**6.** Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 2y - 3z + 8 = 0, \quad 2x - y + 2z - 11 = 0.$$

Hallando las coordenadas de dos de los puntos de esta recta, demuéstrese que está en el plano $2x + 7y - 12z + 49 = 0$.

**7.** Las ecuaciones de una recta son

$$x - 4y + 5z - 3 = 0, \quad x + 3y - 3z + 2 = 0.$$

Poniendo estas ecuaciones en función de los planos proyectantes, demuéstrese que esta recta está en el plano $3x + 2y - z + 1 = 0$.

**8.** Las ecuaciones de una recta son

$$5x - 4y + 2z - 9 = 0, \quad 2x + y + 2z - 4 = 0.$$

Empleando el haz de planos que tiene a esta recta por eje, demuéstrese que está en el plano $x - 6y - 2z - 1 = 0$.

**9.** Demostrar que la recta $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{2}$ está en el plano $x - 2y - 3z - 8 = 0$.

**10.** Las ecuaciones de una recta $l$ son

$$4x - 2y + 7z - 2 = 0, \quad 3x + y - z + 4 = 0,$$

y la ecuación de un plano $\delta$ es $6x - 8y + 23z - 14 = 0$. Obtener las ecuaciones paramétricas de $l$ y sustituir estos valores de $x$, $y$ y $z$ en la ecuación de $\delta$. Demostrar que la ecuación resultante es una identidad en el parámetro $t$ y, por tanto, que $l$ está en $\delta$.

**11.** Demostrar que la recta $7x - y - z + 8 = 0$, $3x + 5y - 2z - 3 = 0$, está en el plano $5x - 17y + 4z + 25 = 0$ empleando las ecuaciones paramétricas de la recta.

**12.** Si una recta es paralela a uno de los planos coordenados, demuéstrese que tiene solamente dos planos proyectantes diferentes.

**13.** Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$2x + 2y - z + 3 = 0, \quad x - y + 2z + 2 = 0,$$

y el punto $(3, -1, 2)$.

**14.** Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{3z-2}{6}$$

y el punto $(2, 0, -4)$.

**15.** Las ecuaciones de una recta son

$$4x + 3y - z - 11 = 0, \quad x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Hallar las coordenadas de cada uno de sus puntos de penetración o trazas en los planos coordenados.

En cada uno de los ejercicios 16 y 17, redúzcase la forma general dada a una forma simétrica de las ecuaciones de la recta.

**16.** $x - y + 3z = 4, \quad 2x + y + 3z = 12.$

**17.** $9x + 2y - 3z = 18, \quad x - 3y - 5z = 15.$

18. Demostrar que la recta $x + 3y + z + 9 = 0$, $4x + 3y - 2z + 12 = 0$, es paralela al plano $2x - 3y - 4z + 6 = 0$.

19. Demostrar que la recta $x - 2y - z + 7 = 0$, $2x - 10y + z + 5 = 0$, es perpendicular al plano $4x + y + 2z - 5 = 0$.

20. Demostrar que las rectas $2x + y + z = 0$, $x - 4y + 2z + 12 = 0$, y $\frac{x+7}{2} = \frac{3y+4}{-3} = \frac{9-z}{3}$ son paralelas.

21. Demostrar que las rectas $2x + y - 2z + 10 = 0$, $y + 2z - 4 = 0$, y $\frac{4-x}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+11}{2}$ son perpendiculares.

22. Hallar el ángulo obtuso que forman las rectas $\frac{2x+3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{-3}$ y $x + y - 2z + 11 = 0$, $2x - y + z - 9 = 0$.

23. Demostrar que las rectas $6x + 5y + 5z = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$, y $7x + 6y + 7z - 2 = 0$, $7x + 2y - 21z - 86 = 0$, son paralelas.

24. Demostrar que las rectas $4x + y - z + 15 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$, y $2x + y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 7 = 0$, son perpendiculares.

25. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $2x + y - 4z - 2 = 0$, $4x - 3y + 2z - 4 = 0$, y $x + 5y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$.

**127. Posiciones de una recta y un plano.** En este artículo consideraremos primero las posiciones que pueden ocupar una recta $l$ cuyos números directores son $[a, b, c]$ y un plano $\delta$ cuya ecuación es $Ax + By + Cz + D = 0$.

La recta $l$ y el plano $\delta$ son paralelos si y solamente si $l$ es perpendicular a la normal a $\delta$. Por tanto, por el corolario 2 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de $l$ y $\delta$ está dada por la relación

$$Aa + Bb + Cc = 0. \tag{1}$$

La recta $l$ y el plano $\delta$ son perpendiculares entre sí si y solamente si $l$ es normal a $\delta$. Por tanto, por el corolario 1 del teorema 7, Artículo 112, una condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de $l$ y $\delta$ está dada por las relaciones

$$A = ka, \quad B = kb, \quad C = kc, \tag{2}$$

en donde $k$ es una constante diferente de cero.

Un resumen de estos resultados lo expone el siguiente

TEOREMA 4. *La condición necesaria y suficiente para que la recta cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *y el plano cuya ecuación es* $Ax + By + Cz + D = 0$,

a) *sean paralelos, es* $Aa + Bb + Cc = 0$;

b) *sean perpendiculares,* $A = ka$, $B = kb$, $C = kc$, $(k \neq 0)$.

Vamos a considerar ahora el caso (fig. 170) en que la recta $l$ no es ni paralela ni perpendicular al plano $\delta$. Sea $l'$ la proyección de $l$ sobre $\delta$. El ángulo formado por la recta $l$ y el plano $\delta$ se define como el ángulo agudo $\phi$ formado por la recta $l$ y su proyección $l'$ sobre $\delta$. Sea $n$ la normal a $\delta$ en $P$, punto de intersección de $l$ y $\delta$. Entonces las rectas $n$, $l$ y $l'$ están en un mismo plano y el ángulo $\phi$

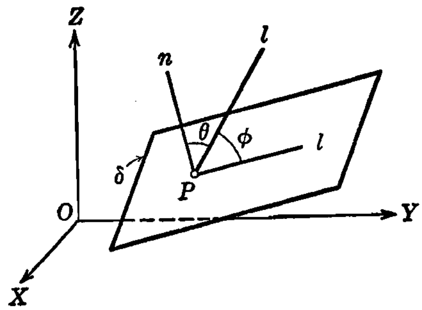


Fig. 170

es el complemento de $\theta$, el ángulo agudo formado por $n$ y $l$. Pero, por el teorema 7 del Artículo 112, el ángulo agudo $\theta$ está determinado por la relación

$$\cos\theta = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{3}$$

Por tanto, como $\cos\theta = \text{sen}\,(90^\circ - \theta) = \text{sen}\,\phi$, se sigue que sen $\phi$ está determinado por el segundo miembro de la ecuación (3). De aquí el siguiente

TEOREMA 5. *El ángulo* $\phi$ *formado por la recta cuyos números directores son* $[a, b, c]$ *y el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ *es el ángulo agudo determinado por la fórmula*

$$\text{sen}\,\phi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

NOTA. El teorema 4 puede obtenerse directamente del teorema 5. Esta deducción se deja como ejercicio al estudiante. (Ver los ejercicios 3 y 4 del grupo 59 al final de este capítulo.)

Ahora vamos a considerar la determinación de la distancia $d$ (fig. 171) de un punto dado $P_1$ a una recta dada $l$ en el espacio.

Por el punto $P_1$ hagamos pasar un plano $\delta$ perpendicular a $l$ y sea $P'$ el punto de intersección. Entonces la longitud del segmento $P'P_1$ es la distancia buscada $d$. Vamos a ilustrar el procedimiento con un ejemplo numérico.

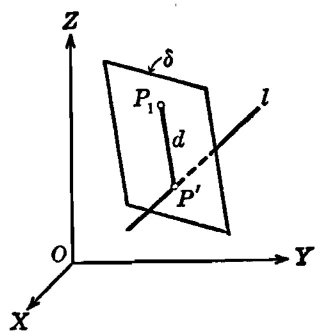


Fig. 171

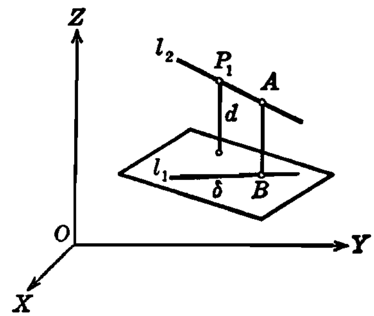


Fig. 172

**Ejemplo 1.** Hallar la distancia del punto $P_1(6, -3, 3)$ a la recta $l$:

$$2x + 2y + z = 0, \quad 4x - y - 3z - 15 = 0.$$

**Solución.** Por el artificio de los números directores (Art. 113) hallamos que los números directores de $l$ son $[1, -2, 2]$. Por tanto, la ecuación del plano $\delta$ que pasa por $P_1(6, -3, 3)$ y es perpendicular a $l$ es

$$1(x - 6) - 2(y + 3) + 2(z - 3) = 0,$$

o sea,

$$x - 2y + 2z - 18 = 0.$$

Las coordenadas del punto $P'$, intersección de $l$ y $\delta$, son la solución común $(4, -5, 2)$ de las ecuaciones de $l$ y $\delta$. Por tanto, la distancia buscada es

$$d = |\overline{P'P_1}| = \sqrt{(6-4)^2 + (-3+5)^2 + (3-2)^2} = 3.$$

La distancia entre dos rectas paralelas puede hallarse como la distancia de cualquier punto de una de las rectas a la otra recta.

Se demuestra en Geometría elemental que dadas dos rectas que se cruzan puede trazarse una y solamente una perpendicular común, y que esta perpendicular es la distancia más corta que existe entre las dos rectas. Vamos a determinar esta distancia. Sean $l_1$ y $l_2$ (figura 172) dos rectas cruzadas cualesquiera, y $AB$ su perpendicular común. Por $l_1$ hagamos pasar un plano $\delta$ paralelo a $l_2$. Sea $P_1$ un punto cualquiera de $l_2$. Entonces la distancia de $P_1$ a $\delta$ es la distancia buscada $d = |\overline{AB}|$. Evidentemente, $d$ es también la distancia entre el plano $\delta$ y el plano que pasando por $l_2$ es paralelo a $l_1$. Vamos a ilustrar la determinación de $d$ por un ejemplo numérico.

**Ejemplo 2.** Hallar la distancia más corta entre las dos rectas cruzadas

$$l_1: \ 2x - y + z + 3 = 0, \quad x + y + 2z + 3 = 0;$$

y
$$l_2: \ x - y - z - 1 = 0, \quad 3x - z - 7 = 0.$$

**Solución.** Por el Artículo 121, la familia de planos que pasan por $l_1$ es

$$2x - y + z + 3 + k(x + y + 2z + 3) = 0. \tag{4}$$

Por el artificio de los números directores (Art. 113), los números directores de $l_2$ son $[1, -2, 3]$. Por tanto, por el teorema 4 anterior, para que un plano de la familia (4) sea paralelo a $l_2$ debemos tener

$$1(2 + k) - 2(-1 + k) + 3(1 + 2k) = 0,$$

de donde, $k = -\frac{7}{5}$. Sustituyendo este valor de $k$ en la ecuación (4), obtenemos que la ecuación del plano que pasa por $l_1$ y es paralelo a $l_2$, es

$$x - 4y - 3z - 2 = 0. \tag{5}$$

Las coordenadas de un punto $P_1$ de $l_2$ son $(0, 6, -7)$. La distancia buscada $d$ es la distancia de $P_1$ al plano (5). Por el teorema 11 del Artículo 120, esta distancia es

$$d = \frac{|0 - 4 \cdot 6 - 3(-7) - 2|}{\sqrt{1 + 4^2 + 3^2}} = \frac{5}{26}\sqrt{26}.$$

## EJERCICIOS. Grupo 59

Dibujar una figura para cada ejercicio.

**1.** Hallar el ángulo que forman la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ y el plano $2x + 3y - z + 11 = 0$.

**2.** Hallar el ángulo formado por la recta

$$x - 2y + z + 4 = 0, \quad x + 2y + 3z - 4 = 0,$$

y el plano $3x - 7y + 8z - 9 = 0$.

**3.** Partiendo del teorema 5, obtener la condición para el paralelismo de una recta y un plano, dada por el teorema 4 del Artículo 127. (Ver el corolario 2 del teorema 7, Art. 112.)

**4.** Partiendo del teorema 5, obtener la condición para la perpendicularidad de una recta y un plano, dada por el teorema 4 del Artículo 127. (Ver el corolario 1 del teorema 7, Art. 112.)

**5.** Hallar la distancia del punto $(-1, 2, 3)$ a la recta

$$\frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}.$$

**6.** Hallar la distancia del punto $(7, 7, 4)$ a la recta

$$6x + 2y + z - 4 = 0, \quad 6x - y - 2z - 10 = 0.$$

7. Demostrar que las rectas

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{8-z}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{2-y}{-4}=\frac{z+3}{-4}$$

son paralelas, y hallar la distancia entre ellas.

8. Demostrar que las rectas $x + 7y - z - 16 = 0$, $x - y + z - 4 = 0$, y $x + 11y - 2z = 0$, $x - 5y + 2z - 4 = 0$, son paralelas, y hallar la distancia entre ellas.

9. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas que se cruzan

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

10. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas cruzadas

$$x + y + 2z - 1 = 0, \quad x - 2y - z - 1 = 0,$$

y

$$2x - y + z - 3 = 0, \quad x + y + z - 1 = 0.$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 7)$ y es perpendicular a la recta $\frac{x+2}{-3}=\frac{3-y}{-1}=\frac{z}{2}$.

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ y es paralelo a cada una de las rectas

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-7}{-1}.$$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(7, -2, 9)$ y es perpendicular a cada una de las rectas

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z}{-2}.$$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(5, 0, -3)$ y es paralela a la recta $\frac{x+6}{3}=\frac{y+2}{-8}=\frac{4-3z}{9}$.

15. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(6, 4, -2)$ y es paralela a cada uno de los planos $x + 2y - 3z + 8 = 0$ y $2x - y + z - 7 = 0$.

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{4}$ y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{5}$.

17. Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$\frac{x}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

y el punto $(4, -3, 2)$.

18. Demostrar que la recta $\frac{x-2}{6}=\frac{3y+1}{-6}=\frac{1-z}{3}$ y el plano

$$2x - 3y + 6z + 3 = 0$$

son paralelos y determinar la distancia que hay entre ellos.

**19.** Demostrar que las rectas

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{2}=\frac{3-2y}{2}=\frac{1-z}{-4}$$

son paralelas, y hallar la ecuación del plano determinado por ellas.

**20.** Demostrar que las rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-11}{4}$$

se cortan, y hallar la ecuación del plano determinado por ellas.

**21.** Demostrar, analíticamente, que si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las rectas de intersección son paralelas.

**22.** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(6, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x+2y+z-4=0$, $x-3y+4z+2=0$.

**23.** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 2, -4)$ y es paralelo a cada una de las rectas $x+y-z+11=0$, $x-y+2z-7=0$, y $2x-3y-2z+8=0$, $x+2y+z-9=0$.

**24.** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(5, 1, -1)$ y es paralela a cada uno de los planos $3x-y+2z-5=0$ y $2x+2y-3z+9=0$.

**25.** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 6, -5)$ y es perpendicular a cada una de las rectas $3x-2y+3z+9=0$, $x+y-2z+13=0$, y $2x+2y-5z+10=0$, $x-y-z+3=0$.

**26.** Hallar la ecuación del plano determinado por la recta

$$2x-y-z+8=0, \quad x+6y-2z-7=0,$$

y el punto $(1, -2, 2)$.

**27.** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$5x-3y+2z+1=0, \quad x+3y-z+11=0,$$

y es paralelo a la recta de ecuaciones

$$x+4y-3z-2=0, \quad 3x-y+4z-9=0.$$

**28.** Demostrar que la recta

$$3x-y-z+1=0, \quad 7x-2y-3z+3=0,$$

y el plano $x+y-3z+8=0$ son paralelos, y hallar la distancia que hay entre ellos.

**29.** Demostrar que las rectas $x-2y+2z-4=0$, $x+4y+8z+8=0$, y $x+y+5z-5=0$, $x+8y+12z-12=0$, son paralelas, y hallar la ecuación del plano que determinan.

**30.** Determinar la distancia $d$ del plano $\delta$: $3x-12y+4z-3=0$ al punto $P_1(3, -1, 2)$ por el siguiente procedimiento. Hállense las coordenadas del punto $P'$, pie de la perpendicular trazada de $P_1$ a $\delta$. Luego determínese $d$ como la longitud del segmento $P'P_1$.

# CAPITULO XVI

## SUPERFICIES

**128. Introducción.** El presente capítulo lo dedicaremos al estudio de la ecuación rectangular en tres variables,

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

En primer lugar vamos a extender al espacio tridimensional algunos de los conceptos fundamentales relativos a la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

como representación analítica de un lugar geométrico, estudiados en el Capítulo II.

Vimos en en el Capítulo XIV que todo plano se representa analíticamente por una *única* ecuación lineal de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

De una manera más general, veremos que, si existe una representación analítica de una figura geométrica considerada por nosotros como una superficie, tal representación consistirá en una *única* ecuación rectangular de la forma (1). Por ejemplo, se puede demostrar fácilmente, por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 1, Art. 108), que la superficie esférica de radio $r$ y con centro en el origen se representa, analíticamente, por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

De acuerdo con lo anterior, vamos a establecer la siguiente

DEFINICIÓN. Se llama *superficie* al conjunto de puntos, y *solamente* de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una *sola* ecuación de la forma (1).

El lector debe notar cuidadosamente lo que implica esta definición. Como de ordinario, las coordenadas de un punto están restringidas a valores *reales*. La definición establece que, si una ecuación de la forma (1) representa un lugar geométrico, ese lugar geométrico es una superficie. Y recíprocamente, si una superficie puede representarse analíticamente, tal representación es una sola ecuación de la forma (1).

Aunque la ecuación (1) contiene tres variables, la ecuación de una superficie puede contener solamente una o dos variables. Por ejemplo, vimos anteriormente que una ecuación de la forma $x = k$, en que $k$ es una constante cualquiera, representa un plano paralelo al plano $YZ$. Además, veremos más adelante que una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{2}$$

*considerada en el espacio*, representa un cilindro circular recto. Al trabajar en tres dimensiones, el lector debe cuidarse de referirse a la ecuación (2) como una circunferencia. Con el fin de evitar tal ambigüedad, generalmente es mejor referirse a la ecuación (2) como a ''la superficie $x^2 + y^2 = 4$'' o ''el cilindro $x^2 + y^2 = 4$''.

Toda ecuación de la forma (1) no representa necesariamente una superficie. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 7 = 0$$

tiene un número infinito de soluciones o ternas de valores para $x$, $y$ y $z$. Pero en ninguna de las ternas son reales los tres valores. Por tanto, en nuestra Geometría *real*, decimos que esta ecuación *no representa ningún lugar geométrico*. Podemos anotar también que la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 0$$

tiene solamente una solución real, que es $x = y = z = 0$, y, por tanto, su lugar geométrico está constituído por un solo punto, el origen.

**129. Discusión de la ecuación de una superficie.** En la construcción de curvas planas (Art. 19), vimos que era particularmente ventajoso discutir la ecuación de una curva antes de trazar su gráfica correspondiente. Análogamente, es ventajoso discutir la ecuación de una superficie antes de construirla. Limitaremos nuestra discusión a los cinco pasos siguientes:

1. Intercepciones con los ejes coordenados.
2. Trazas sobre los planos coordenados.
3. Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
4. Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
5. Extensión de la superficie.

Los dos primeros pasos fueron definidos y discutidos en el Artículo 116. Por tanto, dedicaremos el resto de este artículo a una discusión de los tres pasos restantes.

En el Artículo 16 dimos las definiciones para la simetría de una curva con respecto a una recta y con respecto a un punto. Estas definiciones no cambian cuando la palabra "curva" es reemplazada por la palabra "superficie". Queda por defininir la simetría con respecto a un plano.

Definición. Se dice que dos puntos diferentes son *simétricos con respecto a un plano* si y solamente si el plano es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Así, los puntos $P_1$ y $P_2$ (fig. 173) son simétricos con respecto al plano $\delta$ siempre que el plano sea perpendicular al segmento $P_1P_2$ en su punto medio. El plano $\delta$ se llama *plano de simetría*.

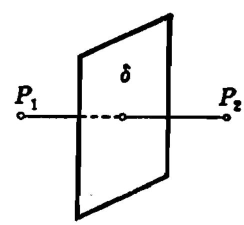

Fig. 173

Definición. Se dice que una superficie es *simétrica con respecto a un plano de simetría* $\delta$ si el simétrico de *cada* punto de la superficie, respecto al plano $\delta$, *es también* un punto de la superficie.

Las pruebas para determinar la simetría de una superficie a partir de su ecuación pueden obtenerse por los mismos métodos empleados para deducir las pruebas análogas para las curvas planas (Art. 16). De acuerdo con esto, el estudiante debe verificar los resultados dados en la siguiente tabla.

| Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables $x$, $y$ y $z$ son reemplazadas por | La superficie es simétrica con respecto al |
|---|---|
| $-x,\ y,\ z$ | plano $YZ$ |
| $x,\ -y,\ z$ | plano $XZ$ |
| $x,\ y,\ -z$ | plano $XY$ |
| $-x,\ -y,\ z$ | eje $Z$ |
| $-x,\ y,\ -z$ | eje $Y$ |
| $x,\ -y,\ -z$ | eje $X$ |
| $-x,\ -y,\ -z$ | origen |

Los tres siguientes teoremas constituyen un resumen de estos resultados.

Teorema 1. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia el signo de una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se mide esa variable, y recíprocamente.*

TEOREMA 2. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se les cambia el signo a dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambió, y recíprocamente.*

TEOREMA 3. *Si la ecuación de una superficie no se altera cuando sus tres variables cambian de signo, la superficie es simétrica con respecto al origen, y recíprocamente.*

Supongamos que la ecuación de una superficie es

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Se puede obtener una buena idea de la forma de esta superficie estudiando la naturaleza de sus secciones planas. Tales secciones pueden determinarse convenientemente cortando la superficie por una serie de planos paralelos a los planos coordenados. Por ejemplo, los planos paralelos al plano $XY$ pertenecen a la familia cuya ecuación es $z = k$, en donde $k$ es una constante arbitraria o parámetro. Entonces, de la ecuación (1), tenemos que

$$F(x, y, k) = 0, \quad z = k, \tag{2}$$

son las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie, correspondiendo a cada valor asignado a $k$ una curva determinada. Y como la curva (2) está en el plano $z = k$, puede determinarse su naturaleza por los métodos de la Geometría analítica plana.

El concepto de la extensión de una superficie es análogo al de la extensión de una curva plana ya estudiado en el Artículo 17. Si se da la ecuación de una superficie en la forma (1), se puede ver de despejar una de las variables en función de las otras dos. Si, por ejemplo, despejamos $z$ en función de $x$ y $y$ podemos escribir la ecuación en la forma

$$z = f(x, y). \tag{3}$$

Una ecuación en la forma explícita (3) nos permite obtener los intervalos de variación de los valores reales que las variables pueden tomar. Esta información es útil para determinar la localización general de la superficie en el espacio coordenado; también indica si la superficie es cerrada o indefinida en extensión.

**130. Construcción de una superficie.** En este artículo vamos a ilustrar la discusión de la ecuación de una superficie y la construcción de la misma mediante varios ejemplos.

**Ejemplo 1.** Discutir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4z = 0. \qquad (1)$$

Construir la superficie.

**Solución.** 1. *Intercepciones.* Las únicas intercepciones con los ejes coordenados están dadas por el origen.

2. *Trazas.* La traza sobre el plano $XY$ es un solo punto, el origen. La traza sobre el plano $XZ$ es la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$. La traza sobre el plano $YZ$ es la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$.

3. *Simetría.* La superficie es simétrica con respecto al plano $YZ$, al plano $XZ$ y al eje $Z$.

4. *Secciones.* Los planos $z = k$ cortan a la superficie (5) en las curvas

$$x^2 + y^2 = 4k, \quad z = k,$$

que constituye una familia de circunferencias, para todos los valores de $k > 0$.

Los planos $y = k$ cortan a la superficie (1) en las parábolas

$$x^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right), \quad y = k;$$

y los planos $x = k$ cortan a la superficie (1) en las parábolas

$$y^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right), \quad x = k.$$

5. *Extensión.* La ecuación (1) muestra que las variables $x$ y $y$ pueden tomar todos los valores reales, pero la variable $z$ está restringida a valores positivos. Por tanto, ninguna parte de la superficie aparece abajo del plano $XY$, sino que se extiende indefinidamente hacia arriba del plano $XY$.

En la figura 174 se ha trazado una parte de la superficie. Todas las secciones paralelas al plano $XY$ son circunferencias cuyo radio crece a medida que se alejan del plano $XY$. La parte que está en el primer octante aparece en línea gruesa. Esta superficie se llama *paraboloide de revolución*.

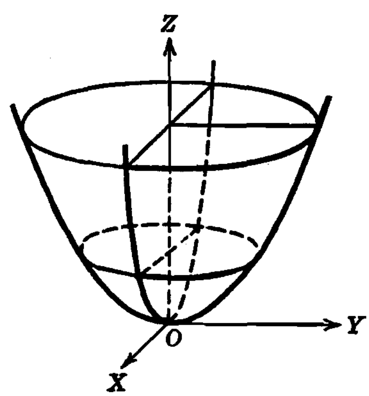

Fig. 174

**Ejemplo 2.** Discutir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + z - 2 = 0. \qquad (2)$$

Construir la superficie.

**Solución.** 1. *Intercepciones.* Las intercepciones con el eje $X$ son $\pm\sqrt{2}$. Con el eje $Y$ no hay intercepción. La intercepción con el eje $Z$ es 2.

2. *Trazas.* Las trazas sobre el plano $XY$ son las rectas $x = \sqrt{2}$, $z = 0$, y $x = -\sqrt{2}$, $z = 0$. La traza sobre el plano $XZ$ es la parábola $x^2 = -(z - 2)$, $y = 0$. La traza sobre el plano $YZ$ es la recta $z = 2$, $x = 0$.

3. *Simetría.* La superficie es simétrica con respecto al plano $YZ$.

4. *Secciones.* Si cortamos la superficie (2) por los planos $z = k$ se obtienen las rectas $x = \pm \sqrt{2 - k}$, $z = k$, siempre que $k \leq 2$. Los planos $y = k$ cortan a la superficie en las parábolas $x^2 = -(z - 2)$, $y = k$. Los planos $x = k$ cortan a la superficie en las rectas $z = 2 - k^2$, $x = k$.

5. *Extensión.* Por la ecuación (2) vemos que no hay restricciones para los valores que $x$ y $y$ pueden tomar. Pero la variable $z$ no puede tomar valores mayores de 2. Por tanto, la superficie está en su totalidad abajo o en el plano $z = 2$ y es indefinida en extensión.

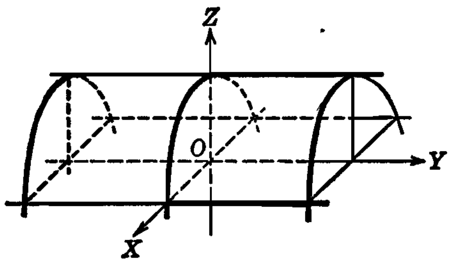


Fig. 175

En la figura 175 aparece una parte de la superficie. Dicha superficie es, evidentemente, un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje $Y$ y cuyas secciones paralelas al plano $XZ$ son parábolas congruentes. En vista de esta última propiedad, la superficie se llama *cilindro parabólico*.

## EJERCICIOS. Grupo 60

En cada uno de los ejercicios 1-24, estudiar y trazar la superficie cuya ecuación se da.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
2. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.
3. $x^2 + y^2 = 25$.
4. $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$.
5. $9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$.
6. $x^2 + 4z^2 = 16$.
7. $y^2 - z^2 = 25$.
8. $x^2 + z^2 - 9y = 0$.
9. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
10. $y^2 - 4x = 0$.
11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.
12. $y^2 + z^2 = 9$.
13. $9x^2 + 36y^2 + 16z^2 = 144$.
14. $9x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 36$.
15. $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 = 6$.
16. $y^2 - 4z + 4 = 0$.
17. $x^2 - 4x + 2y + 12 = 0$.
18. $3x^2 + z^2 - 12x - 6y + 12 = 0$.
19. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.
20. $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2x = 1$.
21. $y^2 - x^3 = 0$.
22. $z^2 + 4x - 4z = 4$.
23. $x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 0$.
24. $x^2 - y^2 - 2z = 0$.

25. Explicar cómo se deducen los teoremas 1, 2 y 3 del Artículo 129.

26. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a dos de los planos coordenados también lo es con respecto al eje coordenado contenido en ambos planos.

27. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados también lo es con respecto al origen.

28. Por medio de un ejemplo, demostrar que el recíproco del teorema del ejercicio 27, no es necesariamente verdadero.

29. Demostrar que si una superficie es simétrica con respecto a cualquiera de los planos coordenados y al eje coordenado perpendicular a ese plano, también lo es con respecto al origen.

30. Demostrar que la ecuación $y^2 - z^2 = 0$ representa dos planos que se cortan. Trazar estos planos.

**131. Ecuación de la superficie esférica.** En nuestro estudio analítico de la esfera, sólo nos interesa su superficie. Por esto, algunas veces, usaremos como sinónimos los términos esfera y superficie esférica. El estudiante debe observar en este artículo la estrecha analogía que existe entre las características de la superficie esférica y los resultados previamente obtenidos para la circunferencia en la Geometría analítica plana (Capítulo IV).

La *superficie esférica* se *define* como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo. La distancia constante se llama *radio* y el punto fijo *centro*. De esta definición y del teorema 1 del Artículo 108 obtenemos el siguiente teorema (ver el teorema 1 del Artículo 39).

TEOREMA 4. *La ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto* $(h, k, l)$ *y cuyo radio es la constante* $r$ *es*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2. \qquad (1)$$

COROLARIO. *La superficie esférica cuyo centro es el origen y cuyo radio es la constante dada* $r$ *tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

La ecuación (1) del teorema 4 se conoce como *forma ordinaria* de la ecuación de la esfera. Si desarrollamos esta ecuación y ordenamos los términos, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la llamada *forma general* de la ecuación de la esfera. Contiene cuatro constantes arbitrarias independientes; por tanto, una superficie esférica queda perfectamente determinada por cuatro condiciones independientes. Así, por ejemplo, cuatro puntos no coplanares determinan una superficie esférica.

**132. Coordenadas esféricas.** En este artículo vamos a considerar un nuevo sistema de coordenadas en el espacio que está estrechamente asociado con la superficie esférica.

Sea $P(x, y, z)$ (fig. 176) un punto cualquiera de una superficie esférica de centro el origen y radio $r$. La ecuación de la superficie es, evidentemente,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{1}$$

La porción de la esfera comprendida en el primer octante aparece en la figura 176. Por el punto $P$ y el eje $Z$ pasa un plano que corta al

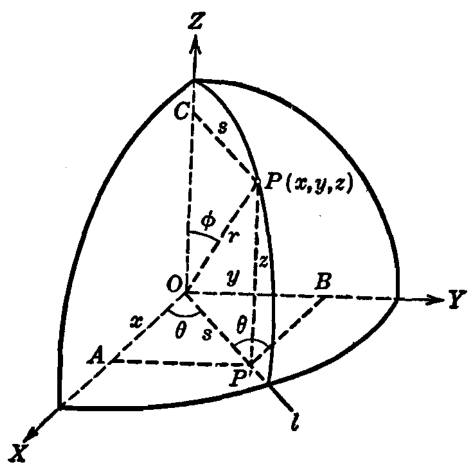


Fig. 176

plano $XY$ en la recta $l$. Denotemos por $\theta$ el ángulo formado por $l$ y la parte positiva del eje $X$, y por $\phi$ el formado por el radio $OP$ y la parte positiva del eje $Z$. Designemos por $P'$, $A$, $B$ y $C$, respectivamente, las proyecciones del punto $P$ sobre el plano $XY$ y sobre los ejes $X$, $Y$ y $Z$. Sea $|\overline{OP'}| = |\overline{CP}| = s$.

Del triángulo rectángulo $OPC$ tenemos

$$s = r \operatorname{sen} \phi.$$

De los triángulos rectángulos $OAP'$, $OBP'$ y $OP'P$, tenemos, respectivamente,

$$x = s \cos \theta = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta,$$

$$y = s \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$z = \overline{P'P} = r \operatorname{sen} (90^\circ - \phi) = r \cos \phi.$$

Evidentemente, de las relaciones

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi, \tag{2}$$

es posible localizar cualquier punto $P$ sobre la superficie esférica (1) cuando se conocen los valores de $r$, $\phi$ y $\theta$. Por esto estas cantidades se llaman *coordenadas esféricas* del punto $P$ y se escriben así: $(r, \phi, \theta)$. De una manera más general, si dos rectas cualesquiera, intersectantes y perpendiculares en el espacio, tales como los ejes $X$ y $Z$, y su intersección $O$, se toman como elementos de referencia, entonces con las coordenadas esféricas $(r, \phi, \theta)$ se puede localizar cualquier punto en el espacio. Tenemos así un nuevo sistema llamado *sistema de coordenadas esféricas*.

Considerado como un punto de la superficie de la Tierra, $P$ se localiza por su latitud, el complemento del ángulo $\phi$, y su longitud $\theta$ medida a partir del eje $X$ como una recta en el plano del meridiano principal. De acuerdo con esto, las coordenadas $\phi$ y $\theta$ se llaman, respectivamente, *colatitud* y *longitud* del punto $P$. La coordenada $r$ se llama *radio vector* del punto $P$.

La longitud $\theta$ puede medirse, como en Trigonometría, tomando la parte positiva del eje $X$ como lado inicial (Apéndice IC, 1). Para que las coordenadas esféricas $(r, \phi, \theta)$ representen un punto único en el espacio, restringimos sus valores a los intervalos

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Eliminando $\phi$ y $\theta$ de las relaciones (2), obtenemos la ecuación (1). Como el radio $r$ de una esfera dada es una constante fija, vemos que las relaciones (2) son las *ecuaciones paramétricas* de una superficie esférica de centro el origen y radio $r$, siendo las variables $\phi$ y $\theta$ los parámetros.

Las relaciones (2) pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los sistemas coordenados rectangular y esférico. Si despejamos $r$, $\phi$ y $\theta$, obtenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \operatorname{arc} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \tag{3}$$

las cuales pueden emplearse también como ecuaciones de transformación entre los dos sistemas.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 5. *Las coordenadas rectangulares* $(x, y, z)$ *y las coordenadas esféricas* $(r, \phi, \theta)$ *de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones*

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi.$$

*Las transformaciones entre los dos sistemas coordenados pueden efectuarse por medio de estas ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas:*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = arc\ cos\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = arc\ tg\ \frac{y}{x}.$$

*Las variaciones para* r, $\phi$ *y* $\theta$ *están dadas por los intervalos*

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

**EJERCICIOS. Grupo 61**

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 4 y su corolario dados en el Artículo 131.
2. Hallar la ecuación de la superficie esférica cuyo centro es el punto $(3, 2, -2)$ y que es tangente al plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$.
3. Hallar la ecuación de la superficie esférica cuyo centro está sobre el eje $X$ y que pasa por los dos puntos $(3, -4, 2)$ y $(6, 2, -1)$.
4. Hallar el centro y radio de la superficie esférica cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 12z + 12 = 0.$$

5. Hallar el área de la superficie esférica cuya ecuacion es

$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36x + 12y - 18z + 13 = 0.$$

6. La ecuación de una superficie esférica es

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0.$$

Hallar la ecuación de la superficie esférica concéntrica con ella que es tangente al plano $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

7. Obtener la ecuación de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos dados no coplanares en forma de determinante. (Ver el teorema 3, Art. 41.)
8. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por los cuatro puntos $(8, 2, 2)$, $(-4, 3, -3)$, $(-1, 2, 5)$ y $(4, 3, -7)$.
9. Demostrar que el plano tangente a la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tiene por ecuación $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

10. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por el punto $(-1, 6, -3)$ y es tangente al plano $4x + 4y + 7z - 96 = 0$ en el punto $(7, 3, 8)$.
11. La traza de una superficie esférica con el plano $XY$ es la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $z = 0$. Hallar la ecuación de la superficie si pasa por el punto $(3, 4, 2)$.

Los ejercicios 12-17 se refieren a las esferas

$$S_i \equiv x^2 + y^2 + z^2 + G_ix + H_iy + I_iz + K_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

**12.** Demostrar que para todos los valores de $k$ diferentes de $-1$, la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa la *familia de esferas* que pasan por la intersección de las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, con excepción de la esfera $S_2 = 0$.

**13.** Si las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, no son concéntricas, demuéstrese que la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa un plano para $k = -1$. Este plano se llama *plano radical* de las dos esferas.

**14.** Si las esferas $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$ son tangentes entre sí, demuéstrese que para todos los valores de $k$ diferentes de $-1$, la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa a todas las esferas que son tangentes a las dos dadas en su punto común, con excepción de la esfera $S_2 = 0$.

**15.** Demostrar que el plano radical de dos esferas tangentes es su plano tangente común.

**16.** Si de las tres esferas, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, no hay dos que sean concéntricas, y si no tienen una línea de centros común, demuéstrese que sus tres planos radicales se cortan en una recta común. Esta recta se llama *eje radical* de las tres esferas.

**17.** Si los centros de cuatro esferas no son coplanares, y si de las cuatro esferas no hay dos que sean concéntricas, demuéstrese que sus planos radicales se cortan en un punto común. Este punto se llama *centro radical* de las esferas.

**18.** Hallar la ecuación del plano radical de las dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z + 12 = 0.$$

**19.** Hallar las ecuaciones del eje radical de las tres esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 6z + 25 = 0,$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y + 6z + 18 = 0.$$

**20.** Hallar las coordenadas del centro radical de las cuatro esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 13 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 4z + 11 = 0$$

y

$$x^2 + u^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 25 = 0.$$

**21.** Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las dos superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0,$$

y que también pasa por el punto $(-2, 4, 0)$.

**22.** Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0,$$

y es tangente al plano $x + 2y - 2z = 3$. (Dos soluciones.)

**23.** Eliminando los parámetros $\theta$ y $\phi$, demostrar que

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi$$

son las ecuaciones paramétricas de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

**24.** Obtener las relaciones (3) a partir de las relaciones (2) del Artículo 132.

**25.** Trazar los dos puntos cuyas coordenadas esféricas son $(1, 60°, 30°)$ y $(2, 45°, 120°)$. Hallar las coordenadas rectangulares de cada uno de estos puntos.

**26.** Hallar las coordenadas esféricas de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(3, -4, 0)$ y $(6, 3, 2)$.

**27.** La ecuación rectangular de una superficie esférica es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4y.$$

Hallar su ecuación en coordenadas esféricas.

**28.** Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas esféricas: *a)* $x + 4y = 0$; *b)* $y - 2 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 = 4$; *d)* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$; *e)* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

**29.** Hallar e identificar la ecuación rectangular de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es: *a)* $r = 3$; *b)* $\theta = \frac{\pi}{4}$; *c)* $r - 2 \cos \phi = 0$.

**30.** Transformar las siguientes ecuaciones de coordenadas esféricas a rectangulares: *a)* $r = 4$; *b)* $r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 7$; *c)* $r = 3 \cos \phi$.

**133. Ecuación de una superficie cilíndrica.** Se llama *superficie cilíndrica* a la generada por una recta que se mueve de tal manera que

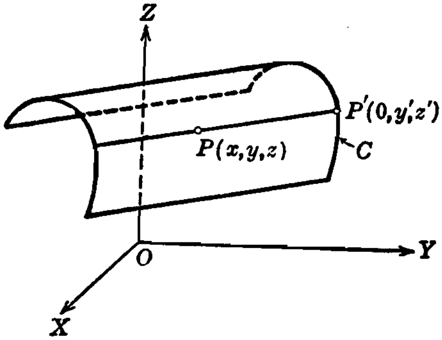


Fig. 177

que se mantiene siempre paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva fija dada.

La recta móvil se llama *generatriz* y la curva fija *directriz* de la superficie cilíndrica.

En nuestro estudio de la superficie cilíndrica consideraremos que la directriz es una curva contenida en uno de los planos coordenados. Por ejemplo, sea $C$ (fig. 177) una porción de la directriz contenida en el plano $YZ$, y sean $[a, b, c]$ los números directores de la generatriz de la superficie cilíndrica. Podemos escribir entonces las ecuaciones de la curva $C$ en la forma

$$f(y, z) = 0, \quad x = 0. \qquad (1)$$

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie, y supongamos que la generatriz que pasa por $P$ corta a $C$ en el punto $P'(0, y', z')$. Entonces, las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}. \qquad (2)$$

Además, como $P'$ está sobre $C$, sus coordenadas satisfacen a las ecuaciones (1), y tenemos

$$f(y', z') = 0, \quad x' = 0. \qquad (3)$$

Por la definición de superficie cilíndrica, el punto $P$ puede estar sobre la superficie si y solamente si sus coordenadas $(x, y, z)$ satisfacen a las ecuaciones (2) y (3) las cuales constituyen un sistema de cuatro ecuaciones independientes. De estas cuatro ecuaciones podemos eliminar las tres cantidades $x'$, $y'$ y $z'$ considerándolas como parámetros (véase el Artículo 95). El resultado es una sola ecuación en las tres variables $x$, $y$ y $z$, y ésta es la ecuación buscada de la superficie cilíndrica.

**Ejemplo 1.** Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola

$$x^2 = 4y, \quad z = 0 \qquad (4)$$

contenida en el plano $XY$, y cuyas generatrices tienen por números directores $[1, 1, 3]$.

**Solución.** Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ (fig. 178) de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', 0)$. Entonces, las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z}{3}. \qquad (5)$$

También, como $P'$ está sobre la parábola (4), tenemos

$$x'^2 = 4y', \quad z' = 0. \qquad (6)$$

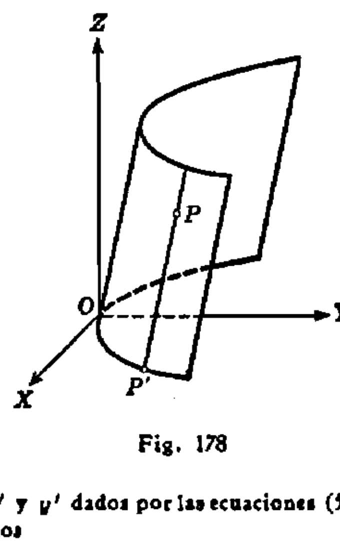

Fig. 178

Eliminando $x'$, $y'$, $z'$ de las ecuaciones (5) y (6) por sustitución de los valores de $x'$ y $y'$ dados por las ecuaciones (5) en la primera de las ecuaciones (6), obtenemos

$$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0, \qquad (7)$$

que es la ecuación buscada de la superficie. El estudiante debe observar que la traza de la superficie (7) sobre el plano $XY$ es la directriz (4).

Acabamos de considerar la determinación de la ecuación de una superficie cilíndrica a partir de las ecuaciones de su directriz y de los números directores de sus generatrices. Para el problema inverso, a saber, encontrar las ecuaciones de la directriz y los números directores de las generatrices de una superficie cilíndrica, a partir de su ecuación, podemos proceder como se ilustra en el siguiente ejemplo. Más adelante (Art. 137, ejemplo 3), consideraremos otro método que es aplicable en algunos casos.

**Ejemplo 2.** Demostrar que la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1 \qquad (8)$$

representa una superficie cilíndrica, y hallar las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices.

**Solución.** De la definición de superficie cilíndrica se deduce que las secciones hechas por planos paralelos al plano de la directriz son curvas congruentes con la directriz. Así, las secciones de la superficie (8) hechas por los planos $z = k$ son las curvas

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2kx - 2ky = 1, \quad z = k,$$

las cuales pueden escribirse en la forma

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1, \quad z = k. \qquad (9)$$

Las ecuaciones (9) son todas circunferencias de radio 1, cualquiera que sea el valor de $k$. En particular, para $k = 0$, tenemos la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0. \qquad (10)$$

Por tanto, la superficie (8) es una superficie cilíndrica circular cuya directriz es la circunferencia (10).

Evidentemente, la recta que une el centro $(-k, k, k)$ de cualquiera de las circunferencias (9) y el centro $(0, 0, 0)$ de la directriz (10) es paralela a las generatrices. Como los números directores de esta recta son $[-1, 1, 1]$, éstos son también los números directores de las generatrices.

El estudiante debe construir la superficie (8).

Si las generatrices de una superficie cilíndrica son perpendiculares al plano de su directriz, se llama *recta* y, en caso contrario, *oblicua*. Las superficies cilíndricas rectas son de gran importancia, como veremos más adelante en el Capítulo XVII. Por el método empleado en el ejemplo 1, podemos fácilmente demostrar que la ecuación de una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado de su directriz, carece de la variable no medida en ese plano coordenado. Además, el *lugar geométrico plano* de esta ecuación es la directriz. Por ejemplo, la superficie cilíndrica recta cuya directriz es la circunferencia $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, se representa por la ecuación $y^2 + z^2 = 9$.

Recíprocamente, por el método del ejemplo 2, acabado de explicar, podemos demostrar que una ecuación que carezca de una variable representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado en el cual no se mide la variable ausente, y cuya directriz es el lugar geométrico plano de esta ecuación. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - y^2 = 4$ representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano $XY$ y cuya directriz es la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$.

Vamos a resumir estos resultados en el siguiente

TEOREMA 6. *Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si carece de la variable no medida en ese plano. El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.*

Si la directriz de una superficie cilíndrica es una circunferencia, la superficie se llama *circular*. Análogamente, tenemos superficies cilíndricas parabólicas, elípticas e hiperbólicas. Puede también anotarse que un plano es una superficie cilíndrica cuya directriz es una recta.

**134. Coordenadas cilíndricas.** En este artículo estudiaremos las coordenadas cilíndricas, que, como las coordenadas esféricas (Artículo 132), son muy útiles en ciertas partes de otras ramas de las Matemáticas.

Sea $P(x, y, z)$ (fig. 179) un punto cualquiera de la superficie de un cilindro circular recto de radio $r$ cuyo eje es el eje $Z$. La ecuación de la superficie es, evidentemente,

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

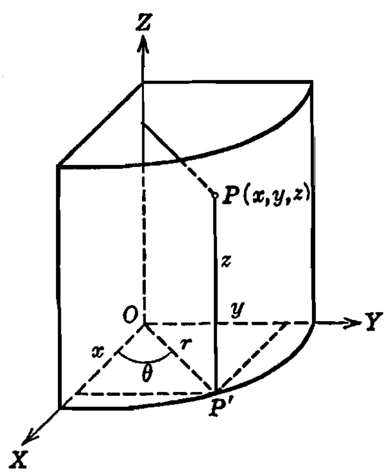

Fig. 179

Una parte de la superficie que queda en el primer octante se ha representado en la figura 179. Por el punto $P$ y el eje $Z$ hagamos pasar un plano que cortará a la superficie en una generatriz cuyo punto de intersección con el plano $XY$ será el punto $P'$. Sea $|\overline{OP'}| = r$, y designemos por $\theta$ el ángulo formado por $OP'$ y la parte positiva del eje $X$. Entonces tenemos las relaciones

$$x = r \overset{\cos}{\cancel{\text{sen}}}\, \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z, \qquad (2)$$

las cuales, evidentemente, permiten localizar cualquier punto de la superficie cilíndrica (1) cuando se conocen los valores de $r$, $\theta$ y $z$. Por esto, estas cantidades se llaman *coordenadas cilíndricas* del punto $P$ y se escriben $(r, \theta, z)$. De una manera más general, si un punto fijo (el origen $O$), una recta fija (el eje $X$) y un plano dado (el plano $XY$) son tomados como elementos de referencia, entonces, con las coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$, se puede localizar cualquier punto en el espacio. Tenemos así el *sistema de coordenadas cilíndricas*.

El ángulo $\theta$ puede medirse, como en Trigonometría, con la parte positiva del eje $X$ como lado inicial. Para que las coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ representen un punto único en el espacio, restringimos los valores de $r$ y $\theta$ a los intervalos

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La coordenada $z$ no se sujeta a ninguna restricción, sino que puede tomar cualquier valor real.

Eliminando $\theta$ y $z$ de las relaciones (2), obtenemos la ecuación (1). Por tanto, las ecuaciones (2) son las *ecuaciones paramétricas* de la superficie cilíndrica circular recta (1), siendo las variables $\theta$ y $z$ los parámetros.

Las relaciones (2) pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas rectangulares y cilíndricas. De las dos primeras de estas relaciones obtenemos, como en el sistema de coordenadas polares de la Geometría analítica plana (Art. 81), las relaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

las cuales pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los dos sistemas.

Vamos a hacer un resumen de los resultados anteriores en el siguiente

TEOREMA 7. *Las coordenadas rectangulares* $(x, y, z)$ *y las coordenadas cilíndricas* $(r, \theta, z)$ *de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones*

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

*Se pueden efectuar las transformaciones entre los dos sistemas coordenados por medio de estas ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas.*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = arc\ tg\ \frac{y}{x}, \quad sen\ \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

*Las variaciones para* r *y* $\theta$ *están dadas por los intervalos*

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

NOTA. El sistema de coordenadas cilíndricas es, evidentemente, una extensión al espacio del sistema de coordenadas polares del plano.

**EJERCICIOS. Grupo 62**

1. Demostrar el teorema 6 del Artículo 133.

En cada uno de los ejercicios 2-9 discutir y trazar la superficie cilíndrica recta cuya ecuación se da.

Jesus 2. $y^2 + z^2 = 4$.
Crist 3. $x^2 - 4z = 0$.
Sergio 4. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
5. $9y^2 - 4z^2 = 36$.
Nic. 6. $y^2 + z = 2$.
J. M. 7. $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Paola
8. $x^{1/2} + z^{1/2} = 2$.
9. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

En cada uno de los ejercicios 10-14, se dan las ecuaciones de la directriz y los números directores de las generatrices de una superficie cilíndrica. Hallar la ecuación de la superficie y efectuar su representación gráfica.

Patr. 10. $y^2 = 4x, \quad z = 0; \quad [1, -1, 1]$.
Mario 11. $x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0; \quad [2, 1, -1]$.
Luci 12. $x^2 - y^2 = 1, \quad z = 0; \quad [0, 2, -1]$.
Mon 13. $x^2 + y = 1, \quad z = 0; \quad [2, 0, 1]$.
J. Ces 14. $4x^2 + z^2 + 4z = 0, \quad y = 0; \quad [4, 1, 0]$. Fredy

En cada uno de los ejercicios 15-17, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cilíndrica, y hállense las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices. Constrúyase la superficie:

15. $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$.
16. $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$.
17. $xz + 2yz - 1 = 0$.

18. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del plano $XY$ es siempre igual a la mitad del cuadrado de su distancia del eje $Y$. Construír la superficie.

**19.** Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje $Y$ es siempre igual a su distancia del plano $x - z = 1$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

**20.** Trazar los dos puntos cuyas coordenadas cilíndricas son $(1, 45°, -2)$ y $(2, 120°, 4)$. Hallar las coordenadas rectangulares de cada uno de estos puntos.

**21.** Hallar las coordenadas cilíndricas de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(3, 4, -7)$ y $(5, -12, 8)$.

**22.** Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares de superficies a coordenadas cilíndricas: *a*) $2x = y$; *b*) $x^2+y^2-2y=0$; *c*) $x^2+y^2+z^2=4$; *d*) $x^2 - z^2 = 4$; *e*) $y^2 = 4z$.

**23.** Transformar las siguientes ecuaciones de superficies de coordenadas cilíndricas a rectangulares: *a*) $r = 2$; *b*) $r = z$; *c*) $r = 4 \cos \theta$; *d*) $r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) - z = 4$; *e*) $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 4(1 - z^2)$.

**24.** Sean $r = k_1$, $\theta = k_2$, $z = k_3$, en donde $k_1$, $k_2$ y $k_3$ son constantes arbitrarias independientes o parámetros, las coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ de un punto cualquiera del espacio. Identificar la familia de superficies representadas por cada una de estas tres ecuaciones. Demostrar que por cada punto del espacio no contenido en el eje $Z$ pasa una y solamente una superficie de cada una de estas familias.

En cada uno de los ejercicios 25-30, demuéstrese que la ecuación dada en coordenadas cilíndricas representa una superficie cilíndrica, y constrúyase dicha superficie.

**25.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

**26.** $2r + r \cos \theta = 1$.

**27.** $r - 2r \cos \theta = 1$.

**28.** $r - r \operatorname{sen} \theta = 2$.

**29.** $r = 2(1 + \cos \theta)$.

**30.** $r^2 = 2 \cos 2\theta$.

**135. Ecuación de una superficie cónica.** Se llama *superficie cónica* la engendrada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva.

La recta móvil se llama *generatriz*, la curva fija dada *directriz* y el punto fijo dado *vértice* de la superficie cónica. Las diversas posiciones de la generatriz forman las generatrices de la superficie cónica. Evidentemente, el vértice divide a la superficie en dos porciones distintas; cada una de las cuales es una *hoja* o *rama* de la superficie cónica.

Si se conocen las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice, se puede obtener la ecuación de la superficie, como para la superficie cilíndrica (Art. 133), por el método de los parámetros.

**Ejemplo 1.** Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse

$$4x^2 + z^2 = 1, \quad y = 4, \tag{1}$$

y cuyo vértice es el punto $V(1, 1, 3)$.

**Solución.** Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', z')$, tal como aparece en la figura 180. Las ecuaciones de esta generatriz son

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-3}{z'-3}. \tag{2}$$

Además, como $P'$ está sobre la elipse (1), tenemos

$$4x'^2 + z'^2 = 1, \quad y' = 4. \qquad (3)$$

De las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (2) y (3), podemos eliminar las tres cantidades $x'$, $y'$ y $z'$, considerándolas como parámetros. Esta eliminación puede efectuarse convenientemente sustituyendo primero el valor $y' = 4$ de las ecuaciones (3) en las ecuaciones (2). Después, de estas últimas ecuaciones se despeja $x'$ en función de $x$ y $y$, y $z'$ en función de $y$ y $z$, y se sustituyen los resultados en la primera de las ecuaciones (3). Después de ordenar los términos, resulta

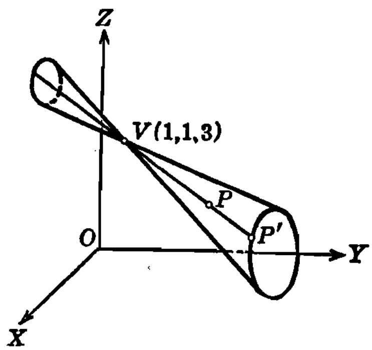


Fig. 180

$$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0,$$

que es la ecuación buscada de la superficie.

El estudiante debe observar que una superficie cónica puede construirse trazando las generatrices, o sea, las rectas que unen el vértice con puntos de la directriz.

En el estudio de una superficie cónica, no se pierde generalidad tomando el vértice en el origen. Vamos a demostrar ahora que la ecuación de una superficie tal es homogénea en las tres variables $x$, $y$ y $z$.

Se dice que un polinomio algebraico, en dos o más variables, es *homogéneo*, si todos sus términos son del mismo grado. Así, la función

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^2 - 3z^2 \qquad (4)$$

es homogénea y de segundo grado.

Hay una *prueba sencilla para averiguar la homogeneidad de una función*. Si la función es $f(x, y, z)$, consiste en sustituir las variables $x$, $y$ y $z$ por $kx$, $ky$ y $kz$, respectivamente, en donde $k$ es una constante diferente de cero. Si obtenemos la identidad

$$f(kx, ky, kz) \equiv k^m f(x, y, z),$$

entonces $f(x, y, z)$ es una función homogénea de grado $m$. Así, para la función (4), tenemos

$$f(kx, ky, kz) \equiv (kx)^2 + 2(ky)^2 - 3(kz)^2$$
$$\equiv k^2(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \equiv k^2 f(x, y, z),$$

de manera que la función es homogénea y de grado 2. Esta prueba se presenta en algunos libros como *definición* de la homogeneidad de una función.

A una función homogénea igualada a cero se le llama *ecuación homogénea*. Sea $f(x, y, z) = 0$ una ecuación homogénea. Entonces, de la discusión precedente, tenemos el hecho importante de que, si esta ecuación tiene la solución diferente de cero $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, también tiene las soluciones $x = kx_1$, $y = ky_1$, $z = kz_1$, en donde $k$ es una constante cualquiera.

Consideremos ahora una superficie cónica de vértice en el origen y cuya directriz sea la curva

$$f(x, y) = 0, \quad z = c, \tag{5}$$

en donde $c$ es una constante diferente de cero. Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', z')$. Como esta generatriz pasa por el origen, sus ecuaciones son

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz, \tag{6}$$

en donde $k$ es una constante diferente de cero. También, como $P'$ está sobre la directriz (5), tenemos

$$f(x', y') = 0, \quad z' = c. \tag{7}$$

De las últimas igualdades de las ecuaciones (6) y (7), se deduce que $k = \dfrac{c}{z}$, valor que sustituído en las dos primeras de las ecuaciones (6), da $x' = \dfrac{cx}{z}$ y $y' = \dfrac{cy}{z}$. Si sustituímos estos valores de $x'$ y $y'$ en la primera de las ecuaciones (7), obtenemos

$$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0, \tag{8}$$

como ecuación de la superficie cónica. Si reemplazamos en la ecuación (8) $x$, $y$ y $z$ por $k'x$, $k'y$ y $k'z$, respectivamente, en que $k'$ es una constante diferente de cero, la ecuación permanece invariable y, por tanto, es homogénea. Hemos demostrado así que una superficie cónica de vértice en el origen se representa por una ecuación homogénea en las tres variables $x$, $y$ y $z$.

Recíprocamente, consideremos a la superficie representada por la ecuación

$$f(x, y, z) = 0 \tag{9}$$

que es homogénea en las tres variables $x$, $y$ y $z$. En consecuencia de esto, el origen $O$ está sobre esta superficie. Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ otro punto cualquiera de la superficie; sus coordenadas satisfacen, por tanto, a la ecuación (9). Como esta ecuación es homogénea, tiene también la solución $kx_1$, $ky_1$, $kz_1$, en donde $k$ es una constante cualquiera, de manera que el punto $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$ está también sobre la superficie. Pero, evidentemente, el punto $P'$ está sobre ambas, la recta $OP$ y la superficie, para todos los valores de $k$, y, en consecuencia, $OP$ está sobre la superficie. De acuerdo con esto, se sigue que la ecuación (9) representa una superficie cónica con vértice en el origen y una de cuyas generatrices es la recta $OP$.

Vamos a hacer un resumen de los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 8. *Una ecuación representa una superficie cónica con vértice en el origen, si y solamente si es homogénea en las tres variables* x, y, z *y es de grado no menor que dos.*

NOTAS. 1. El teorema implica que una ecuación *lineal* homogénea en $x$, $y$ y $z$ no representa un cono, y recíprocamente. Ya vimos que tal ecuación representa un plano que pasa por el origen. Pero un plano no puede clasificarse como un cono de acuerdo con nuestra definición, que excluye el caso en que el vértice esté en el plano de la directriz.

2. El estudiante debe observar, en relación al teorema 8, que una ecuación homogénea debe en realidad representar una superficie, antes de que pueda clasificarse como una superficie cónica con vértice en el origen. Así, la ecuación $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0$ es homogénea en $x$, $y$ y $z$, pero no representa una superficie cónica sino que representa solamente un punto, el origen (ver el Art. 128).

**Ejemplo 2.** Identificar y construir la superficie cuya ecuación es

$$x^2 + yz = 0. \tag{10}$$

**Solución.** Además de la solución $x = y = z = 0$, la ecuación (10) tiene un número infinito de soluciones reales. En efecto, si asignamos a $y$ y $z$ un par cualquiera de valores reales diferentes de cero que sean de signos contrarios, la solución correspondiente para $x$ constará de dos valores reales. Por tanto, por el teorema 8 anterior, la ecuación (10) representa una superficie cónica cuyo vértice está en el origen.

Para construir la superfie es necesario solamente obtener una directriz. Así, para $z = 2$, obtenemos de la ecuación (10) la directriz

$$x^2 = -2y, \quad z = 2,$$

que es una parábola que está en el plano $z = 2$. Trazando varias generatrices (rectas que pasan por el origen y por puntos de esta curva) podemos obtener una figura adecuada. Una porción de la superficie se ha trazado en la figura 181 junto con otra directriz, $x^2 = 2y$, $z = -2$. Evidentemente, el eje $Z$ es también una generatriz de esta superficie cónica.

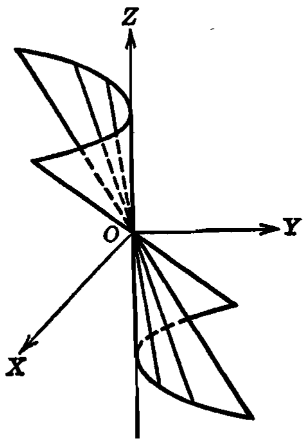


Fig. 181

### EJERCICIOS. Grupo 63

En cada uno de los ejercicios 1-5, se dan las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice de una superficie cónica. Hallar la ecuación de la superficie y construirla.

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$; $(0, 0, 0)$.
2. $z^2 = 4y$, $x = 0$; $(2, 0, 0)$.
3. $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$; $(-1, 1, 0)$.
4. $x^2 - 4z^2 = 4$, $y = 3$; $(-1, 1, 1)$.
5. $y = x^3$, $z = 2$; $(0, 0, 0)$.

En cada uno de los ejercicios 6-13, identifíquese y constrúyase la superficie cuya ecuación se da.

6. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$.
7. $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$.
8. $2x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$.
9. $y^2 + xz = 0$.
10. $x^2 - 2yz = 0$.
11. $4z^3 - x^2y = 0$.
12. $8x^4 - yz^3 = 0$.
13. $xy + xz + yz = 0$.

14. Demostrar el siguiente teorema: La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ representa una superficie cónica si y solamente si todos sus coeficientes son diferentes de cero y no son del mismo signo. Su eje está entonces sobre el eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es de signo contrario al de los otros dos coeficientes.

15. Verificar el teorema del ejercicio 14 para la superficie cónica

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

16. Completando los cuadrados, demuéstrese que la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 = 0$$

representa una superficie cónica cuyo vértice es el punto $(1, 2, -2)$.

17. Si la ecuación de una superficie es homogénea en las cantidades $x - h$, $y - k$ y $z - l$, en donde $h$, $k$ y $l$ son constantes, demuéstrese que la superficie es un cono con vértice en $(h, k, l)$. (Ver el ejercicio 16.)

18. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se mantiene siempre equidistante del plano $XZ$ y del eje $Y$. Construir el lugar geométrico.

19. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los planos coordenados es siempre igual a su distancia del origen. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

20. Calcular el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \quad \text{y} \quad z = 2.$$

21. Calcular el área de aquella porción de la superficie cónica

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

comprendida entre su vértice y el plano $y = 3$.

En cada uno de los ejercicios 22 y 23, transfórmese la ecuación rectangular dada de una superficie cónica en: *a*) coordenadas esféricas; *b*) coordenadas cilíndricas.

22. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$. 23. $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

24. Describir la familia de superficies cónicas representada por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \phi = 0$, en donde el parámetro $\phi$, llamado *ángulo generador* del cono, puede tomar todos los valores comprendidos en el intervalo $0 < \phi < \pi$ excepto $\frac{\pi}{2}$. ¿Qué representa $\phi$ geométricamente?

25. Las coordenadas esféricas $(r, \phi, \theta)$ de un punto cualquiera en el espacio, son

$$r = k_1, \quad \phi = k_2, \quad \theta = k_3,$$

en donde $k_1$, $k_2$ y $k_3$ son constantes arbitrarias independientes o parámetros. Identificar la familia de superficies representada por cada una de estas tres ecuaciones. Demostrar que, por cada punto del espacio no contenido en un eje coordenado, pasa una y solamente una superficie de cada una de estas familias. (Ver el ejercicio 24 del grupo 62, Art. 134.)

**136. Superficies de revolución.** Una *superficie de revolución* es la engendrada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.

La curva plana se llama *generatriz*, y la recta fija *eje de revolución* o, simplemente, *eje* de la superficie. Cualquier posición de la generatriz se llama *sección meridiana* o *meridiano*, y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz se llama *paralelo* de la superficie

De estas definiciones, tenemos de inmediato los siguientes hechos:

*a*) Toda sección meridiana es congruente con la generatriz y es la intersección de la superficie con un plano que pasa por el eje.

*b*) Todo paralelo tiene su centro sobre el eje y está contenido en un plano perpendicular al eje.

El estudiante observará que las superficies de los cuerpos estudiados en Geometría elemental —la esfera, el cilindro circular recto y el cono circular recto— son superficies de revolución.

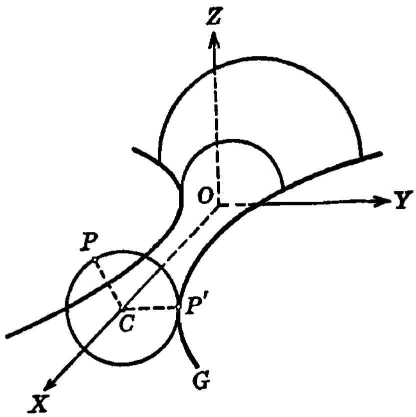


Fig. 182

En la determinación de la ecuación de una superficie de revolución, no se pierde generalidad si se toma la generatriz en uno de los planos coordenados y como eje de revolución uno de los ejes coordenados contenidos en ese plano. Este procedimiento, además, conduce a un resultado muy simple, como veremos ahora. Según esto, supongamos que la generatriz $G$ (fig. 182) contenida en el plano $XY$ tiene por ecuaciones

$$f(x, y) = 0, \quad z = 0, \tag{1}$$

y supongamos que el eje de revolución es el eje $X$, tal como aparece en la figura. Vamos a determinar la ecuación de esta superficie de revolución por el método de parámetros.

Sea $P(x, y, z)$, un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por $P$ corta a $G$ en un punto del plano $XY$, digamos $P'(x', y', z')$, y su centro $C$ está sobre el eje $X$. Por ser radios del mismo paralelo, $|\overline{CP}| = |\overline{CP'}|$. Pero como $|\overline{CP}| = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $\overline{CP'} = y'$, tenemos la relación

$$y' = \pm \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{2}$$

También, como $P$ y $P'$ están en el mismo plano,

$$x' = x. \tag{3}$$

Además, como el punto $P'$ está sobre $G$, tenemos, de las ecuaciones (1),

$$f(x', y') = 0, \quad z' = 0. \tag{4}$$

Eliminando los tres parámetros $x'$, $y'$, $z'$ entre las cuatro ecuaciones (2), (3) y (4), obtenemos

$$f\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0,$$

que es la ecuación buscada de la superficie de revolución.

Análogamente, haciendo girar la curva (1) en torno del eje $Y$, hallamos que la ecuación de la superficie de revolución correspondiente es

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0.$$

Se obtienen resultados análogos cuando la generatriz está en cada uno de los otros planos coordenados y se le hace girar en torno de un eje coordenado contenido en dicho plano. Todos estos resultados se resumen en el siguiente

TEOREMA 9. *Sea* S *la superficie de revolución que tiene por generatriz a la curva* G *contenida en el plano coordenado* δ *y al eje coordenado* l *contenido en* δ *por eje de revolución. Entonces la ecuación de* S *se obtiene sustituyendo en la ecuación plana de* G *la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo de* l *en lugar de aquella de estas dos variables que aparece en lo ecuación plana de* G.

**Ejemplo 1.** Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola

$$y^2 - 4x^2 = 4, \quad z = 0 \tag{5}$$

en torno del eje $Y$.

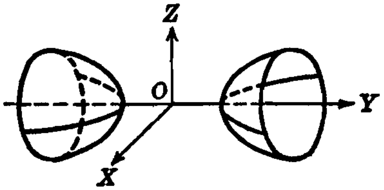


Fig. 183

**Solución.** Las variables no medidas a lo largo del eje $Y$ son $x$ y $z$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 9, sustituimos $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ en lugar de $x$ en la primera de las ecuaciones (5). El resultado

$$y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4,$$

es la ecuación buscada de la superficie. El estudiante debe discutir esta superficie por el método explicado en el Artículo 129. Una porción de la superficie aparece en la figura 183 y consta de dos *hojas* diferentes. Se le llama con toda propiedad *hiperboloide de revolución de dos hojas.*

Consideremos ahora el problema recíproco, a saber, dada la ecuación de una superficie, determinar si representa una superficie de revolución. Si uno de los ejes coordenados es el eje de revolución, la solución es comparativamente sencilla, porque entonces las secciones de la superficie por planos perpendiculares al eje son todas circunferencias cuyos centros están sobre dicho eje. Se dice entonces que la superficie se *extiende a lo largo del eje*.

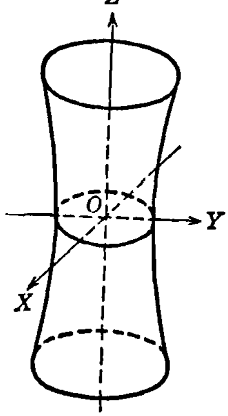

Fig. 184

**Ejemplo 2.** Demostrar que la ecuación

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9 \qquad (6)$$

representa una superficie de revolución. Hallar su eje de revolución y las ecuaciones de la generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje.

**Solución.** Evidentemente, los planos $z = k$ cortan a la superficie (6) en las circunferencias

$$9x^2 + 9y^2 = 9 + k^2, \quad z = k,$$

cuyos centros, para todos los valores de $k$, están sobre el eje $Z$. Por tanto, la ecuación (6) representa una superficie de revolución cuyo eje de revolución es el eje $Z$. El eje $Z$ está contenido en el plano $YZ$, y la traza de la superficie (6) sobre el plano es la generatriz

$$9y^2 - z^2 = 9, \quad x = 0, \qquad (7)$$

Evidentemente, la superficie (6) puede engendrarse haciendo girar la hipérbola (7) en torno del eje $Z$. Una parte de esta superficie aparece en la figura 184; se le llama apropiadamente *hiperboloide de revolución de una hoja*.

**EJERCICIOS.** Grupo 64

1. Establecer el teorema 9 del Artículo 136 cuando la generatriz está en el plano $XZ$ y el eje de revolución es: *a*) el eje $X$; *b*) el eje $Z$.
2. Establecer el teorema 9 del Artículo 136, cuando la generatriz está en el plano $YZ$ y el eje de revolución es: *a*) el eje $Y$; *b*) el eje $Z$.
3. Deducir la ecuación de la superficie esférica de radio $r$ que se obtiene haciendo girar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, en torno del eje $X$.
4. Deducir la ecuación de la superficie del cilindro circular recto de radio $r$ que se obtiene haciendo girar la recta $x = 0$, $y = r$, en torno del eje $Z$.
5. Deducir la ecuación de la superficie del cono circular recto que se obtiene haciendo girar la recta $l$ en torno del eje $Z$, sabiendo que $l$ está contenida en el plano $YZ$, pasa por el origen y forma un ángulo agudo $\phi$ con la parte positiva del eje $Z$. El ángulo $\phi$ se llama *ángulo generador* del cono. (Véase el ejercicio 24 del grupo 63, Art. 135.)
6. Deducir la ecuación de la superficie de revolución engendrada por rotación de la parábola $y^2 = 4px$, $z = 0$, en torno de su eje, el eje $X$. Construir la superficie así obtenida, la cual se llama *paraboloide de revolución*.

7. Hallar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en donde $a > b$, en torno de su eje focal, el eje $X$. Construir la superficie. La superficie generada por rotación de una elipse en torno de uno cualquiera de sus ejes se llama *elipsoide de revolución*. Si es en torno del eje focal, se le llama también *elipsoide alargado*.

8. Deducir la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la elipse del ejercicio 7 en torno de su eje normal, el eje $Y$. Construir la superficie. En este caso, el elipsoide de revolución también se llama *elipsoide achatado* o *esferoide*.

En cada uno de los ejercicios 9-20, hállese la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la curva dada en torno del eje especificado. Constrúyase la superficie.

9. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$; eje $Z$.
10. $y = 3x$, $z = 0$; eje $X$.
11. $z^2 = 2y$, $x = 0$; eje $Y$.
12. $y^2 - z^2 = 4$, $x = 0$; eje $Y$.
13. $9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$; eje $Y$.
14. $x^2 + 2y = 6$, $z = 0$; eje $Y$.
15. $y^2 - 2z^2 + 4z = 6$, $x = 0$; eje $Z$.
16. $\frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $x = 0$; eje $Z$.
17. $y^2 = 2z$, $x = 0$; eje $Y$.
18. $y = x^3$, $z = 0$; eje $X$.
19. $z = e^x$, $y = 0$; eje $Z$.
20. $yz = 1$, $x = 0$; eje $Z$.

En cada uno de los ejercicios 21-26. demostrar que la ecuación dada representa una superficie de revolución, y hallar su eje de revolución, y las ecuaciones de la generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje. Trazar la superficie.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
22. $x^2 + z^2 = 4$.
23. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.
24. $x^2 + y^2 - z^3 = 0$.
25. $y^6 - x^2 - z^2 = 0$.
26. $x^2 y^2 + x^2 z^2 = 1$.

27. Se hace girar la parábola $y^2 = 2z$, $x = 0$ en torno del eje $Z$. Hallar, en coordenadas esféricas, la ecuación de la superficie generada. Construir la superficie.

28. Se hace girar la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$, en torno del eje $X$. Hallar, en coordenadas cilíndricas, la ecuación de la superficie generada. Construir la superficie.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ es siempre igual a 6. Construir el lugar geométrico.

30. Deducir la ecuación de la superficie de revolución generada por rotación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2by + b^2 - a^2 = 0$, $z = 0$, en torno del eje $X$. Construir la superficie para $a = 2$ y $b = 3$. Cuando $b > a$, la superficie se llama *toro* o *anillo de ancla*.

**137. Superficies regladas.** Vamos a considerar ahora un tipo más general de superficies del cual son ejemplo el plano, la superficie cilíndrica y la cónica.

DEFINICIÓN. Una *superficie reglada* es aquella que puede ser engendrada por el movimiento de una línea recta.

La línea recta en movimiento, en cualquiera de sus posiciones, se llama *generatriz* de la superficie.

Se sigue de esta definición que una superficie cilíndrica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas, mientras que la superficie cónica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas concurrentes.

Como en el caso de la superficie cilíndrica (Art. 133) y cónica (Art. 135), las ecuaciones de las superficies regladas pueden obtenerse por el método del parámetro.

**Ejemplo 1.** Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas

$$2x - y + kz = 0, \quad 2kx + ky - 4z = 0. \tag{1}$$

**Solución.** Para cada valor del parámetro $k$, la recta correspondiente de la familia (1) debe estar en su totalidad sobre la superficie. Es decir, todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones (1) deben estar sobre la superficie, cualquiera que sea el valor de $k$. Por tanto, las ecuaciones de la superficie deben ser independientes de $k$ y pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (1) simplemente eliminando el parámetro $k$. Así, despejando $k$ de cada una de estas ecuaciones, obtenemos

$$k = \frac{y - 2x}{z}, \quad k = \frac{4z}{2x + y},$$

de donde,

$$\frac{y - 2x}{z} = \frac{4z}{2x + y},$$

o sea,

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$$

que es la ecuación buscada. Esta superficie reglada es, evidentemente, la superficie de un cono circular recto cuyo vértice está en el origen y cuyo eje se extiende a lo largo del eje $Y$.

Si no se dan las ecuaciones de las generatrices de una superficie reglada como en el ejemplo anterior, pueden obtenerse a partir de la forma en que se engendra la superficie. La ecuación de la superficie puede determinarse entonces por el método de parámetros como se ilustró anteriormente para las superficies cilíndrica y cónica.

Consideremos ahora el problema recíproco, a saber, dada la ecuación de una superficie, determinar si representa o no una superficie reglada. Ilustraremos el método con un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Demostrar que la ecuación

$$yz + 2x - 2z = 0 \tag{2}$$

representa una superficie reglada. Construir la superficie.

**Solución.** Si en la ecuación (2) hacemos $z = k$, hallamos que la intersección de la superficie y el plano es la línea recta

$$2x + ky - 2k = 0, \quad z = k. \tag{3}$$

Como las rectas de la familia (3) están sobre la superficie (2) para todos los valores de $k$, esta superficie es reglada y tiene a las rectas (3) por generatrices.

Antes de intentar la construcción de una superficie reglada es mejor, generalmente, determinar las direcciones de sus generatrices. Por el artificio de los números directores, se encuentra que los números directores de las generatrices (3) son $[k, -2, 0]$. Esto muestra que todas las generatrices son paralelas al plano $XY$ pero no son paralelas entre sí, ya que los números directores dependen del parámetro $k$. Estos hechos sugieren un método de construir la superficie (2). Primero hallamos las trazas de la superficie sobre el plano $XZ$ y sobre el $YZ$. Estas son, respectivamente,

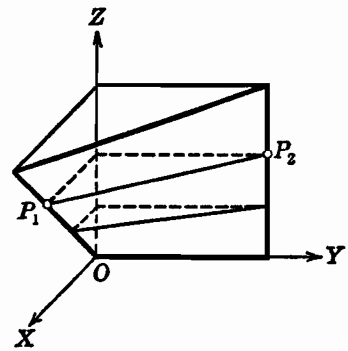

Fig. 185

$$x = z, \quad y = 0, \tag{4}$$

$$y = 2, \quad x = 0, \quad y \quad z = 0, \quad x = 0. \tag{5}$$

Para un valor común de $z$, sea $P_1$ el punto sobre la traza (4) y $P_2$ el punto sobre la traza (5). Entonces, evidentemente, la recta que pasa por $P_1$ y $P_2$ es una generatriz de la superficie (2). En la figura 185 aparecen trazadas varias de estas generatrices, y muestra una parte de la superficie comprendida en el primer octante. Esta superficie se llama *paraboloide hiperbólico*.

El procedimiento empleado en el ejemplo 2 sugiere otro método para determinar cuándo una ecuación dada representa una superficie cilíndrica. Vamos a ilustrar esto por medio de un ejemplo.

**Ejemplo 3.** Demostrar que la ecuación

$$xz + 2yz - 1 = 0 \tag{6}$$

representa una superficie cilíndrica, demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas.

**Solución.** La intersección de la superficie (6) y el plano $z = k$ es la recta

$$kx + 2ky - 1 = 0, \quad z = k. \qquad (7)$$

Por tanto, la superficie (6) es una superficie reglada que tiene a la familia de rectas (7) por generatrices.

Los números directores de las generatrices (7) son $[2, -1, 0]$. Como estos números directores son independientes del parámetro $k$, todas las generatrices (7) son paralelas, y, por tanto, la superficie (6) es cilíndrica. El estudiante debe construir la superficie.

## EJERCICIOS. Grupo 65

En cada uno de los ejercicios 1-6, hallar la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas dada, y construir la superficie.

1. $kx + 2ky - 4 = 0, \quad x - 2y - k = 0.$
2. $x - ky - 3z = 0, \quad kx + 3kz + y = 0.$
3. $x + ky - 2z - 2k = 0, \quad kx - y + 2kz = 2.$
4. $x - 3y + 3kz = 3k, \quad kx + 3ky - 3z = 3.$
5. $x + 2y - k = 0, \quad kx - 2ky - z = 0.$
6. $x + y - ky = 0, \quad x + kz = 0.$

7. Demostrar que la superficie del ejercicio 4 también es generada por la familia de rectas $kx - 3ky - 3z = 3$, $x + 3y + 3kz = 3k$. Demostrar también que ambas familias de rectas se cortan.

En cada uno de los ejercicios 8-13, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cilíndrica demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas. Constrúyase la super ficie.

8. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2.$
9. $z^2 - 2x - 2y = 0.$
10. $2x^2 + y - 2z = 0.$
11. $y^2 - x - z - 1 = 0$
12. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = 1.$
13. $x^2 + z^2 - 2xz - y + z = 0.$

En cada uno de los ejercicios 14-17, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie cónica demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas concurrentes. Constrúyase la superficie.

14. $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0.$
15. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0.$
16. $y^2 - 4xz = 0.$
17. $x^2 + 2yz - 2y = 0.$

En cada uno de los ejercicios 18-21, demuéstrese que la ecuación dada representa una superficie reglada. Constrúyase dicha superficie.

18. $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$
19. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 4.$
20. $xy - x - y - z + 1 = 0.$
21. $x^2 - y^2 - z = 0.$

22. Hallar la ecuación de la superficie reglada engendrada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela al plano $YZ$ y corta a la

recta $x + z = 1$, $y = 0$, y a la parábola $y^2 = x$, $z = 0$. Construir la superficie.

**23.** Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela al plano $XY$ y se apoya en las curvas $y^2 = z$, $x = 0$ y $z^2 = x$, $y = 0$. Construir la superficie.

**24.** Un *conoide* es una superficie reglada engendrada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela a un plano fijo dado, corta a una recta fija dada, y satisface otra condición. En particular, si el plano fijo y la recta fija dados son perpendiculares entre sí, la superficie se llama *conoide recto*. Hallar la ecuación del conoide recto generado por una recta que se mueve paralela al plano $XZ$ y corta a la recta $z = 2$, $x = 0$, y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

**25.** Hallar la ecuación del conoide recto engendrado por una recta que se mueve paralela al plano $XZ$ y corta a la recta $x = 3$, $z = 0$, y a la elipse

$$y^2 + 4z^2 = 4, \quad x = 0.$$

**138. Transformación de coordenadas rectangulares en el espacio.** En el Capítulo V y los capítulos subsiguientes de la Geometría analítica plana, vimos que, por medio de transformación de coordenadas, se puede frecuentemente simplificar la ecuación de un lugar geométrico plano, y estudiar así sus características con más facilidad. De modo análogo, las ecuaciones de los lugares geométricos en el espacio pueden simplificarse por una transformación de coordenadas. Como en Geometría analítica plana consideraremos aquí la transformación de coordenadas en el espacio asociada con una traslación y una rotación de los ejes coordenados.

Por una *traslación de los ejes coordenados rectangulares en el espacio*, entendemos la operación de mover los ejes coordenados a una posición diferente de manera que los nuevos ejes sean paralelos a los ejes originales, respectivamente, y de la misma dirección. Consideremos (fig. 186) una traslación de los ejes coordenados rectangulares tal que el origen $O(0, 0, 0)$ tome la nueva posición $O'(h, k, l)$, y que los ejes $X$, $Y$ y $Z$, tomen las nuevas posiciones $X'$, $Y'$ y $Z'$, respectivamente. Designemos por $(x, y, z)$ y $(x', y', z')$, respectivamente, las coordenadas de un punto cualquiera $P$ del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes.

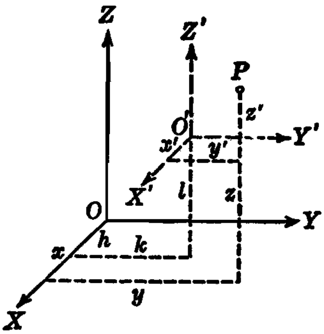

Fig. 186

Entonces, las relaciones entre las coordenadas originales de $P$ y las nuevas coordenadas pueden obtenerse por el mismo método empleado en la deducción de las relaciones análogas de la Geometría analítica plana (Art. 50, teorema 1). El resultado obtenido se expresa en el siguiente

TEOREMA 10. *Si los ejes rectangulares son trasladados a un nuevo origen* O′(h, k, l), *y si las coordenadas de un punto cualquiera* P *del espacio antes y después de la traslación son* (x, y, z) *y* (x′, y′, z′), *respectivamente, las ecuaciones de trasformación de las coordenadas originales a las nuevas son*

$$x = x' + h, \quad y = y' + k, \quad z = z' + l.$$

Por una *rotación de los ejes coordenados rectangulares en el espacio*, entendemos la operación de mover los ejes coordenados a una nueva posición haciéndolos girar en torno del origen como punto fijo de tal manera que los nuevos ejes permanezcan mutuamente perpendiculares entre sí y análogamente dirigidos uno con respecto al otro. Consideremos (fig. 187) una rotación de los ejes coordenados rectangulares tal que el origen $O$ permanezca fijo, pero los ejes originales $X$, $Y$ y $Z$ tomen las nuevas posiciones especificadas por los ejes $X'$, $Y'$ y $Z'$, respectivamente. Designemos por $(x, y, z)$ y $(x', y', z')$ las coordenadas de un punto cualquiera $P$ del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes, respectivamente. Denotemos por $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, y $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, respectivamente, los ángulos directores de los ejes $X'$, $Y'$ y $Z'$, referidos a los ejes originales. Estos ángulos directores aparecen ordenados en la siguiente tabla:

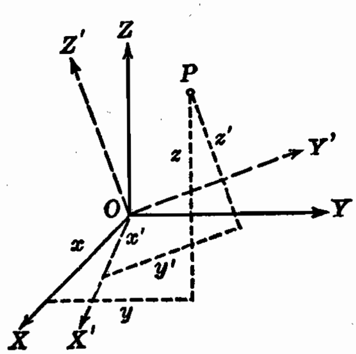

Fig. 187

| Eje | $X$ | $Y$ | $Z$ | |
|---|---|---|---|---|
| $X'$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ | |
| $Y'$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ | (1) |
| $Z'$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ | |

Leyendo esta tabla en sentido horizontal, obtenemos los ángulos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales, y leyendo en sentido vertical, obtenemos los ángulos directores de los ejes originales con respecto a los nuevos ejes.

De la tabla (1), los ángulos directores del eje $X$, con respecto a los nuevos ejes, son $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Entonces, como el eje $X$ es normal al plano $YZ$, se sigue, por el teorema 9 (Art. 119) que la ecuación del plano $YZ$, con referencia a los nuevos ejes, está dada por

$$x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 = 0.$$

Por el teorema 11 (Art. 120) el primer miembro de esta ecuación representa la distancia del punto $P$ al plano $YZ$. Pero esta distancia también está dada por la coordenada $x$. Por tanto, tenemos la relación

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3. \tag{2}$$

Análogamente, podemos obtener expresiones similares para cada una de las coordenadas $y$ y $z$ en función de las nuevas coordenadas. Vamos a agrupar juntas estas relaciones en el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Observamos en seguida que en el sistema (3) hay nueve cosenos directores o constantes. Estas constantes no son todas independientes, porque satisfacen las seis relaciones de los sistemas (4) y (5) que damos a continuación. Así, por el teorema 4 (Art. 110), tenemos las tres relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

También, como los nuevos ejes $X'$, $Y'$ y $Z'$ son mutuamente perpendiculares, tenemos, por el corolario 2 del teorema 6 (Art. 112), las tres relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

El sistema (3) expresa cada una de las coordenadas originales de $P$ en función de sus nuevas coordenadas. Podemos, análogamente, obtener expresiones semejantes para las nuevas coordenadas en función de las coordenadas originales. Así, empleando la ecuación del plano $Y'Z'$, con respecto a los ejes originales, podemos, por el mismo método empleado para deducir la ecuación (2) anterior, obtener la relación

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 .$$

Análogamente, obtenemos relaciones similares para $y'$ y $z'$ las cuales están agrupadas en el sistema

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 , \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 , \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El sistema (6) es el *recíproco* del sistema (3) y puede obtenerse también como una solución del sistema (3) para $x'$, $y'$ y $z'$ (ver los ejercicios 23 y 24 del grupo 66 al final de este artículo).

Vamos a resumir los resultados precedentes en el siguiente

TEOREMA 11. *Si se hacen girar los ejes coordenados rectangulares en torno de su origen* O *como punto fijo de manera que los ángulos directores de los nuevos ejes* X′, Y′ *y* Z′ *con respecto a los ejes originales* X, Y *y* Z *sean* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, *y* $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, *respectivamente, y las coordenadas de un punto cualquiera* P *del espacio antes y después de la rotación son* $(x, y, z)$ *y* $(x', y', z')$, *respectivamente, entonces las ecuaciones de transformación de las coordenadas originales a las nuevas son*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 , \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 , \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 , \end{aligned}\right\}$$

*y las ecuaciones de la transformación inversa de las coordenadas nuevas a las originales son*

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 , \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 , \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 . \end{aligned}\right\}$$

NOTAS. 1. El orden de los términos en el primer sistema de ecuaciones de transformación puede obtenerse leyendo hacia abajo, y para el segundo sistema, leyendo de izquierda a derecha, en la tabla (1).

2. Los ejes coordenados en el espacio pueden sujetarse a una traslación y una rotación, tomadas en cualquier orden. Como las ecuaciones de transformación para la traslación y para la rotación de ejes son relaciones lineales, podemos demostrar, como en la transformación de coordenadas en el plano (nota 1 del teorema 3, Art. 52), que *el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas en el espacio.*

**EJERCICIOS. Grupo 66**

1. Demostrar el teorema 10 del Artículo 138.

2. Como resultado de la traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $O'(-4, 3, 5)$, las coordenadas de dos puntos son $P_1(6, -3, 2)$ y $P_2(-2, 1, 2)$ referidos a los nuevos ejes. Hallar las coordenadas de estos puntos referidos a los ejes originales. Ilustrar los resultados con una figura.

3. Hallar las nuevas coordenadas de los puntos $P_1(-2, 3, 4)$ y $P_2(1, -4, 5)$ en una traslación en que el nuevo origen es el punto $O'(2, 2, 7)$. Ilustrar los resultados con una figura.

4. Hallar la transformada de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z = 31$$

de una superficie al trasladar los ejes coordenados al nuevo origen $(1, -2, 3)$. Construir la superficie y trazar ambos sistemas de ejes.

5. Resolver el ejercicio 4 por el método de completar cuadrados.

En cada uno de los ejercicios 6-10, por una traslación de los ejes coordenados, transformar la ecuación dada de una superficie en otra ecuación que carezca de términos de primer grado. Construir la superficie y trazar ambos sistemas de ejes.

6. $2x^2 + 3z^2 + 16x - 6z + 29 = 0.$

7. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x + 16y = 11.$

8. $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6x - 8y + 8z + 9 = 0.$

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 6z + 8 = 0.$

10. $y^3 - 3y^2 - z^2 + 3y - 4z = 5.$

11. Deducir las ecuaciones segunda y tercera del sistema (3) del Art. 138.

12. Deducir las tres ecuaciones del sistema (6) del Art. 138.

13. Demostrar que el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas en el espacio.

14. Hallar las nuevas coordenadas de un punto $P_1(6, -3, 3)$ cuando los ejes coordenados son girados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales son

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3};\quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}.$$

Ilústrese con una figura.

15. Si las nuevas coordenadas de un punto $P_2$ son $(3, 9, -6)$, con referencia a los ejes girados del ejercicio 14, hállense las coordenadas de $P_2$ con respecto a los ejes originales.

16. Si se hace girar a los ejes $X$ y $Y$ un ángulo agudo $\theta$ alrededor del eje $Z$ como recta fija, demuéstrese que el sistema (3) del Artículo 138 toma la forma

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta,\quad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta,\quad z = z'.$$

(Ver el teorema 2 del Art. 51.)

17. Bajo las condiciones del ejercicio 16, demuéstrese que el sistema (6) del Artículo 138 toma la forma

$$x' = x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,\quad y' = -x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta,\quad z' = z.$$

(Ver el ejercicio 19 del grupo 21, Art. 51.)

**18.** Hallar la transformada de la ecuación

$$23x^2 - 41y^2 - 31z^2 + 48xy - 72xz - 24yz = 0$$

al hacer girar los ejes coordenados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los originales sean

$$\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7};\quad -\frac{6}{7},\ -\frac{2}{7},\ \frac{3}{7};\quad \frac{3}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{2}{7}.$$

Construir la superficie.

**19.** Hallar la transformada de la ecuación

$$8x^2 + 11y^2 + 8z^2 - 4xy + 8xz + 4yz = 12$$

al hacer girar los ejes coordenados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los originales sean

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3};\quad \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3};\quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}.$$

Construir la superficie.

Los ejercicios 20-25 se refieren a la tabla (1) y a los sistemas (3), (4) y (6) del Artículo 138.

**20.** Usando el hecho de que el eje $Z'$ es perpendicular a ambos ejes $X'$ y $Y'$ y seleccionando de la tabla (1) los ángulos directores convenientes, demostrar, por medio del artificio de los números directores (Art. 113), que los cosenos directores del eje $Z'$ están dados por las relaciones

$$\cos\alpha_3 = \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1,$$
$$\cos\beta_3 = \cos\alpha_2\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2,$$
$$\cos\gamma_3 = \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1.$$

**21.** Análogamente, como en el ejercicio 20, demostrar que los cosenos directores del eje $X'$ están dados por las relaciones

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2,$$
$$\cos\beta_1 = \cos\alpha_3\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3,$$
$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2.$$

**22.** Por medio del resultado del ejercicio 20 y la tercera relación del sistema (4), demostrar que el determinante del sistema (3) es igual a la unidad.

**23.** De los resultados de los ejercicios 21 y 22, demostrar, por medio de la regla de Cramer, que la solución del sistema (3) para $x'$ está dada por la primera relación del sistema (6).

**24.** Análogamente, como en el ejercicio 23, demostrar que la solución del sistema (3) para $y'$ y $z'$ está dada por las relaciones segunda y tercera, respectivamente, del sistema (6).

**25.** Análogamente, como en el ejercicio 24, demostrar que la solución del sistema (6) está dada por el sistema (3).

**139. Ecuación general de segundo grado con tres variables.** De considerable importancia en la Geometría analítica de tres dimensiones es la ecuación general de segundo grado con tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (1)$$

en donde uno, por lo menos, de los seis coeficientes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ y $F$ es diferente de cero. Una superficie cuya ecuación es de la forma (1), es decir, de segundo grado, se llama, apropiadamente, *superficie cuádrica* o simplemente una *cuádrica*. El estudiante observará que algunas de las superficies previamente estudiadas son superficies cuádricas. Por ejemplo, la superficie esférica es una cuádrica. También, las superficies cilíndrica y cónica cuyas ecuaciones sean de segundo grado, son cuádricas, tenemos así el *cilindro cuádrico* y el *cono cuádrico*. De manera semejante, cualquier superficie reglada representada por una ecuación de segundo grado se llama *cuádrica reglada*.

Vamos ahora a llamar la atención sobre una propiedad importante de las cuádricas. Supongamos que cortamos la cuádrica (1) por un plano cualquiera paralelo al plano $XY$, es decir, el plano $z = k$, en donde $k$ es una constante real cualquiera. Las ecuaciones de la curva de intersección se obtienen sustituyendo $z$ por $k$ en la ecuación (1); éstas son

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + K = 0, \quad z = k.$$

Por nuestro estudio previo de la ecuación plana general de segundo grado con dos variables (Capítulo IX), reconocemos esta curva como una sección cónica, o una forma límite de una sección cónica, contenida en el plano $z = k$. Más generalmente, podemos demostrar que, *si una superficie cuádrica es cortada por un plano cualquiera, la curva de intersección es una sección cónica o una forma límite de una sección cónica*. Vemos ahora que nuestra determinación previa de las secciones cónicas como secciones planas de un cono circular recto, hecha en el Artículo 78, es un caso especial de esta propiedad.

La ecuación general (1) de una cuádrica ocupa entre las superficies, en Geometría analítica del espacio, un lugar análogo al ocupado entre las curvas planas, en Geometría analítica plana, por la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

que es la definición analítica de una sección cónica. En el Capítulo IX hicimos un estudio de la ecuación (2) y una clasificación de los lugares geométricos representados por ella. Se puede hacer un estudio semejante de la ecuación (1) y una clasificación de sus lugares geométricos, pero, evidentemente, para tres variables la discusión es mucho más larga y complicada. Se demuestra en tratados avanzados que mediante una transformación apropiada de coordenadas, se puede transformar la ecuación (1) de manera que tome una de las dos formas tipo:

$$\text{(I)} \qquad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R,$$

$$\text{(II)} \qquad Mx^2 + Ny^2 = Sz.$$

Las superficies del tipo (I) tienen un centro de simetría, el origen, y por esto se llaman *cuádricas con centro*. Las superficies del tipo (II) no tienen centro de simetría y se llaman, por lo tanto, *cuádricas sin centro.*

En la página siguiente se da, en forma de tabla, una clasificación de las superficies representadas por ecuaciones de los tipos (I) y (II). La naturaleza de estas superficies dependerá, naturalmente, de los coeficientes, de los cuales uno o más pueden ser cero. Debe observarse, sin embargo, que el número de tales coeficientes nulos es limitado, porque, como hemos anotado previamente (nota 2 del teorema 11, Art. 138), el grado de una ecuación no se altera por una transformación de coordenadas en el espacio.

Por una simple observación de estas dos tablas vemos que, si uno o más coeficientes son cero, el lugar geométrico, si existe, está entre las superficies que hemos estudiado previamente. Estos lugares geométricos incluyen las superficies del cilindro y cono rectos y a ciertas formas degeneradas que constan de dos planos diferentes, dos planos coincidentes (o un solo plano), dos planos que se cortan, una sola recta (una forma límite de un cilindro), y un punto.

Si ningún coeficiente es cero, las tablas muestran que el lugar geométrico, si existe, es una superficie de la cual no hemos discutido anteriormente ningún detalle. Estas superficies son las tres cuádricas con centro: el elipsoide y los hiperboloides de una y dos hojas, y las dos cuádricas no centrales: los paraboloides elíptico e hiperbólico.

**140. Cuádricas con centro.** Vamos a considerar ahora las cuádricas con centro, representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R,$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero. Podemos entonces escribir esta ecuación en la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

## Clasificación de las cuádricas

TIPO (I). $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$

| COEFICIENTES | | LUGAR GEOMETRICO |
|---|---|---|
| $R$* | $M, N, P$ | |
| $>0$ | Todos positivos | Elipsoide |
| | Todos negativos | Ningún lugar geométrico |
| | Dos positivos, uno negativo | Hiperboloide de una hoja |
| | Uno positivo, dos negativos | Hiperboloide de dos hojas |
| | Uno cero, dos positivos | Cilindro elíptico (o circular) recto |
| | Uno cero, dos negativos | Ningún lugar geométrico |
| | Uno cero, uno positivo, uno negativo | Cilindro hiperbólico recto |
| | Dos cero, uno positivo | Dos planos paralelos diferentes |
| | Dos cero, uno negativo | Ningún lugar geométrico |
| $=0$ | Todos del mismo signo | Un solo punto, el origen |
| | Dos positivos, uno negativo | Cono recto |
| | Uno cero, dos del mismo signo | Todos los puntos sobre un eje coordenado |
| | Uno cero, dos de signos contrarios | Dos planos que se cortan |
| | Dos cero | Un plano coordenado (dos planos coincidentes). |

* Cuando $R < 0$, se invierten los signos de los coeficientes $M$, $N$ y $P$; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $R > 0$.

TIPO (II). $Mx^2 + Ny^2 = Sz$

| COEFICIENTES | | LUGAR GEOMETRICO |
|---|---|---|
| $S$** | $M, N$ | |
| $>0$ | Del mismo signo | Paraboloide elíptico |
| | Signos opuestos | Paraboloide hiperbólico |
| | Uno cero | Cilindro parabólico recto |
| $=0$ | Del mismo signo | Todos los puntos sobre un eje coordenado |
| | Signos opuestos | Dos planos que se cortan |
| | Uno cero | Un plano coordenado (dos planos coincidentes) |

** Cuando $S < 0$, se invierten los signos de los coeficientes $M$ y $N$; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $S > 0$.

llamada *forma canónica de una cuádrica con centro*. Como para las secciones cónicas, veremos que es más sencillo estudiar las cuádricas a partir de las formas canónicas de sus ecuaciones. De la ecuación (1) se deduce que cada cuádrica con centro tiene tres planos de simetría (los planos coordenados) llamados *planos principales*, tres ejes de simetría (los ejes coordenados) llamados *ejes principales*, y un centro de simetría (el origen) llamado *centro* de la superficie.

Si todos los coeficientes en la ecuación (1) son negativos, no hay lugar geométrico. Por tanto, solamente quedan tres casos por considerar, según que el número de coeficientes positivos sea tres, dos o uno. Tenemos entonces los tres siguientes tipos de superficies:

*a*) Elipsoide – todos los coeficientes positivos.

*b*) Hiperboloide de una hoja –dos coeficientes positivos, uno negativo.

*c*) Hiperboloide de dos hojas –un coeficiente positivo, dos negativos.

a) *Elipsoide*. La forma canónica de la ecuación del elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

Podemos discutir esta ecuación de acuerdo con los métodos del Artículo 129. Las intercepciones con los ejes $X$, $Y$ y $Z$ son $\pm a$, $\pm b$ y $\pm c$, respectivamente. Los seis puntos de intersección del elipsoide y los ejes coordenados se llaman *vértices*. En la figura 188 se han designado por las letras $A$, $A'$, $B$, $B'$ y $C$, $C'$. Si $a > b > c$, los segmentos $AA'$, $BB'$ y $CC'$ se llaman, respectivamente, *eje mayor*, *eje medio* y *eje menor* del elipsoide.

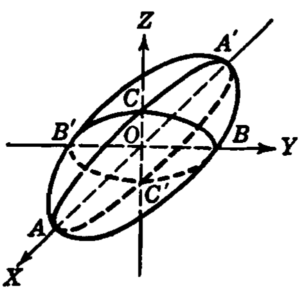

Fig. 188

Todas las trazas sobre los planos coordenados son elipses.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a todos los ejes coordenados, y al origen.

Todas las secciones del elipsoide hechas por los planos paralelos a los coordenados son elipses dentro de los límites de la superficie, que es cerrada y está contenida en su totalidad dentro del paralelepípedo que tiene por caras los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ y $z = \pm c$.

Si dos cualesquiera de los coeficientes en la ecuación (2) son iguales, la superficie se llama *elipsoide de revolución*. En particular, si $a > b$ y $c = b$, tenemos el *elipsoide alargado*, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno de su eje mayor. También, si $a > b$ y $c = a$, tenemos el *elipsoide achatado* o *esferoide*, que es una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno de su eje menor. Si $a = b = c$, la superficie (2) es una esfera de radio $a$; luego, la superficie esférica es un caso especial del elipsoide.

b) *Hiperboloide de una hoja*. Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de una hoja es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nuestra discusión de la ecuación (3) servirá también para estas dos últimas formas, ya que las tres superficies difieren solamente en sus posiciones con relación a los ejes coordenados.

Las intercepciones con los ejes $X$ y $Y$ son $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente. No hay intercepciones con el eje $Z$.

Las trazas sobre los planos $XY$, $XZ$ y $YZ$ son, respectivamente, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$, y la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al $XY$ son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k. \tag{4}$$

De las ecuaciones (4) se deduce que, a medida que $k$ aumenta de valor, estas elipses aumentan de tamaño. Se sigue, además, que la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente. En la figura 189($a$) aparece una parte de la superficie, y se dice que se extiende a lo largo del eje $Z$. Cualquier hiperboloide de una hoja se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es negativo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (3) es $a = b$, la superficie es un *hiperboloide de revolución de una hoja* que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, en torno del eje $Z$. (Véase el ejemplo 2 del Artículo 136.)

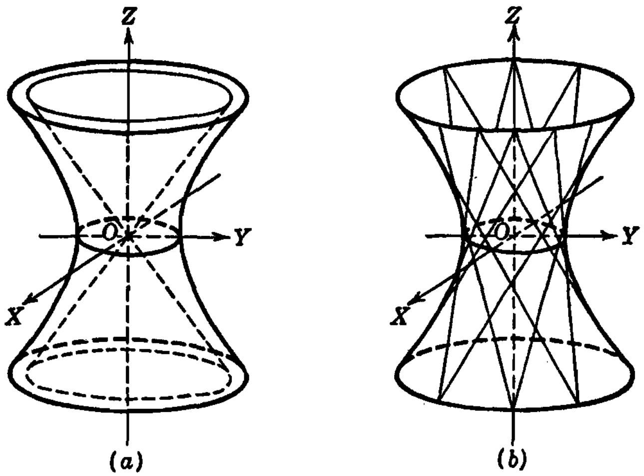


Fig. 189

Vamos a comparar ahora la ecuación (3) con la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (5)$$

que representa una superficie cónica de segundo grado con eje en el eje $Z$. Si cortamos cada una de las superficies (3) y (5) por el plano $y = mx$, la curva de intersección para el hiperboloide (3) es la hipérbola

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = mx, \qquad (6)$$

y para el cono (5) es el par de rectas que se cortan

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2} x \pm \frac{z}{c} = 0, \quad y = mx. \qquad (7)$$

Para todos los valores de $m$, las rectas (7) son las asíntotas de la hipérbola (6). Además, las hipérbolas (6) están sobre el hiperboloide (3), y las rectas (7) están sobre la superficie (5) para todos los valores de $m$. Vemos, entonces, que la superficie (5) guarda una relación con el hiperboloide (3) análoga a la que guardan las asíntotas con una hipérbola, y que el hiperboloide se aproxima más y más a la superficie cónica a medida que ambas superficies se alejan más y más del origen. Por esto, la superficie (5) se llama *cono asintótico* del hiperboloide (3). En la figura 189($a$) aparece una porción de este cono.

Escribamos ahora la ecuación (3) en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Descomponiendo los dos miembros en factores, resulta:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \tag{8}$$

Ahora es fácil ver que la ecuación (8) puede obtenerse eliminando el parámetro $k$ de cualquiera de las dos siguientes familias de rectas:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}, \tag{9}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}. \tag{10}$$

Por tanto (Art. 137), *el hiperboloide de una hoja es una superficie reglada engendrada por una de estas dos familias de rectas*. Cada una de las familias de rectas (9) y (10) se llama un *haz alabeado* de segundo orden o *regulus* del hiperboloide (3). Puede demostrarse que por cada punto del hiperboloide pasa una y solamente una generatriz de cada haz. Algunas de estas generatrices aparecen en la figura 189($b$).

c) *Hiperboloide de dos hojas*. Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de dos hojas es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{11}$$

Como para el hiperboloide de una hoja, hay otras dos formas canónicas, siendo la discusión de la ecuación (11) representativa de todas las formas.

Las intercepciones con el eje $X$ son $\pm a$. No hay intercepciones con los ejes $Y$ y $Z$.

Las trazas sobre los planos $XY$ y $XZ$ son, respectivamente, las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$. No hay traza sobre el plano $YZ$.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

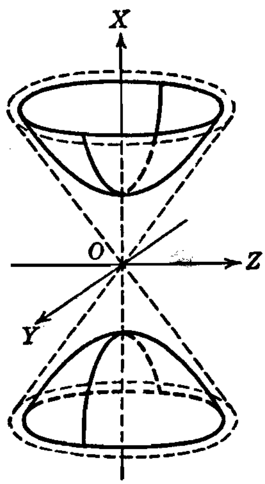

Fig. 190

Las secciones de esta superficie por planos paralelos al $YZ$ son las elipses

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1, \quad x = k,$$

siempre que $|k| > a$. Para $k = \pm a$, tenemos solamente los dos puntos de intersección con el eje $X$, $(\pm a, 0, 0)$. Para valores de $k$ comprendidos en el intervalo $-a < k < a$, no hay lugar geométrico. De esto se sigue que la superficie no es cerrada sino que está compuesta de dos hojas o ramas diferentes que se extienden indefinidamente. Una porción de la superficie aparece en la figura 190, en donde los ejes coordenados han sido colocados de manera que el dibujo resulte más claro. Se dice que la superficie se extiende a lo largo del eje $X$. Cualquier hiperboloide de dos hojas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (11) $b = c$, la superficie es un *hiperboloide de revolución de dos hojas* que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno del eje $X$. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 136.) Como para el hiperboloide de una hoja, podemos demostrar que un hiperboloide de dos hojas tiene también un *cono asintótico*. Para la superficie (11), la ecuación de este cono es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Una porción del cono aparece en línea de trazos en la figura 190. Para el hiperboloide de dos hojas cuya ecuación en su forma canónica es

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12}$$