*

$$Ax_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0. \qquad (2)$$

NOTAS. 1. Si las variables en la ecuación (1) se escriben en la forma:

$$x^2 = xx, \quad xy = \frac{xy + yx}{2}, \quad y^2 = yy, \quad x = \frac{x + x}{2}, \quad y = \frac{y + y}{2},$$

y el subíndice 1 es colocado a una variable en cada término, se obtiene inmediatamente la ecuación (2). Este método para recordar la ecuación de la tangente es muy útil, pero el estudiante debe observar que, según todo lo demostrado, se aplica solamente a las ecuaciones de segundo grado con dos variables.

2. El teorema 6 puede usarse aún cuando no se conozca el punto de contacto. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto (4, 1) a la cónica

$$2x^2 - xy + y^2 + x - 3y + 2 = 0. \tag{3}$$

Solución. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de uno de los dos puntos de contacto. Entonces, por la nota 1 del teorema 6 anterior, la ecuación de la tangente en este punto de contacto es

$$2x_1x - \tfrac{1}{2}(x_1y + y_1x) + y_1y + \tfrac{1}{2}(x + x_1) - \tfrac{3}{2}(y + y_1) + 2 = 0. \tag{4}$$

Como el punto (4, 1) debe estar sobre esta tangente, sus coordenadas deben satisfacer esta última ecuación, y tenemos

$$8x_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 + 4y_1) + y_1 + \tfrac{1}{2}(4 + x_1) - \tfrac{3}{2}(1 + y_1) + 2 = 0,$$

la cual se simplifica y se reduce a

$$16x_1 - 5y_1 + 5 = 0. \tag{5}$$

Las coordenadas (x_1, y_1) del punto de contacto satisfacen la ecuación (3), y tenemos

$$2x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 + x_1 - 3y_1 + 2 = 0. \tag{6}$$

Las soluciones comunes de las ecuaciones (5) y (6) son $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, y $x_1 = \frac{40}{113}$, $y_1 = \frac{241}{113}$. Por tanto, los puntos de contacto son (0, 1) y $\left(\frac{40}{113}, \frac{241}{113}\right)$. Las ecuaciones de las tangentes que se buscan pueden obtenerse como ecuaciones de las rectas que pasan por dos puntos: el punto (4, 1) y cada punto de contacto, o también sustituyendo las coordenadas de cada uno de los puntos de contacto en la ecuación (4). Por cualquiera de los dos métodos obtenemos $y - 1 = 0$ y $32x + 103y - 231 = 0$ para las ecuaciones buscadas.

El estudiante debe trazar la figura correspondiente a este ejemplo.

77. Sistemas de cónicas. En la ecuación general de las cónicas,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

los coeficientes representan seis constantes arbitrarias que, sin embargo, no son independientes, porque uno cuando menos de los tres coeficientes A, B y C es diferente de cero, y, si dividimos la ecuación (1) por uno de estos coeficientes diferentes de cero vemos que solamente hay cinco constantes arbitrarias o parámetros independientes. Por tanto, la ecuación de una cónica está perfectamente determinada por cinco condiciones independientes, como máximo. Por ejemplo, una cónica está determinada si se conocen las coordenadas de cinco cualesquiera de sus puntos. Para una parábola, sin embargo, sólo se requieren cuatro condiciones, pues en este caso los coeficientes de la ecuación (1) satisfacen la relación $B^2 - 4AC = 0$. Para determinar la ecuación de una cónica que pasa por un grupo de cinco puntos dados, basta sustituir las coordenadas de cada uno de estos puntos en la ecuación (1) y resolver el sistema resultante de cinco ecuaciones, para cinco cualesquiera de los coeficientes, en términos del sexto coeficiente, siempre que este último coeficiente sea diferente de cero.

Si una ecuación algebraica de segundo grado con dos variables contiene una o más constantes arbitrarias o parámetros independientes, representa, en general, una *familia* o *sistema de cónicas*. Hemos discutido anteriormente los sistemas de rectas (Art. 36) y los sistemas de circunferencias (Art. 42); por tanto, los principios básicos de los sistemas de curvas son ya familiares al lector. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2xy + ky^2 + 2x - y + 1 = 0 \qquad (2)$$

representa una *familia de curvas de un parámetro*. La ecuación de cualquier elemento de esta familia puede obtenerse especificando o determinando un valor particular para k. Así, la ecuación (2) representa una parábola si $k = 1$, elipses si $k > 1$ e hipérbolas si $k < 1$.

Una familia de cónicas interesante es el sistema formado por las cónicas que pasan por las intersecciones de dos cónicas dadas. Si u y v son las funciones de segundo grado en las dos variables x y y, entonces las dos cónicas dadas pueden representarse por las ecuaciones

$$u = 0, \qquad (3)$$

$$v = 0. \qquad (4)$$

Si las cónicas (3) y (4) se cortan, las coordenadas de cualquiera de los puntos de intersección satisfacen ambas ecuaciones (3) y (4) y, por tanto, satisfacen también a la ecuación

$$u + kv = 0 \qquad (5)$$

para todos los valores del parámetro k (ver el Artículo 42). En consecuencia, la ecuación (5) representa una familia de curvas que pasan por las intersecciones de las cónicas (3) y (4). Como k es una constante, el grado de la ecuación (5) no puede ser mayor que 2, y, en general, la ecuación representará, por lo tanto, un sistema de cónicas.

Pero, para algún valor de k, el elemento correspondiente de la familia (5) puede ser una recta; ya vimos un ejemplo de esto al estudiar el eje radical (Art. 43).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(2, -1)$ y los puntos de intersección de las cónicas $x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 = 0$ y $2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de curvas que pasan por los puntos de intersección de las cónicas dadas son

$$x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 + k(2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4) = 0. \qquad (6)$$

Si una de las curvas de la familia (6) pasa por el punto $(2, -1)$, las coordenadas de ese punto deben satisfacer la ecuación (6), y tenemos

$$4 - 4 - 2 + 4 - 1 + 1 + k(8 - 2 + 1 - 10 - 3 - 4) = 0,$$

de donde, $2 + k(-10) = 0$ y $k = \frac{1}{5}$. Sustituyendo este valor de k en (6), obtenemos

$$7x^2 + 11xy - 9y^2 + 5x + 8y + 1 = 0$$

como ecuación de la cónica buscada.

El estudiante debe dibujar una figura para este ejemplo.

Consideraremos ahora el caso importante de las *cónicas homofocales*, es decir, aquellas que tienen el *mismo foco*. Un sistema tal, para cónicas centrales, se representa convenientemente por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1, \qquad (7)$$

en donde k es el parámetro. En la discusión que sigue, consideraremos $a > b$. Evidentemente, k no puede tomar ninguno de los valores $-a^2$ o $-b^2$ o cualquier otro valor menor que $-a^2$.

Para todos los valores de $k > -b^2$, la ecuación (7) representa elipses. Para cada elipse, la distancia del centro a uno de sus focos está dada por

$$c = \sqrt{(a^2 + k) - (b^2 + k)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Como c es una constante independiente del valor de k, todas las elipses tienen los mismos focos $\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right)$.

Para todos los valores de k tales que $-a^2 < k < -b^2$, la ecuación (7) representa hipérbolas. En este caso, el primer denominador en el primer miembro de (7) es positivo y el segundo denominador es negativo; por tanto, la ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2 + k} - \frac{y^2}{-b^2 - k} = 1.$$

Entonces, para cada hipérbola, la distancia del centro a uno de sus focos está dada por

$$c = \sqrt{(a^2 + k) + (-b^2 - k)} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Luego todas las hipérbolas tienen los mismos focos, y estos focos son idénticos a los de las elipses. Hemos demostrado entonces que, para todos los valores admisibles de k la ecuación (7) representa un sistema de elipses e hipérbolas homofocales. En la figura 106 aparecen varios elementos de este sistema, siendo los focos los puntos F y F'. Como todas estas cónicas tienen un eje focal común y un eje normal común, se dice que son *coaxiales.*

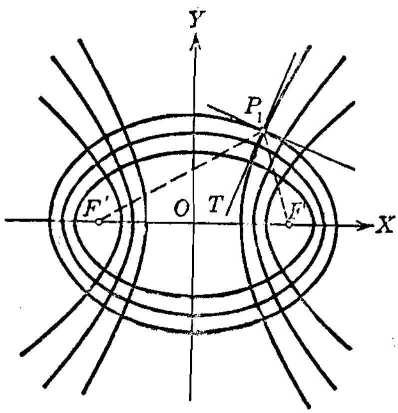

Fig. 106

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera no contenido en ninguno de los ejes coordenados. Si una cónica del sistema (7) pasa por P_1, sus coordenadas (x_1, y_1) deben satisfacer a la ecuación (7), y tenemos

$$\frac{x_1^2}{a^2 + k} + \frac{y_1^2}{b^2 + k} = 1,$$

que puede escribirse en la forma

$$k^2 + (a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2)k + a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = 0. \quad (8)$$

Para $a > b$, puede demostrarse que las raíces de esta ecuación cuadrática en k son reales y desiguales, estando comprendida una entre $-a^2$ y $-b^2$, y siendo la otra mayor que $-b^2$. (Ver los ejercicios 23-25 del grupo 36 siguiente.) Pero para la primera raíz el sistema (7) produce una hipérbola, y para la segunda raíz, una elipse. Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

Por un punto cualquiera, no contenido en uno de los ejes coordenados, pasan una hipérbola y una elipse del sistema (7) *de cónicas homofocales.*

Tracemos los radios vectores de P_1; son los mismos para ambas, la hipérbola y la elipse, ya que estas cónicas son homofocales. Sea P_1T la bisectriz del ángulo FP_1F' formado por los radios vectores de P_1. Entonces, por el teorema 6 del Artículo 63, P_1T es normal a la elipse en P_1. y por el teorema 7 del Artículo 70, P_1T es tangente a la hipérbola en P_1. Por tanto, la elipse y la hipérbola se cortan ortogonalmente en P_1. Como P_1 representa un punto *cualquiera* no contenido en un eje coordenado, tenemos el siguiente resultado:

La familia de elipses y la familia de hipérbolas del sistema (7) *de cónicas homofocales son trayectorias ortogonales entre sí.*

Debido a esta propiedad, se dice que una familia de cónicas centrales homofocales es *auto-ortogonal*. Un ejemplo de una familia auto-ortogonal de parábolas es el sistema de dichas curvas que tienen un foco común y un eje común. Tal sistema puede representarse convenientemente por la ecuación

$$y^2 = 4k(x + k), \tag{9}$$

en la que el parámetro k puede tomar todos los valores reales excepto cero. Las parábolas del sistema (9) tienen un foco común en el origen, y el eje X como eje común; se abren hacia la derecha o hacia la izquierda según que $k > 0$ o $k < 0$. Las parábolas que se abren en direcciones opuestas se cortan ortogonalmente. (Ver los ejercicios 28-30 del grupo 36 siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 36

Los ejercicios 1-6 deben resolverse usando el teorema 6 del Artículo 76. Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 3 = 0$$

en el punto (1, 2).

2. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica

$$x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0,$$

de pendiente 3.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6 = 0,$$

trazadas por el punto $(-3, -7)$.

4. Para el punto (1, 1) de la cónica $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal.

5. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica $3xy - 2x + y - 1 = 0$ que son perpendiculares a la recta $2x - 2y + 7 = 0$.

6. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $2x - y - 1 = 0$ y la cónica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2y - 2x - 1 = 0$ en cada uno de sus puntos de intersección.

7. Demostrar el teorema 6 del Artículo 76.

8. Demostrar que los resultados del ejercicio 10 del grupo 18 (Art. 45), teorema 4, Artículo 57; teorema 4, Artículo 63, y teorema 5, Artículo 70, pueden obtenerse como corolarios del teorema 6, Artículo 76.

9. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$.

10. Por tres métodos diferentes, hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto $(5, 7)$.

11. Suponiendo que k es una constante diferente de cero, demostrar que el triángulo formado por los ejes coordenados y cualquier tangente a la hipérbola equilátera $xy = k$ tiene un área constante. (Ver el ejercicio 20 del grupo 33, Artículo 70.)

12. Si a es una constante diferente de cero, demostrar que la suma algebraica de los segmentos que una tangente cualquiera a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

determina sobre los ejes coordenados es igual a a.

13. La ecuación de una familia de cónicas es

$$x^2 + xy - y^2 + ax + by + 5 = 0.$$

Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(1, 2)$ y $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{26}{5}\right)$.

14. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(-1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ y $(-5, 4)$.

15. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los cuatro puntos $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{9}, -\frac{10}{9}\right)$ y $(-4, 10)$.

16. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(1, 1)$, $(2, 0)$, $\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

17. Sobre el mismo sistema de ejes coordenados, trácense cinco elementos de la familia de cónicas representada por la ecuación (2) del Artículo 77, asignando al parámetro k los valores $-1, 0, 1, 2, 3$.

18. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(-2, 3)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0 \text{ y } 3xy + 2x - y - 2 = 0.$$

19. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(4, -2)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0 \text{ y } 2x^2 - xy - 2x + y = 0.$$

20. Escribir la ecuación de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 = 5$ y la elipse $x^2 + 3y^2 = 5$. Demostrar que, cuando el parámetro es igual a -1, el elemento de esta familia consiste en dos rectas que se cortan.

21. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $xy + 3x + 5y + 3 = 0$. *Sugestión.* Calcúlese el valor del parámetro usando la relación $B^2 - 4AC = 0$.

22. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $2xy + 2y^2 + 3x - y - 1 = 0$ y $x^2 - xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$.