Las intercepciones con el eje X son $\pm a$. No hay intercepciones con los ejes Y y Z.

Las trazas sobre los planos XY y XZ son, respectivamente, las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$. No hay traza sobre el plano YZ.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

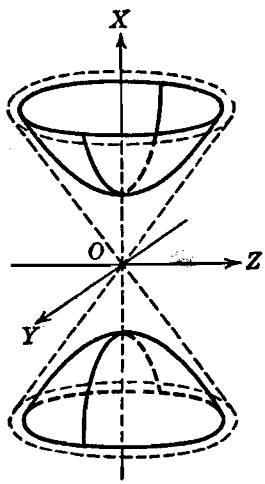

Fig. 190

Las secciones de esta superficie por planos paralelos al YZ son las elipses

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1, \quad x = k,$$

siempre que $|k| > a$. Para $k = \pm a$, tenemos solamente los dos puntos de intersección con el eje X, $(\pm a, 0, 0)$. Para valores de k comprendidos en el intervalo $-a < k < a$, no hay lugar geométrico. De esto se sigue que la superficie no es cerrada sino que está compuesta de dos hojas o ramas diferentes que se extienden indefinidamente. Una porción de la superficie aparece en la figura 190, en donde los ejes coordenados han sido colocados de manera que el dibujo resulte más claro. Se dice que la superficie se extiende a lo largo del eje X. Cualquier hiperboloide de dos hojas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (11) $b = c$, la superficie es un *hiperboloide de revolución de dos hojas* que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, en torno del eje X. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 136.) Como para el hiperboloide de una hoja, podemos demostrar que un hiperboloide de dos hojas tiene también un *cono asintótico*. Para la superficie (11), la ecuación de este cono es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Una porción del cono aparece en línea de trazos en la figura 190. Para el hiperboloide de dos hojas cuya ecuación en su forma canónica es

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (12)$$

la ecuación de su cono asintótico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

que es el cono asintótico (5) del hiperboloide de una hoja (3). Cuando un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas tienen un cono asintótico común, se llaman, apropiadamente, ***hiperboloides conjugados***. (Ver el Artículo 68.) Así, las superficies (3) y (12) son hiperboloides conjugados.

141. Cuádricas sin centro. En este artículo consideraremos las cuádricas sin centro representadas por la ecuación

$$Mx^2+Ny^2=Sz,$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero. Podemos entonces escribir esta ecuación en la forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz, \tag{1}$$

llamada *forma ordinaria o canónica de una superficie cuádrica sin centro*. De la ecuación (1) se deduce que las cuádricas sin centro tienen dos planos de simetría (los planos YZ y XZ) llamados *planos principales*, un eje de simetría (el eje Z) llamado *eje principal*, pero ningún centro de simetría.

Atendiendo a las diversas combinaciones posibles de signos en la ecuación (1), se deduce que, en esencia, existen solamente dos tipos diferentes de superficies, a saber:

a) Paraboloides elípticos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo).

b) Paraboloides hiperbólicos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son de signos contrarios).

a) *Paraboloide elíptico*. Una forma canónica de la ecuación del paraboloide elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz. \tag{2}$$

Las otras dos formas canónicas son $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy$ y $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx$.

Para cada forma podemos tener dos variaciones según que c sea positivo o negativo. Nuestro estudio de la ecuación (2) será representativo de todas las formas.

La superficie pasa por el origen. No hay otras intercepciones con los ejes coordenados.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, el origen, la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z.

Las secciones de las superficies por planos paralelos al XY son las curvas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \tag{3}$$

Estas curvas son elipses si c y k son del mismo signo; si c y k tienen signos contrarios, no hay lugar geométrico. Si tomamos c como positivo, k debe ser positivo, y a medida que k aumenta de valor, las elipses (3) crecen en tamaño a medida que los planos de corte se alejan más y más del plano XY. Evidentemente, pues, la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente, alejándose del plano XY. Se ve fácilmente que las secciones de la superficie por planos paralelos a los planos XZ y YZ son parábolas cuyos vértices se alejan del plano XY a medida que se toman los planos de corte más y más lejos de estos planos coordenados.

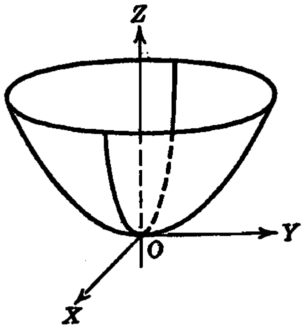

Fig. 191

Una porción de la superficie, en el caso de ser c positivo, aparece en la figura 191. Si c es negativo la superficie está en su totalidad abajo del plano XY. Se dice de cada superficie que se extiende a lo largo del eje Z. Cualquier paraboloide elíptico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (2) es $a = b$, la superficie es un *paraboloide de revolución* que puede engendrarse haciendo girar la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$, en torno del eje Z. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 130.)

b) *Paraboloide hiperbólico.* Una forma canónica de la ecuación del paraboloide hiperbólico es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz. \tag{4}$$

Nuestra discusión de la ecuación (4) será representativa de las otras dos formas canónicas, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cy$ y $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cx$. Hay dos variaciones para cada forma, según que c sea positivo o negativo.

La superficie pasa por el origen. No hay otras intercepciones con los ejes coordenados.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son, respectivamente, las rectas que se cortan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$, $z=0$, y $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $z=0$; la parábola $\frac{x^2}{a^2}=cz$, $y=0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2}=-cz$, $x=0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y al eje Z.

Las secciones de la superficie por planos paralelos a, pero no coincidentes con, el plano XY son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ck,\ z=k\neq 0.$$

Evidentemente, a medida que k crece numéricamente, las ramas de estas hipérbolas se alejan más y más del eje Z. Por tanto, la superficie no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XZ son las parábolas

$$\frac{x^2}{a^2}=cz+\frac{k^2}{b^2},\quad y=k,$$

las cuales se abren hacia arriba o hacia abajo según que c sea positivo o negativo.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al YZ son las parábolas

$$\frac{y^2}{b^2}=-cz+\frac{k^2}{a^2},\quad x=k,$$

las cuales se abren hacia abajo o hacia arriba según que c sea positivo o negativo.

Una porción de la superficie aparece en la figura 192(a) para el caso en que c es negativo. La superficie tiene la forma de una silla de montar y se dice que se extiende a lo largo del eje Z. Todo paraboloide hiperbólico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.

Evidentemente, el paraboloide hiperbólico nunca puede ser una superficie de revolución. La ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=cz,$$

de la cual vemos que la ecuación de la superficie puede obtenerse eliminando el parámetro k de cualquiera de las dos siguientes familias de rectas, o haces alabeados,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=k, \quad k\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=cz,$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=k, \quad k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=cz,$$

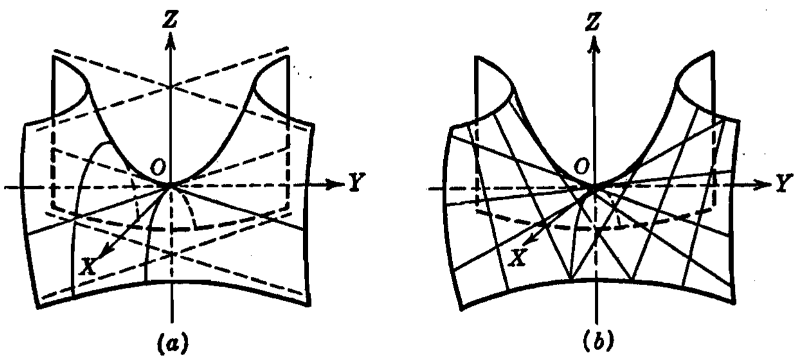

Fig. 192

Por tanto, como para el hiperboloide de una hoja (Art. 140), el *paraboloide hiperbólico es una superficie reglada engendrada por cualquiera de los dos haces alabeados*. (Véase el ejemplo 2 del Art. 137.) Puede demostrarse que por cada punto del paraboloide hiperbólico pasa una y solamente una generatriz de cada haz. Algunas de estas generatrices aparecen trazadas en la figura 192(b).

EJERCICIOS. Grupo 67

1. Discutir y representar gráficamente cada una de las superficies del tipo (I) (Art. 139) cuando uno o más de los coeficientes son nulos.

2. Dar una discusión completa del elipsoide alargado cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $a>b$. Construir la superficie.

3. Dar una discusión completa del elipsoide achatado cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \quad a>b.$$

Construir la superficie.

En cada uno de los ejercicios 4-7, discutir y construir el elipsoide cuya ecuación se da.

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1.$

5. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1.$

6. $36x^2+9y^2+4z^2=36.$

7. $4x^2+y^2+z^2-8x=0.$

8. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los ejes X y Y es siempre igual a 4. Construir la superficie.

9. En Cálculo infinitesimal se demuestra que el volumen limitado por un elipsoide es igual a $\frac{4}{3}\pi abc$, siendo a, b y c los semiejes. Hállese el volumen limitado por el elipsoide $4x^2+3y^2+2z^2-8x+12y+4=0.$

10. Dar una discusión completa del hiperboloide de una hoja cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Construir la superficie y su cono asintótico.

11. Dar una discusión completa del hiperboloide de dos hojas cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$. Construir la superficie y su cono asintótico.

En cada uno de los ejercicios 12-17, discútase y constrúyase el hiperboloide cuya ecuación se da. Constrúyase también su cono asintótico.

12. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

13. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

14. $x^2+y^2-2z^2=4.$

15. $x^2+y^2-2z^2+6=0.$

16. $2x^2-3y^2+z^2=6.$

17. $2x^2-y^2+8z^2+8=0.$

18. Construir los hiperboloides conjugados que tienen a la superficie $x^2+y^2-z^2=0$ por cono asintótico común.

19. Hallar las ecuaciones de cada haz alabeado del hiperboloide

$$x^2-4y^2+2z^2=1,$$

y demostrar que estas rectas se cortan.

20. Hallar la ecuación del hiperboloide de revolución de una hoja engendrado por la rotación de la recta $y=2$, $z=x$, en torno del eje Z. Construir la superficie.

21. Hallar la ecuación canónica de una cuádrica con centro, si la superficie pasa por el punto $(1, 1, -1)$ y por la curva $4y^2+2z^2=3$, $x=2$. Construir la superficie.

22. Discutir e ilustrar cada una de las superficies del tipo (II) (Art. 139) cuando uno o dos de los coeficientes son nulos.

23. Dar una discusión completa del paraboloide elíptico cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy$. Constiuir la superficie para $c>0$ y también para $c<0$.

24. Dar una discusión completa del paraboloide hiperbólico cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy$. Construir la superficie para $c > 0$ y también para $c < 0$.

En cada uno de los ejercicios 25-30, estudiar y construir el paraboloide cuya ecuación se da.

25. $x^2 + 2z^2 = 4y$. **27.** $9x^2 + 4z^2 + 36y = 0$.

26. $x^2 - y^2 + z = 0$. **28.** $4y^2 + z^2 + 2x = 0$.

29. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 18z + 13 = 0$.

30. $x^2 - y^2 - 2x + 4y + z - 6 = 0$.

31. Hallar las ecuaciones de cada uno de los haces alabeados del paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 = 4z$, y demostrar que estas rectas se cortan.

32. Hallar la ecuación canónica de una cuádrica sin centro, si la superficie se extiende a lo largo del eje Z y pasa por los puntos $(2, 1, 1)$ y $(4, 3, -1)$. Construir la superficie.

33. Las dos superficies $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ se llaman *cilindros hiperbólicos conjugados*. Demostrar que ambas superficies son asintóticas a los planos que se cortan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Estos planos se llaman, apropiadamente, *planos asintóticos* comunes de los cilindros. Constrúyanse los cilindros y sus planos asintóticos.

34. Demostrar que el paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ es asintótico a los planos que se cortan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Estos planos son llamados, apropiadamente, *planos asintóticos*. Constrúyase la superficie y sus planos asintóticos.

35. Demostrar que las rectas de cada haz alabeado del paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ son paralelas a cualquiera de sus planos asintóticos (ejercicio 34).

Los ejercicios 36-39 se refieren al sistema de *cuádricas con centro*

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} = 1, \tag{5}$$

en donde $a > b > c > 0$ y el parámetro k puede tomar todos los valores reales excepto $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, y cualquier valor menor que $-a^2$. Este sistema es análogo al sistema de cónicas con centro (homofocales) discutido en el Art. 77.

36. Para $k > -c^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de elipsoides cuyas trazas sobre el plano XY son todas elipses que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

37. Para $-b^2 < k < -c^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de hiperboloides de una hoja cuyas trazas sobre el plano XY son todas elipses que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

38. Para $-a^2 < k < -b^2$, demuéstrese que la ecuación (5) representa un sistema de hiperboloides de dos hojas cuyas trazas sobre el plano XY son todas hipérbolas que tienen los focos comunes $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$.

39. Los resultados de los ejercicios 36-38 muestran que las trazas del sistema (5) sobre el plano XY, para todos los valores permisibles de k, son cónicas homofocales (Art. 77). Demuéstrese que se verifican resultados semejantes para las trazas sobre el plano XZ y también para las trazas sobre el plano YZ de los elipsoides e hiperboloides de una hoja solamente, no habiendo ninguna traza sobre el plano YZ para los hiperboloides de dos hojas. En vista de esta propiedad, se dice que la ecuación (5) representa un *sistema de cuádricas homofocales*.

40. Establecer y demostrar un resultado análogo al del ejercicio 39 para el *sistema de cuádricas sin centro*

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=2z+k,$$

las cuales, por esto, se llaman *paraboloides homofocales*.

CAPITULO XVII

CURVAS EN EL ESPACIO

142. Introducción. En el Capítulo XV hicimos un estudio de la recta en el espacio. En este capítulo extenderemos nuestro estudio al problema más general de la investigación de cualquier curva en el espacio. Vimos que una recta en el espacio está representada analíticamente por dos ecuaciones independientes, que son las ecuaciones de dos planos diferentes cualesquiera que pasen por la recta. Análogamente, una curva en el espacio puede representarse analíticamente por dos ecuaciones independientes, las ecuaciones de dos superficies diferentes cualesquiera que pasen por la curva. Según esto, vamos a establecer la siguiente

DEFINICIÓN. La totalidad de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente dos ecuaciones rectangulares independientes se llama *curva del espacio*.

Geométricamente, una curva del espacio es la intersección de las dos superficies diferentes representadas por las ecuaciones que la definen.

Si todos los puntos de una curva en el espacio están en un plano, se llama *curva plana;* en caso contrario, se llama *curva alabeada*.

El estudiante debe observar que un par de ecuaciones rectangulares no representan necesariamente una curva del espacio. Así, las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no representan una curva, porque, analíticamente, estas dos ecuaciones no tienen ninguna solución común, y geométricamente, como representan dos esferas concéntricas, no hay curva de intersección. También, si dos superficies tienen solamente un punto en común, no consideraremos que definen una curva en el espacio.

Se anotó previamente (Art. 123) que las ecuaciones que definen una recta en el espacio no son únicas, y que una recta puede representarse analíticamente por las ecuaciones de dos planos diferentes cualesquiera que pasen por ella. Veremos ahora que este importante concepto se aplica a las curvas del espacio en general.

Consideremos una curva del espacio cualquiera dada por la intersección de dos superficies diferentes cuyas ecuaciones, en forma simbólica, pueden escribirse brevemente

$$u = 0, \quad v = 0. \tag{1}$$

Con estas ecuaciones formemos la ecuación

$$u + kv = 0, \tag{2}$$

en la que k es una constante o parámetro que puede tomar todos los valores reales. Evidentemente, si la ecuación (2) representa un lugar geométrico, se trata de una superficie (Art. 128). En particular, cualquier solución común de ambas ecuaciones (1) es también una solución de la ecuación (2). Por tanto, para cada valor del parámetro k, la ecuación (2) representa una superficie que pasa por la curva (1). (Véase Art. 77.) Este concepto es de tal importancia en la teoría de las curvas del espacio que lo anotaremos en la forma del siguiente

Teorema. *Para todos los valores del parámetro* k, *la ecuación*

$$\mathrm{u} + \mathrm{kv} = 0$$

representa una familia de superficies cada una de las cuales pasa por la curva

$$\mathrm{u} = 0, \quad \mathrm{v} = 0.$$

La importancia del teorema anterior está en el hecho de que a partir de las ecuaciones dadas de una curva del espacio frecuentemente es posible obtener un par de ecuaciones más simples o más útiles que la definan. Tendremos ocasión de usar este hecho más adelante (Artículo 145).

Debe observarse que nuestro estudio de las curvas del espacio se limitará solamente a su construcción. La investigación y determinación de las propiedades de la curva general del espacio requiere métodos avanzados que quedan fuera del programa de un curso elemental de Geometría analítica.

143. Curvas planas en el espacio. Comenzaremos nuestro estudio de la construcción de las curvas del espacio considerando el caso más sencillo de una curva plana. Ya hemos estudiado algunos ejemplos especiales de tales curvas como trazas de una superficie sobre los planos coordenados y como secciones de una superficie por planos paralelos a un plano coordenado. Así, las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 2$$

representan una circunferencia contenida en el plano $z = 2$. Esta curva puede considerarse también como la intersección de la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2$. Evidentemente, las curvas planas de este tipo pueden trazarse por los métodos de la Geometría analítica plana.

Vamos a considerar la construcción de una curva contenida en un plano no paralelo a, ni coincidente con, un plano coordenado. Sea C dicha curva, y considerémosla definida como la intersección de una superficie curva S y un plano δ. Para construir C debemos obtener un medio para determinar la localización de cualquier punto de la curva. Esto puede hacerse trazando primero un plano, digamos δ', paralelo a uno de los planos coordenados y tal que corte a C. El plano δ' cortará a S en una curva, digamos C', y a δ en una recta, digamos l'. La intersección de C' y l' es, evidentemente, un punto de la curva C.

Ejemplo. Construir aquella porción de la curva

$$C: \quad x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 4 = 0, \quad x = y \tag{1}$$

que está en el primer octante.

Solución. La primera ecuación representa un hiperboloide de revolución S de una hoja (fig. 193) que se extiende a lo largo del eje X, y la segunda un plano δ perpendicular al XY y que pasa por el eje Z. En la figura 193 aparecen las porciones de estas superficies que están en el primer octante.

La intersección de S con el eje Z es el punto A, que, por tanto, está también sobre δ. Luego A es un punto de la curva C: sus coordenadas se encuentran fácilmente y son (0, 0, 1). Las trazas de S y δ sobre el plano XY son, respectivamente, la hipérbola

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1, \quad z = 0,$$

y la recta $x = y$, $z = 0$; su intersección

$$B\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ \tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$$

es también un punto C.

Para localizar cualquier otro punto de C, consideremos un plano δ' paralelo

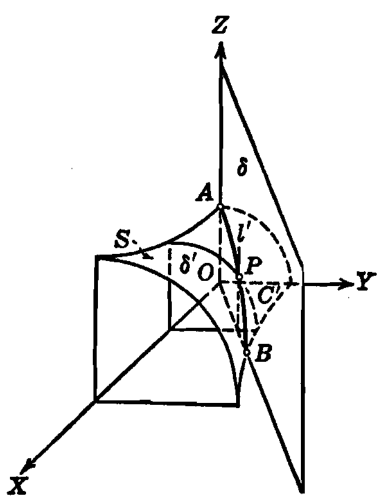

Fig. 193

al plano YZ; este plano corta a S en C', que es un cuadrante de circunferencia, y a δ en l' que es una recta paralela al eje Z. La intersección de C' y l' es un punto P de C. Análogamente, considerando otros planos paralelos al YZ, podemos obtener puntos adicionales de la curva C, que aparece en línea gruesa en la figura 193. Como C es, evidentemente, una curva cerrada, será interesante para el estudiante el construir la curva completa.

144. Curva de intersección de las superficies de dos cilindros rectos. Vamos a considerar ahora el problema de la construcción de la curva de intersección de las superficies de dos cilindros rectos. Este problema es importante porque es muy útil en la construcción de cualquier curva del espacio, como veremos en los dos artículos siguientes.

El tipo de superficie que consideraremos aquí es la cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares a un plano coordenado. La curva de intersección de tales superficies cilíndricas puede obtenerse por el método explicado en el Artículo 143. En efecto, se puede trazar un plano paralelo a uno de los planos coordenados y tal que pase por una generatriz de cada cilindro, la intersección de las dos generatrices es un punto de la curva de intersección.

Ejemplo. Construir la curva de intersección de las superficies cilíndricas

$$x^2 + z^2 = 1 \quad \text{y} \quad y^2 = 4x.$$

Solución. La primera ecuación (teorema 6, Art. 133) representa la superficie de un cilindro circular recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano XZ. La segunda ecuación representa la superficie de un cilindro parabólico recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano XY. Por simplicidad, vamos a trazar solamente aquella porción de la curva de intersección que está en el primer octante. El resto de la curva puede obtenerse después por consideraciones de simetría.

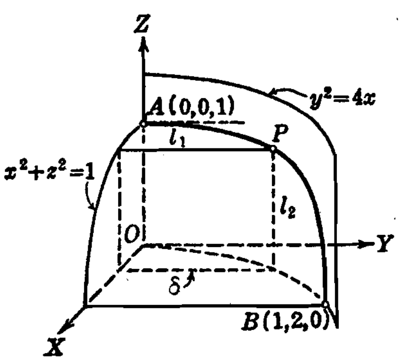

Fig. 194

Las partes de los dos cilindros que están en el primer octante aparecen en la figura 194. Evidentemente, los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 2, 0)$ están sobre la curva de intersección. Para obtener cualesquier otro punto de la curva, hacemos pasar un plano δ paralelo al plano YZ y que corta al cilindro $x^2 + z^2 = 1$ en la generatriz l_1 paralela al eje Y, y al cilindro $y^2 = 4x$ en la generatriz l_2 paralela al eje Z. La intersección de l_1 y l_2 es entonces un punto P de la curva de intersección. Análogamente podemos obtener tantos puntos como queramos de la curva, la cual aparece en el primer octante trazada en línea gruesa. El resto de la curva puede trazarse fácilmente por consideraciones de simetría.

EJERCICIOS. Grupo 68

En cada uno de los ejercicios 1-12, construir la curva plana de intersección de las dos superficies cuyas ecuaciones se dan.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z = 2.$
2. $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, \quad y = 1.$
3. $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 6 = 0, \quad x = 3.$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad y = 2x.$
5. $x^2 + y^2 = 1, \quad y = z.$
6. $6x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 6, \quad 2x = z.$
7. $x^2 + z - 4 = 0, \quad y = 3z.$
8. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + y = 1.$
9. $y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1.$
10. $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0, \quad 3x + 2y = 6.$
11. $x^2 + y^2 = 4, \quad x + y - z = 0.$
12. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x + y + z = 4.$

En cada uno de los ejercicios 13-25, construir la curva de intersección de las superficies cilíndricas rectas cuyas ecuaciones se dan.

13. $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1.$
14. $y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4.$
15. $x^2 + z^2 = 4, \quad x^2 = y.$
16. $x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 + z = 4.$
17. $x^2 + z = 3, \quad y^2 + z^2 = 9.$
18. $y^2 + x = 4, \quad y^2 + z = 4.$
19. $y^2 + x = 3, \quad x^2 + z = 9.$
20. $y^2 + x = 4, \quad y^2 - 4z = 0.$
21. $x^2 + z^2 = 1, \quad 3x^2 + y^2 = 12.$
22. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad y^2 + 9z^2 = 9.$
23. $x^{1/2} + z^{1/2} = 2, \quad y^2 + z = 4.$
24. $y = x^3, \quad 4y^2 + z^2 = 4.$
25. $y^{2/3} + z^{2/3} = 1, \quad x^2 + z = 1.$

145. Cilindros proyectantes de una curva del espacio. Por el teorema del Artículo 142 vemos que hay una infinidad de pares de superficies diferentes que con su intersección definen a una curva del espacio. Vamos a considerar ahora un par especial que es muy útil en la construcción de curvas del espacio. Se seleccionan tres combinaciones lineales de dos ecuaciones que definan una curva del espacio, tales, que cada combinación carezca, respectivamente, de una de las tres variables x, y y z. Este proceso consiste evidentemente en la eliminación sucesiva de una variable entre las dos ecuaciones que definen la curva. Como cada una de las ecuaciones resultantes carece de una variable, se sigue, por el teorema 6 del Artículo 133, que cada ecuación representa la superficie de un cilindro recto cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado en que no se mide esa variable. Además, como cada superficie cilíndrica tiene a la curva del espacio como directriz, se les llama, apropiadamente, *cilindros proyectantes* de la curva.

Vemos, entonces, que una curva del espacio tiene tres cilindros proyectantes, uno para cada plano coordenado. Se acostumbra, en consecuencia, hablar del cilindro proyectante de una curva sobre el plano XY, sobre el plano XZ y sobre el plano YZ. Dos cualesquiera de sus tres cilindros proyectantes pueden emplearse para definir la curva del espacio. Vemos, además, que los planos proyectantes de una recta en el espacio (Art. 125) son un caso especial de los cilindros proyectantes de cualquier curva del espacio.

Ejemplo. Hallar e identificar las ecuaciones de los cilindros proyectantes de la curva cuyas ecuaciones son

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 = 22, \quad 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 14. \tag{1}$$

Solución. Si eliminamos sucesivamente las variables x, y y z entre las dos ecuaciones de la curva (1), obtenemos, respectivamente, las ecuaciones

$$2y^2 + z^2 = 8, \tag{2}$$

$$4x^2 + 9z^2 = 36, \tag{3}$$

$$9y^2 - 2x^2 = 18. \tag{4}$$

Estas ecuaciones, tomadas en orden, representan los cilindros proyectantes de la curva (1) sobre los planos YZ, XZ y XY, respectivamente. Las dos primeras superficies son cilindros elípticos; la tercera es un cilindro hiperbólico.

La curva puede considerarse ya sea como la intersección de las superficies representadas por las ecuaciones (1), un elipsoide y un hiperboloide de una hoja, respectivamente, o como la intersección de dos cualesquiera de sus tres cilindros proyectantes (2), (3) y (4). Es muy interesante el ejercicio de construir la curva partiendo de cada uno de estos dos puntos de vista. Así se verá la gran simplicidad que se obtiene mediante los cilindros. Este tipo de problema será estudiado en el siguiente artículo.

Examinemos ahora la curva de intersección de las dos superficies de los dos cilindros circulares rectos

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{5}$$

$$y^2 + z^2 = 4. \tag{6}$$

Aquí tenemos ya dos de los cilindros proyectantes. Si aplicamos ahora el método del ejemplo anterior y determinamos la ecuación del tercer cilindro proyectante, eliminando la variable y entre las ecuaciones (5) y (6), obtenemos la ecuación

$$x^2 - z^2 = 0, \tag{7}$$

cuyo lugar geométrico consta de los planos $x + z = 0$ y $x - z = 0$. Por tanto, la intersección consta de dos curvas planas, una contenida en el plano $x + z = 0$ y la otra en el plano $x - z = 0$. Vemos aquí otra ventaja de determinar los cilindros proyectantes de una curva en el espacio; en este caso particular, nos conduce a descubrir el hecho de que la intersección consta de dos curvas planas. Es muy instructivo el construir las curvas como la intersección de cada uno de los planos (7) con cualquiera de los cilindros (5) y (6) y comparar entonces esta construcción con la usada en la solución del ejercicio 14 del grupo 68, Artículo 144.

146. Construcción de las curvas del espacio. En este artículo vamos a hacer un breve resumen de los métodos que pueden emplearse en la construcción de las curvas del espacio partiendo de las ecuaciones que la definen. Si una de las ecuaciones de una curva representa un plano, la curva es una curva plana y puede construirse como se discutió en el Artículo 143. Si ambas ecuaciones de una curva representan cilindros rectos cuyas generatrices son perpendiculares a un plano coordenado, la curva puede construirse como se bosquejó en el Artículo 144. Si las ecuaciones que definen la curva del espacio no caen bajo ninguno de estos dos casos, procedemos como se indicó en el Artículo 145, a saber, determinar las ecuaciones de los tres cilindros proyectantes y construir entonces la curva como intersección de dos cualesquiera de estos cilindros. El proceso en este último caso consiste en reducir el problema a uno de los dos primeros casos.

Ejemplo 1. Construir la curva

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 27 = 0, \quad x^2 - 2y^2 - z^2 + 9 = 0. \tag{1}$$

por medio de sus cilindros proyectantes.

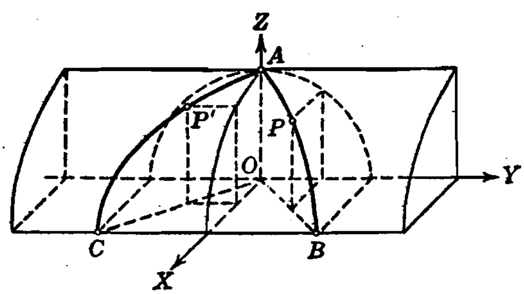

Fig. 195

Solución. Eliminando una variable sucesivamente entre las ecuaciones (1), obtenemos las tres ecuaciones

$$y^2 + z^2 = 9, \tag{2}$$

$$x^2 + z^2 = 9, \tag{3}$$

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{4}$$

El lugar geométrico de la ecuación (4) consta de los dos planos

$$x + y = 0 \quad y \quad x - y = 0;$$

por tanto, la intersección de las superficies (1) consta de dos curvas planas. Una porción de cada una de estas curvas aparece en la figura 195. La porción APB de una curva está en el plano $x - y = 0$; el método de construir cualquier punto P de esta curva como intersección del plano $x - y = 0$ y el cilindro (2) está indicado por medio de un plano paralelo al plano XZ. La porción $AP'C$ de la otra curva está en el plano $x + y = 0$; el método para construir cualquier punto P' de esta curva como intersección del plano $x + y = 0$ y el cilindro (3) está indicado por medio de un plano paralelo al YZ. Las curvas pueden completarse fácilmente por consideraciones de simetría.

Podemos, por supuesto, de una manera semejante, obtener también la porción APB como intersección del plano $x - y = 0$ y el cilindro (3), y la porción $AP'C$ como intersección del plano $x + y = 0$ y el cilindro (2). El estudiante debe también construir estas curvas como intersección de los cilindros proyectantes (2) y (3).

Ejemplo 2. Por medio de sus cilindros proyectantes, construir la porción de la curva

$$x^2 + 2y^2 + z - 10 = 0, \quad x^2 - y^2 - 2z + 8 = 0, \tag{5}$$

que está en el primer octante.

Solución. Se encuentra fácilmente que los cilindros proyectantes son

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{6}$$

$$x^2 - z + 2 = 0, \tag{7}$$

$$y^2 + z = 6. \tag{8}$$

La porción deseada de curva, APB, puede obtenerse como intersección de los cilindros (6) y (8), y así aparece trazada en la figura 196. Como se indicó,

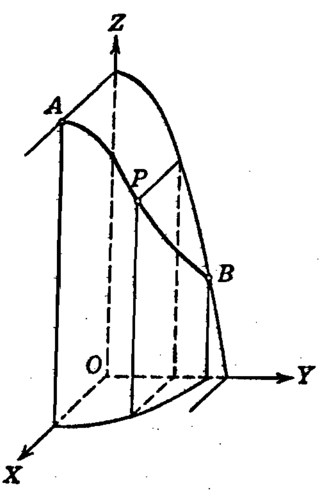

Fig. 196

cualquier punto P de la curva puede obtenerse por medio de un plano paralelo al plano XZ.

El estudiante debe construir la curva como intersección de los cilindros (6) y (7), y también como intersección de los cilindros (7) y (8). Después, debe comparar estas construcciones de la curva (5) con su construcción como intersección del paraboloide elíptico y del paraboloide hiperbólico dados.

EJERCICIOS. Grupo 69

En cada uno de los ejercicios 1-15, hállense e identifíquense las ecuaciones de los tres cilindros proyectantes de la curva cuyas ecuaciones se dan. Después constrúyase la curva como la intersección de dos cualesquiera de los cilindros proyectantes.

1. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0.$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + z = 12, \quad 3x^2 - y^2 - z^2 + 3z = 0.$
3. $4x^2 + y^2 + z^2 = 7, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0.$
4. $x^2 - 3y^2 - 3x + z = 0, \quad x^2 + y^2 + x + z = 12.$
5. $2x^2 + 3y^2 + z = 12, \quad 2x^2 - y^2 - 3z + 4 = 0.$
6. $3y^2 + x + 2z = 12, \quad y^2 - x + 2z = 4.$
7. $y^2 + 4z^2 - 3x = 4, \quad y^2 - z^2 + 2x = 4.$
8. $x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9, \quad 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y + 9 = 0.$
9. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z = 4, \quad x^2 - y^2 - 2z^2 + 8z = 4.$
10. $x^2 - y^2 + 8z + 4y = 0, \quad 2x^2 + y^2 + 4z - 4y = 0.$
11. $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 - 2y^2 + z^2 = 0.$
12. $2x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 5.$
13. $x^2 + xy + z^2 = 2, \quad x^2 - 2xy + z^2 + 1 = 0.$
14. $x^2 - y^2 + 4z = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x + 4z = 0.$
15. $z^3 + x^2 + z^2 - y = 1, \quad z^3 - 2x^2 - 2z^2 - y + 2 = 0.$

16. Construir la curva cuyas ecuaciones son $x^{2/3} + y^{2/3} = 4, \quad x^{2/3} + z^{2/3} = 4.$

17. Construir aquella porción de la curva

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y = 1,$$

que está en el primer octante.

18. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + y^2 = 1$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, y entre los planos $y = x$ y $y = 2x$.

19. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + z^2 = 4$ comprendida entre los planos $y = z$ y $y = 2z$.

20. Construir aquella porción de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interceptada por la superficie $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

147. Ecuaciones paramétricas de una curva del espacio. En el Capítulo XI estudiamos la representación paramétrica de una curva plana. Este concepto puede extenderse a las curvas del espacio de manera que las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto de la curva estén expresadas como una función de una cuarta variable o parámetro. Así, las ecuaciones paramétricas de una curva del espacio pueden escribirse en la forma

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

en donde, para cada valor asignado al parámetro t, las coordenadas de un punto de la curva quedan determinadas. Hemos visto ya una ilustración de tal representación paramétrica de una curva del espacio para la línea recta (véase el teorema 3 del Artículo 124).

Las ventajas y aplicaciones de las ecuaciones paramétricas de una curva del espacio son semejantes a las de una curva plana (Art. 89). Podemos anotar aquí que, en el estudio de las curvas del espacio por los métodos de la Geometría diferencial, se emplea casi exclusivamente la representación paramétrica.

Si se dan las ecuaciones de una curva del espacio en la forma rectangular, las coordenadas de los puntos de intersección con una superficie se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la curva y la superficie. En general, este procedimiento no es tan sencillo como el método empleado en el siguiente ejemplo cuando la curva está representada paramétricamente.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = t, \quad y = t, \quad z = \sqrt{2 - t^2}, \tag{1}$$

y la superficie

$$x^2 + y^2 = 2z. \tag{2}$$

Solución. Las coordenadas de un punto de intersección de la curva (1) y la superficie (2) deben satisfacer las ecuaciones de la curva y la superficie. Las coordenadas de tal punto corresponden a un valor definido del parámetro t; este valor de t puede obtenerse sustituyendo los valores de x, y y z de (1) en la ecuación (2). Esto nos da la ecuación

$$t^2 + t^2 = 2\sqrt{2 - t^2},$$

cuyas soluciones se hallan fácilmente y son $t = \pm 1$. Sustituyendo estos valores de t en las ecuaciones (1), obtenemos (1, 1, 1) y (− 1, − 1, 1) como coordenadas de los puntos de intersección.

Si se dan las ecuaciones de una curva del espacio en una forma paramétrica, podemos construir la curva por dos métodos. De las ecuaciones paramétricas podemos determinar las coordenadas de algunos puntos de la curva, y trazando un número suficiente de estos puntos se puede obtener una gráfica adecuada. Por otra parte, eliminando el parámetro, obtenemos las dos ecuaciones rectangulares de la curva, que puede construirse como se discutió previamente.

Se observó anteriormente que para algunas curvas planas, como la cicloide (Art. 93), la representación paramétrica es más conveniente que la representación rectangular. Análogamente, para algunas curvas del espacio, como la *hélice*, que estudiamos a continuación, la representación paramétrica tiene ciertas ventajas sobre la representación rectangular.

Ejemplo 2. Hallar una representación paramétrica de una hélice circular, definida como el lugar geométrico de un punto que se mueve sobre la superficie de un cilindro circular recto de tal manera que al mismo tiempo que gira alrededor del eje del cilindro sigue avanzando en la dirección del mismo, de modo que la distancia que recorre paralelamente al eje del cilindro es directamente proporcional al ángulo que describe alrededor de dicho eje.

Solución. Supongamos que la ecuación del cilindro circular es

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{3}$$

y sea P_0 (fig. 197), intersección de este cilindro y la parte positiva del eje X, un punto de la hélice. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la hélice. Vamos a tomar como parámetro el ángulo θ que describe el punto P en torno del eje Z, el eje del cilindro (3). Como P_0 es un punto de la hélice, el ángulo θ se medirá en sentido contrario al de las agujas del reloj o sentido positivo, partiendo de la parte positiva del eje X.

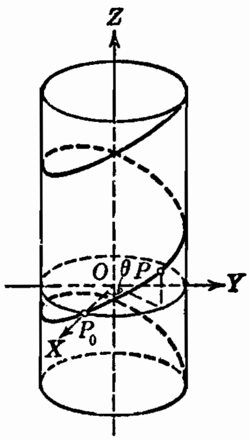

Fig. 197

Evidentemente, de la figura, las coordenadas x y y de P son $a \cos \theta$ y $a \operatorname{sen} \theta$, respectivamente. Por la definición de hélice, la coordenada z es directamente proporcional a θ. Por tanto, si $k > 0$ representa el factor de proporcionalidad, la coordenada z está dada por $k\theta$. De acuerdo con esto, las ecuaciones paramétricas de la hélice son

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \theta, \quad z = k\theta, \quad (k > 0). \tag{4}$$

Una porción de la hélice aparece en la figura 197. Representa la forma de la rosca a la derecha de un tornillo. Por las ecuaciones paramétricas (4), vemos que la hélice está arriba o abajo del plano XY según que θ sea positivo o negativo.

EJERCICIOS. Grupo 70

1. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta

$$x = t, \quad y = 3 - t, \quad z = 4 - t,$$

y el plano $5x + 4y - 2z = 7$.

2. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta

$$x = t - 2, \quad y = t + 5, \quad z = t + 1,$$

y el plano $2x - 3y + 7z + 12 = 0$.

3. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta

$$x = 4t, \quad y = t + 4, \quad z = 3t + 6,$$

y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 44 = 0$.

4. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad z = 2 \operatorname{sen} \theta,$$

y la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

5. Construir la curva y la superficie del ejemplo 1, Artículo 147, y hallar así sus puntos de intersección geométricamente.

6. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

y la superficie $x^2 + 2y - z = 2$.

7. Demostrar que las fórmulas relativas a las coordenadas del punto que divide a un segmento dado en el espacio (teorema 2, Art. 109) en una razón dada, pueden usarse como ecuaciones paramétricas de una línea recta con la razón r como parámetro.

En cada uno de los ejercicios 8-20, constrúyase la curva cuyas ecuaciones paramétricas se dan.

8. $x = t + 2, \quad y = 2t - 4, \quad z = 1 - t.$

9. $x = -2t - 3, \quad y = t + 5, \quad z = 4t - 7.$

10. $x = 2t, \quad y = 4t^2, \quad z = t.$

11. $x = \cos\theta, \quad y = \cos^2\theta, \quad z = \operatorname{sen}\theta.$

12. $x = 4\operatorname{sen}^2\theta, \quad y = 2\cos\theta, \quad z = 2\operatorname{sen}\theta.$

13. $x = t, \quad y = t, \quad z = 1 - t^2.$

14. $x = \operatorname{sen}^2\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad z = \cos\theta.$

15. $x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = 3t^3.$

16. $x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \csc\theta, \quad z = \cos\theta.$

17. $x = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad z = 2\cos t.$

18. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t.$

19. $x = 2\cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad z = 2\theta.$

20. $x = \cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad z = 3\theta.$

148. Construcción de volúmenes. Por *volumen* entendemos una porción del espacio limitada por una o más superficies. Si un volumen está limitado por una sola superficie, tal como un elipsoide, dicho volumen puede representarse geométricamente por la construcción de esa superficie (Art. 130). Si un volumen está limitado por dos o más superficies, la construcción de ese volumen requiere la construcción de cada una de las superficies que lo forman y de sus curvas de intersección (Art. 146). En este artículo vamos a considerar la construcción de volúmenes de este último tipo.

Ejemplo 1. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y \quad x + y - z = 0.$$

Solución. El volumen que se desea está limitado por la superficie del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + y - z = 0$, y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Construímos primero una parte del cilindro en el primer octante. El plano $x + y - z = 0$ pasa por el origen y se puede construir por medio de sus trazas sobre los planos XZ y YZ. Luego construímos la curva de intersección de este plano y el cilindro; para obtener cualquier punto P de esta curva, empleando un plano de corte paralelo al plano XZ, lo hacemos como lo indica la figura 198. El contorno del volumen aparece en la línea llena.

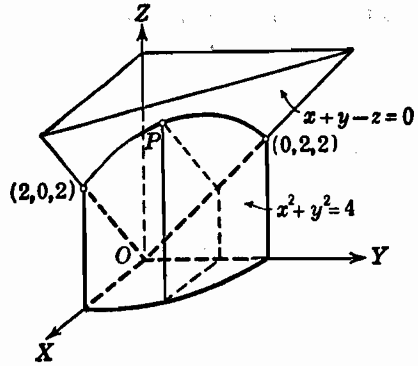

Fig. 198

Ejemplo 2. Construir el volumen limitado por las superficies $x^2 + 2y = 4$, $2y = 3z$, $x - y + 1 = 0$, $x = 0$ y $z = 0$, y que está a la izquierda del plano $x - y + 1 = 0$ en el primer octante.

Solución. La porción de la curva de intersección del cilindro parabólico recto $x^2 + 2y = 4$ y el plano $2y = 3z$ que está en el primer octante aparece

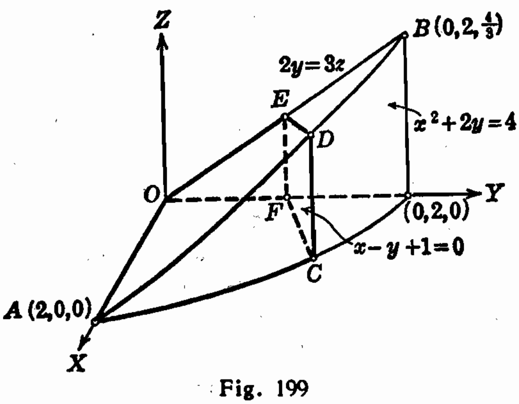

Fig. 199

marcada en la figura 199 por el arco AB. El plano $x - y + 1 = 0$ corta al arco AB en el punto D, al cilindro en la generatriz CD, al plano $2y = 3z$ en la recta DE y al eje Y en el punto F. Entonces el volumen requerido, que aparece en línea gruesa, está limitado por las porciones ACD del cilindro, $AOED$ del plano $2y = 3z$, $CDEF$ del plano $x - y + 1 = 0$, OEF del plano $x = 0$ y $AOFC$ del plano $z = 0$.

El estudiante observará que las coordenadas de algunos puntos de la figura han sido indicadas. Como práctica se le recomienda que calcule las coordenadas de tales puntos. Las coordenadas no sirven solamente para construir la figura. sino también algunas de ellas se requieren para el cálculo del volumen.

EJERCICIOS. Grupo 71

En los siguientes ejercicios el estudiante debe identificar todas las superficies cuyas ecuaciones se dan.

1. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 2z \quad \text{y} \quad z = 2.$$

2. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = 2.$$

3. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z = 1 \quad \text{y} \quad z = 3.$$

4. Construir el más pequeño de los dos volúmenes limitados por las superficies $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $y = 2x$, $y = 3$ y $z = 0$.

5. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$ y $z = 4$.

6. Construir la cuña en el primer octante formada por las superficies $x^2 + 2y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$ y $z = 3$.

7. Construir el volumen interior a la superficie $x^2 + y^2 = 8$ y exterior a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

8. Construir el volumen comprendido entre las superficies

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

9. Construir el volumen exterior a la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e interior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

10. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 3z$ y $x^2 + y^2 = 4$.

11. Construir el volumen interior a la superficie $y^2 + z^2 = 2x$ y exterior a la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

12. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$ y $y^2 + z^2 = 1$.

13. Construir el volumen interior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y exterior a la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

14. Construir el más pequeño de los dos volúmenes limitados por las superficies $4x^2 + 3y^2 = z$, $y = 1$ y $z = 5$.

15. Construir la cuña en el primer octante formada por las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $y = x$, $y = 0$ y $z = 2$.

16. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ y $x + y = 2$.

17. Construir el volumen limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 9$, $y = z$ y $z = 0$.

18. Construir la cuña formada por las superficies

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = x \quad \text{y} \quad z = 3x,$$

que está enfrente del plano YZ.

19. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 2$ y $x^2 + z^2 = 2$.

20. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z = 1$ y $x^2 + y = 1$.

21. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y - 4 = 0$ y $z = x$.

22. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4$ y $y^2 = x$.

23. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x + 2y = 2$.

24. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + z = 1$ y $y^2 = x$.

25. Un triángulo equilátero de tamaño variable se mueve paralelamente al plano XZ y de tal manera que su base es siempre una cuerda de la curva $4x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. Construir el volumen generado.

26. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x = 2, \quad z = 2x \quad \text{y} \quad x = 2z.$$

27. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $z^3 + x - 2 = 0$ y $2x + y = 4$.

28. Construir el volumen en el primer octante exterior a la superficie $x^2 + y^2 = 2z$ e interior a la superficie $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

29. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 = y, \quad y = z, \quad x = 0, \quad y = 4 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

30. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2x$, $y = 0$ y $z = 0$.

31. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2, \quad y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

32. Un cilindro circular recto de altura h y radio r es cortado por un plano que pasa por un diámetro de una de sus bases y que es tangente a la otra base. Escribir las ecuaciones de la superficie cilíndrica y del plano. Construir el volumen de la porción más pequeña de las dos en que queda dividido el cilindro.

33. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + z = 9, \quad y = x, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

34. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + 4y^2 + z = 4, \quad x + 2y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

35. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 + 2z = 4, \quad x + z = 2 \quad \text{y} \quad y = 0.$$

36. Construir el volumen en el primer octante limitado por las superficies $y^2 + 2z = 4$ y $y^2 + z^2 = 2x$.

37. Construir el volumen común a las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

38. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x = 4, \quad y = 2x, \quad z = 2y, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

39. Construir el volumen limitado por las superficies

$$x^3 - 8y = 0, \quad y = 2x, \quad y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

40. Construir el volumen limitado por las superficies

$$y^2 + x - z = 0, \quad x = y, \quad y = 1, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

APENDICE I

LISTA DE REFERENCIA DE FORMULAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

A. Geometría

Las fórmulas 1-5 se refieren a las figuras planas. En ellas:

a, b, c = lados de un triángulo.
s = semiperímetro = $\frac{1}{2}(a + b + c)$.
b = base.
b_1, b_2 = bases de un trapecio.
C = longitud de la circunferencia.
h = altura.
K = área.
r = radio del círculo.
s = arco de circunferencia.

1. **Triángulo.** $K = \frac{1}{2}bh$; $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
2. **Paralelogramo.** $K = bh$.
3. **Trapecio.** $K = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$.
4. **Círculo.** $C = 2\pi r$; $K = \pi r^2$.
5. **Sector circular.** $K = \frac{1}{2}sr$.

Las fórmulas 6-10 se refieren a cuerpos geométricos. En ellas:

B = área de la base.
h = altura.
r = radio.
s = lado.
S = área lateral.
= área de la esfera.
T = área total.
V = volumen.

6. **Prisma.** $V = Bh$.
7. **Pirámide.** $V = \frac{1}{3}Bh$.
8. **Cilindro circular recto.** $S = 2\pi rh$; $T = 2\pi r(h + r)$; $V = \pi r^2 h$.
9. **Cono circular recto.** $S = \pi rs$; $T = \pi r(s + r)$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
10. **Esfera.** $S = 4\pi r^2$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B. Algebra

1. La división por cero es una operación excluída.

2. Si el producto de dos o más cantidades es igual a cero, uno de los factores, por lo menos, debe ser igual a cero.

3. **Ecuación de segundo grado.** La ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

tiene las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

en donde $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante.* Si a, b y c son todos números *reales*, estas raíces son reales e iguales si $D = 0$; reales y desiguales si $D > 0$; complejas conjugadas si $D < 0$.

Suma de las raíces $= -\dfrac{b}{a}$; producto de las raíces $= \dfrac{c}{a}$.

4. **Logaritmos.** *Definición*. Si N, x y b son tres cantidades ligadas por la relación

$$N = b^x, \quad b > 0, \qquad b \neq 1,$$

entonces el exponente x se llama *logaritmo de* N *en la base* b, y escribimos la relación equivalente

$$x = \log_b N.$$

El logaritmo de un número negativo no existe en el sistema de números *reales*; el logaritmo de cero es indefinido.

Si M y N son dos números positivos, las tres siguientes relaciones son verdaderas:

$$\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N, \quad \log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N,$$

$$\log_b (M)^n = n \log_b M, \text{ siendo } n \text{ un número real.}$$

Debe anotarse también las siguientes relaciones:

$$\log_b 1 = 0; \quad \log_b b = 1; \quad \log_b \frac{1}{N} = -\log_b N.$$

El logaritmo de un número en cualquier base puede obtenerse por la relación

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

en donde, $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$.

5. Determinantes. *Un determinante de orden* n es una cantidad representada por un ordenamiento en cuadro de n^2 cantidades, llamadas elementos, ordenadas en n filas y n columnas.

El cálculo de determinantes se da en los textos de Algebra. Conviene recordar las siguientes propiedades importantes:

Propiedad 1. Cualquier propiedad de un determinante que es válida para sus filas es también válida para sus columnas.

Propiedad 2. El valor de un determinante no se altera si sus filas y columnas correspondientes son intercambiadas.

Propiedad 3. Si en un determinante se intercambian dos de sus filas el determinante cambia de signo.

Propiedad 4. Si un determinante tiene dos filas idénticas, su valor es cero.

Propiedad 5. Si se multiplica cada uno de los elementos de una fila de un determinante por un número cualquiera k, el valor del determinante queda multiplicado por k.

Propiedad 6. El valor de un determinante no se altera si cada uno de los elementos de una fila se multiplica por un número cualquiera k y se le suma el elemento correspondiente de cualquiera otra fila.

6. Sistemas de ecuaciones lineales. Por brevedad, los teoremas dados aquí se ilustrarán con sistemas de tres ecuaciones lineales; sin embargo, son verdaderos para sistemas de cualquier número de ecuaciones.

Consideremos el sistema de tres *ecuaciones lineales no homogéneas* en tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en donde k_1, k_2 y k_3 son constantes, no simultáneamente nulas. El determinante formado por los coeficientes se llama *determinante del sistema* y se designa generalmente por Δ, es decir,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sea Δ_j el determinante formado a partir de Δ reemplazando los elementos de la columna de orden j por los términos independientes k_1, k_2 y k_3.

Entonces tenemos:

Regla de Cramer. Si $\Delta \neq 0$, *el sistema* (1) *tiene una solución única dada por*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_j \neq 0$ para un valor de j por lo menos, el sistema (1) no tiene solución y se dice que es *incompatible*.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_j = 0$ para todos los valores de j, el sistema (1) tiene un número infinito de soluciones, y se dice que es *indeterminado*.

Consideremos ahora el sistema de tres *ecuaciones lineales homogéneas en tres incógnitas:*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Según la regla de Cramer, si el determinante Δ de este sistema es diferente de cero, hay solamente una solución:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

De aquí el siguiente

TEOREMA. *Un sistema de* n *ecuaciones lineales homogéneas con* n *incógnitas tiene otras soluciones, además de la solución*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

si y solamente si el determinante del sistema es igual a cero.

C. TRIGONOMETRÍA

1. Definición de las funciones trigonométricas. Sea θ el ángulo cuya variación de valores está dada por el intervalo

$$-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ.$$

Para los fines de definición de tal ángulo y de sus funciones trigonométricas es conveniente usar el sistema coordenado rectangular. Los enunciados que siguen se aplican a *cada una* de las cuatro posiciones que aparecen en la figura 200.

Si a una recta que coincide con el eje X se la hace girar en el plano coordenado XY en torno del origen O a una posición OA, se dice que se ha *generado* un ángulo $XOA = \theta$ que tiene a OX por *lado inicial* y a OA por *lado final*. Si la rotación se hace en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, se dice que el ángulo es *positivo;* y si la rotación es en el mismo sentido de las manecillas (indicada en las figuras con líneas punteadas), se dice que el ángulo es *negativo*. Se dice también que el ángulo está en el mismo cuadrante que su lado final.

Sobre el lado final OA tomemos un punto cualquiera P diferente de O, y de coordenadas (x, y). Desde P bajemos una perpendicular PB al eje X. El segmento de recta OP se llama *radio vector*, se designa por r, y se toma siempre como *positivo*. En el triángulo OPB,

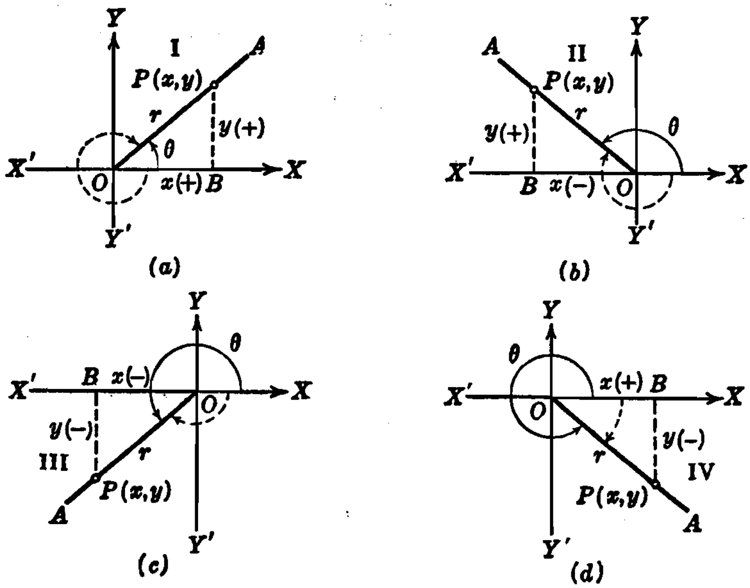

Fig. 200

$OB = x$ y $PB = y$ tienen los signos de las coordenadas del punto P, como está indicado para los cuatro cuadrantes. Entonces, cualquiera que sea el cuadrante en que esté θ, las seis funciones trigonométricas de θ se *definen* en magnitud y signo, por las siguientes razones:

$$\text{seno de } \theta = \text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \qquad \text{coseno de } \theta = \cos \theta = \frac{x}{r},$$

$$\text{tangente de } \theta = \text{tg } \theta = \frac{y}{x}, \qquad \text{cotangente de } \theta = \text{ctg } \theta = \frac{x}{y},$$

$$\text{secante de } \theta = \sec \theta = \frac{r}{x}, \qquad \text{cosecante de } \theta = \csc \theta = \frac{r}{y}.$$

Las definiciones son verdaderas y no cambian para ángulos positivos y negativos mayores que $360°$ en valor numérico.

2. **Identidades trigonométricas fundamentales.**

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta.$$

3. **Fórmulas de reducción.**

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}(90^\circ \pm\theta) = \cos\theta, & \cos(90^\circ\pm\theta) = \mp\operatorname{sen}\theta, & \operatorname{tg}(90^\circ\pm\theta) = \mp\operatorname{ctg}\theta, \\
\operatorname{sen}(180^\circ \pm\theta) = \mp\operatorname{sen}\theta, & \cos(180^\circ\pm\theta) = -\cos\theta, & \operatorname{tg}(180^\circ\pm\theta) = \pm\operatorname{tg}\theta, \\
\operatorname{sen}(270^\circ \pm\theta) = -\cos\theta, & \cos(270^\circ\pm\theta) = \pm\operatorname{sen}\theta, & \operatorname{tg}(270^\circ\pm\theta) = \mp\operatorname{ctg}\theta, \\
\operatorname{sen}(360^\circ \pm\theta) = \pm\operatorname{sen}\theta, & \cos(360^\circ\pm\theta) = \cos\theta, & \operatorname{tg}(360^\circ\pm\theta) = \pm\operatorname{tg}\theta.
\end{array}$$

4. **Medida de ángulos en radianes.** Sea θ un ángulo central que intercepta un arco de longitud s sobre un círculo de radio r. La medida del ángulo θ, en radianes, está *definida* por $\theta = \frac{s}{r}$. Obsérvese que por ser s y r longitudes, esta razón es un número *abstracto*. De esta definición de medida en radianes tenemos de inmediato la relación de conversión :

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ,$$

de donde,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} = 57,2958^\circ \text{ (aprox.)} = 57^\circ 17' 45'' \text{ (aprox.)},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0,017453 \text{ radianes (aprox.)}.$$

5. **Funciones trigonométricas de ángulos especiales.**

Angulo θ en		sen θ	cos θ	tg θ
Radianes	Grados			
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	

6. **Fórmulas de adición y sustracción.**

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

7. **Funciones trigométricas del ángulo doble.**

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1,$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

8. **Funciones trigonométricas del ángulo mitad.**

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

9. **Relaciones importantes.**

$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\theta + \phi), \text{ en donde } \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a},$$
$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \psi), \text{ en donde } \psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}.$$

En las fórmulas 10–12, a, b y c son los lados de cualquier triángulo y A, B y C son los ángulos opuestos respectivos.

10. **Ley de los senos.** $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

11. **Ley de los cosenos.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

12. **Area de un triángulo.** $K = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$.

D. Alfabeto griego

A	α	alfa	I	ι	iota	P	ρ	ro
B	β	beta	K	κ	kapa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gama	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu o mi	Υ	υ	ípsilon
E	ε	épsilon	N	ν	nu o ni	Φ	φ	fi
Z	ζ	dseta o zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	ji o ki
H	η	eta	O	o	ómicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	teta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

APENDICE II

TABLAS

A. Logaritmos comunes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

A. Logaritmos comunes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

B. Funciones trigonometricas naturales

Radianes	Grados	sen	cos	tg	ctg		
.0000	0.0	.0000	1.0000	.0000	——	90.0	1.5708
.0087	0.5	.0087	1.0000	.0087	114.5887	89.5	1.5621
.0175	1.0	.0175	.9998	.0175	57.2900	89.0	1.5533
.0262	1.5	.0262	.9997	.0262	38.1885	88.5	1.5446
.0349	2.0	.0349	.9994	.0349	28.6363	88.0	1.5359
.0436	2.5	.0436	.9990	.0437	22.9038	87.5	1.5272
.0524	3.0	.0523	.9986	.0524	19.0811	87.0	1.5184
.0611	3.5	.0610	.9981	.0612	16.3499	86.5	1.5097
.0698	4.0	.0698	.9976	.0699	14.3007	86.0	1.5010
.0785	4.5	.0785	.9969	.0787	12.7062	85.5	1.4923
.0873	5.0	.0872	.9962	.0875	11.4301	85.0	1.4835
.0960	5.5	.0958	.9954	.0963	10.3854	84.5	1.4748
.1047	6.0	.1045	.9945	.1051	9.5144	84.0	1.4661
.1134	6.5	.1132	.9936	.1139	8.7769	83.5	1.4574
.1222	7.0	.1219	.9925	.1228	8.1443	83.0	1.4486
.1309	7.5	.1305	.9914	.1317	7.5958	82.5	1.4399
.1396	8.0	.1392	.9903	.1405	7.1154	82.0	1.4312
.1484	8.5	.1478	.9890	.1495	6.6912	81.5	1.4224
.1571	9.0	.1564	.9877	.1584	6.3138	81.0	1.4137
.1658	9.5	.1650	.9863	.1673	5.9758	80.5	1.4050
.1745	10.0	.1736	.9848	.1763	5.6713	80.0	1.3963
.1833	10.5	.1822	.9833	.1853	5.3955	79.5	1.3875
.1920	11.0	.1908	.9816	.1944	5.1446	79.0	1.3788
.2007	11.5	.1994	.9799	.2035	4.9152	78.5	1.3701
.2094	12.0	.2079	.9781	.2126	4.7046	78.0	1.3614
.2182	12.5	.2164	.9763	.2217	4.5107	77.5	1.3526
.2269	13.0	.2250	.9744	.2309	4.3315	77.0	1.3439
.2356	13.5	.2334	.9724	.2401	4.1653	76.5	1.3352
.2443	14.0	.2419	.9703	.2493	4.0108	76.0	1.3265
.2531	14.5	.2504	.9681	.2586	3.8667	75.5	1.3177
.2618	15.0	.2588	.9659	.2679	3.7321	75.0	1.3090
.2705	15.5	.2672	.9636	.2773	3.6059	74.5	1.3003
.2793	16.0	.2756	.9613	.2867	3.4874	74.0	1.2915
.2880	16.5	.2840	.9588	.2962	3.3759	73.5	1.2828
.2967	17.0	.2924	.9563	.3057	3.2709	73.0	1.2741
.3054	17.5	.3007	.9537	.3153	3.1716	72.5	1.2654
.3142	18.0	.3090	.9511	.3249	3.0777	72.0	1.2566
.3229	18.5	.3173	.9483	.3346	2.9887	71.5	1.2479
.3316	19.0	.3256	.9455	.3443	2.9042	71.0	1.2392
.3403	19.5	.3338	.9426	.3541	2.8239	70.5	1.2305
.3491	20.0	.3420	.9397	.3640	2.7475	70.0	1.2217
.3578	20.5	.3502	.9367	.3739	2.6746	69.5	1.2130
.3665	21.0	.3584	.9336	.3839	2.6051	69.0	1.2043
.3752	21.5	.3665	.9304	.3939	2.5386	68.5	1.1956
.3840	22.0	.3746	.9272	.4040	2.4751	68.0	1.1868
.3927	22.5	.3827	.9239	.4142	2.4142	67.5	1.1781
		cos	sen	ctg	tg	Grados	Radianes

B. Funciones trigonometricas naturales

Radianes	Grados	sen	cos	tg	ctg		
.3927	22.5	.3827	.9239	.4142	2.4142	67.5	1.1781
.4014	23.0	.3907	.9205	.4245	2.3559	67.0	1.1694
.4102	23.5	.3987	.9171	.4348	2.2998	66.5	1.1606
.4189	24.0	.4067	.9135	.4452	2.2460	66.0	1.1519
.4276	24.5	.4147	.9100	.4557	2.1943	65.5	1.1432
.4363	25.0	.4226	.9063	.4663	2.1445	65.0	1.1345
.4451	25.5	.4305	.9026	.4770	2.0965	64.5	1.1257
.4538	26.0	.4384	.8988	.4877	2.0503	64.0	1.1170
.4625	26.5	.4462	.8949	.4986	2.0057	63.5	1.1083
.4712	27.0	.4540	.8910	.5095	1.9626	63.0	1.0996
.4800	27.5	.4617	.8870	.5206	1.9210	62.5	1.0908
.4887	28.0	.4695	.8829	.5317	1.8807	62.0	1.0821
.4974	28.5	.4772	.8788	.5430	1.8418	61.5	1.0734
.5061	29.0	.4848	.8746	.5543	1.8040	61.0	1.0647
.5149	29.5	.4924	.8704	.5658	1.7675	60.5	1.0559
.5236	30.0	.5000	.8660	.5774	1.7321	60.0	1.0472
.5323	30.5	.5075	.8616	.5890	1.6977	59.5	1.0385
.5411	31.0	.5150	.8572	.6009	1.6643	59.0	1.0297
.5498	31.5	.5225	.8526	.6128	1.6319	58.5	1.0210
.5585	32.0	.5299	.8480	.6249	1.6003	58.0	1.0123
.5672	32.5	.5373	.8434	.6371	1.5697	57.5	1.0036
.5760	33.0	.5446	.8387	.6494	1.5399	57.0	.9948
.5847	33.5	.5519	.8339	.6619	1.5108	56.5	.9861
.5934	34.0	.5592	.8290	.6745	1.4826	56.0	.9774
.6021	34.5	.5664	.8241	6873	1.4550	55.5	.9687
.6109	35.0	.5736	.8192	.7002	1.4281	55.0	.9599
.6196	35.5	.5807	.8141	.7133	1.4019	54.5	.9512
.6283	36.0	.5878	.8090	.7265	1.3764	54.0	.9425
.6370	36.5	.5948	.8039	.7400	1.3514	53.5	.9338
.6458	37.0	.6018	.7986	.7536	1.3270	53.0	.9250
.6545	37.5	.6088	.7934	.7673	1.3032	52.5	.9163
.6632	38.0	.6157	.7880	.7813	1.2799	52.0	.9076
.6720	38.5	.6225	.7826	.7954	1.2572	51.5	.8988
.6807	39.0	.6293	.7771	.8098	1.2349	51.0	.8901
.6894	39.5	.6361	.7716	.8243	1.2131	50.5	.8814
.6981	40.0	.6428	.7660	.8391	1.1918	50.0	.8727
.7069	40.5	.6494	.7604	.8541	1.1708	49.5	.8639
.7156	41.0	.6561	.7547	.8693	1.1504	49.0	.8552
.7243	41.5	.6626	.7490	.8847	1.1303	48.5	.8465
.7330	42.0	.6691	.7431	.9004	1.1106	48.0	.8378
.7418	42.5	.6756	.7373	.9163	1.0913	47.5	.8290
.7505	43.0	.6820	.7314	.9325	1.0724	47.0	.8203
.7592	43.5	.6884	.7254	.9490	1.0538	46.5	.8116
.7679	44.0	.6947	.7193	.9657	1.0355	46.0	.8029
.7767	44.5	.7009	.7133	.9827	1.0176	45.5	.7941
.7854	45.0	.7071	.7071	1.0000	1.0000	45.0	.7854
		cos	sen	ctg	tg	Grados	Radianes

C. Valores de e^x y e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.000	1.000	0.1	1.105	0.905	1	2.72	0.368
.01	1.010	.990	.2	1.221	.819	2	7.39	.135
.02	1.020	.980	.3	1.350	.741	3	20.09	.0498
.03	1.030	.970	.4	1.492	.670	4	54.60	.0183
.04	1.041	.961	.5	1.649	.607	5	148.4	.00674
.05	1.051	.951	.6	1.822	.549	6	403.4	.00248
.06	1.062	.942	.7	2.014	.497	7	1097.	.000912
.07	1.073	.932	.8	2.226	.449	8	2981.	.000335
.08	1.083	.923	.9	2.460	.407	9	8103.	.000123
.09	1.094	.914	1.0	2.718	.368	10	22026.	.000045

Nota. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Ejemplo. $e^{2.81} = e^2 \cdot e^{0.8} \cdot e^{0.01} = (7.39)\,(2.226)\,(1.01) = 16.6.$

D. Potencias y raíces de enteros

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1.000	1.000	26	676	17,576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	729	19,683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	784	21,952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	841	24,389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	900	27,000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.817	31	961	29,791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	1024	32,768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	1089	35,937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	1156	39,304	5.831	3.240
10	100	1,000	3.162	2.154	35	1225	42,875	5.916	3.271
11	121	1,331	3.317	2.224	36	1296	46,656	6.000	3.302
12	144	1,728	3.464	2.289	37	1369	50,653	6.083	3.332
13	169	2,197	3.606	2.351	38	1444	54,872	6.164	3.362
14	196	2,744	3.742	2.410	39	1521	59,319	6 245	3.391
15	225	3,375	3.873	2.466	40	1600	64,000	6.325	3.420
16	256	4,096	4.000	2.520	41	1681	68,921	6.403	3.448
17	289	4,913	4.123	2.571	42	1764	74,088	6.481	3.476
18	324	5,832	4.243	2.621	43	1849	79,507	6.557	3.503
19	361	6,859	4.359	2.668	44	1936	85,184	6.633	3.530
20	400	8,000	4.472	2.714	45	2025	91,125	6.708	3.557
21	441	9,261	4.583	2.759	46	2116	97,336	6.782	3.583
22	484	10,648	4.690	2.802	47	2209	103,823	6.856	3.609
23	529	12,167	4.796	2.844	48	2304	110,592	6.928	3.634
24	576	13,824	4.899	2.884	49	2401	117,649	7.000	3.659
25	625	15,625	5.000	2.924	50	2500	125,000	7.071	3.684

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Grupo 1, p. 8

4. 11; 10; 4.
5. (7), (− 11).
8. (− 15), (− 11), (− 13).
9. (14).
10. − 3.
11. (a, a), $(-a, a)$, $(-a, -a)$, $(a, -a)$.
12. (2, 3), 20.
13. 6, 5.
14. $(5/2, 0)$.
15. $\sqrt{a^2+b^2}$.
16. 10.
17. 30.
18. $(1, 1+2\sqrt{3})$; $(1, 1-2\sqrt{3})$.
19. 10.
20. 20.

Grupo 2, p. 15

1. 20,26.
3. 34.
6. $\sqrt{82}$.
8. 5.
9. 2, − 6.
10. $5x - 7y - 24 = 0$.
11. $(2/3, 1)$, $(10/3, -1)$, $(2, 0)$.
12. (− 4, 12).
13. (1, − 2).
14. 3.
15. (− 1, 4), (5, 6), (3, − 2).
19. (2, 2).

Grupo 3, p. 24

4. $-1/2$, 153° 26′.
5. -2, $1/6$, $7/2$.
7. 5.
8. 4, − 1.
9. 4.
10. 77° 28′, 54° 10′, 48° 22′.
11. 108° 26′.
12. 71° 34′.
14. $-1/2$.
15. − 8.
16. 13.
18. 5.
19. $4x - 5y - 13 = 0$.
20. $4x - y - 13 = 0$.
22. 1.
23. 33° 41′, 56° 19′.

Grupo 7, p. 49

11. (2, 3).
12. (1, − 2).
14. (4, 2), $(9/4, -3/2)$.
15. (0, 0), (1, 1).

16. (0, 2), (2, 0).
17. (2, 2), (2, −2).
19. (3, 2), (−3, −2), (2, 3), (−2, −3).
20. (4, 4), (3, 1).

Grupo 8, p. 54

3. $x - 2y - 3 = 0$.
4. $x^2 + y^2 = 4$.
5. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.
6. $2x + 3y - 9 = 0$.
7. $x + y - 4 = 0$.
8. $x^2 + y^2 - 9x - 2y + 17 = 0$.
9. $2x + y + 9 = 0$.
10. $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$.
11. $x^2 - 8y + 16 = 0$.
12. $x^2 + y^2 + x - 7y + 12 = 0$.
13. $4x + 6y - 21 = 0$,
    $4x + 6y + 3 = 0$.
14. $y^2 - 10x - 8y + 11 = 0$.
15. $7x^2 + 16y^2 = 112$.
16. $16x^2 + 7y^2 = 112$.
17. $5x^2 - 4y^2 = 20$.
18. $5y^2 - 4x^2 = 20$.
19. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.
20. $3x^2 + 4y^2 - 24x - 8y + 40 = 0$.
21. $x^2 - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.
22. $x^2 + y^2 = 4$.
23. $xy + x + 7y - 17 = 0$.
24. $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$.
25. $3x = 6 - \sqrt{3y^2 + 9}$; $y \neq 0$.

Grupo 9, p. 63

1. $2x - y + 3 = 0$.
2. $x - y + 3 = 0$.
3. $3x + y + 2 = 0$.
4. $5x + 9y - 38 = 0$.
5. $2x - y = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$,
   $7x + 2y - 56 = 0$, $y = 0$.
6. $3x - 2y - 6 = 0$.
7. $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{-4} = 1$.
8. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} = 1$.
9. $x + y - 3 = 0$.
10. $6x + 5y - 82 = 0$.
11. $4x - 7y + 36 = 0$.
13. $3x - 5y + 8 = 0$.
14. AB: $x - y + 3 = 0$; BC: $5x + y - 27 = 0$; AC: $x + 2y = 0$.
15. $5x + y + 9 = 0$.
16. $11x - 5y - 9 = 0$,
    $13x - y - 45 = 0$.
17. (−4, 11), (12, 3), (0, −9).
18. $(5/3,\ 5/3)$.
19. $(19/3,\ 5/3)$.
20. $(4/3,\ 5/3)$.
21. 36.
22. $4x + y - 10 = 0$.
23. (−4, 3), (4, 6), (9, 1), (1, −2).
24. 10.
25. $14/5$.
26. 11.
27. $A = 30/19$, $B = 15/19$.
29. $y = mx - am$.

Grupo 10, p. 70

2. $3x + y + 2 = 0$.
3. $5x - 3y - 15 = 0$.
4. $4x + 3y + 13 = 0$.
5. 4.
6. $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.
7. $7/6$; $-3/4$, $9/8$.
8. $-3/2$; $105°57'$; $29/4$, 10.

9. ± 10.

10. $a = 4,\ b = 7$.

12. $x - 2y + 1 = 0$,
$x + 2y - 13 = 0$.

15. $80° 16'$.

16. $5x - y - 11 = 0$,
$x + 5y + 3 = 0$.

28. $b^2 x - a^2 y = ab^2 - a^2 b$.

Grupo 11, p. 77

1. $\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 6 = 0$.

2. $\frac{2}{3} x + \frac{-\sqrt{5}}{3} y - 3 = 0$.

3. $143° 8'$.

4. $\frac{12}{13} x + \frac{-5}{13} y - 4 = 0$;
$p = 4,\ \omega = 337° 23'$.

5. $\frac{9}{18} \sqrt{13}$.

6. $\pm \frac{3}{2} \sqrt{5}$.

8. $4x + 3y - 25 = 0,\quad 3x - 4y + 25 = 0$.

9. $x - y + 4\sqrt{2} = 0,\quad x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

12. $3x + y + 2\sqrt{10} = 0,\quad 3x + y - 2\sqrt{10} = 0$.

14. $-\frac{1}{\sqrt{26}} x + \frac{5}{\sqrt{26}} y - \frac{17}{\sqrt{26}} = 0$.

15. $3x + 2y + 8\sqrt{13} = 0,\quad 3x + 2y - 8\sqrt{13} = 0$.

16. $-\frac{3}{\sqrt{13}} x + \frac{-2}{\sqrt{13}} y - \frac{27}{\sqrt{13}} = 0$.

18. $\frac{\sqrt{34}}{4}$.

19. $\frac{23}{39} \sqrt{13}$.

20. $\frac{19}{10} \sqrt{10}$.

Grupo 12, p. 85

1. $\frac{33}{41} \sqrt{41}$.

2. $-\frac{16}{5} \sqrt{5}$.

3. $\frac{3}{2} \sqrt{2}$; 9.

4. $\frac{7}{10}$.

5. $\frac{16}{5} \sqrt{5}$.

6. $5x + 12y + 40 = 0,\quad 5x + 12y - 64 = 0$.

7. $\frac{6 - 3\sqrt{29}}{5}$.

8. $-3,\ 7$.

9. $24x - 10y - 3 = 0$.

10. $\frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$.

11. $x + y - 4 = 0,\quad x - y - 2 = 0$.

12. $(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) x - (\sqrt{2} + \sqrt{5}) y + \sqrt{2} + \sqrt{5} = 0$,
$(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) x - (\sqrt{2} - \sqrt{5}) y + \sqrt{2} - \sqrt{5} = 0$.

13. $(\sqrt{17} + 4\sqrt{5}) x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5}) y - 4\sqrt{17} - 4\sqrt{5} = 0$.

17. $4x + 7y + 12 = 0,\quad 4x - 13y + 12 = 0$.

18. $x - 2y + 8 = 0,\quad 13x - 6y + 24 = 0$.

20. $y^2 = 8x$.

21. $x^2 = 8y$.

22. $y^2 + 6y + 12x - 15 = 0,\quad y + 3 = 0$.

23. $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$.

24. $8x^2 + 9y^2 - 42x + 72y + 171 = 0$.

25. $x^2 - 8y^2 + 4x - 74y - 139 = 0$.

26. $23x^2 - 48xy + 3y^2 + 170x - 122y + 118 = 0$.

28. 10.

Grupo 13, p. 94

5. $2x - y + 8 = 0.$
6. $12x - 21y - 28 = 0.$
7. $3x - 4y + 12 = 0.$
8. $5x - 12y + 65 = 0, \quad 5x - 12y - 65 = 0.$
9. $2x + 3y + 12 = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0.$
10. $5x - y - 13 = 0.$
11. $9x + 7y - 11 = 0.$
12. $2x - y + 6 = 0, \quad 5x - 2y + 10 = 0.$
13. $4x + 3y - 12 = 0, \quad x + 2y + 2 = 0.$
14. $3x - y - 3\sqrt{2} = 0, \quad 3x - y + 3\sqrt{2} = 0.$
15. $7x + 12y - 42 = 0, \quad 7x + 3y + 21 = 0.$
16. $4x + 3y - 12 = 0, \quad 8x + 15y - 36 = 0.$
17. $\sqrt{5}x + 2y - 9 = 0, \quad y + 3 = 0.$
18. $2x + 3y - 12 = 0, \quad 3x + 2y - 12 = 0.$
19. $x - 4y = 0.$
20. $4x + 5y - 7 = 0.$
21. $3x - y + 5 = 0.$
22. $8x - 3y + 5 = 0.$
23. $5x - 12y + 26 = 0, \quad x = 2.$
24. $x - 4y + 8 = 0, \quad 9x - 4y - 24 = 0.$
25. $3x - y - 18 = 0, \quad x - 2y - 1 = 0.$

Grupo 14, p. 96

3. $41x - 5y - 89 = 0.$
12. 2.
15. $(7, 4)$.
16. 18π.
18. $k_1 = \pm 4, \quad k_2 = \pm 14.$

Grupo 15, p. 102

1. $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49.$
2. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10.$
3. $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 89.$
4. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4.$
5. $x^2 + (y+2)^2 = 4.$
6. $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 52.$
8. $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 25.$
9. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 58.$
10. 7,07.
12. $(x+1)^2 + y^2 = \frac{324}{25}.$
13. $(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}.$
14. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1.$
15. $(x-2)^2 + \left(y - \frac{25}{16}\right)^2 = \frac{625}{256}.$
17. $(x-7)^2 + y^2 = 45.$
18. $x^2 + \left(y + \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{325}{9}.$
19. $(x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{629}{4}.$
20. $\left(x - \frac{1}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{65}{22}\right)^2 = \frac{6205}{242}.$
21. $x - 2y + 10 = 0.$
22. $x + 2y - 20 = 0.$
23. $x + 2y - 9 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0.$
24. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 8.$
25. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1, \quad (x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}.$

Grupo 16, p. 108

1. Centro $(3/2,\ -5/2)$; radio $= \sqrt{5}$. 4. 5π.
2. Punto $(-7/2,\ 1)$. 5. $2\sqrt{3}\pi$.
3. Ningún lugar geométrico.
9. $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$; $(7/2,\ 2)$; $\frac{1}{2}\sqrt{65}$.
10. $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y + 34 = 0$; $(8/3,\ 25/12)$; $\frac{1}{12}\sqrt{2\,465}$.
11. $7x^2 + 7y^2 - 22x + 52y + 21 = 0$; $(11/7,\ -26/7)$; $\frac{5}{7}\sqrt{26}$.
17. $D_1 = D_2,\ \ E_1 = E_2,\ \ F_1 \neq F_2$. 18. $(x - 2)^2 + (y + 5/2)^2 = 9$.
19. $5x + 4y - 40 = 0$.
20. $4x - 3y - 32 = 0,\ \ 3x + 4y - 49 = 0$.
21. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$.
22. $x^2 + (y - 6)^2 = 25,\ \ (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
23. $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 13,\ \ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$.
24. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$. 25. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$.
26. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25,\ \ (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$.
28. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4,\ \ \left(x - \frac{227}{747}\right)^2 + \left(y - \frac{421}{747}\right)^2 = \left(\frac{14}{747}\right)^2$.
29. $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
30. $(x + 2/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 16/9,\ \ (x - 8/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 16/9$,
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. 31. $k = -1,\ 25$.
32. $5x - y + 5 = 0,\ \ 5x - y - 47 = 0$. 33. $3\sqrt{2}$.
34. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0,\ \ 4x^2 + 4y^2 - 384x + 37y + 2\,119 = 0$.
35. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20,\ \ \left(x - \frac{19}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{1\,445}{16}$.

Grupo 17, p. 118

6. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 33 = 0$. 8. $5x^2 + 5y^2 - 38y - 115 = 0$.
7. $x^2 + y^2 - 38x + 167 = 0$. 9. $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$.
10. $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0,\ \ x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$.
11. $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0,\ \ 9x^2 + 9y^2 + 88x - 106 = 0$.
13. $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 35 = 0$. 14. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$.
15. $x^2 + y^2 + x + 2y - 10 = 0,\ \ x^2 + y^2 - 5x - 10y + 20 = 0$.
16. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0,\ \ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0$.
17. $x^2 + y^2 + 16x - 16y + 24 = 0$. 21. $7x - y - 16 = 0$; $2\sqrt{2}$.
19. $24x - 28y + 3 = 0$. 23. $\frac{2}{3}\sqrt{69}$.
28. $(1/8,\ -21/8)$.

Grupo 18, p. 127

1. $2x - 3y + 20 = 0$. 5. $x - y + 3 = 0,\ \ x - y + 11 = 0$.
2. $3x + 2y - 9 = 0,\ \ 3x + 2y + 17 = 0$. 6. $x + 4y + 20 = 0,\ \ x + 4y - 14 = 0$.
3. $2x - y + 11 = 0,\ \ x + 2y - 12 = 0$. 7. $6x + y - 32 = 0,\ \ x - 6y - 30 = 0$.
4. $2x + 3y - 21 = 0$. 13. $46°\,24'$.

14. $-5 < k < 5$; $k = \pm 5$; $k > 5$, $k < -5$.
15. $-\frac{12}{5} < m < 0$; $m = 0$, $-\frac{12}{5}$; $m > 0$, $m < -\frac{12}{5}$.
17. $2x - 3y - 21 = 0$.
18. $3x + 5y - 34 = 0$; $5x - 3y = 0$; $\frac{5}{3}\sqrt{34}$; $\sqrt{34}$; $\frac{25}{3}$; 3.
19. $x - 4y + 12 = 0$; $4x + y - 3 = 0$; $3\sqrt{17}$; $\frac{3}{4}\sqrt{17}$; 12; $\frac{3}{4}$.
20. $7x - 4y + 26 = 0$; $4x + 7y - 13 = 0$; $\frac{3}{7}\sqrt{65}$; $\frac{3}{4}\sqrt{65}$; $\frac{13}{7}$; $\frac{23}{4}$.
21. $82° 14'$.
22. $78° 41'$.

Grupo 19, p. 131

7. $x^2 + y^2 - x = 0$.
8. $3x^2 + 3y^2 + 16x - 20y + 20 = 0$.
9. $8x^2 + 8y^2 - 28x + 38y + 55 = 0$.
10. $5x^2 + 5y^2 - 16x - 28y + 27 = 0$.
11. $3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$.
14. $3x^2 + 3y^2 - 32x + 57 = 0$.
15. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 10y + 9 = 0$.
21. $x - 7y + 34 = 0$.

Grupo 20, p. 138

1. $x'^2 + y'^2 = 4$.
2. $3x'^2 + 2y'^2 = 6$.
3. $4x'^2 - y'^2 = 4$.
4. $y'^3 - x'^2 = 0$.
5. $x'y' = 1$.
6. $2x'^2 + y'^2 = 4$.
7. $3x'^2 + 2y'^2 = 6$.
8. $3x'^2 - 2y'^2 = 12$.
9. $x'y' = 8$.
10. $2x'^3 - y'^2 = 0$.
11. $x'^2 + y'^2 = 5$.
12. $2x'^2 + 5y'^2 = 10$.
13. $x'^2 - 3y'^2 = 3$.
14. $2x'^2 + 3y'^2 = 1$.
15. $2x'^2 - 3y'^2 = 1$.
16. $x'^2 - 3y' = 0$.
17. $x'^2 + y'^2 = 2$.
18. $2x'^2 + y'^2 = 2$.
19. $y'^2 - 6x'^2 = 9$.
20. $x'y' = 2$.

Grupo 21, p. 142

1. $(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2, -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3})$.
2. $(0, -1)$, $(1, 0)$.
3. $\sqrt{29}x' - 3 = 0$.
4. $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$.
5. $3\sqrt{3}x'^2 - \sqrt{3}y'^2 - 2 = 0$.
6. $11x'^2 + y'^2 - 8 = 0$.
7. $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.
8. $x'^4 + y'^4 = 16$.
9. $\sqrt{5}y' + 2 = 0$.
10. $\sqrt{5}x' - 2 = 0$.
11. $5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$.
12. $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$.
13. $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$.
14. $x' - 3y' = 0$, $x' + 3y' = 0$.
15. $y' = \sqrt{2}$, $y' = -\sqrt{2}$.
16. $5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$.
20. $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$.

Grupo 22, p. 147

1. $2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0$.
2. $x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$.
3. $x''^2 - 4y'' = 0$.
5. $3x''^2 + y''^2 - 3 = 0$.
10. $\left(\frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}\right)$, $B^2 - 4AC \neq 0$.
11. $(-\frac{5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - 1)$.
12. $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

13. $(\frac{7}{2}\sqrt{3},\ \frac{13}{2}+3\sqrt{3})$. 14. $x^2-6xy+y^2+4x+4y=0$.

16. $x^2+2xy+y^2+6x-6y+15=0$, $x''^2-3\sqrt{2}y''=0$.

17. $3x^2-2xy+3y^2-8=0$, $x'^2+2y'^2-4=0$.

Grupo 23, p. 153

1. $(3, 0)$; $x=-3$; 12. 11. $y^2=20x$.

2. $(0, 3)$; $y=-3$; 12. 12. $y^2=-8x$; $(-2, 0)$; $x=2$; 8.

3. $(-2, 0)$; $x=2$; 8. 13. $4\sqrt{5}$.

8. $y^2=12x$. 14. $\frac{25}{2}$.

9. $x^2=-12y$. 16. $\frac{25}{4}$.

10. $x^2=-20y$. 18. $x^2+y^2=5y$.

22. $y^2-4x-8y+24=0$; $y'^2-4x'=0$.

23. $x^2-6x+12y+33=0$; $x'^2+12y'=0$.

24. $y^2+8x-16=0$; $y'^2+8x'=0$.

25. $x^2-2xy+y^2+14x+6y-21=0$; $y''^2+5\sqrt{2}x''=0$.

Grupo 24, p. 159

7. $(y-3)^2=12(x+4)$; $x=-7$; $y=3$.

8. $(x-3)^2=-8(y-3)$; $y=5$; 8.

9. $(x-4)^2=-8(y+1)$. 10. $y^2-20x-6y+9=0$.

11. $(y-\frac{5}{2})^2=12(x+2)$; $(-2, \frac{5}{2})$; $(1, \frac{5}{2})$; $x=-5$; $y=\frac{5}{2}$; 12.

12. $(x+\frac{4}{3})^2=-8y$; $(-\frac{4}{3}, 0)$; $(-\frac{4}{3}, -2)$; $y=2$; $x=-\frac{4}{3}$; 8.

21. $(x-3)^2=4(4-k)(y-k)$. 25. $y^2+4x+2y-15=0$.

23. $y=3x^2-2x$. 29. $y^2-4x-2y+1=0$.

24. $y^2-x+2y=0$. 30. $x^2-4y-4=0$; $x^2+8y-16=0$.

Grupo 25, p. 163

1. $x-y+1=0$; $x+y-3=0$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 2; 2.

2. $x+2y=0$; $2x-y+15=0$; $3\sqrt{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt{5}$; 6; $\frac{3}{5}$.

3. $2x-y+3=0$; $x+2y+4=0$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}$; 2.

9. $x+y+2=0$. 14. $36°2'$.

10. $x+3y-2=0$. 15. *a*) $k<8$; *b*) $k=8$; *c*) $k>8$.

11. $x-2y-1=0$. 16. $30°58'$; $71°34'$.

12. $x+2y-3=0$; $3x-2y+15=0$. 17. $63°26'$.

13. $x+2y-9=0$; $3x-2y+5=0$. 30. $y=4$.

Grupo 26, p. 171

1. Valor mín. $= 3$ para $x = -2$.
2. Valor máx. $= 1$ para $x = 4$.
3. Valor mín. $= 0$ para $x = 3$.
5. $x > \frac{1}{4}$; $x < -3$.
6. Para todos los valores de x excepto 4.
7. Para ningún valor de x.
9. Positivo, cuando $x < 1$ y $x > 4$; negativo, cuando $1 < x < 4$; cero, cuando $x = 1,\ 4$; mín. $= -\frac{9}{4}$ cuando $x = \frac{5}{2}$.
10. Positivo, cuando $-3 < x < \frac{1}{2}$; negativo, cuando $x < -3$ y $x > \frac{1}{2}$; cero, cuando $x = -3,\ \frac{1}{2}$; máx. $= \frac{49}{8}$ cuando $x = -\frac{5}{4}$.
11. Positivo, para todos los valores de x excepto 2; cero, cuando $x = 2$; mín. $= 0$ para $x = 2$.
16. $ax^2 + 4ax + 4a + 4$, $a < 0$.
18. Cada cateto mide 7 cm.
19. 4, 4.
20. Cuadrado de 5 cm de lado.
21. $\frac{1}{2}$.

Grupo 27, p. 178

6. Vértices $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$; focos $(0,\ \sqrt{5})$, $(0,\ -\sqrt{5})$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; longitud del lado recto $= \frac{8}{3}$.
7. Vértices $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$; focos $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; longitud del lado recto $= \frac{8}{3}$.
8. Vértices $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$; focos $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$; $2a = 10$, $2b = 8$; $e = \frac{3}{5}$; longitud del lado recto $= \frac{32}{5}$.
10. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.
11. $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.
12. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.
13. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$.
14. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{49} = 1$; $e = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$.
15. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
16. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
21. $6\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$.
24. $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$; $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{25} = 1$.
25. $7x^2 + 16y^2 - 14x + 32y - 89 = 0$; $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{7} = 1$.
26. $4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0$; $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{16} = 1$.
27. $4x^2 + 3y^2 = 48$.
28. $x^2 + 4y^2 = 9$.

Grupo 28, p. 184

6. $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$; focos $(5,\ 1)$, $(3,\ 1)$; $2a = 6$, $2b = 4\sqrt{2}$; longitud del lado recto $= \frac{16}{3}$.
7. $\dfrac{(x+4)^2}{12} + \dfrac{(y+4)^2}{16} = 1$; $e = \frac{1}{2}$.

8. $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$; focos $(5+\sqrt{7}, -6)$, $(5-\sqrt{7}, -6)$; $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$; vértices $(3, 10)$, $(3, 0)$; $e = 3/5$.

10. $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{10}=1$; $e=\frac{\sqrt{15}}{5}$; focos $(-2+\sqrt{15}, -1)$, $(-2-\sqrt{15}, -1)$.

11. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{7}=1$; $e = 3/4$; $2b = 2\sqrt{7}$; longitud del lado recto $= 7/2$.

13. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$; centro $(3, -2)$; vértices $(5, -2)$, $(1, -2)$; focos $(3+\sqrt{3}, -2)$, $(3-\sqrt{3}, -2)$; $2a=4$, $2b=2$; longitud del lado recto $= 1$; $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$; centro $(-4, 1)$; vértices $(-1, 1)$, $(-7, 1)$; focos $(-4+\sqrt{5}, 1)$, $(-4-\sqrt{5}, 1)$; $2a=6$, $2b=4$; longitud del lado recto $= 8/3$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

16. $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; centro $(0, 1)$; vértices $(0, 4)$, $(0, -2)$; focos $(0, 1+\sqrt{5})$, $(0, 1-\sqrt{5})$; $2a=6$, $2b=4$; longitud del lado recto $= 8/3$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

20. $x^2+4y^2+2x-24y+33=0$.

22. $4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$.

23. $3x^2+4y^2+6x-8y-5=0$; $16x^2+12y^2+18x-24y-15=0$.

24. 3, 3.

25. $x+2y-9=0$.

26. $3x^2+4y^2-24x-16y+52=0$.

27. $x^2+4y^2+4x+16y+4=0$.

28. $4x^2+y^2-24x-2y+28=0$.

29. $4x^2+y^2-24x=0$.

30. $100x^2+84y^2-168y-441=0$; $36x^2+20y^2-40y-25=0$.

Grupo 29, p. 188

6. $2x-3y-5=0$; $3x+2y-1=0$; $\frac{1}{2}\sqrt{13}$; $\frac{1}{3}\sqrt{13}$; $3/2$; $2/3$.

7. $9x+5y-23=0$; $5x-9y-1=0$; $\frac{1}{9}\sqrt{106}$; $\frac{1}{5}\sqrt{106}$; $5/9$; $9/5$.

8. $10x-5y-4\sqrt{15}=0$; $10x-5y+4\sqrt{15}=0$.

9. $x-y-1=0$; $3x-3y+13=0$.

10. $x+y-2=0$; $9x-191y-218=0$.

11. *a*) $-7<k<58/3$; *b*) $k=-7$, $58/3$; *c*) $k<-7$, $k>58/3$.

12. $68°\,12'$.

20. $(1, 1)$, $(-13/9)$, $29/9)$.

22. $3x+2y-2=0$.

Grupo 30, p. 196

6. Vértices $(2, 0)$, $(-2, 0)$; focos $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$; $2a = 4$, $2b = 6$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; longitud del lado recto $= 9$.
7. Vértices $(3, 0)$, $(-3, 0)$; focos $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$; $2a = 6$, $2b = 4$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; longitud del lado recto $= 8/3$.
8. Vértices $(0, 2)$ $(0, -2)$; focos $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$; $2a = 4$, $2b = 6$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; longitud del lado recto $= 9$.

10. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; $e = \frac{3}{2}$.
11. $72y^2 - 9x^2 = 200$; $\frac{80}{3}$.
12. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$; $e = \sqrt{2}$.
13. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$; focos $(0, 6)$, $(0, -6)$.
14. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$.
15. $y^2 - 3x^2 = 1$.
16. $4x^2 - 5y^2 = 16$.
17. $5x^2 - 4y^2 + 40x + 24y + 24 = 0$; $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$.
18. $5x^2 - 4y^2 - 30x + 32y - 39 = 0$; $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$.
23. 5, 13.
24. $3x^2 - y^2 = 27$.
25. $4x^2 - y^2 = 36$.

Grupo 31, p. 202

4. $2x - \sqrt{5}y = 0$, $2x + \sqrt{5}y = 0$.
5. $(3, 2)$, $(-5/3, 1)$.
6. $2x^2 - 9y^2 = 9$.
7. $4y^2 - 7x^2 = 8$.
8. 4.
14. $xy = 5$.
16. Vértices $(0, 3)$, $(0, -3)$; focos $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Grupo 32, p. 206

6. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$; focos $(4, 3)$, $(-2, 3)$; $2a = 4$; $2b = 2\sqrt{5}$; longitud del lado recto $= 5$.
7. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$; focos $(-2, -1+2\sqrt{3})$, $(-2, -1-2\sqrt{3})$; $e = 2/3\sqrt{3}$.
8. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$; $2b = 4\sqrt{2}$; $e = \sqrt{3}$.
9. $\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$; longitud del lado recto $= 5$; $e = 3/2$.

11. $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$; focos $(-3, \sqrt{13})$, $(-3, -\sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

14. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$; centro $(2, 2)$; vértices $(5, 2)$, $(-1, 2)$; focos $(2+\sqrt{10}, 2)$, $(2-\sqrt{10}, 2)$; $2a = 6$; $2b = 2$; longitud del lado recto $= \frac{2}{3}$; $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$; asíntotas: $x+3y-8=0$, $x-3y+4=0$.

15. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$; centro $(-4, 2)$; vértices $(-4, 4)$, $(-4, 0)$; focos $(-4, 2+\sqrt{13})$, $(-4, 2-\sqrt{13})$; $2a = 4$; $2b = 6$; longitud del lado recto $= 9$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; asíntotas: $2x+3y+2=0$, $2x-3y+14=0$.

16. Dos rectas que se cortan: $x+2y-1=0$, $x-2y-1=0$.

18. $\frac{y^2}{3} - \frac{(x+5)^2}{1} = 1$; centro $(-5, 0)$; vértices $(-5, \sqrt{3})$, $(-5, -\sqrt{3})$; focos $(-5, 2)$, $(-5, -2)$; $2a = 2\sqrt{3}$; $2b = 2$; longitud del lado recto $= \frac{2}{3}\sqrt{3}$; $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; asíntotas: $\sqrt{3}x + y + 5\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 5\sqrt{3} = 0$.

20. $36°52'$.

21. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

22. $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$.

23. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$.

24. $3x^2 - y^2 - 16x + 16 = 0$, $3x^2 - y^2 - 8x = 0$.

Grupo 33, p. 208

5. $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$, $\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sqrt{10}$, $\frac{1}{3}$, 3.

6. $5x - 8y - 4 = 0$, $8x + 5y - 42 = 0$, $\frac{2}{5}\sqrt{89}$, $\frac{\sqrt{89}}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{5}{4}$.

7. $15x - 8y - 22 = 0$, $8x + 15y - 31 = 0$, $\frac{17}{15}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{15}{8}$.

8. $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

9. $23°23'$.

10. $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

23. $6x + 8y + 3 = 0$.

Grupo 34, p. 219

6. $x''^2 - 4y''^2 = 4$.

7. $y''^2 - 4x'' = 0$.

8. Dos rectas que se cortan.

9. Punto.

10. Ningún lugar geométrico.

12. Dos rectas paralelas.

14. $x''^2 + 2y''^2 = 2$.

15. Una recta.

Grupo 35, p. 225

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$.

2. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x + 36y + 45 = 0$.

4. $3x^2 - 12xy - 13y^2 - 18x + 6y + 72 = 0$.

5. $7x^2 - 6xy + 15y^2 - 14x + 102y + 151 = 0.$

7. $(-\tfrac{1}{5},\ -\tfrac{2}{5})$.

8. $(-\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{7}{3})$.

12. $(2,\ 0)$, $2x - 9 = 0$; $(-2,\ 0)$, $2x + 9 = 0$.

13. $(5,\ 0)$, $5x - 9 = 0$; $(-5,\ 0)$, $5x + 9 = 0$.

14. $(0,\ 2)$, $2y - 5 = 0$; $(0,\ -2)$, $2y + 5 = 0$.

15. $(0,\ 3)$, $3y - 7 = 0$; $(0,\ -3)$, $3y + 7 = 0$.

16. $(-3,\ 1)$, $4x - 29 = 0$; $(5,\ 1)$, $4x + 21 = 0$.

Grupo 36, p. 231

1. $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$.

2. $3x - y - 2 = 0$, $9x - 3y + 22 = 0$.

3. $3x - 2y - 5 = 0$, $7x - 6y - 21 = 0$.

4. $3x - y - 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$; $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$; $\sqrt{10}$; $\tfrac{1}{3}$; 3.

5. $x + y - 1 = 0$, $3x + 3y + 1 = 0$.

6. $29° 45'$; $47° 29'$.

13. $x^2 + xy - y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$.

14. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$.

15. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y = 4$; $169x^2 + 26xy + y^2 + 27x - 146y = 196$.

16. $x^2 + xy + y^2 - 2x - y = 0$.

18. $9x^2 + 33xy + 9y^2 - 8x + 22y - 1 = 0$.

19. $4x^2 - 17xy - 10y^2 - 24x + 37y + 10 = 0$.

21. $4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 20y + 8 = 0$,
$4x^2 - 4xy + y^2 - 12x - 20y - 16 = 0$.

22. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + 3y - 5 = 0$,
$2x^2 + 12xy + 18y^2 + 23x - 5y - 13 = 0$.

27. $3x^2 + 4y^2 = 48$, $3x^2 - y^2 = 3$.

Grupo 37, p. 243

5. $\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

6. $(1,\ 120°)$, $(1,\ 240°)$.

8. Circunferencia: $r = 2$.

9. Línea recta: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

10. $P_1(-\tfrac{5}{2}\sqrt{2},\ -\tfrac{5}{2}\sqrt{2})$, $P_2(\sqrt{3},\ 1)$, $P_3(\tfrac{3}{2}\sqrt{3},\ -\tfrac{3}{2})$, $P_4(-3,\ 3)$.

11. $(\sqrt{13},\ 123° 41')$, $(\sqrt{13},\ 326° 19')$.

12. $r = \pm 2$.

14. $2r^2 + 2r\cos\theta - 6r \operatorname{sen}\theta + 3 = 0$.

15. $\theta = \operatorname{arc\,tg} 2$.

16. $r^2 \cos 2\theta = 4$.

17. $r = 2 \operatorname{sen}\theta$.

18. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$.

19. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$.

20. $r \cos(\theta - \omega) = p$.

22. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

24. $y^2 - 8x - 16 = 0$.

25. $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$.

27. $y^2 = 4x^3$.

28. $y^2 + 8x - 16 = 0$.

29. $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

30. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

Grupo 39, p. 252

1. $\left(1, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2. $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

3. $\left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

4. $\left(4\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. $(\sqrt{6},\ 35° 16')$, $(\sqrt{6},\ 324° 44')$.

6. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, Polo.

7. $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$, Polo.

8. $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, Polo.

9. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, Polo.

10. $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

11. $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

12. $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(0{,}347,\ 159° 40')$.

13. 6,46.

15. 7,19.

23. 0,966.

24. 2,35.

Grupo 40, p. 259

4. $r \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 4$.

5. $r \cos(\theta - \omega) = 1$, en donde $\omega = \operatorname{arc\,tg}(-4/3)$ está en el segundo cuadrante.

7. $r \cos(\theta - \omega) = 2$, en donde $\omega = \operatorname{arc\,tg}(3/4)$ está en el primer cuadrante.

9. $r \cos \theta = -3$.

10. $r \operatorname{sen} \theta = 2$.

12. $2r \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{2}\, r \operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12}$.

14. $r^2 - 12r \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - \theta\right) + 20 = 0$.

15. $r^2 - 6r \cos\left(\dfrac{7\pi}{6} - \theta\right) + 6\sqrt{3} - 4 = 0$.

20. Centro $(2, 0)$, radio $= 2$.

21. Centro $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, radio $= 2$.

22. Centro $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, radio $= 3$.

23. Centro $\left(1, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, radio $= 2$.

24. $r = -2 \cos \theta$; centro $(1, \pi)$, radio $= 1$.

25. $r = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; centro $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, radio $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Parábola; vértice $(5/4,\ \pi)$; longitud del lado recto $= 5$; ecuación rectangular: $4y^2 - 20x - 25 = 0$.

31. Elipse; centro $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$; vértices $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(3,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$; $2a = 9/2$; $2b = 3\sqrt{2}$; longitud del lado recto $= 4$; ecuación rectangular: $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$.

32. Hipérbola: centro $(1,\ 0)$; vértices $(1/2,\ 0)$, $(-3/2,\ \pi)$; $2a = 1$; $2b = \sqrt{3}$; longitud del lado recto $= 3$; ecuación rectangular: $12x^2 - 4y^2 - 24x + 9 = 0$.

33. Vértice $\left(\dfrac{p}{2},\ \pi\right)$; directriz: $r\cos\theta = -p$.

Grupo 41, p. 263

1. Espiral de Arquímedes, $r = k\theta$.
2. Espiral hiperbólica o recíproca, $r\theta = k$.
3. Espiral parabólica, $r^2 = k\theta$.
4. Espiral logarítmica o equiangular, $\log r = k\theta$.
5. Lituus, $r^2\theta = k$.
6. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.
7. Circunferencia, $r = a\cos\theta$.
8. Circunferencia, $r = 4/3\, a\cos\theta$.
9. Circunferencia, $r = 3/2\, a\cos\theta$.
10. Rosa de cuatro hojas, $r = a\operatorname{sen} 2\theta$.
11. $r = 2a\cos^2\theta$.
12. $r = 2a\operatorname{sen}^2\theta$.
17. $r = 2a\operatorname{sen}\theta + k$.
18. Circunferencia, $r = 2a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$.
19. $r = 2a\cos\theta + a\operatorname{sen} 2\theta$.
20. $r = 2a\cos\theta(1 + \cos\theta)$.
21. Cardioide.

Grupo 42, p. 269

5. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
7. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.
8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
9. $xy = 6$.
10. $x^2 = 2y + 4$.
11. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
14. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$.
15. $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$.
17. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.
20. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
21. $x^2 + y^2 = a^2$.
25. $20x^2 - 4xy + 13y^2 = 256$.
28. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
29. $x^2y^2 + b^2x^2 = a^2y^2$.
31. $2y^2 + x - 1 = 0$.
33. $2x^2 + y - 1 = 0$.
35. $xy^2 - x + 2y = 0$.
38. $4x^3 - 3x + y = 0$.