en donde se escoge el signo superior o el inferior según que la recta esté dirigida en un sentido o en el sentido opuesto.

Por el corolario al teorema 4, Artículo 110, y por las ecuaciones (2) anteriores, tenemos el siguiente

COROLARIO 1. *De los números directores de una recta uno, cuando menos, es diferente de cero.*

Por el teorema 3, Artículo 110, tenemos:

COROLARIO 2. *Un sistema de números directores para la recta que pasa por los puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *está dado por*

$$[x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1].$$

Ejemplo. Los números directores de una recta l son $[2, -2, -1]$. Hallar los cosenos directores de l si la recta está dirigida de tal manera que el ángulo β es agudo.

Solución. Por el teorema 5 anterior, los cosenos directores de l, cuando la recta no está dirigida, son

$$\cos\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \pm \tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \mp \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \mp \tfrac{1}{3}.$$

Como l está dirigida de tal manera que β es agudo, $\cos\beta$ es positivo. Por tanto, tomando los signos inferiores para los cosenos directores, tendremos

$$\cos\alpha = -\tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{3}.$$

EJERCICIOS. Grupo 51

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 5, -1)$, $P_2(3, -2, 4)$ y que está dirigida de P_1 a P_2.
2. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(-9, 2, 1)$, $P_2(-7, 0, 2)$ y que está dirigida de P_2 a P_1.
3. Dos de los cosenos directores de una recta son $\tfrac{2}{3}$ y $-\tfrac{1}{3}$. Hallar el tercer coseno director.
4. Hallar los cosenos directores de una recta si los ángulos directores α y β son 60° y 30°, respectivamente.
5. Hallar los cosenos directores de una recta si $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y β es agudo.
6. Hallar los cosenos directores de una recta si $\beta = 45°$ y $\alpha = \gamma$.
7. Hallar los cosenos directores de una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
8. Hallar el valor común de los ángulos directores de la recta del ejercicio 7. (Dos soluciones.)
9. Por medio de los cosenos directores, demostrar que los tres puntos $(4, 3, 1)$, $(-1, 2, -3)$ y $(-11, 0, -11)$ son colineales.

10. Si dos de los ángulos directores de una recta son cada uno de 60°, hállese el tercer ángulo director.

11. Hallar los ángulos directores de la bisectriz del ángulo formado por las partes positivas de los ejes X y Y, y después determinar sus cosenos directores.

12. Demostrar que si una recta está en el plano XY, la relación del teorema 4 (Art. 110) se reduce a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$. (Véase el ejercicio 19 del grupo 14, Art. 37.)

13. Determinar a qué se reduce la relación del teorema 4 (Art. 110) para una recta que está: *a*) en el plano XZ; *b*) en el plano YZ.

14. El segmento dirigido $P_1 P_2$ tiene por cosenos directores $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$. Si la distancia de P_1 a P_2 es 3 y las coordenadas de P_1 son $(7, 4, 1)$, hallar las coordenadas de P_2.

15. El segmento dirigido $P_1 P_2$ tiene por cosenos directores $\frac{6}{7}$, $-\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$. Si la distancia de P_1 a P_2 es 7 y las coordenadas de P_2 son $(8, -2, 12)$, calcular las coordenadas de P_1.

16. Hallar los cosenos directores de una recta cuyos números directores son $[2, 4, -1]$.

17. Los números directores de una recta son $[-1, -1, 3]$. Hallar los cosenos directores de la recta si está dirigida de tal manera que el ángulo α es agudo.

18. Los números directores de una recta son $[5, -1, 2]$. Hallar los ángulos directores de dicha recta si está dirigida de tal manera que el ángulo γ es agudo.

19. Sea P un punto cualquiera distinto del origen, contenido en una recta l que pasa por el origen. Demostrar que un sistema de números directores para l está dado por las coordenadas de P.

20. Construir la recta que pasa por el origen y tiene por números directores $[1, -5, 4]$.

21. Una recta l pasa por los puntos P_1 y P_2. Demostrar que un sistema de números directores de l está dado por las longitudes de las proyecciones del segmento $P_1 P_2$ sobre los ejes coordenados.

22. Obtener el resultado del ejercicio 19 como un caso particular del ejercicio 21.

23. Construir la recta que pasa por el punto $(6, -9, 2)$ y que tiene por números directores $[4, 2, -1]$.

24. Hallar un sistema de números directores para la recta del ejercicio 7.

25. Por medio de números directores demostrar que los tres puntos $(2, 1, 4)$, $(4, 4, -1)$ y $(6, 7, -6)$ son colineales.

112. Angulo formado por dos rectas dirigidas en el espacio. Vamos a determinar el ángulo θ formado por dos rectas cualesquiera dirigidas, l_1 y l_2, en el espacio. Sean l'_1 y l'_2 (fig. 162) dos rectas trazadas por el origen y paralelas, y del mismo sentido, a l_1 y l_2, respectivamente. Por definición (Art. 110), el ángulo formado por las rectas dirigidas l_1 y l_2 es el ángulo θ. Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera, distinto del origen, sobre l'_1, y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ otro punto cualquiera, distinto del origen sobre l'_2. También, sea

$|\overline{OP_1}| = d_1$, $|\overline{OP_2}| = d_2$ y $|\overline{P_1P_2}| = d$. Por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11), tenemos, para el triángulo OP_1P_2,

$$\cos\theta = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2}. \qquad (1)$$

Por el teorema 1 del Artículo 108, tenemos

$$d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad d_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

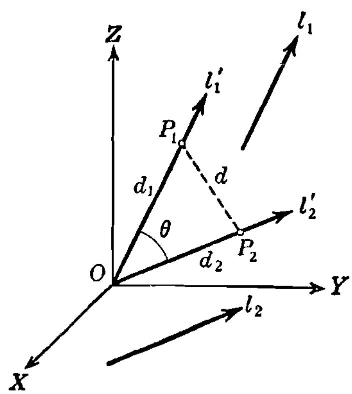

Fig. 162

Si sustituímos estos valores en el numerador del segundo miembro de la ecuación (1), y simplificamos, obtenemos

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{d_1d_2}. \qquad (2)$$

Sean α_1, β_1, γ_1 los ángulos directores de l_1 y, por tanto, de l'_1, y α_2, β_2, γ_2 los ángulos directores de l_2 y, por tanto, de l'_2. Por el teorema 3 del Artículo 110, tenemos

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{d_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{y_1}{d_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{z_1}{d_1}$$

y
$$\cos\alpha_2 = \frac{x_2}{d_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{y_2}{d_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{z_2}{d_2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2), obtenemos la relación buscada

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (3)$$

Esta igualdad nos dice:

TEOREMA 6. *El ángulo θ formado por dos rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos ángulos directores son α_1, β_1, γ_1 y α_2, β_2, γ_2, respectivamente, se determina por la relación*

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 .$$

Del teorema 6 se deducen los dos siguientes corolarios:

COROLARIO 1. *Para que dos rectas sean paralelas y del mismo sentido es condición necesaria y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean iguales; para que sean paralelas y de sentidos opuestos es necesario y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean suplementarios.*

COROLARIO 2. *Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus cosenos directores correspondientes sea igual a cero.*

Ahora vamos a obtener los resultados del teorema 6 y sus dos corolarios en función de los números directores de las dos rectas.

Sean $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ los números directores de las dos rectas l_1 y l_2, respectivamente. Por el teorema 5 del Artículo 111, tenemos

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \quad \cos\beta_1 = \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

y

$$\cos\alpha_2 = \pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}, \quad \cos\beta_2 = \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$

$$\cos\gamma_2 = \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Sustituyendo estos valores en la relación del teorema 6, obtenemos:

TEOREMA 7. *El ángulo θ formado por dos rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos números directores son $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$, respectivamente, está determinado por la relación*

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

NOTA. El doble signo indica que hay dos valores de θ, suplementarios entre sí. Un valor específico de θ puede obtenerse siempre considerando los dos sentidos de las rectas. Esto se ilustra en el ejemplo que damos a continuación.

Del teorema 7 se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario 1. *Para que dos rectas dirigidas sean paralelas es necesario y suficiente que sus números directores correspondientes sean proporcionales.*

Corolario 2. *Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus números directores correspondientes sea igual a cero.*

Ejemplo. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(4, 5, -7)$ y $P_3(-1, 2, 1)$.

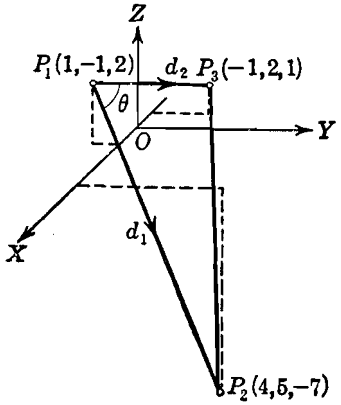

Fig. 163

Solución. El triángulo es el de la figura 163. Sea el ángulo $P_2P_1P_3 = \theta$, $|\overline{P_1P_2}| = d_1$ y $|\overline{P_1P_3}| = d_2$. El área del triángulo es (Apéndice IC, 12)

$$K = \tfrac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen} \theta. \qquad (4)$$

El sentido de los lados del ángulo θ correspondiente al vértice P_1 es el indicado en la figura. Para obtener los signos correctos de los cosenos directores de estos lados, restamos las coordenadas de P_1 de las coordenadas correspondientes de P_2 y P_3 (nota, teorema 3, Art. 110). Por tanto, por el corolario 2 del teorema 5, Art. 111, los números directores de

$$P_1P_2 \text{ son } [4-1,\ 5+1,\ -7-2],$$

o sea, $[3, 6, -9]$ ó $[1, 2, -3]$,

y los de P_1P_3 son $[-1-1,\ 2+1,\ 1-2]$, o sea, $[-2, 3, -1]$.

Por tanto, por el teorema 7 ó por el teorema 6, tenemos

$$\cos\theta = \frac{1(-2)+2\cdot 3+(-3)(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{-2+6+3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Como θ es agudo, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por el teorema 1 del Artículo 108,

$$d_1 = \sqrt{3^2+6^2+(-9)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

y

$$d_2 = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Sustituyendo estos valores en la relación (4), tenemos, para el área buscada,

$$K = \tfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21}{2}\sqrt{3}.$$

113. Números directores de una recta perpendicular a dos dadas. En este artículo vamos a considerar un artificio para obtener los números directores de una recta perpendicular a dos rectas dadas que nos va a ser muy útil al trabajar con planos y rectas en el espacio.

Sean $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ los números directores dados de dos rectas no paralelas, l_1 y l_2, respectivamente. Queremos determinar los números directores $[a, b, c]$ de una recta cualquiera l perpendicular a ambas l_1 y l_2. Tal recta existe. En efecto, si l_1 y l_2 se cortan, l puede representar una cualquiera de las rectas paralelas perpendiculares al plano determinado por l_1 y l_2. Si l_1 y l_2 se cruzan, entonces l puede representar una cualquiera de las rectas perpendiculares al plano determinado por dos rectas que se cortan y son paralelas respectivamente a l_1 y l_2.

Como l es perpendicular a l_1 y l_2, tenemos, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, las dos relaciones siguientes

$$\left.\begin{aligned} a_1 a + b_1 b + c_1 c = 0, \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

El sistema (1) consta de dos ecuaciones con tres incógnitas, a, b y c. Podemos resolver este sistema para dos cualesquiera de estas incógnitas en función de la tercera por la regla de Cramer (Apéndice IB, 6) siempre que el determinante del sistema sea diferente de cero Este determinante puede ser uno cualquiera de los tres determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Uno, por lo menos, de estos determinantes es diferente de cero. En efecto, si fueran todos nulos, tendríamos, respectivamente,

$$a_1 b_2 = a_2 b_1, \quad a_1 c_2 = a_2 c_1, \quad b_1 c_2 = b_2 c_1,$$

de donde,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

y por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, esta última relación implica que l_1 y l_2 sean paralelas, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, podemos suponer que el primero de los determinantes (2) es diferente de cero, y resolver el sistema (1) para a y b en términos de c.

Esto nos da

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 c & b_1 \\ -c_2 c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} c, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 c \\ a_2 & -c_2 c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} c.$$

Ahora bien, c no puede ser cero. Porque, si $c = 0$, las últimas relaciones indican que a y b son ambas iguales a cero, lo que está en contradicción con el corolario 1 del teorema 5, Artículo 111. Como los números directores de una recta no son únicos, podemos, por simplicidad, escoger el sistema en que $c = 1$. Entonces los números directores de l son

$$a = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad c = 1.$$

Para mayor simplicidad, multipliquemos este sistema por el denominador que es diferente de cero. Esto nos da, finalmente, el sistema de números directores

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Este resultado nos dice:

TEOREMA 8. *Si* $[a_1, b_1, c_1]$ *y* $[a_2, b_2, c_2]$ *son los números directores dados de dos rectas no paralelas,* l_1 *y* l_2*, respectivamente, los números directores* $[a, b, c]$ *de cualquier recta* l *perpendicular a ambas* l_1 *y* l_2 *están dados por los determinantes*

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

NOTA. En la práctica, los tres determinantes del teorema 8 pueden obtenerse simplemente escribiendo primero los dos sistemas dados de números directores en tres columnas:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

El primer determinante se forma de las segunda y tercera columnas, el segundo de las tercera y primera columnas y el tercero de las primera y segunda columnas.

Nos referiremos en adelante a este esquema como el *artificio de los números directores*.

Ejemplo. Hallar un sistema de números directores para una recta cualquiera l que sea perpendicular al plano que contiene el triángulo cuyos vértices son $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-3, 2, 2)$ y $P_3(3, 3, -2)$.

Solución. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, dos sistemas de números directores para los lados P_1P_2 y P_1P_3 son, respectivamente,

$$[-3-2,\ 2+1,\ 2-1], \text{ o sea, } [-5,\ 3,\ 1]$$

y

$$[3-2,\ 3+1,\ -2-1], \text{ o sea, } [1,\ 4,\ -3].$$

Por tanto, por el artificio de los números directores, los números directores de l son

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -14, \quad \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -23.$$

Los resultados de este capítulo son de importancia fundamental en el estudio de la Geometría analítica del espacio. Por esto se recomienda al estudiante que haga un cuadro resumen con todos ellos.

EJERCICIOS. Grupo 52

1. Hallar el coseno del ángulo formado por las dos rectas dirigidas cuyos cosenos directores son

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{6},\ \tfrac{1}{3}\sqrt{6},\ -\tfrac{1}{6}\sqrt{6} \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{7}\sqrt{14},\ \tfrac{3}{14}\sqrt{14},\ \tfrac{1}{14}\sqrt{14}.$$

2. Hallar el ángulo formado por las dos rectas dirigidas cuyos cosenos directores son $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$ y $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

3. Si las dos rectas del teorema 6, Artículo 112, están en el plano XY, demuéstrese que la relación se reduce a $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2$. (Ver el ejercicio 20 del grupo 14, Art. 37.)

4. La recta l_1 pasa por los puntos $(-6, -1, 3)$, $(-3, 2, 7)$, y la recta l_2 pasa por los puntos $(4, 2, 1)$, $(3, -2, 5)$. Hallar el ángulo agudo formado por l_1 y l_2.

5. Los números directores de las rectas l_1 y l_2 son $[2, -1, 2]$ y $[6, 2, -3]$, respectivamente. Hallar el ángulo obtuso formado por l_1 y l_2.

6. Por dos métodos diferentes demostrar que los puntos $(3, -5, 2)$, $(-5, 2, 3)$ y $(2, 3, -5)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

7. Demostrar que los puntos $(4, 0, 1)$, $(5, 1, 3)$, $(3, 2, 5)$ y $(2, 1, 3)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo del ejercicio 7.

9. Hallar los ángulos del triángulo cuyos vértices son $(4, 1, 0)$, $(2, -1, 3)$ y $(1, -3, 2)$.

10. Demostrar que los puntos $(2, 1, 3)$, $(3, 3, 5)$ y $(0, 4, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

11. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 1)$, $(2, -2, 3)$ y $(7, -2, 4)$.

12. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $(6, 2, 1)$, $(4, -1, 3)$ y $(-2, 1, 0)$.

13. Hallar el volumen del prisma de altura 4 y cuya base es el triángulo de vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 0)$.

14. Hallar el volumen de la pirámide de altura 6 y cuya base es el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, -7, 0)$ y $(-3, 0, 0)$.

15. Hallar un sistema de números directores para cualquier recta perpendicular a cada una de las rectas que tienen $[1, -4, 2]$ y $[2, 3, -1]$ por números directores respectivos.

16. Hallar un sistema de números directores para cualquiera de las rectas perpendiculares a los lados del triángulo cuyos vértices son $(-5, 1, 2)$, $(3, 0, 2)$ y $(1, -8, 9)$.

17. Hallar las relaciones que deben satisfacer las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ si debe estar sobre la recta que pasa por los puntos $(1, 4, 1)$ y $(2, -3, 5)$.

18. Hallar las relaciones que deben satisfacer las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ si debe estar sobre la recta que pasa por el punto $(4, 11, -2)$ y que tiene por números directores $[2, 3, -1]$.

19. Un punto P está sobre la recta que pasa por los puntos $(4, 2, 2)$ y $(-2, 0, 6)$. Si la coordenada y de P es 1, hállense sus otras coordenadas.

20. Una recta l pasa por los puntos $(1, -4, 3)$ y $(4, -11, 6)$. Hallar las coordenadas del punto en que l corta al plano XY.

21. Los números directores de una recta l son $[5, -3, 4]$, y la recta pasa por el punto $(5, -1, 1)$. Hallar las coordenadas del punto en que l corta al plano YZ.

22. Los números directores de dos rectas l_1 y l_2 son $[-1, -6, 7]$ y $[3, 2, -4]$, respectivamente. El ángulo formado por l_1 y una recta l es de $60°$. Hallar los números directores de l si se sabe que es perpendicular a l_2.

23. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(3, -5, 2)$, $(11, -3, 6)$ y la que pasa por los puntos $(5, -3, 2)$, $(9, -5, 6)$.

24. Una recta l_1 pasa por los puntos $(2, 1, -1)$, $(5, -1, 3)$ y otra recta l_2 pasa por el punto $(-4, 2, -6)$ y por el punto P cuya coordenada x es 2. Hallar las otras coordenadas de P si l_1 es paralela a l_2.

25. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(7, 3, 9)$, $(1, 1, 1)$ y la que pasa por los puntos $(2, 3, 3)$, $(6, 1, 7)$.

CAPITULO XIV

EL PLANO

114. Introducción. En el capítulo precedente, consideramos el punto en el espacio y obtuvimos algunas propiedades fundamentales del punto y de la recta en la Geometría de tres dimensiones. Ahora vamos a comenzar el estudio sistemático de las ecuaciones de las figuras en el espacio. A medida que progresemos en nuestro estudio, veremos que una sola ecuación representa, en general, una superficie. Una curva en el espacio, en cambio, se representa analíticamente por dos ecuaciones rectangulares independientes. Desde este punto de vista, parece más simple considerar primero el problema general de las superficies. Comenzaremos naturalmente con la más sencilla de todas las superficies, el plano.

115. Forma general de la ecuación del plano. Vamos a obtener la ecuación de un plano cualquiera partiendo de sus bien definidas propiedades (Art. 22). En Geometría elemental, se dice que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a cualquier recta del plano que pase por su pie. En vista de nuestra definición de ángulo formado por dos rectas que se cruzan (Art. 110), diremos ahora que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a *toda* recta del plano, sin considerar si la recta del plano pasa por el pie de la perpendicular o no. Hay un número infinito de rectas perpendiculares a un plano; cada una de tales rectas se llama *normal* al plano.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fijo cualquiera y n una recta fija cualquiera en el espacio. Sean $[A, B, C]$ los números directores de n. Queremos hallar la ecuación del plano único que pasa por el punto P_1 y es perpendicular a la recta n.

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera, diferente de P_1, sobre el plano (fig. 164). Sea l la recta que pasa por los puntos P_1 y P, y que, por tanto, está contenida en el plano. Entonces l y n son perpendiculares entre sí. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, los números directores de l son $[x - x_1, y - y_1, z - z_1]$. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, tenemos

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \qquad (1)$$

y esta es la condición que debe satisfacer cualquier punto del plano. La ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0,$$

y como la expresión encerrada entre paréntesis es una constante y, por tanto, puede reemplazarse por el término constante $-D$, resulta que la ecuación es de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

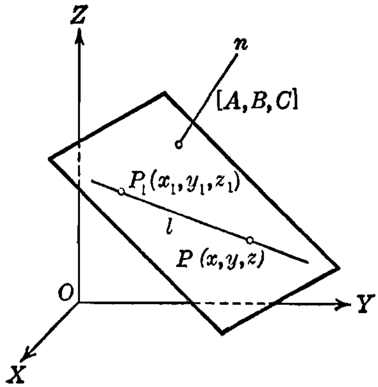

Fig. 164

Recíprocamente, si $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es un punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) y, por tanto, a la ecuación (1), se verifica que

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

y como esta igualdad establece que la recta l', que pasa por los puntos P_1 y P_2 es perpendicular a la normal n y, por tanto, está sobre el plano, resulta que el punto P_2 que está sobre l' está también sobre el plano. Por tanto, la ecuación (2) es la ecuación del plano. Se le llama *forma general* de la ecuación del plano.

Este resultado se expresa en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación general de un plano es de la forma*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

en donde A, B, C *y* D *son constantes, y* [A, B, C] *son los números directores de su normal.*

Vamos a establecer ahora el recíproco del teorema 1:

TEOREMA 2. *Toda ecuación lineal de la forma*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

en la que por lo menos uno de los tres coeficientes A, B *y* C *es diferente de cero, representa un plano cuya normal tiene por números directores* [A, B, C].

DEMOSTRACIÓN. La ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

tiene un número infinito de soluciones. En efecto, por hipótesis, uno por lo menos de los tres coeficientes A, B y C es diferente de cero. Si suponemos que $A \neq 0$, podemos escribir

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}.$$

Ahora estamos en libertad de asignar cualquier par de valores a y y a z y calcular el valor correspondiente de x; cada terna tal de valores representa una solución de la ecuación (2) y, en consecuencia, las coordenadas de un punto que está sobre el lugar geométrico de la ecuación (2). Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dos de estos puntos. Tendremos:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \tag{3}$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \tag{4}$$

Restando la ecuación (4) de la ecuación (3), resulta

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0. \tag{5}$$

Sea l la recta que pasa por P_1 y P_2. Sea $P_3(x_3, y_3, z_3)$ otro punto cualquiera, diferente de P_1 y P_2, de la recta l. Entonces, como un plano contiene a todos los puntos de la recta que pasa por dos de sus puntos, podemos demostrar que la ecuación (2) representa un plano demostrando que las coordenadas de P_3 satisfacen a esta ecuación.

Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, los números directores de l, obtenidos a partir de P_1 y P_2, son

$$[x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2],$$

y, obtenidos a partir de P_1 y P_3, son

$$[x_1 - x_3,\ y_1 - y_3,\ z_1 - z_3].$$

Como estos son números directores para la misma recta l, debemos tener (Art. 112),

$$x_1 - x_2 = k(x_1 - x_3), \quad y_1 - y_2 = k(y_1 - y_3),$$
$$z_1 - z_2 = k(z_1 - z_3); \quad k \neq 0.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5), obtenemos

$$Ak(x_1 - x_3) + Bk(y_1 - y_3) + Ck(z_1 - z_3) = 0,$$

de donde, como $k \neq 0$, resulta:

$$A(x_1 - x_3) + B(y_1 - y_3) + C(z_1 - z_3) = 0. \qquad (6)$$

Si restamos la ecuación (6) de la ecuación (3), obtenemos

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0,$$

lo que demuestra que el punto P_3 está sobre el lugar geométrico de la ecuación (2). Por tanto, la ecuación (2) representa un plano. Además, las ecuaciones (5) y (6) muestran que la normal a este plano tiene por números directores $[A, B, C]$. Esto completa la demostración.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(-2, -1, 5)$ y es perpendicular a la recta l determinada por los puntos $P_2(2, -1, 2)$ y $P_3(-3, 1, -2)$.

Solución. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, los números directores de l son $[-3-2, 1+1, -2-2]$, o sea, $[5, -2, 4]$. Como l es perpendicular al plano, los números directores de su normal son también $[5, -2, 4]$. Por tanto, por pasar el plano por el punto $P_1(-2, -1, 5]$, tenemos que la ecuación buscada del plano es

$$5(x+2) - 2(y+1) + 4(z-5) = 0$$

o sea,

$$5x - 2y + 4z - 12 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos no colineales $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-2, 1, 3)$ y $P_3(3, 2, -2)$.

Solución. Como se nos han dado tres puntos del plano, nos queda por determinar simplemente los números directores de la normal al plano. Los números directores del segmento P_1P_2 son $[-2-2, 1+1, 3-1]$, o sea, $[2, -1, -1]$, y los del segmento P_1P_3 son $[3-2, 2+1, -2-1]$, o sea, $[1, 3, -3]$. Como estos segmentos están en el plano, son ambos perpendiculares a su normal. Por tanto, por el artificio de los números directores (Art. 113), los números directores de la normal son

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Consecuentemente, usando las coordenadas del punto $P_1(2, -1, 1)$, hallamos que la ecuación buscada es

$$6(x-2) + 5(y+1) + 7(z-1) = 0$$

o sea,

$$6x + 5y + 7z - 14 = 0.$$

116. Discusión de la forma general. En el artículo anterior hemos obtenido que la forma general de la ecuación de cualquier plano, es

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

en donde $[A, B, C]$ son los números directores de la normal. Como por lo menos uno de los coeficientes A, B y C es diferente de cero, supongamos que $A \neq 0$. Entonces podemos escribir la ecuación en la forma

$$x + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A} z + \frac{D}{A} = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) contiene tres constantes arbitrarias independientes. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de cualquier plano queda perfectamente determinada por tres condiciones independientes*. Geométricamente, un plano también queda determinado por tres condiciones independientes; por ejemplo, tres puntos dados no colineales determinan un plano único.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano determinado por los tres puntos no colineales $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(-2, 1, 3)$ y $P_3(3, 2, -2)$.

Solucion. Este problema es idéntico al ejemplo 2 del Artículo 115, pero vamos a emplear un método diferente para su solución.

La ecuación buscada es lineal de la forma (1) anterior; hay que encontrar los valores de los coeficientes. Como los puntos P_1, P_2 y P_3 están sobre el plano, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, y tenemos, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned} 2A - B + C + D &= 0, \\ -2A + B + 3C + D &= 0, \\ 3A + 2B - 2C + D &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Podemos resolver este sistema para tres cualesquiera de las literales en términos de la cuarta, siempre que esta última no sea igual a cero. Si $D \neq 0$, la solución del sistema (3) es

$$A = -\frac{3}{7} D, \quad B = -\frac{5}{14} D, \quad C = -\frac{D}{2}.$$

Sustituyendo estos valores de A, B y C en la forma general (1), obtenemos

$$-\frac{3}{7} Dx - \frac{5}{14} Dy - \frac{D}{2} z + D = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por $D \neq 0$, y simplificando, obtenemos como ecuación del plano

$$6x + 5y + 7z - 14 = 0.$$

Una de las partes más importantes de la Geometría analítica es la construcción de figuras a partir de sus ecuaciones. La construcción de una superficie se facilita considerablemente por la determinación de sus intersecciones con los ejes coordenados y de sus trazos sobre los planos coordenados.

DEFINICIONES. Llamaremos *intercepción* de una superficie sobre un eje coordenado a la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado.

La *traza* de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Vamos a ver ahora cómo se obtienen las intercepciones y trazas de cualquier plano a partir de su ecuación. La intersección de un plano y el eje X es un punto que está sobre el eje X. Ambas coordenadas y y z de tal punto son cero. Por tanto, haciendo $y = z = 0$ en la ecuación (1) y despejando x, hallamos la intercepción de este plano sobre el eje X que es $-\frac{D}{A}$. Análogamente, las intercepciones sobre los ejes Y y Z son $-\frac{D}{B}$ y $-\frac{D}{C}$, respectivamente.

La intersección de un plano y el plano XY es una recta que está en el plano XY. La coordenada z de cualquier punto del plano XY es igual a cero. Por tanto, haciendo $z = 0$ en la ecuación (1), obtenemos la ecuación

$$Ax + By + D = 0.$$

Esta ecuación sola, sin embargo, no es suficiente para identificar la traza del plano (1) sobre el plano XY. Debemos indicar también que la traza está sobre el plano XY empleando la ecuación $z = 0$. Por tanto, la traza del plano (1) sobre el plano XY está representada analíticamente por las *dos* ecuaciones

$$Ax + By + D = 0, \quad z = 0.$$

Tenemos aquí el primer ejemplo del hecho de que una curva en el espacio se representa analíticamente por dos ecuaciones independientes. Análogamente, haciendo $y = 0$ en la ecuación (1), hallamos que las ecuaciones de la traza del plano (1) sobre el plano XZ son

$$Ax + Cz + D = 0, \quad y = 0;$$

y, haciendo $x = 0$ en la ecuación (1), hallamos que las ecuaciones de la traza sobre el plano YZ, son

$$By + Cz + D = 0, \quad x = 0.$$

Ejemplo 2. La ecuación de un plano es

$$4x + 6y + 3z - 12 = 0. \tag{4}$$

Hallar sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Construir la figura.

Solución. Haciendo $y = z = 0$ en la ecuación (4) y despejando x, hallamos que la intercepción con el eje X es 3. Similarmente hallamos que las intercepciones con los ejes Y y Z son 2 y 4, respectivamente.

Haciendo $z = 0$ en la ecuación (4), hallamos que las ecuaciones de la traza sobre el plano XY son

$$2x + 3y - 6 = 0, \quad z = 0.$$

Análogamente, se halla que las ecuaciones de las otras dos trazas son

$$4x + 3z - 12 = 0, \quad y = 0, \quad \text{sobre el plano } XZ;$$

$$2y + z - 4 = 0, \quad x = 0, \quad \text{sobre el plano } YZ.$$

Las intercepciones y trazas aparecen en la figura 165. Evidentemente, las trazas limitan aquella porción del plano situada en el primer octante. Como un

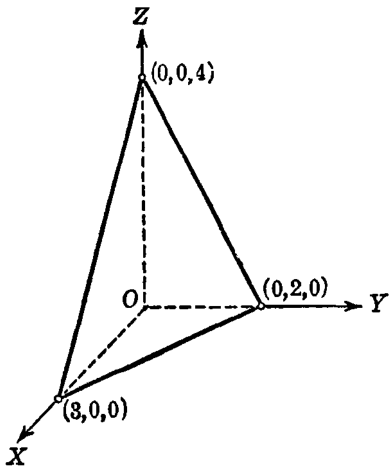

Fig. 165

plano es ilimitado en extensión, podemos trazar solamente una parte de él. La porción que aparece en la figura 165 será suficiente, en general, para nuestros propósitos.

EJERCICIOS. Grupo 53

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(5, -1, 3)$ y cuya normal tiene por números directores $[1, -4, 2]$.

2. Un plano pasa por el punto $(3, 3, -4)$, y los cosenos directores de su normal son $3/13$, $-12/13$, $-4/13$. Hallar la ecuación del plano.

3. El pie de la perpendicular trazada desde el origen a un plano es el punto $(1, -2, 1)$. Hallar la ecuación del plano.

4. Desde el punto $(5, 4, -7)$, se ha trazado una recta perpendicular a un plano. Si el pie de esta perpendicular es el punto $(2, 2, -1)$, hállese la ecuación del plano.

5. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $(6, 4, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(7, -2, 3)$ y $(1, 4, -5)$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7, hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados. Usese el método del ejemplo 2 del Artículo 115.

6. $(-3, 2, 4)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 2, -1)$.

7. $(1, 4, -4)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 0, -2)$.

8. Resolver el ejercicio 6 por el método del ejemplo 1 del Artículo 116.

9. Un plano pasa por el punto $(5, -1, 3)$, y dos de los ángulos directores de su normal son $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$. Hállese la ecuación del plano. (Dos soluciones.)

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-4, 2, 9)$ y es perpendicular al eje Z.

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -5, 7)$ y es paralelo al plano XZ.

12. Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento $A(3, 2, -7)$ y $B(5, -4, 9)$ en su punto medio.

13. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 1, 3)$, $(3, -5, -1)$, $(-6, 7, -9)$ y $(-2, 4, -3)$ son coplanares.

En cada uno de los ejercicios 14-19, partiendo de la ecuación dada del plano, hállense sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Constrúyase la figura en cada caso.

14. $x + y + z - 1 = 0$.

15. $x + 2y - z - 2 = 0$.

16. $5x - 3y + 15z - 15 = 0$.

17. $x + y + z = 0$.

18. $x + 3y - 6 = 0$.

19. $2y - 5z + 5 = 0$.

20. Hallar el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $6x + 7y + 14z - 42 = 0$.

21. Si A, B, C y D son todos diferentes de cero, demuéstrese que el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ tiene un volumen igual a $\frac{1}{6}\left|\frac{D^3}{ABC}\right|$.

22. Construir el paralelepípedo rectangular formado por los planos coordenados y por los planos $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$. Hallar su volumen.

23. Construir el prisma triangular formado por los planos coordenados y por los planos $x + 2y - 4 = 0$ y $z - 5 = 0$. Hallar su volumen.

24. Construir el prisma formado por los planos coordenados y los planos $y + 3z - 6 = 0$ y $x - 7 = 0$. Hallar su volumen.

25. Construir el prisma limitado por los planos $z - y = 0$, $y + z = 4$, $z = 0$, $x = 0$ y $x = 5$. Hallar su volumen.

117. Otras formas de la ecuación del plano. Supongamos que el plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

tiene por intercepciones respectivas con los ejes X, Y y Z a los números a, b y c diferentes de cero, es decir, que determina sobre los ejes tres segmentos medidos en magnitud y signo por los números a, b y c. Entonces los tres puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ están sobre el plano, y sus coordenadas satisfacen la ecuación (1). Por tanto, tenemos las tres ecuaciones

$$Aa + D = 0, \quad Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0,$$

de donde,

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Sustituyendo estos valores de A, B y C en la ecuación (1), y dividiendo por $-D$, obtenemos la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2}$$

La ecuación (2) se conoce como la *forma simétrica* de la ecuación de un plano o *forma de las intercepciones*, o *forma segmentaria*. Es una forma restringida ya que no se puede aplicar, por ejemplo, a un plano que pasa por el origen. Este resultado conduce al siguiente

TEOREMA 3. *El plano cuyas intercepciones respectivas con los ejes* X, Y, *y* Z *son los números* a, b *y* c, *diferentes de cero, tiene como ecuación*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Consideremos ahora que el plano (1) contiene a los tres puntos no colineales $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Entonces deben cumplirse las tres condiciones siguientes

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0.$$

Estas tres ecuaciones, juntas con la ecuación (1), constituyen un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneas en A, B, C y D. Dicho sistema tiene una solución diferente de cero, solamente en el caso de ser cero el determinante del sistema (Apéndice IB, 6; teorema), es decir, el determinante de los coeficientes.

Según esto debe verificarse la igualdad :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

El estudiante debe demostrar que la ecuación (3) es la ecuación del plano que pasa por los tres puntos P_1, P_2 y P_3, por medio del método empleado en la deducción del teorema 13, Artículo 35. Tenemos entonces el siguiente

TEOREMA 4. *La ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados no colineales*, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$, *en forma de determinante es*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA. La ecuación (3) se conoce también con el nombre de *forma de los tres puntos* de la ecuación de un plano.

118. Posiciones relativas de dos planos. En este artículo vamos a considerar las posiciones relativas que pueden ocupar dos planos cualesquiera cuyas ecuaciones, en su forma general, son :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0. \qquad (2)$$

El *ángulo formado por dos planos* se *define* como el ángulo que forman sus normales respectivas. Por tanto, hay dos valores para este ángulo, suplementarios entre sí. Si los núneros directores respectivos de las normales a los planos (1) y (2) son $[A, B, C]$ y $[A', B', C']$, resulta, como una consecuencia directa del teorema 7 del Artículo 112, el siguiente

TEOREMA 5. *El ángulo θ formado por los dos planos*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad y \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

está determinado por la fórmula

$$\cos\theta = \pm \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Si los planos (1) y (2) son paralelos, sus normales son paralelas. Luego, por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos planos está dada por las relaciones

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC', \tag{3}$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si los planos (1) y (2) son perpendiculares, sus normales son perpendiculares. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad está dada por la relación

$$AA' + BB' + CC' = 0. \tag{4}$$

Dos planos son idénticos o coincidentes solamente en el caso de ser paralelos y tener un punto común. Supongamos que los planos (1) y (2) son paralelos y que tienen el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ común. Por ser paralelos se deben cumplir las relaciones (3), y podemos escribir la ecuación (1) en la forma

$$kA'x + kB'y + kC'z + D = 0. \tag{5}$$

Multiplicando la ecuación (2) por k, obtenemos

$$kA'x + kB'y + kC'z + kD' = 0. \tag{6}$$

Como el punto P_1 está sobre ambos planos, sus coordenadas (x_1, y_1, z_1) deben satisfacer a las ecuaciones (1) y (2), y, por tanto, también a las ecuaciones (5) y (6), de las cuales tenemos, respectivamente,

$$kA'x_1 + kB'y_1 + kC'z_1 + D = 0, \tag{7}$$

$$kA'x_1 + kB'y_1 + kC'z_1 + kD' = 0. \tag{8}$$

Como los primeros miembros de ambas ecuaciones (7) y (8) son constantes e iguales a cero, son iguales entre sí, de donde

$$D = kD'.$$

Combinando este último resultado con las relaciones (3) anteriores, tenemos, como una condición necesaria y suficiente para la coincidencia de los planos (1) y (2), las relaciones

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC', \quad D = kD'; \quad (k \neq 0). \tag{9}$$

Un resumen de los resultados anteriores viene dado en el siguiente

TEOREMA 6. *Dados dos planos*

$$\mathrm{Ax + By + Cz + D = 0} \quad y \quad \mathrm{A'x + B'y + C'z + D' = 0},$$

son condiciones necesarias y suficientes para

a) *Paralelismo, que* $\mathrm{A = kA'}$, $\mathrm{B = kB'}$, $\mathrm{C = kC'}$, $(\mathrm{k} \neq 0)$;
b) *Perpendicularidad, que* $\mathrm{AA' + BB' + CC' = 0}$;
c) *Coincidencia, que* $\mathrm{A = kA'}$, $\mathrm{B = kB'}$, $\mathrm{C = kC'}$, $\mathrm{D = kD'}$, $(\mathrm{k} \neq 0)$.

NOTA. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 6 del Artículo 30.

Ahora estamos en posibilidad de considerar los casos especiales de la forma general de la ecuación de un plano,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

en la que uno, por lo menos, de los coeficientes A, B y C es diferente de cero.

Consideremos primero el caso en que $C = 0$, de manera que la ecuación (1) toma la forma especial

$$Ax + By + D = 0. \qquad (10)$$

Los números directores de la normal al plano (10) son $[A, B, 0]$. Los números directores del eje z son $[0, 0, 1]$, y el eje z es normal al plano XY. El plano (10) y el plano XY satisfacen la condición de perpendicularidad dada en el apartado (b) del teorema 6, ya que

$$A(0) + B(0) + 0(1) = 0.$$

Análogamente, podemos demostrar que los planos $Ax + Cz + D = 0$ y $By + Cz + D = 0$ son perpendiculares a los planos XZ y YZ, respectivamente. Se desprende en cada caso, también, que el plano es paralelo al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación. Este resultado se expresa mediante el siguiente

TEOREMA 7. *Una ecuación lineal que contiene únicamente dos variables representa un plano perpendicular al plano coordenado de esas dos variables, y es paralelo al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación, y recíprocamente.*

NOTA. Por lo estudiado en la Geometría analítica plana, el lector puede pensar que la ecuación (10) representa una línea recta. Debe observar, sin embargo, que aquí y en nuestro estudio posterior de la Geometría analítica de tres dimensiones, una sola ecuación en una, dos o tres variables, si tiene un lugar geométrico, representa en el espacio una superficie y *no* una curva.

Consideremos ahora la ecuación lineal homogénea en dos variables, es decir, una ecuación en la cual falte el término constante. Entonces, para $D = 0$, la ecuación (10) toma la forma

$$Ax + By = 0. \tag{11}$$

Este plano pasa por el origen, y como es perpendicular al plano XY, debe pasar también por el eje Z. Análogamente, podemos demostrar que los planos $Ax+Cz = 0$ y $By+Cz = 0$ pasan por los ejes Y y X, respectivamente. Por tanto, tenemos el siguiente

COROLARIO. *Una ecuación lineal homogénea en dos variables representa un plano que pasa por el eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable que no aparece en la ecuación, y recíprocamente.*

Finalmente, consideremos la ecuación lineal en una variable solamente. Supuesto $B = C = 0$, la ecuación (1) toma la forma

$$Ax + D = 0. \tag{12}$$

Los números directores de la normal al plano (12) son $[A, 0, 0]$ o $[1, 0, 0]$. Los números directores del eje X son $[1, 0, 0]$. Por tanto, el plano (12) es perpendicular al eje X y, en consecuencia, es paralelo al plano YZ. Análogamente, podemos demostrar que el plano $By + D = 0$ es perpendicular al eje Y y paralelo al plano XZ, y que el plano $Cz + D = 0$ es perpendicular al eje Z y paralelo al plano XY. Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 8. *Una ecuación lineal en una sola variable representa un plano perpendicular al eje coordenado a lo largo del cual se mide esa variable y paralelo al plano de las dos variables que no figuran en la ecuación, y recíprocamente.*

COROLARIO. *Las ecuaciones* $x = 0$, $y = 0$ *y* $z = 0$ *representan, respectivamente, a los planos coordenados* YZ, XZ y XY, *y recíprocamente.*

El estudiante debe tabular los resultados de los teoremas 7 y 8 y sus corolarios y observar la simetría en las letras x, y y z. (Véase el ejercicio 6 del grupo 50, Art. 109.)

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 1, -3)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + 4z - 9 = 0$.

Solución. Por el teorema 6 del Artículo 118, la ecuación buscada es

$$5x - 2y + 4z + k = 0, \tag{13}$$

en donde k es una constante cuyo valor debe determinarse. Como este plano pasa por el punto P las coordenadas $(2, 1, -3)$ deben satisfacer la ecuación (13), y tenemos

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4(-3) + k = 0,$$

de donde $k = 4$. Por tanto, la ecuación buscada es

$$5x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los puntos $P_1(1, 5, -3)$ y $P_2(-5, -4, 11)$.

Solución. Como el plano buscado es perpendicular al plano XY, su ecuación, por el teorema 7 del Artículo 118, debe ser de la forma

$$Ax + By + D = 0. \tag{14}$$

Como el plano (14) pasa por los puntos P_1 y P_2, las coordenadas de estos puntos deben satisfacer a la ecuación (14), y tenemos las dos ecuaciones

$$A + 5B + D = 0, \tag{15}$$

$$-5A - 4B + D = 0. \tag{16}$$

La solución de las ecuaciones (15) y (16) para A y B en términos de D da $A = \frac{3}{7}D$, $B = -\frac{2}{7}D$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (14) y dividiendo por $D \neq 0$, hallamos la ecuación buscada

$$3x - 2y + 7 = 0.$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5, 2, -3)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $2x - y + 2z - 9 = 0$ y $x + 3y - 5z + 3 = 0$.

Solución. Podríamos usar el método del ejemplo 2, pero aquí seguiremos otro método.

Primero vamos a hallar los números directores de la normal al plano buscado. Esta normal es perpendicular a cada una de las normales a los planos dados. Por tanto, por el artificio de los números directores (Art. 113), sus números directores son

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

Por tanto, la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5, 2, -3)$ y tiene una normal cuyos números directores son $[1, -12, -7]$ es

$$1(x - 5) - 12(y - 2) - 7(z + 3) = 0$$

o sea,

$$x - 12y - 7z - 2 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 54

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del plano cuyas intercepciones respectivas con los ejes X, Y y Z son -5, 3 y 1.

2. La ecuación de un plano es $2x - 3y + 9z = 1$. Escribir la ecuación en la forma simétrica.

3. Escribir en forma de determinante la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(6, 2, 0)$, $(4, -1, 2)$ y $(3, 4, -1)$. A partir de ella hállese la forma general de la ecuación del plano.

4. Si de los cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) no hay tres que sean colineales, demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que sean coplanares está dada por el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Véase el corolario del teorema 12, Art. 34.)

5. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 0, -4)$, $(2, -1, 3)$ $(-2, 3, 5)$ y $(-1, 2, 4)$ son coplanares.

6. Hallar el ángulo agudo formado por los planos $3x + y - z + 3 = 0$ y $x - y + 4z - 9 = 0$.

7. Hallar el ángulo agudo formado por el plano $5x + 4y - z + 8 = 0$ y el plano XY.

8. Deducir el apartado (*a*) del teorema 6 directamente del teorema 5 del Artículo 118.

9. Deducir el punto (*b*) del teorema 6 directamente del teorema 5 del Artículo 118.

10. Obtener el corolario del teorema 8, Artículo 118, considerando las coordenadas de un punto que está en un plano coordenado.

11. Construir las figuras respectivas para ilustrar cada uno de los planos especificados en los teoremas 7 y 8 y en sus corolarios (Art. 118).

12. Si dos planos son paralelos, demuéstrese que sus trazas sobre cualquiera de los planos coordenados son dos rectas paralelas.

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -2, 6)$ y es paralelo al plano $4y - 3z + 12 = 0$.

14. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los dos puntos $(2, -2, 11)$ y $(-7, -8, -3)$.

15. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $4x - 3y + 2z - 9 = 0$ y que pasa por los dos puntos $(2, -6, 4)$ y $(3, -7, 5)$.

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(4, -2, 1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos

$$x - 3y + 4z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 2y - z + 11 = 0.$$

17. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XZ y que pasa por los dos puntos $(4, -7, 2)$ y $(12, -11, 7)$.

18. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $3x - 2y + 5z - 1 = 0$ y que pasa por los dos puntos $(4, -2, 2)$ y $(1, 1, 5)$.

19. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a cada uno de los planos

$$4x - y - z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y + 3z - 6 = 0.$$

20. Hallar la ecuación del plano que pasa por el eje Y y por el punto $(8, 4, -6)$.

21. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano YZ y que pasa por los dos puntos $(2, -1, 4)$ y $(1, 3, -7)$.

22. Hallar la ecuación del plano que pasa por el eje Z y por el punto $(4, -1, 7)$.

23. Un plano pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es perpendicular al plano $2x - 2y + z + 4 = 0$, y su intercepción con el eje Z es igual a -3. Hállese su ecuación.

24. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 3, 0)$ y $(4, 0, 0)$ y forma un ángulo de $30°$ con el plano $x+y+z-1=0$. (Dos soluciones.)

25. Un plano es paralelo a cada una de las rectas que tienen por números directores respectivos $[1, -3, 2]$ y $[3, 7, -1]$. Hallar la ecuación del plano si, además, pasa por el punto $(5, 1, -1)$.

26. Determinar el valor de k para que los dos planos $kx - 2y + 2z - 7 = 0$ y $4x + ky - 6z + 9 = 0$ sean perpendiculares entre sí.

27. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(2, 0, 2)$ y forma un ángulo de $60°$ con el plano $2x - 2y + z + 6 = 0$. (Dos soluciones.)

28. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 3, -1)$ y es paralelo a las dos rectas que tienen por números directores respectivos $[2, -3, 0]$ y $[-1, 2, 3]$.

29. Un plano pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Demostrar que su ecuación puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

30. Un plano pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Demostrar que la ecuación puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

119. Forma normal de la ecuación del plano. Sean el origen O y el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ los extremos de un segmento dirigido de longitud dada p y cuyos ángulos directores son α, β, γ (fig. 166).

Adoptaremos el convenio de que el segmento OP_1 está dirigido de O a P_1 y que su longitud p es un número positivo. Vamos, pues, a obtener la ecuación del único plano que pasa por P_1 y es perpendicular a OP_1.

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano, diferente de P_1. Tracemos el segmento P_1P. Por el teorema 3 del Artículo 110, las coordenadas del punto P_1 son

$$x_1 = p \cos \alpha, \quad y_1 = p \cos \beta, \quad z_1 = p \cos \gamma.$$

Por tanto, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para P_1P es $[x - p \cos \alpha,\ y - p \cos \beta,\ z - p \cos \gamma]$. También un sistema de números directores para OP_1 es

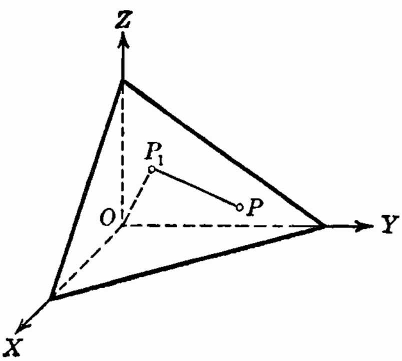

Fig. 166

$[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$. Ahora bien, si el punto P está sobre el plano los segmentos OP_1 y P_1P son perpendiculares entre sí. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, las coordenadas del punto P deben satisfacer la condición necesaria y suficiente expresada por la relación

$$\cos \alpha (x - p \cos \alpha) + \cos \beta (y - p \cos \beta) + \cos \gamma (z - p \cos \gamma) = 0,$$

que es la ecuación buscada del plano. Desarrollando el primer miembro, obtenemos

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 0,$$

la cual, por el teorema 4 del Artículo 110, se reduce a

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Esta ecuación se llama *forma normal* de la ecuación del plano, y de aquí el teorema siguiente.

TEOREMA 9. *La forma normal de la ecuación de un plano es*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

en donde p *es un número positivo numéricamente igual a la longitud de la normal trazada por el origen al plano, y* α, β *y* γ *son los ángulos directores de dicha normal dirigida del origen hacia el plano.*

Vamos a considerar ahora el paso de la forma general de la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

a su forma normal,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \qquad (2)$$

Si las ecuaciones (1) y (2) representan el mismo plano, entonces, de acuerdo con el apartado (c) del teorema 6, Artículo 118, se deben cumplir las cuatro relaciones siguientes entre sus coeficientes correspondientes:

$$\cos \alpha = kA, \qquad (3)$$

$$\cos \beta = kB, \qquad (4)$$

$$\cos \gamma = kC, \qquad (5)$$

$$-p = kD, \qquad (6)$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = k^2(A^2 + B^2 + C^2),$$

la cual, por el teorema 4 del Artículo 110, se reduce a

$$1 = k^2(A^2 + B^2 + C^2),$$

de donde,

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Por tanto, si multiplicamos la ecuación (1) por este valor de k, se deduce, de las relaciones (3), (4), (5) y (6), que la forma normal de la ecuación (1) está dada por

$$kAx + kBy + kCz + kD = 0, \qquad (7)$$

en donde $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Como la normal al plano es una recta dirigida y tiene, por tanto, un sistema único de cosenos directores, es evidente que no podemos usar ambos signos de k en la ecuación (7). Para determinar el signo que se ha de usar, adoptamos ciertos convenios que establecemos a continuación en el siguiente

TEOREMA 10. *La forma general de la ecuación de un plano*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

puede reducirse a la forma normal,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

dividiendo cada término de (1) *por* $r = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, *en donde el signo que precede al radical* r *se escoge como sigue:*

a) *Si* $D \neq 0$, r *es de signo contrario a* D.

b) *Si* $D = 0$ *y* $C \neq 0$, r *y* C *son del mismo signo.*

c) *Si* $D = C = 0$ *y* $B \neq 0$, r *y* B *son del mismo signo.*

d) *Si* $D = C = B = 0$, *entonces* $A \neq 0$, *y* r *y* A *son del mismo signo.*

NOTA. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 8 del Artículo 32.

Ejemplo. La ecuación de un plano es $2x - y + 2z - 6 = 0$. Reducir dicha ecuación a la forma normal, y hallar la longitud y ángulos directores de la normal.

Solución. Para la ecuación dada, $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$ y $D = -6$. Por tanto, $r = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \pm 3$. Como D es negativo, dividimos la ecuación dada por 3. Esto nos da la forma normal

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

Luego la longitud de la normal es 2 y sus ángulos directores son

$$\alpha = \text{arc cos } \tfrac{2}{3} = 48^\circ\, 11',$$

$$\beta = \text{arc cos } (-\tfrac{1}{3}) = 109^\circ\, 28'$$

$$\gamma = \text{arc cos } \tfrac{2}{3} = 48^\circ\, 11'.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este ejemplo.

120. Aplicaciones de la forma normal. a) *Distancia de un punto a un plano.* Sea δ (fig. 167) el plano y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto. Vamos a determinar la distancia d de P_1 a δ.

Supongamos que la forma normal de la ecuación de δ es

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \qquad (1)$$

Sea δ' el plano que pasa por P_1 y es paralelo a δ, y sea p' la longitud de la normal trazada desde el origen a δ'. Como se ha convenido, p y p' se considerarán como números positivos.

Como se indicó en el problema análogo de la distancia de un punto a una recta en Geometría analítica plana (Art. 33), hay seis casos posibles para las posiciones relativas de P_1, δ y el origen. Solamente uno de estos casos aparece en la figura 167. Para llegar a un resultado

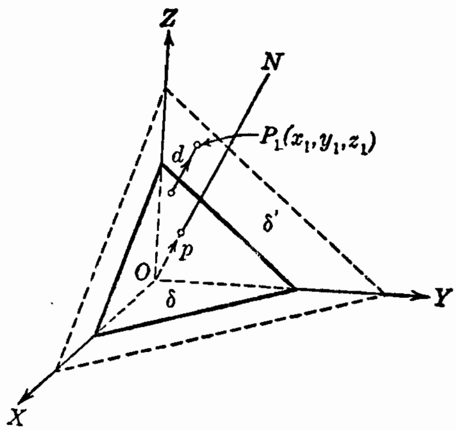

Fig. 167

común a todos los casos, emplearemos distancias *dirigidas*. Según esto, vamos a asignar la dirección positiva a la normal ON trazada *desde* el origen *al* plano δ. La distancia d será considerada siempre como dirigida *del* plano δ *hacia* el punto P_1 y, por tanto, será positiva o negativa según que esta dirección sea igual o no a la dirección ON. Entonces, para cada uno de los seis casos posibles de posición de P_1, δ y O, tenemos, como en el Artículo 33, ya sea la relación

$$p' = p + d \qquad (2)$$

o la relación

$$p' = -(p + d). \qquad (3)$$

Por ejemplo, la relación (2) es verdadera para el caso representado en la figura 167 en donde los ángulos directores de la normal a δ' son idénticos a los ángulos directores correspondientes de la normal a δ.

Por tanto, por el teorema 9 del Artículo 119, la forma normal de la ecuación del plano δ' es

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p' = 0,$$

la cual, en virtud de la relación (2), puede escribirse en la forma

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - (p + d) = 0. \qquad (4)$$

Si, en cambio, el punto P_1 está localizado del lado opuesto del origen, es decir, de tal manera que el plano δ' que pasa por él y es paralelo a δ esté de lado opuesto del origen con respecto a δ, entonces se verifica la relación (3). Pero en este caso los ángulos directores de la normal a δ' son $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ y $\pi - \gamma$, de manera que la forma normal de la ecuación del plano δ' es ahora

$$x \cos(\pi - \alpha) + y \cos(\pi - \beta) + z \cos(\pi - \gamma) - p' = 0,$$

la cual, en vista de la relación (3), puede escribirse en la forma

$$-x \cos \alpha - y \cos \beta - z \cos \gamma + (p + d) = 0.$$

Pero esta última ecuación es idéntica a la ecuación (4). Análogamente, podemos demostrar que para los cuatro arreglos restantes la ecuación (4) representa al plano δ'.

Como el punto P_1 está sobre δ', sus coordenadas satisfacen a la ecuación (4), y tenemos

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - (p + d) = 0,$$

de donde

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p. \qquad (5)$$

Comparando este resultado con la ecuación (1), vemos que la distancia dirigida d puede obtenerse, en magnitud y signo, sustituyendo las coordenadas del punto P_1 en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de δ.

Si el plano δ no pasa por el origen, una investigación de los seis arreglos posibles muestra que la distancia dirigida d es positiva o negativa según que el punto P_1 y el origen estén de lados opuestos o del mismo lado del plano δ. Si el plano δ pasa por el origen, el signo de δ debe de interpretarse de acuerdo con las convenciones establecidas en el teorema 10 del Artículo 119.

Como la ecuación de un plano se da usualmente en la forma general

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

el resultado de la ecuación (5) puede expresarse en la forma

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Un resumen de los resultados precedentes lo establece el teorema siguiente.

TEOREMA 11. *La distancia dirigida* d *del punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *al plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ *se obtiene por la fórmula*

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 10, Artículo 119.

Si el plano no pasa por el origen, d *es positiva o negativa, según que el punto* P_1 *y el origen estén de lados opuestos o del mismo lado del plano.*

Si el plano dado pasa por el origen, el signo de d *se interpreta de acuerdo con las convenciones adoptadas en el teorema 10, Artículo 119, para la dirección de la normal al plano y usadas para la determinación del signo radical.*

NOTAS. 1. El estudiante debe comparar este teorema con el teorema 10 del Artículo 33.

2. Si se requiere solamente la distancia de un punto a un plano, tomamos el valor absoluto de d.

Ejemplo 1. Hallar la distancia dirigida del punto $P(-3, -4, 2)$ al plano $3x + 12y - 4z - 39 = 0$. Interpretar el signo de esta distancia.

Solución. Por el teorema 11 anterior, la distancia buscada es

$$d = \frac{3(-3) + 12(-4) - 4(2) - 39}{\sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{-104}{13} = -8.$$

El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado del plano.

b) *Ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por dos planos que se cortan.* Supongamos que los dos planos son

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Las ecuaciones de los planos bisectores se determinan por el mismo método empleado en el problema análogo de la Geometría analítica plana, a saber, la determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan (apartado [b], Art. 33). Por tanto, se deja al estudiante como ejercicio la demostración de que las ecuaciones de los planos bisectores son

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

y

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

en donde los signos de los radicales se escogen de acuerdo con el teorema 10, Artículo 119. La distancia entre estos dos planos puede calcularse por medio del teorema 11, Artículo 120.

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos $6x - 7y + 6z - 22 = 0$ y $2x + 6y - 3z + 14 = 0$.

Solución. Las formas normales de las ecuaciones de los dos planos dados son

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{\sqrt{36 + 49 + 36}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{2x + 6y - 3z + 14}{-\sqrt{4 + 36 + 9}} = 0.$$

Por tanto, la ecuación de uno de los planos bisectores es

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{11} = \frac{2x + 6y - 3z + 14}{-7},$$

o sea,

$$64x + 17y + 9z = 0,$$

y la ecuación del otro es

$$\frac{6x - 7y + 6z - 22}{11} = -\frac{2x + 6y - 3z + 14}{-7},$$

o sea,

$$20x - 115y + 75z - 308 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 55

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. La normal a un plano tiene una longitud de 5 y dos de sus ángulos directores son $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Hallar la ecuación del plano. (Dos soluciones.)

En cada uno de los ejercicios 2-5, redúzcase la ecuación dada a la forma normal, y hállense la longitud y los ángulos directores de la normal.

2. $8x + 4y - z + 18 = 0$. **4.** $3x + 4y - 12z = 0$.

3. $6x + 6y + 7z - 22 = 0$. **5.** $3x - 4y - 10 = 0$.

6. Obtener la forma normal de cada uno de los planos especificados en los teoremas 7 y 8 y sus corolarios (Art. 118). Tabular los resultados.

7. Hallar la ecuación del plano cuya distancia del origen es 5 y cuya normal tiene por números directores $[-2, 6, 3]$. (Dos soluciones.)

8. Hallar el valor de k para que la distancia del origen al plano

$$3x - 6y + kz + 14 = 0$$

sea igual a 2.

9. Hallar la forma normal de la ecuación del plano que es paralelo al plano $4x + y - 8z + 11 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -2, -1)$.

10. Hallar la distancia del origen a cada uno de los planos paralelos

$$4x - 4y + 7z - 18 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 4y + 7z + 27 = 0.$$

De aquí hallar la distancia entre estos dos planos.

11. La ecuación de un plano δ es $2x - y + z - 18 = 0$, y las coordenadas de un punto P son $(2, 1, 6)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por P y es paralelo a δ. Después hallar la distancia de P a δ.

En cada uno de los ejercicios 12-14, hállese la distancia del punto dado al plano dado, e interprétese el signo de la distancia.

12. $x + 2y - 2z + 12 = 0$; $(3, -2, 7)$.

13. $4x - 3y + 12z = 0$; $(-5, -10, -3)$.

14. $5y + 12z + 26 = 0$; $(3, 2, -1)$.

15. Hallar la distancia entre los planos paralelos $8x - 4y + z + 9 = 0$ y $8x - 4y + z - 36 = 0$ calculando la distancia de un punto de un plano al otro.

16. Hallar la distancia entre los planos paralelos

$$6x + 3y - 2z + 14 = 0 \quad \text{y} \quad 6x + 3y - 2z - 35 = 0.$$

17. Demostrar que la distancia d entre los planos paralelos

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

está dada por la fórmula

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Usese este resultado para comprobar el ejercicio 16.

18. La base de un tetraedro es el triángulo cuyos vértices son $(1, -2, 1)$, $(-4, 2, -1)$ y $(-5, 5, 3)$. Si el cuarto vértice es el punto $(4, 2, -3)$, hállese la longitud de la altura trazada desde el vértice a la base.

19. Hallar el volumen del tetraedro del ejercicio 18.

20. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al de la ecuación

$$2x - y + 2z - 9 = 0$$

y está a 2 unidades de él. (Dos soluciones.)

21. Hallar el valor del coeficiente k en la ecuación $kx - 2y + 6z + 14 = 0$ de un plano, para que la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al plano sea igual a -3.

22. Si la distancia de un plano al origen es p y sus intercepciones con los ejes coordenados son a, b y c, demuéstrese que $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

23. Deducir las ecuaciones de los dos planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

En cada uno de los ejercicios 24 y 25, hállense las ecuaciones de los planos bisectores de los ángulos diedros suplementarios formados por los dos planos cuyas ecuaciones se dan.

24. $x - 4y + 8z - 9 = 0$ y $2x + y - 2z + 6 = 0$.

25. $7x - 4y + 4z + 18 = 0$ y $6x + 7y - 6z - 22 = 0$.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del plano $2x - y + 2z - 6 = 0$ es igual al doble de su distancia del plano $x + 2y - 2z + 3 = 0$. (Dos soluciones.)

En los ejercicios 27-31, los vértices de un triángulo T son $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$, su área es A y los ángulos directores de la normal a su plano son α, β y γ.

27. La proyección ortogonal de T sobre el plano XY es otro triángulo cuyos vértices son $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ y $(x_3, y_3, 0)$. Por tanto, por el teorema 12 del Artículo 34, el área proyectada es

$$A_z = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Demostrar, análogamente, que las áreas proyectadas sobre los planos XZ y YZ son, respectivamente,

$$A_y = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad A_x = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En todos los casos se toma el valor absoluto del determinante.

28. Por medio del teorema 6, Artículo 112, demostrar que los ángulos formados por el plano de T y los planos XY, XZ y YZ son γ, β y α, respectivamente. Demostrar, por tanto, que

$$A_z = |\,A \cos \gamma\,|, \quad A_y = |\,A \cos \beta\,|, \quad A_x = |\,A \cos \alpha\,|.$$

29. Partiendo del resultado del ejercicio 28 y el teorema 4, del Artículo 110, demostrar que $A^2 = A^2_x + A^2_y + A^2_z$.

30. Mediante los resultados de los ejercicios 27 y 29 demostrar que el área de T está dada por

$$A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

31. Sea $P_4(x_4, y_4, z_4)$ un punto cualquiera no contenido en el plano de T. Por medio del teorema 4, Artículo 117, y por el teorema 11, Artículo 120, demostar que la distancia d del punto P_4 al plano de T está dada por

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}},$$

en donde se debe tomar el valor absoluto del numerador.

32. Por medio de los resultados de los ejercicios 30 y 31, demostrar que el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$ está dado por

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

debiéndose tomar el valor absoluto del determinante.

33. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(-4, 6, 3)$, $(8, -3, 5)$, $(4, 0, -1)$ y $(5, 3, 9)$.

34. Usar el resultado del ejercicio 32 para resolver el ejercicio 4 del grupo 54, Artículo 118.

35. Usar el resultado del ejercicio 30 para resolver el ejemplo del Artículo 112.

121. Familias de planos. De la misma manera que en Geometría analítica plana consideramos familias de curvas, podemos considerar familias de planos. En el Artículo 116 vimos que un plano y su ecuación están cada uno perfectamente determinados por tres condiciones independientes. Según esto, un plano que satisfaga menos de esas tres condiciones no está determinado, es decir, no es único. La ecuación de un plano que satisface solamente dos condiciones independientes contiene una sola constante arbitraria independiente o parámetro y, por tanto, representa una *familia de planos monoparamétrica*.

Un ejemplo de familia de planos con un solo parámetro es la ecuación

$$Ax + By + Cz + k = 0, \tag{1}$$

en donde A, B y C son constantes fijas y el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Esta ecuación representa a la familia de planos que son paralelos al plano dado

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Una familia de planos particularmente útil es el sistema de planos que pasan por la intersección de dos planos dados cuyas ecuaciones pueden tomarse en las formas

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (2)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (3)$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan ambas ecuaciones (2) y (3) está sobre su recta de intersección. Evidentemente, las coordenadas de tal punto satisfacen también la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (4)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias que pueden tomar todos los valores reales exceptuando el caso en que ambas sean cero simultáneamente. Además, como la ecuación (4) es lineal, representa todos los planos que pasan por la intersección de los planos dados (2) y (3). Procediendo como en el caso de una familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas (Art. 36), vamos a eliminar el plano (3) de la familia (4) con el fin de obtener la ecuación más simple

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (5)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Se dice que la ecuación (5) representa un *haz de planos*, y a su recta común de intersección se le llama *eje* o *arista del haz*.

Ejemplo. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 5, -1)$ y por la recta de intersección de los planos

$$4x + y - 2z - 8 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - y + 4z - 4 = 0.$$

Solución. Por la ecuación (5) anterior, el plano buscado es un elemento del haz de planos que tiene por ecuación

$$4x + y - 2z - 8 + k(3x - y + 4z - 4) = 0. \qquad (6)$$

Como el plano buscado pasa por el punto P, las coordenadas $(2, 5, -1)$ de P deben satisfacer la ecuación (6), y tenemos

$$4 \cdot 2 + 5 - 2(-1) - 8 + k(3 \cdot 2 - 5 + 4(-1) - 4) = 0,$$

de donde $k = 1$. Sustituyendo este valor de k en la ecuación (6) y simplificando, tenemos, como ecuación del plano que se busca

$$7x + 2z - 12 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo.

En el Artículo 115, vimos que la ecuación de cualquier plano que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (7)$$

Por tanto, esta ecuación representa a la familia de planos que pasan por el punto dado, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Tal sistema se llama una *radiación de planos*, teniendo al punto P_1 como *vértice de la radiación*. Como uno, por lo menos, de los coeficientes A, B y C es diferente de cero, la ecuación (7) contiene solamente dos constantes arbitrarias independientes; representa, por lo tanto, una *familia de planos biparamétrica*.

Como con esto se concluye nuestro estudio del plano, se recomienda al estudiante que haga un resumen de los resultados de este capítulo.

EJERCICIOS. Grupo 56

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Determinar el valor del parámetro k de tal manera que un plano de la familia $kx - 3y + kz - 22 = 0$ pueda pasar por el punto $(3, -4, 2)$. Hallar la ecuación del plano.

2. Determinar el valor del parámetro k de tal manera que un plano de la familia $2x + ky - kz + 7 = 0$ sea perpendicular al plano $3x + 6y - 12 = 0$. Hallar la ecuación del plano.

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(4, -1, 1)$ y es paralelo al plano $4x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $x + 3y - 2z + 14 = 0$ y tal que la suma de sus intercepciones con los ejes coordenados sea igual a 5.

5. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al que tiene por ecuación

$$x - 2y + 2z + 12 = 0$$

y cuya distancia del origen es igual a 2. (Dos soluciones.)

6. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al que tiene por ecuación

$$7x + 3y - 2z + 2 = 0$$

y cuya intercepción con el eje Z es 4.

7. El volumen del tetraedro formado por un cierto plano y los planos coordenados es 12. Hallar la ecuación del plano sabiendo que es paralelo al de ecuación $3x + 2y + 4z + 6 = 0$. (Dos soluciones.)

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ y también por la recta de intersección de los planos

$$x + 2y - z = 4 \quad \text{y} \quad 2x - 3y + z = 6.$$

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z + 2 = 0$ y $x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano XY.

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z = 2$ y $4x + 3y - z = 1$ y es perpendicular al plano

$$3x - 4y - 7z = 9.$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y - z = 2$ y $x + y - 3z + 4 = 0$ y tal que su distancia al origen sea igual a 2. (Dos soluciones.)

12. La distancia de un plano al origen es igual a 3. Si el plano pasa también por la intersección de los planos $x + y + z - 11 = 0$ y $x - 4y + 5z - 10 = 0$. hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

13. Un plano es paralelo al de ecuación $2x + 2y + z - 1 = 0$, y el punto $(2, 2, 2)$ es equidistante de ambos planos. Hállese la ecuación del plano.

14. La distancia de un plano al punto $(1, 0, 2)$ es 1. Si el plano pasa por la intersección de los planos $4x - 2y - z + 3 = 0$ y $2x - y + z - 2 = 0$, hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

15. Un plano pasa por el punto $(5, 2, -1)$ y su traza con el plano XY es la recta $x - 2y + 2 = 0$, $z = 0$. Hállese su ecuación.

16. Un plano pasa por el punto $(1, 6, -2)$ y tiene la misma traza sobre el plano XY que el plano $3x - y - 8z + 7 = 0$. Hállese su ecuación.

17. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - y + 2z + 4 = 0$ y $2x + y + 3z - 9 = 0$ y es paralelo a la recta cuyos números directores son $[1, 3, -1]$.

18. La ecuación de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$. Hallar las condiciones que deben satisfacer sus coeficientes para que pertenezca al haz de planos representado por la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

19. Demostrar que los tres planos

$$2x - y + 2z - 8 = 0,\ 8x - y + 13z - 21 = 0 \text{ y } 4x + y + 9z - 5 = 0$$

pertenecen al mismo haz.

20. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que los tres planos $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, tengan uno y solamente un punto común es

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

21. Demostrar que los tres planos

$$3x + 2y - z - 3 = 0,\ 2x - 3y - 3z - 4 = 0 \text{ y } x + 7y - 2z + 7 = 0$$

tienen solamente un punto común, y hallar sus coordenadas.

22. Supongamos que los tres planos

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

tienen uno y solamente un punto P en común. Demostrar que la radiación de planos cuyo vértice es P tiene por ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + k_2(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0.$$

en donde k_1 y k_2 son los parámetros.

23. Demostrar que los cuatro planos $4x+3y-4z-8=0$, $2x-8y+7z+5=0$, $x-3y-2z-3=0$ y $3x+y+z-2=0$ pertenecen a la misma radiación y hallar las coordenadas de sus vértices.

24. Un plano pasa por los dos puntos $(3, 0, -1)$, $(2, -3, -3)$ y pertenece a la radiación determinada por los planos $2x-3y+2z-9=0$, $x+4y-z+3=0$ y $3x-2y-2z-6=0$. Hallar la ecuación del plano por el método paramétrico y comprobar el resultado por otro método.

25. Hallar la ecuación del plano de la radiación del ejercicio 24 que pasa por el punto $(1, 1, -3)$ y es perpendicular al plano $x+y-2z+12=0$.

CAPITULO XV

LA RECTA EN EL ESPACIO

122. Introducción. En el capítulo anterior hicimos un estudio del plano como la más sencilla de todas las superficies. Podríamos continuar nuestro trabajo estudiando superficies más complicadas antes de considerar las curvas en el espacio. Pero la línea recta en el espacio, considerada como la intersección de dos planos diferentes, se presenta tan naturalmente después del estudio del plano, que dedicamos completo el presente capítulo a su estudio. El siguiente capítulo lo reservaremos para tratar el problema general de las superficies.

123. Forma general de las ecuaciones de la recta. Sea l la recta de intersección de dos planos diferentes cualesquiera, cuyas ecuaciones, en la forma general, son

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan *ambas* ecuaciones del sistema (1) está sobre cada uno de los planos y, por lo tanto, está sobre su intersección l. Recíprocamente, cualquier punto que esté sobre l debe estar sobre cada uno de los planos, y sus coordenadas deben satisfacer, por lo tanto, ambas ecuaciones. Según esto, las dos ecuaciones del sistema (1), *consideradas simultáneamente*, son *las ecuaciones de una recta en el espacio*. El sistema (1) es llamado, apropiadamente, *forma general de las ecuaciones de la recta*.

En seguida observemos el hecho importante de que las ecuaciones de cualquier recta particular en el espacio *no son únicas*. En efecto, podemos considerar, como en el Artículo 121, que la recta l, representada por el sistema (1), es la arista del haz de planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0\,, \qquad (2)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Por tanto, las ecuaciones de dos planos diferentes cualesquiera de la familia (2) pueden servir como ecuaciones de la recta l. Geométricamente, también, una recta está completamente determinada por dos planos diferentes cualesquiera que pasen por ella.

124. Forma simétrica de las ecuaciones de la recta; ecuación de la recta que pasa por dos puntos, y ecuaciones paramétricas de la recta. Para muchos problemas, la forma general de las ecuaciones de una recta no es tan conveniente como otras ciertas formas que vamos a deducir a continuación. Vamos a basarnos en que una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección, o por dos cualesquiera de sus puntos. La deducción de las ecuaciones se basará en lo dicho en el Artículo 25 sobre la ecuación de una recta, dado uno de sus puntos y la pendiente. *Definiremos* a la línea recta como una curva del espacio caracterizada por la propiedad de que sus números directores sean idénticos a (o proporcionales a) los números directores correspondientes de cualquier segmento de la recta.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto dado cualquiera de la recta l cuyos números directores son $[a, b, c]$. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de l diferente de P_1. Entonces, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para l está dado por $[x - x_1, y - y_1, z - z_1]$. Por tanto, por nuestra definición de línea recta, las coordenadas de P deben satisfacer las relaciones

$$x - x_1 = ka, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc, \tag{1}$$

en donde k es una constante diferente de cero. Estas relaciones son, por tanto, las ecuaciones de la recta l que pasa por un punto dado y tiene una dirección dada.

Si los números directores $[a, b, c]$ de l son todos diferentes de cero, se acostumbra escribir las ecuaciones (1) en la *forma simétrica*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{2}$$

Si α, β, γ son los ángulos directores de l, entonces (Art. 111) la forma simétrica (2) puede escribirse también en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}, \tag{3}$$

siempre que ningún coseno director sea igual a cero.

Cada una de las formas (1), (2) y (3) consta de tres ecuaciones, pero en cada caso solamente dos de estas ecuaciones son independientes.

Si uno o dos de los números directores $[a, b, c]$ de l son cero, no podemos usar ni la forma (2) ni la (3). En tales casos, debemos emplear las relaciones (1). Por ejemplo, digamos que $a = 0$, pero b y a son ambos diferentes de cero. Entonces por las relaciones (1), tenemos, para las ecuaciones de l,

$$x = x_1, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc,$$

las cuales, de acuerdo con la forma simétrica (2), pueden escribirse como

$$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Para $a = 0$, la recta l es perpendicular al eje X y, por tanto, es paralela al plano YZ. Debe estar, en consecuencia, sobre un plano paralelo al plano YZ. Esto se indica analíticamente por la ecuación $x = x_1$. El estudiante debe obtener y discutir las ecuaciones de una recta para todas las combinaciones posibles de uno o dos números directores iguales a cero.

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 1. *La recta que pasa por el punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *tiene por ecuaciones*

$$x - x_1 = ka, \quad y - y_1 = kb, \quad z - z_1 = kc,$$

en donde k *es una constante diferente de cero.*

Si los números directores $[a, b, c]$ *son todos diferentes de cero, estas ecuaciones pueden escribirse en la forma simétrica*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

NOTA. Es importante para el estudiante observar que los números directores de una recta pueden obtenerse directamente de la forma simétrica, *solamente* si el coeficiente de cada una de las variables x, y y z es la *unidad positiva*.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x + 3y - 12 = 0$.

Solución. Por el teorema 2 del Artículo 115, los números directores de la recta son $[4, 3, 0]$. Por tanto, por el teorema 1 anterior, las ecuaciones de la recta son

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3}, \quad z = 1.$$

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo. Debe demostrar también que la recta es perpendicular al eje Z y que está en un plano paralelo al plano XY.

En seguida deduciremos las ecuaciones de la recta l que pasa por los puntos dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 111, un sistema de números directores para l está dado por $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. Por tanto, por el teorema 1 anterior, las ecuaciones de l son

$$x - x_1 = k(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = k(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = k(z_2 - z_1), \tag{4}$$

en donde k es una constante diferente de cero.

Si todas las coordenadas correspondientes de P_1 y P_2 son diferentes entre sí, es decir, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, podemos escribir las ecuaciones (4) en la siguiente forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{5}$$

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 2. *La recta que pasa por los dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *tiene por ecuaciones*

$$x - x_1 = k(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = k(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = k(z_2 - z_1),$$

en donde k *es una constante diferente de cero.*

Si las coordenadas de P_1 *y* P_2 *son tales que* $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, *estas ecuaciones pueden escribirse en la forma*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Consideremos ahora la recta l que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene los ángulos directores dados α, β, γ. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de l, y t la longitud del segmento de recta variable PP_1. Vamos a considerar a t positivo o negativo según que P esté de un lado o del otro de P_1, como aparece en la figura 168. Según esto, la variable t puede tomar todos los valores reales incluyendo el valor cero cuando P coincide con P_1. Evidentemente, para cada valor asignado a t, la posición de P queda perfectamente definida con respecto al punto fijo P_1.

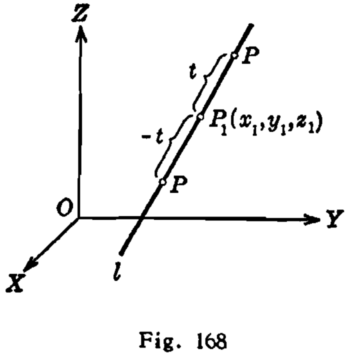

Fig. 168

Por el teorema 3 del Artículo 110, tenemos las relaciones

$$\cos \alpha = \frac{x - x_1}{t}, \quad \cos \beta = \frac{y - y_1}{t}, \quad \cos \gamma = \frac{z - z_1}{t},$$

de donde

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta, \quad z = z_1 + t \cos \gamma. \qquad (6)$$

Observando las ecuaciones (6), vemos que, asignando un valor particular a t, los valores de x, y y z quedan determinados. Pero estos son las coordenadas de un punto P de l. Se sigue por esto (Art. 89) que las ecuaciones (6) son las *ecuaciones paramétricas* de la recta l, siendo la variable auxiliar t el *parámetro*. De aquí el siguiente

TEOREMA 3. *La recta que pasa por el punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y tiene los ángulos directores* α, β, γ, *tiene por ecuaciones paramétricas*

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta, \quad z = z_1 + t \cos \gamma,$$

en donde el parámetro t *representa la longitud dirigida de* P_1 *a un punto cualquiera* $P(x, y, z)$ *de la recta.*

NOTA. Anotamos previamente que una recta en el espacio se representa analíticamente por *dos* ecuaciones independientes. Aquí observamos que una recta en el espacio se representa por *tres* ecuaciones paramétricas. Pero si eliminamos al parámetro t entre estas tres ecuaciones, obtenemos las dos ecuaciones independientes usuales.

EJERCICIOS. Grupo 57

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Las ecuaciones de una recta l son

$$3x - 2y + 4z - 9 = 0 \quad y \quad x + y - 2z + 5 = 0.$$

Obtener otro par de ecuaciones para l. Comprobar el resultado hallando las coordenadas de dos puntos que estén sobre l partiendo de las ecuaciones dadas y demostrando entonces que estas coordenadas satisfacen al nuevo par de ecuaciones.

2. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, -1, 4)$ y tiene por números directores $[3, -1, 6]$.

3. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(4, 0, 5)$ y es paralela a la recta cuyos números directores son $[1, -1, 3]$.

4. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-3, 2, 7)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 0$.

5. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-2, 4, 3)$ y cuyos números directores son $[2, 0, -3]$.

6. Una recta pasa por el punto $(6, 3, -2)$ y es perpendicular al plano $4y + 7z - 9 = 0$. Hallar sus ecuaciones.

7. Dos de los ángulos directores de una recta son $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Si la recta pasa por el punto $(4, -1, 4)$, hállense sus ecuaciones. (Dos soluciones.)

8. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3, -2, 7)$ y corta al eje X perpendicularmente.

9. Una recta es perpendicular al plano XY y contiene al punto $(3, -4, -14)$. Hallar sus ecuaciones.

10. Los números directores de una recta son $[0, 0, 1]$ y la recta pasa por el punto $(-2, 1, 7)$. Hallar sus ecuaciones.

En cada uno de los ejercicios 11-16, una recta pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene por números directores $[a, b, c]$. Hallar las ecuaciones de la recta cuando sus números directores son los que se indica. Interpretar los resultados analítica y geométricamente.

11. $a = 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$

12. $a \neq 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0.$

13. $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0.$

14. $a = 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0.$

15. $a = 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0.$

16. $a \neq 0, \quad b = 0, \quad c = 0.$

17. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-7, 3, -5)$ y es perpendicular a cada una de las dos rectas cuyos números directores son $[4, -2, 3]$ y $[1, 2, -2]$.

18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-6, 5, 3)$ y es paralela a la recta $\frac{x+4}{-2} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z+5}{6}$.

19. Hallar las ecuaciones de las recta que pasa por el punto $(3, -3, 4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas

$$\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3}.$$

20. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas

$$\frac{x-1}{-7} = \frac{y}{3} = \frac{2z+3}{-4} \quad \text{y} \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+9}{4}.$$

21. Demostrar que si una recta está en el plano XY, sin ser perpendicular ni al eje X ni al Y, y contiene al punto $P_1(x_1, y_1, 0)$, sus ecuaciones pueden escribirse en la forma $\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta}$, $z = 0$. (Ver el ejercicio 21 del grupo 14, Art. 37.)

22. Hallar las ecuaciones: *a*) del eje X; *b*) del eje Y; *c*) del eje Z.

En cada uno de los ejercicios 23-26, hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos dados.

23. $(0, 0, 0)$, $(2, -1, 5)$.

24. $(5, 0, 7)$, $(5, -3, 11)$.

25. $(1, -7, 2)$, $(1, -7, -3)$.

26. $(2, 3, -4)$, $(-5, 3, -4)$.

En cada uno de los ejercicios 27-32, hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, cuando las coordenadas correspondientes de P_1 y P_2 están relacionadas como se indica. Interpretar los resultados analítica y geométricamente.

27. $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$.	30. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 \neq z_2$.
28. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 \neq z_2$.	31. $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 = z_2$.
29. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 = z_2$.	32. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

33. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(6, -4, 2)$ y tiene por ángulos directores $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$. (Dos soluciones.)

34. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(5, -3, 0)$ y tiene por números directores $[2, -2, 1]$.

35. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos $(1, 2, -3)$ y $(2, 6, 5)$.

36. Demostrar que si una recta pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene por números directores $[a, b, c]$, sus ecuaciones paramétricas pueden escribirse en la forma

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct,$$

en donde t es el parámetro. ¿Qué relación guarda este parámetro con el parámetro t del teorema 3, Artículo 124?

37. Escribir las ecuaciones paramétricas de una recta que está situada: *a*) en el plano XY; *b*) en el plano XZ; *c*) en el plano YZ.

38. Las ecuaciones paramétricas de una recta son

$$x = 2 + 4t, \quad y = t - 4, \quad z = 7 - 8t.$$

Reducir estas ecuaciones a la forma simétrica. Hallar las coordenadas de dos puntos de la recta y construir dicha recta.

39. Reducir la forma simétrica del teorema 1 a la forma paramétrica del teorema 3, Artículo 124.

40. Reducir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dada en el teorema 2 a la forma paramétrica del teorema 3, Artículo 124.

125 Planos proyectantes de una recta. Supongamos las ecuaciones de una recta l dadas en la forma general

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (1)$$

Hemos visto (Art. 123) que la recta l puede representarse también por dos planos diferentes cualesquiera de la familia de un haz de planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (2)$$

Dado que hay un número infinito de pares de planos que definen a la recta l como su intersección, es natural que escojamos aquellos planos que sean más útiles para nuestros propósitos. Estos son los planos que pasan por l y son perpendiculares a los planos coordenados; llamados, apropiadamente, los *planos proyectantes* de la recta.

Por el teorema 7 del Artículo 118, un plano perpendicular a un plano coordenado se representa por una ecuación lineal que contiene solamente dos variables, las variables del plano coordenado particular. Por tanto, para obtener un plano proyectante determinado de la recta (1), asignamos un valor tal al parámetro k en la ecuación (2) de manera que la ecuación resultante contenga solamente las dos variables deseadas. Este procedimiento consiste, evidentemente, en la eliminación de una de las variables de las dos ecuaciones de la recta (1).

Ejemplo 1. Hallar las ecuaciones de los tres planos proyectantes de la recta l: $2x + 3y - z = 4$, $x - y + z = 4$. Construir la recta por medio de estos planos proyectantes.

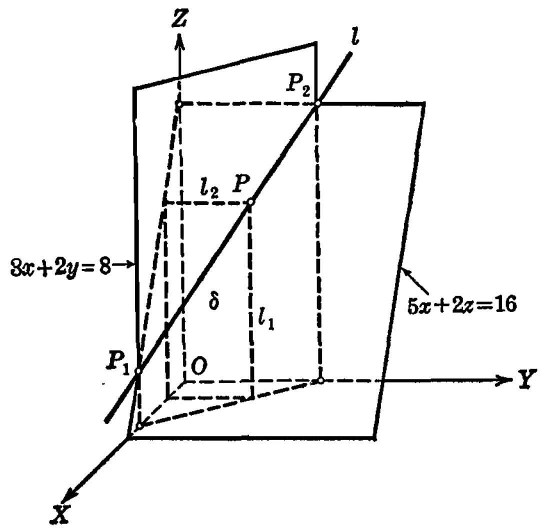

Fig. 169

Solución. Para eliminar la variable z basta sumar las ecuaciones dadas. Esto nos da

$$3x + 2y = 8, \tag{3}$$

que es la ecuación del plano proyectante de la recta dada sobre el plano XY.

La variable y puede eliminarse multiplicando la segunda ecuación de la recta por 3 y sumándola a la primera ecuación. Esto nos da

$$5x + 2z = 16, \tag{4}$$

que es la ecuación del plano proyectante sobra el plano XZ.

Análogamente, eliminando la variable x, obtenemos

$$5y - 3z + 4 = 0, \tag{5}$$

para ecuación del plano proyectante sobre el plano YZ.

Dos cualesquiera de los tres planos proyectantes son suficientes para determinar la recta l. Usemos, por ejemplo, los planos proyectantes (3) y (4) para construir la recta l, tal como se ve en la figura 169. Dos de los puntos de l, P_1 y P_2, determinados por estos planos, están sobre los planos coordenados; estos puntos se llaman *puntos de penetración* o *trazas* de la recta l.

El método para localizar cualquier punto P de la recta l también está indicado en la figura 169. Esto se logra haciendo pasar un plano δ paralelo al plano YZ. El plano δ corta a los planos proyectantes en dos rectas, l_1 y l_2; el punto P es entonces el punto de intersección de l_1 y l_2. Este método es de considerable importancia para localizar cualquier punto sobre una curva del espacio; será considerado más adelante en el Capítulo XVII.

Las ecuaciones de dos de los planos proyectantes de la recta (1) pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b, \\ z &= nx + c. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Se les llama *forma proyección* de las ecuaciones de una recta. Esta forma es útil para ciertos tipos de problemas; el siguiente ejemplo es una ilustración de esto.

Supongamos que las ecuaciones de una recta l se nos dan en la forma general (1). Queremos demostrar que l está en un plano particular cuya ecuación puede escribirse en la forma

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{7}$$

Un método, por supuesto, es obtener las coordenadas de dos de los puntos de l y demostrar que satisfacen a la ecuación (7). Un segundo método consiste en demostrar que l es perpendicular a la normal al plano (7) y que uno de sus puntos está sobre ese plano. Un tercer método consiste en demostrar que la ecuación (7) se convierte en una identidad en x cuando y y z son reemplazadas por sus valores deducidos de la forma proyección (6) de l. Un cuarto método es demostrar que el plano (7) es un miembro de la familia de planos (2). En el siguiente ejemplo vamos a aplicar el tercer método.

Ejemplo 2. Demostrar que la recta

$$3x + 4y - 2z + 7 = 0, \quad x - y - 3z + 3 = 0, \tag{8}$$

está contenida en el plano

$$x + 6y + 4z + 1 = 0. \tag{9}$$

Solución. Eliminando las variables z y y sucesivamente de las ecuaciones (8), hallamos que las ecuaciones de la recta en función de los planos proyectantes (forma proyección) son

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{15}{14}, \quad z = \frac{1}{2}x + \frac{19}{14}.$$

Sustituyendo estos valores de y y z en la ecuación (9), obtenemos

$$x - 3x - \frac{45}{7} + 2x + \frac{38}{7} + 1 = 0,$$

una identidad para todos los valores de x. Esto muestra que las coordenadas de todos los puntos de la recta (8) satisfacen a la ecuación (9) del plano.

Los planos proyectantes de una recta son una simple ilustración de un concepto importante en el estudio y construcción de las curvas generales en el espacio. Este tema será considerado más ampliamente en el Capítulo XVII.

126. Reducción de la forma general a la forma simétrica. Es claro que la forma simétrica de las ecuaciones de una recta es, frecuentemente, más conveniente que la forma general. Por ejemplo, dada una recta, por su forma simétrica, es posible obtener inmediatamente los números directores de la recta y las oordenadas de uno de sus puntos. Además, la forma simétrica da también, inmediatamente, las ecuaciones de los planos proyectantes; dada la forma general, es necesario, casi siempre, eliminar una o más variables. Por esto, vamos a considerar ahora el problema de reducir la forma general a la forma simétrica. Este método quedará mejor explicado por medio de un ejemplo.

Ejemplo 1. Las ecuaciones de una recta son

$$x + 3y - z - 4 = 0, \quad 2x - y + z + 6 = 0 \qquad (1)$$

Hallar la forma simétrica.

Solución. Del sistema (1), despejando x en función de y se obtiene

$$x = \frac{2y + 2}{-3},$$

y despejando x en función de z, resulta

$$x = \frac{2z + 14}{-7}.$$

Igualando estos resultados, tenemos

$$x = \frac{2y + 2}{-3} = \frac{2z + 14}{-7}.$$

Como en la forma simétrica los coeficientes de las variables deben ser unitarios y positivos, vamos a escribir estas ecuaciones en la forma

$$x = \frac{y + 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{z + 7}{-\frac{7}{2}},$$

o, para mayor claridad, en la forma

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z + 7}{-7}.$$

La forma simétrica muestra que los números directores de la recta (1) son $[2, -3, -7]$ y que el punto $(0, -1, -7)$ está sobre ella.

Se pueden obtener formas simétricas de la recta (1) despejando y en función de x y z, o z en función de x y y. En cada caso se obtendrán los mismos números directores, pero las coordenadas del punto serán diferentes.

La reducción puede efectuarse también hallando las coordenadas de dos puntos de la recta (1) y aplicando la fórmula de las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos.

Cuando se necesita obtener solamente los números directores de una recta partiendo de su forma general, es conveniente emplear el artificio de los números directores (Art. 113). Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Demostrar que la recta

$$x - y + 2z - 8 = 0, \quad x + 2y + 8z - 20 = 0, \tag{2}$$

es paralela al plano

$$3x - 2y + 8z - 5 = 0. \tag{3}$$

Solución. Como la recta (2) está en cada uno de los planos que la definen, es perpendicular a cada una de las normales de estos planos. Los números directores de estas normales son $[1, -1, 2]$ y $[1, 2, 8]$. Por tanto, por el artificio de los números directores, los números directores de la recta (2) son

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

o sea $[4, 2, -1]$. Los números directores de la normal al plano (3) son $[3, -2, 8]$. Entonces, como

$$4 \cdot 3 + 2(-2) - 1 \cdot 8 = 0,$$

se sigue que la recta (2) es perpendicular a la normal al plano (3) y, por tanto, es paralela al plano.

EJERCICIOS. Grupo 58

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-5, hallar los planos proyectantes de la recta cuyas ecuaciones se dan. Usense estos planos proyectantes para construir la recta.

1. $x + y + z = 6, \quad 3x - y - z = 2.$
2. $2x - y + 4z = 8, \quad x + 3y - 5z = 9.$
3. $3x + 2y - z = 4, \quad 4x - y + 7z = 14.$
4. $x - y - z = 2, \quad 3x + 2y + z = 6.$
5. $4x + 3y - 2z = 12, \quad x - 5y + 10z = 5.$

6. Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 2y - 3z + 8 = 0, \quad 2x - y + 2z - 11 = 0.$$

Hallando las coordenadas de dos de los puntos de esta recta, demuéstrese que está en el plano $2x + 7y - 12z + 49 = 0$.

7. Las ecuaciones de una recta son

$$x - 4y + 5z - 3 = 0, \quad x + 3y - 3z + 2 = 0.$$

Poniendo estas ecuaciones en función de los planos proyectantes, demuéstrese que esta recta está en el plano $3x + 2y - z + 1 = 0$.

8. Las ecuaciones de una recta son

$$5x - 4y + 2z - 9 = 0, \quad 2x + y + 2z - 4 = 0.$$

Empleando el haz de planos que tiene a esta recta por eje, demuéstrese que está en el plano $x - 6y - 2z - 1 = 0$.

9. Demostrar que la recta $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{2}$ está en el plano $x - 2y - 3z - 8 = 0$.

10. Las ecuaciones de una recta l son

$$4x - 2y + 7z - 2 = 0, \quad 3x + y - z + 4 = 0,$$

y la ecuación de un plano δ es $6x - 8y + 23z - 14 = 0$. Obtener las ecuaciones paramétricas de l y sustituir estos valores de x, y y z en la ecuación de δ. Demostrar que la ecuación resultante es una identidad en el parámetro t y, por tanto, que l está en δ.

11. Demostrar que la recta $7x - y - z + 8 = 0$, $3x + 5y - 2z - 3 = 0$, está en el plano $5x - 17y + 4z + 25 = 0$ empleando las ecuaciones paramétricas de la recta.

12. Si una recta es paralela a uno de los planos coordenados, demuéstrese que tiene solamente dos planos proyectantes diferentes.

13. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$2x + 2y - z + 3 = 0, \quad x - y + 2z + 2 = 0,$$

y el punto $(3, -1, 2)$.

14. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{3z-2}{6}$$

y el punto $(2, 0, -4)$.

15. Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 3y - z - 11 = 0, \quad x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Hallar las coordenadas de cada uno de sus puntos de penetración o trazas en los planos coordenados.

En cada uno de los ejercicios 16 y 17, redúzcase la forma general dada a una forma simétrica de las ecuaciones de la recta.

16. $x - y + 3z = 4, \quad 2x + y + 3z = 12.$

17. $9x + 2y - 3z = 18, \quad x - 3y - 5z = 15.$