Cuaderno de Ejercicios de Geometría Analítica I

Dr. Rafael Morones E.
Dept. de Matemáticas.
ITAM.

Dra. Carmen López L.
Dept. de Matemáticas.
ITAM

Enero 2011

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Programa de Estudios.

GEOMETRÍA ANALÍTICA I

1. **Vectores en el Plano**
    - Naturaleza de la Geometría Analítica.
    - Vectores y puntos. Algebra de vectores. Interpretación geométrica.
    - Producto Punto. Norma Euclidiana. Distancia entre dos puntos. Teorema de Pitágoras.
    - Ángulo y ortogonalidad. Proyección ortogonal. Complementos ortogonales.
2. **Rectas en el Plano**
    - Ecuación general lineal en dos variables.
    - Definición de recta.
    - Caracterizaciones geométricas:
        - Punto y pendiente.
        - Dos puntos.
    - Formas:
        - Vectorial.
        - Paramétrica.
        - Simétrica.
    - Combinación convexa. Segmentos rectilíneos. División de una recta en segmentos.
    - Ángulo entre dos rectas. Rectas ortogonales.
        - Distancia de un punto a una recta.
        - Forma normal de la ecuación de una recta.
        - Cosenos directores.
    - Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables. Introducción. Solución.
        - Interpretación geométrica.
        - Determinantes de 2x2. Propiedades básicas.
        - Regla de Cramer.
3. **Cónicas en el Plano**
    - El círculo. Ecuación general.
        - Determinación del centro y del radio. Traslación del origen.

    - Secantes y tangentes a círculos. Intersección de círculos.
  - La parábola. Ecuación general para ejes horizontales y verticales.
    - Tangentes. Propiedad de reflexión.
    - Ecuación vectorial.
  - Cónicas centrales: Elipse e Hipérbola.
    - Ecuaciones generales para ejes horizontales y verticales. Simetrías.
    - Ecuaciones vectoriales.
    - Tangentes.
    - Asíntotas de hipérbolas. Hipérbolas conjugadas.
  - Definición de cónicas: focos, directriz, excentricidad.

4. **Curvas Paramétricas**
  - Curvas planas. Forma implícita y paramétrica.
  - Parametrización de parábolas, elipses e hipérbolas.
  - Otras curvas paramétricas: Cicloides e Involutas.
  - Tangentes y normales. Cambio de parámetro.

5. **Coordenadas Polares**
  - Representación polar en el plano.
  - Gráficas de ecuaciones polares: Lemniscata, cardioide, etc.
  - Forma normal de las ecuaciones de rectas.
  - Ecuación polar de las cónicas.

BIBLIOGRAFíA

- **Textos**
  - *Geometría Analítica Moderna*
    Wooton, W., Beckenbach, E.F., Fleming, F.J.
    Publicaciones Cultural S.A. de C.V. 3a. edición, 1985.
  - *Geometría Analítica*
    Lehmann, C.H.
    UTEHA, 1953.
- **Referencias**
  - *Analytic Geometry*
    Riddle, D.F.
    Wadsword Publ. Co. 5a. edición, 1992.
  - *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático (Vol. 1)*
    Courant, R.
    Ed. Limusa, 1974.
  - *Análisis Matemático I*
    Haaser, N.B., Lasalle, J.P., Sullivan, J.A.
    Ed. Trillas, 1970.
  - *Geometría Universitaria*
    I. Martin Isaacs.
    Thomson Learning, 2002.
  - *Geometría Plana y del Espacio*
    G. Wentworth, D. E. Smith.
    Editorial Porrua, S. A. 1993.

Capítulo 2

Vectores en el Plano.

2.1. Tarea 1

1. En un sistema de coordenadas cartesianas dibujar los vectores:

   a) $\hat{\imath} = \langle 1, 0 \rangle$
   b) $\hat{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$
   c) $\widehat{PQ}$ si $P(-5, -4)$ y $Q(-1, 2)$
   d) $\widehat{RS}$ si $R(3, 1)$ y $S(3, 3)$
   e) $\hat{b}$ equivalente a $\widehat{PQ}$ del inciso $(1c)$
   f) $\hat{c}$ equivalente a $\widehat{RS}$ del inciso $(1d)$

2. Colocar al lado de los puntos y vectores que aparecen en el sistema de coordenadas cartesianas que se presenta en la Figura 2.1, la notación y expresión analítica adecuada.

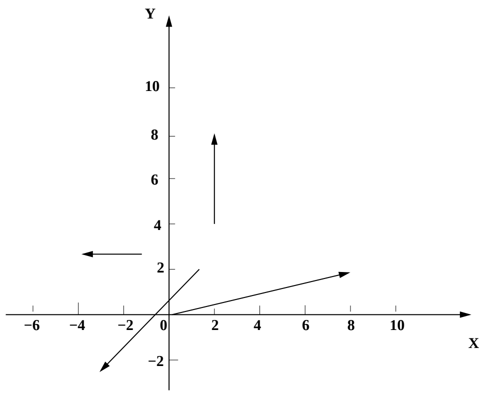

Figura 2.1: Ejercicio (2)

3. Determinar para qué números reales las ecuaciones que se presentan abajo son válidas. Indicar si no existe solución.

   a) $\langle x - 4, 2 \rangle = \langle 3, x - 5 \rangle$
   b) $\langle x - 2y, 2x + y \rangle = \langle -1, 3 \rangle$
   c) $\left\langle x^2 - 2x, x - 8 \right\rangle = \langle -1, -1 \rangle$

4. Si $\hat{a} = \langle 3, 7 \rangle$, $\hat{b} = \langle 4, 3 \rangle$, $\hat{c} = \langle 2, 8 \rangle$. Calcular $\hat{w}$ en los casos:

   a) $\hat{w} = \hat{a} - 3\hat{b}$

b) $\hat{w} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$

c) $\hat{c} = 2\hat{a} - 4\hat{b} + 3\hat{w}$

d) $3(\hat{a} - \hat{w}) = \langle 3, 6 \rangle$

5. Dibujar $\hat{w}$ utilizando la figura que se indica en cada inciso:

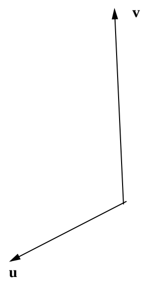

Figura 2.2: Ejercicio (5*a*.)

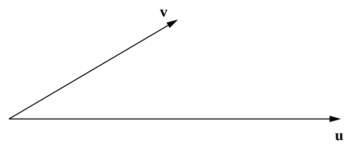

Figura 2.3: Ejercicio (5*b*.)

a) $\hat{w} = \hat{u} + \frac{3}{2}\hat{v}$ en la Figura 2.2

b) $\hat{w} = 2\hat{u} - 3\hat{v}$ en la Figura 2.3

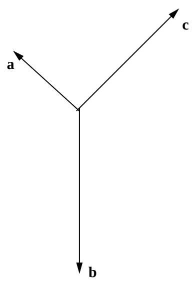

Figura 2.4: Ejercicio (5*c*.)

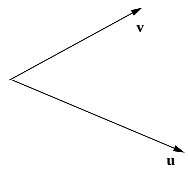

Figura 2.5: Ejercicio (5*d*.)

c) $\hat{w} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ en la Figura 2.4

d) $\hat{w} = 2\hat{u} + \hat{v}$ en la Figura 2.5

e) $\hat{w} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ en la Figura 2.6

6. Expresar los siguientes vectores como parejas ordenadas.

a) $\hat{a} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

b) $\hat{b} = -8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

c) $\hat{c} = \hat{\imath}$

d) $\hat{d} = \hat{\jmath}$

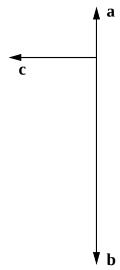

Figura 2.6: Ejercicio $(5e)$

7. Si $\hat{v}$ representa al vector $\widehat{AB}$ y se satisface la ecuación $\hat{v} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ con $B(-2,-1)$, determinar las coordenadas de A.

8. Si $\hat{v}$ representa al vector $\widehat{AB}$ con la ecuación $\hat{v} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$ y el punto medio de AB es $(3,-1)$, determinar las coordenadas de A y de B

9. Demostrar que:

   a) $\hat{u} + \hat{v} = \hat{0} \Rightarrow \hat{u} = -\hat{v}$
   b) $\hat{u} + \hat{v} = \hat{t} \Rightarrow \hat{u} = \hat{t} - \hat{v}$
   c) $-\hat{u} - \hat{v} = -(\hat{u} + \hat{v})$
   d) Si $\hat{a} + \hat{u} = \hat{u} \Rightarrow \hat{a} = \hat{0}$ (Unicidad del Neutro Aditivo)
   e) Si $\hat{a} + \hat{u} = \hat{0} \Rightarrow \hat{a} = -\hat{u}$ (Unicidad del Inverso Aditivo)

10. Si $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\hat{u} = \langle 1, 3\rangle$ y $\hat{v} = \langle -2, 5\rangle$ calcular las expresiones siguientes :

    a) $\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}$
    b) $||\beta\hat{v}|| + ||\alpha\hat{u}||$
    c) $(\alpha + \beta)(\hat{u} + \hat{v})$
    d) $||\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}||$

11. Demostrar que: $(\alpha\beta)\hat{u} = \alpha(\beta\hat{u})$

12. Demostrar que:

$$(\alpha + \beta)(\hat{u} + \hat{v}) = \alpha\hat{u} + \alpha\hat{v} + \beta\hat{u} + \beta\hat{v}$$

13. Calcular la magnitud y dirección de los vectores y expresarlos en la forma: $\hat{v} = ||\hat{v}|| \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$

    a) $\langle \sqrt{3}, 1\rangle$
    b) $\langle -2, 0\rangle$

c) $\langle -2, 1\rangle$
d) $\langle -4, -3\rangle$
e) $\langle 5, -1\rangle$

14. Determinar $\hat{v} = \langle x, y\rangle$ si:

    a) $|\hat{v}| = 6$, $\theta = 90^o$
    b) $|\hat{v}| = 2$, $\theta = 300^o$

15. Encontrar dos vectores perpendiculares a $\langle 5, -1\rangle$.

16. Encontrar un vector de magnitud 3 que sea perpendicular al vector $\langle 5, 2\rangle$.

17. Encontrar un vector cuya magnitud es la misma que la de $\langle 4, -3\rangle$ y cuya dirección es paralela a la de $\langle 1, \sqrt{3}\rangle$.

18. Demostar gráficamente que existen números reales α, β tales que se satisface la ecuación $\hat{c} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b}$ si:

    a) $\hat{a} = \langle 5, 1\rangle$, $\hat{b} = \langle 3, 5\rangle$, $\hat{c} = \langle 5, 5\rangle$.
    b) $\hat{a} = \langle -1, -2\rangle$, $\hat{b} = \langle -1, 3\rangle$, $\hat{c} = \langle 4, 1\rangle$

19. En las Figuras 2.8 a 2.10 dibujar $\hat{w}$ como combinación lineal de $\hat{u}$ y $\hat{v}$.

20. Demostrar que: $||\alpha\hat{v}|| = |\alpha|\,||\hat{v}||$

21. Demostrar que: $||-\hat{v}|| = ||\hat{v}||$

22. Demostrar que si $\hat{a} \neq \hat{0}$ entonces

    $$\frac{\hat{a}}{||\hat{a}||}$$

    es un vector unitario en la dirección de $\hat{a}$

23. Calcular de dos formas diferentes:

    a) $\langle 3, -7\rangle \cdot \langle 5, 1\rangle = \langle 3, -7\rangle^T \langle 5, 1\rangle$
    b) $\langle 4, 1\rangle \cdot \langle 2, 2\rangle$

24. Determinar si los siguientes vectores son paralelos, perpendiculares o ninguna de las dos cosas:

    a) $\hat{u} = \langle 3, 3\rangle$, $\hat{v} = \langle 2, 2\rangle$
    b) $\hat{u} = \langle 5, 1\rangle$, $\hat{v} = \langle -3, 7\rangle$
    c) $\hat{u} = \langle 2, -3\rangle$, $\hat{v} = \langle 6, 4\rangle$

25. Determinar todos los valores de β tales que $P(2, 3)$, $Q(7, -1)$, $R(4, \beta)$ formen un triángulo rectángulo.

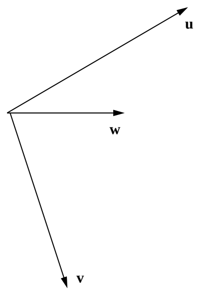

Figura 2.7: Ejercicio (19.)

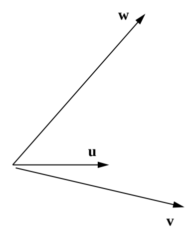

Figura 2.8: Ejercicio (19.)

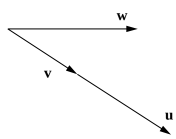

Figura 2.9: Ejercicio (19.)

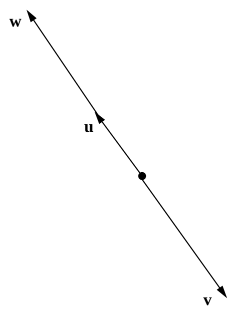

Figura 2.10: Ejercicio (19.)

26. Determinar el ángulo entre los vectores que se indican en cada inciso:

    a) $\hat{u} = \langle 5, 2\rangle$, $\hat{v} = \langle 1, 8\rangle$
    b) $\hat{u} = \langle 2, 8\rangle$, $\hat{v} = \langle -3, -3\rangle$

27. Encontrar el área del paralelogramo que puede construirse con los vectores del problema anterior usando el concepto de componente.

28. En las Figuras 2.11 a 2.16 dibujar la $\text{Proy}_{\hat{v}}\hat{u}$

29. Si las coordenadas de los vectores son $\hat{u} = \langle -10, 10\rangle$ y $\hat{v} = \langle 30, 0\rangle$ ¿Cuál sería el área del paralelogramo que puede construirse con ellos ?

30. Demostrar que si $\hat{u} \neq \hat{0}$, $\hat{v} \neq \hat{0}$ y $\hat{w} \neq \hat{0}$

    a) Si $\hat{u} \parallel \hat{v}$ y $\hat{v} \parallel \hat{w} \Rightarrow \hat{u} \parallel \hat{w}$
    b) Si $\hat{u} \perp \hat{v} \Rightarrow \hat{u} \perp -\hat{v}$
    c) Si
    $$\hat{u} = \alpha\hat{v},\ \alpha < 0 \quad \Rightarrow \frac{\hat{u}\cdot\hat{v}}{||\hat{u}||\,||\hat{v}||} = -1$$
    d) Si $\hat{u}$ y $\hat{w}$ son vectores paralelos no nulos entonces $\text{Proy}_{\hat{u}}\hat{v} = \text{Proy}_{\hat{w}}\hat{v}$
    e) $\text{comp}_{\hat{u}}\,(\hat{v} + \hat{w}) = \text{comp}_{\hat{u}}\hat{v} + \text{comp}_{\hat{u}}\hat{w}$

31. Haga uso del concepto de componente de un vector a lo largo de otro para calcular el área del triángulo con vértices: P(5,12), Q(8,6), R(0,0).

32. Dibujar $\hat{w}$ como combinación lineal de $\hat{u}$ y $\hat{u}_\perp$, para cualquier $\hat{u}$ y $\hat{w}$

33. Para cualquier vector $\hat{w}$, escríbalo como una combinación lineal de los vectores $\hat{u}$ y $\hat{v}$ arbitrarios, distintos del vector cero perpendiculares entre sí haciendo uso del concepto de Componente de un vector a lo largo de otro.

34. Demostrar que el triágulo cuyos vértices son $P(0, 1), Q(8, -7), R(1, -6)$ es isósceles.

35. Demostrar que $S(1, -2)$ es equidistante de los puntos $P(-11, 3), Q(6, 10)$, $R(1, 11)$.

36. Para los siguientes conjuntos de puntos haga uso de la fórmula de distancia para verificar si están sobre una recta.

    a) $\{P(-2, -5), Q(1, -1), R(4, 3)\}$
    b) $\{P(-3, 3), Q(2, 2), R(7, -1)\}$

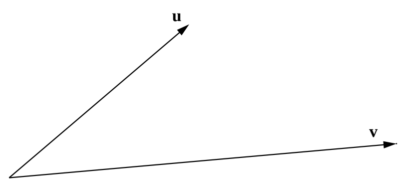

Figura 2.11: Ejercicio (28.)

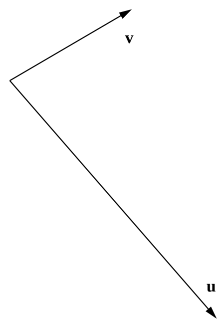

Figura 2.12: Ejercicio (28.)

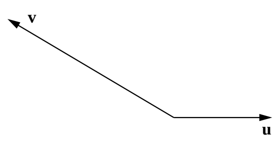

Figura 2.13: Ejercicio (28.)

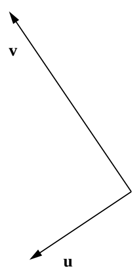

Figura 2.14: Ejercicio (28.)

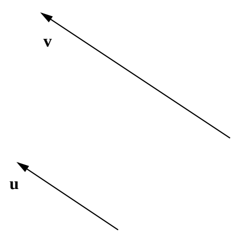

Figura 2.15: Ejercicio (28.)

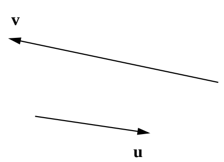

Figura 2.16: Ejercicio (28.)

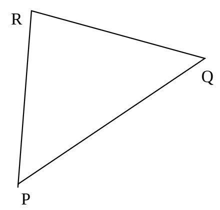

Figura 2.17: Ejercicio (41.)

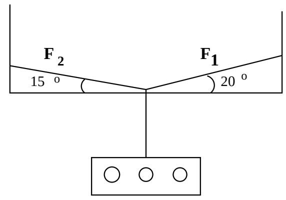

Figura 2.18: Ejercicio (43.)

37. Considere la siguiente definición de distancia entre dos puntos:
Sean los puntos A y B con vectores de posición $\hat{a}$ y $\hat{b}$ respectivamente. Entonces la distancia entre ellos está dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\hat{b} - \hat{a}\right) \cdot \left(\hat{b} - \hat{a}\right)}$$

Haga uso de esta definición para determinar si los conjuntos de puntos de problema anterior son colineales.

38. Determinar x tal que $d(A,B) = \sqrt{5}$ con $A(x,x)$ y $B(1,4)$.

39. Determinar la distancia más corta entre el punto $P(-2,-3)$ y el segmento delimitado por los puntos $Q(-1,5)$ y $R(4,0)$. (No usar distancia de un punto a una recta)

40. Determinar qué punto en el segmento definido por $Q(-1,5)$ y $R(4,0)$ es el más cercano al punto $P(-2,-3)$. (No usar distancia de un punto a una recta)

41. Demostrar que el área de un triángulo cuyos vértices son $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$ está dada por: (Ver la Figura 2.17)

$$A = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

42. Demostrar utilizando vectores que el segmento de recta definido por los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo y mide la mitad del lado no considerado.

43. Un semáforo de 200 lb de peso cuelga en equilibrio y está sostenido por dos cables como se indica en la Figura 2.18. Determinar F_1 y F_2.

44. Una cámara de televisión está a 30 pies de uno de los lados de 94 pies de una cancha, y está a 7 pies del centro. Determinar qué ángulo debe barrer para cubrir toda la acción del campo. Usar vectores. (Ver Figura 2.19)

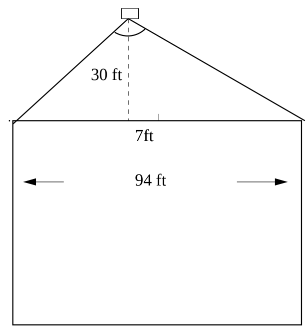

Figura 2.19: Ejercicio (44)

Capítulo 3

Rectas en el Plano

3.1. Tarea 2

1. Encontrar la ecuación cartesiana ordinaria de la recta cuya ordenada al origen es -5 y cuya abscisa al origen es 3.
2. Determinar la ordenada y la abscisa al origen de $Ax + By + C = 0$.
3. Encontrar la ecuación de la recta cuya ordenada y abscisa al origen suman 21 y su pendiente es 2.
4. Para las rectas que se presentan a continuación indique si son paralelas o son perpendiculares. Justifique su respuesta.
   a) $2x - 3y + 7 = 0$
   b) $4x + 5y - 9 = 0$
   c) $4x - 6y - 15 = 0$
   d) $10x - 8y + 17 = 0$
5. Encontrar la ecuación de una recta que pase por $(1, 3)$ y sea paralela a $2x - 5y + 7 = 0$.
6. Encontrar la ecuación de una recta que pase por $(1, 3)$ y sea perpendicular a $2x - 5y + 7 = 0$.
7. Encontrar la ecuación de una recta paralela a $Ax + By + C = 0$ con $A^2 + B^2 \neq 0$ que contenga al punto (h, k).
8. Demostrar que la recta del problema anterior intersecta al eje y en el punto $\left(0, \frac{A}{B}h + k\right)$.
9. Si en el problema (7) $A \neq 0$ ¿ en dónde intersecta esa recta al eje x ?
10. Demostrar que las coordenadas (x_0, y_0) del punto medio del segmento cuyos extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, están dadas por
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
11. Si $A(-1, 3), B(3, 7), C(7, 3)$ son los vértices de un triángulo:
    a) Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados.
    b) Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen a las medianas.
    c) Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen a las alturas.
12. ¿Para qué valor de a son perpendiculares las siguientes rectas
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$$

13. Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(3, -4)$ y su pendiente es 2.

14. Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(5, -3)$ y su pendiente no está definida.

15. Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $(-3, 4)$ y su pendiente es cero.

16. Indique si $Q \in \mathcal{L}$

    a)
    $$Q(2, -1); \quad \mathcal{L} = \{P(x, y) | \hat{p} = \langle 1, 2\rangle + \alpha \langle -1, 3\rangle\}$$

    b)
    $$Q(3, 2); \quad \mathcal{L} = \{P(x, y) | x = 1 + 2\alpha; \ y = 1 - 3\alpha\}$$

17. Determine la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la forma simétrica de la recta que satisface las condiciones:

    a) Pasa por $P(2, 1)$ y es paralela a $\hat{a} = \left\langle \frac{1}{3}, 2\right\rangle$.

    b) Pasa por$P(1, 2)$ y $Q(-1, 4)$.

    c) Pasa por $P(1, 2)$ y es paralela a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son
    $$\begin{aligned} x &= 2 + 3\alpha \\ y &= 7 \end{aligned}$$

    d) Pasa por $P(-1, 7)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es
    $$\frac{3x - 4}{4} = \frac{-y}{2}$$

    e) Pasa por $Q(1, 2)$ y es paralela al eje y.

    f) Pasa por $P(-1, 7)$ y es perpendicular a la recta
    $$\begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= 1 - t \end{aligned}$$

    g) Pasa por $P(2, 3)$ y tiene vector de dirección $\hat{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

    h) Pasa por $Q(3, -1)$ y es paralela a $\hat{p} = \langle -2, -3\rangle + \alpha \langle 5, 2\rangle$.

    i) Pasa por $Q(-6, 2)$ y es perpendicular a $\hat{p} = \langle -1, -2\rangle + \alpha \langle -1, 3\rangle$.

    j) Corresponde a cada una de las alturas del triángulo con vértices $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(2, -7)$.

    k) Contiene a $P(4, -2)$ y al punto medio de $Q(10, 4), R(-2, 2)$.

    l) Contiene a (a, b), (b, a).

18. Determinar el vector de dirección de la recta $7x - 2y + 5 = 0$ a partir de los coeficientes de x y y.

19. Si las ecuaciones paramétricas de una recta son

$$\begin{aligned} x &= 3 - 7t \\ y &= 2 - 4t \end{aligned}$$

escriba la ecuación en la forma $ax + by + c = 0$.

20. Escriba la ecuación de las rectas, cuyas condiciones se describen a continuación, de la forma paramétrica vectorial, esto es: $\hat{p} = \hat{r} + \alpha \langle 1, m \rangle$, cuando sea posible

    a)
    $$\mathcal{L} : \hat{u} = \langle 2, -1 \rangle + \beta \langle 3, 2 \rangle$$

    b) $\mathcal{L}$ que pase por $(5, 1)$ y $(-4, 2)$.

    c) $\mathcal{L}$ que pase por $(2, -3)$ y no está definida su pendiente.

    d) $\mathcal{L}$ que pase por $(4, 3)$ y tiene pendiente cero.

21. Determine la forma simétrica de la ecuación de la que recta que pasa por $(7, -2)$, $(-5, -8)$.

22. Obtener la forma simétrica de la recta: $2x - 3y + 4 = 0$.

23. Demostrar que si P, Q, R son colineales, entonces

$$\langle \hat{q} - \hat{p} \rangle \cdot \langle \hat{r} - \hat{p} \rangle_{\perp} = 0$$

24. Determine si $(2, 1), (-1, 3), (5, -1)$ son colineales usando el resultado del problema anterior.

25. Determine si $(8, -3), (-4, 5), (2, 4)$ son colineales usando el resultado del problema (23).

26. Determine si las dos rectas dadas en cada inciso se intersectan y en caso afirmativo encuentre el punto de intersección y el ángulo entre ellas.

    a)
    $$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x &= 1+2a \\ y &= 1-4a \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x &= 4-b \\ y &= -1+6b \end{cases}$$

    b)
    $$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x &= 2+3a \\ y &= -4-2a \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x &= 6-6b \\ y &= -2+4b \end{cases}$$

    c)
    $$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x &= 1-2t \\ y &= 2+2t \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x &= -1+3s \\ y &= 4-2s \end{cases}$$

    d)
    $$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x &= 1-2t \\ y &= -1+3t \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x &= 3+2s \\ y &= -4-3s \end{cases}$$

27. Demuestre que si las rectas cuyas ecuaciones simétricas son:
    $$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{h_1} &= \frac{y-y_1}{k_1} \\ \frac{x-x_2}{h_2} &= \frac{y-y_2}{k_2} \end{aligned}$$
    son paralelas, entonces $h_1k_2 - h_2k_1 = 0$.

28. Demuestre que para dos puntos distintos en el plano $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$
    $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
    es la ecuación de la recta que pasa por ellos. Haga uso de este resultado y verifique si $(0,3)$, $(-4,0)$, $(4,6)$ son colineales.

29. Demuestre que
    $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$
    es la ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

30. Calcular la distancia que separa al punto P de la recta cuyo vector director es $\hat{q}$ o cuya pendiente es m y que pasa por el punto dado R.

    a) $P(3,4)$; $\hat{q} = \langle 2, 1\rangle, R(4,7)$

    b) $P(-3,7)$; $m = -\frac{2}{3}, R(-4,6)$

31. Calcular la distancia de $(3,6)$ a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

32. Determinar la distancia entre las rectas del ejercicio (26) si éstas no se intersectan.

33. Calcular la distancia que hay entre las rectas

    a) $3x - y - 8 = 0$ y $3x - y - 15 = 0$

    b) $15x - 5y - 8 = 0$ y $12x - 4y + 5 = 0$

34. Calcular el valor de k tal que $(2, k)$ sea equidistante de las rectas $x+y-2 = 0$ y $x - 7y + 2 = 0$.

35. Obtener la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $4x + 2y + 3 = 0$.

    ¿Obtuvo más de una ecuación a resolver? Justifique esta situación analítica y geométricamente.

36. Calcular la distancia que separa al punto $P(b, a)$, de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente a, b.

37. Obtener el tercer vértice de todos los triángulos isósceles cuya base tiene los extremos $P(3, 0)$ y $Q(-1, 3)$.

38. Demostrar que las medianas del triángulo cuyos vértices son $P(6, 1), Q(-2, 3)$ y $R(2, -7)$, se cortan en un punto tal que la distancia del vértice al punto de corte es $\frac{2}{3}$ de la distancia del vértice a su lado opuesto.

39. Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 1), (2, 1)$ y $(1, 2)$:

    a) Utilizando $\mathrm{comp}_{\hat{v}}\hat{u}$

    b) Utilizando $d(P, \mathcal{L})$

40. Demostrar que la distancia entre dos rectas paralelas cuyas ecuaciones son $\mathcal{L}_1 : Ax + By + C = 0$ y $\mathcal{L}_2 : Ax + By + D = 0$, es:

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

41. Dibujar las rectas mencionadas en cada inciso, **sin tabular, ni usar dos puntos sino usando y marcando en el dibujo los elementos que intervienen en la definición proporcionada.**

    a)
$$-2x + 3y + 4 = 0$$

    b)
$$y = x - 5$$

    c)
$$2 - x = \frac{1 + y}{3}$$

d)

$$\begin{cases} x &= 2 - t \\ y &= 5 \end{cases}$$

e)

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$$

42. Obtener las ecuaciones de las rectas que son paralelas a $3x - 4y + 10 = 0$ y que están a cinco unidades de distancia.

Capítulo 4

Cónicas.

4.1. Tarea 3

1. Encontrar las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las condiciones que se indican:

   a) $r = 5$ y concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$

   b) Centro $(3, -1)$ y tangente al eje y

   c) De radio 6 y tangente a los dos ejes coordenados.

   d) Un diámetro es el segmento entre $(2, -3)$, $(-4, 5)$

   e) Que pase por los puntos $(-4, 1), (3, 0), (5, 4)$

   f) Que pase por $(11, 1)$, $(3, -3)$ y que sea tangente a la recta $3x + 4y + 13 = 0$

   g) Tiene su centro en la recta $2x - y - 10 = 0$ y pasa por $(1, 3)$, $(5, -3)$

2. Determinar los puntos de intersección de los lugares geométricos siguientes:

   a) $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ y $3x + y + 11 = 0$

   b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$

3. Encontrar el centro y el radio de:

   a) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$

   b) $x^2 + y^2 + 8y = 0$

4. Encontrar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto T a la circunferencia cuya ecuación se dá:

   a) $T(0, 0),\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

   b) $T(2, 1),\ x^2 + y^2 - 12x + 14y + 5 = 0$

5. Encontrar una ecuación cartesiana de la circunferencia cuyo centro es P y que es tangente a la recta $\mathcal{L}$

   a) $P(3, 4),\ \mathcal{L} : x = 8$

   b) $P(1, -5),\ \mathcal{L} : x + y = 5$

6. Considere la circunferencia que pasa por los puntos $P(0, 4), Q(0, 0)$ y $R(4, 0)$

   a) Determinar su ecuación cartesiana

   b) Determinar las intersecciones de la circunferencia con la recta $\mathcal{L}_1 : x - y - 1 = 0$

   c) Encontrar la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ tangente a la circunferencia en el punto $(0, 4)$

   d) Demostrar que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$

7. Obtener las ecuaciones de todas las rectas con pendiente $\frac{3}{2}$ y que son tangentes a
$x^2 + y^2 = 13$.

8. Deteminar la ecuación de la circunferencia tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ en $(0, -1)$ y que contiene al punto $(-1, -8)$

9. Deteminar la ecuación de la circunferencia tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ en $(0, -1)$ ¿Qué es lo que puede concluir ? (Observe el resultado del problema anterior)

10. Resolver los siguientes problemas. En cada caso haga una definición apropiada de los objetos necesarios para la solución del problema y sólo hasta el final ponga números y haga las operaciones algebraicas.

    a) Demostrar que las siguientes circunferencias son concéntricas (tienen el mismo centro)

    $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 &= 0 \end{aligned}$$

    b) Demostrar que las siguientes circunferencias son tangentes

    $$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 &= 0 \\ 12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 &= 0 \end{aligned}$$

    c) Demostrar por dos métodos diferentes que las siguientes circunferencias no se cortan

    $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 &= 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 &= 0 \end{aligned}$$

    d) La ecuación de una circunferencia es

    $$4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$$

    Determinar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta

    $$5x - 12y - 1 = 0$$

    e) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia

    $$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

    f) Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

    $$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$$

    en el punto $P(6, 5)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones)

g) Determinar el valor de la constante k para que la recta

$$2x + 3y + k = 0$$

sea tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$$

h) Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta

$$7x - 2y - 1 = 0$$

y que es tangente a cada una de las rectas

$$\begin{aligned} 5x - 12y + 5 &= 0 \\ 4x + 3x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

i) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-3, -1)$ y $Q(5, 3)$ y que es tangente a la recta

$$x + 2y - 13 = 0$$

(Dos soluciones)

11. Sean las siguientes circunferencias no concéntricas:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 - \frac{44}{5}x - \frac{8}{5}y + 16 = 0 \\ \mathcal{C}_2 &: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{aligned}$$

a) Determinar si son o no tangentes.

b) Determinar las coordenadas de un punto $P(x*, y*)$ tal que la longitud de la tangente de P a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_2$ es de 4 unidades. (*Sugerencia* hacer uso de la definición alternativa de eje radical)

12. Demostrar el siguiente
Teorema Un punto $Q(x, y)$ está en la parábola con foco $F(p, 0)$ y directriz $x = -p$ si y sólo si satisface la ecuación $y^2 = 4\,px$
Sugerencia Es necesario demostrar

a) que todo punto $Q(x, y)$ que está en la parábola con foco $F(p, 0)$ y directriz $x + p = 0$ satisface la ecuación $y^2 = 4px$,

b) todo punto $Q(x, y)$ que satisface la ecuación $y^2 = 4px$ está en la parábola con foco $F(p, 0)$ y directriz $x + p = 0$

Explicar por qué es necesario hacer esto.

13. Sea la parábola del ejercicio anterior

a) Dibujar el lado recto y determinar las coordenadas de sus extremos.

b) Determinar la longitud del lado recto.

14. Encontrar las ecuaciones de las siguientes parábolas:

    a) $V(2,3)$, parámetro $p=4$, concavidad hacia arriba.

    b) $V(1,-4), F(-5,-4)$

    c) $F(2,3), \mathrm{lr}=4$, concavidad hacia la izquierda.

15. Encontrar los elementos que caracterizan a las parábolas siguientes:

    a) $(x+4)^2 = -\frac{3}{4}(y-1)$

    b) $y^2 = 6(x-1)$

    c) $-2y^2+4y-x-1=0$

    d) $3y^2+6y+x+3=0$

16. Encontrar las ecuaciones de la parábola con foco $(3,4)$ y directriz $2x-y+3=0$.

17. Determinar la ecuación cartesiana de la cónica que satisface las tres condiciones que se presentan a continuación:

    - Una directriz es $\mathcal{D}: x=1$
    - Su eje focal coincide con el eje x
    - El lado recto corta a la cónica en $(-3,4)$

18. Deducir como se hizo en clase la ecuación vectorial de una parábola con vértice $V(h,k)$ y con $\hat{u}$ el vector director del eje de la parábola.

19. Proporcionar las ecuaciones paramétricas de la parábola con:

    a) $V(0,0),\ p=\sqrt{2},\ \hat{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1,1\rangle$
    ¿Se trata de una rotación, de una translación o de ambas?

    b) $V(2,3),\ p=5,\ \hat{u}=\frac{1}{5}\langle 3,4\rangle$
    ¿Se trata de una rotación, de una translación o de ambas?

    c) $V(5,2),\ p=3,\ \hat{u}=-\frac{1}{13}\langle 5,12\rangle$
    ¿Se trata de una rotación, de una translación o de ambas?

20. Demostrar que la gráfica de la función $f(x)=ax^2+2bx+c$, con $a\neq 0$ es la parábola con foco $\left(-\frac{b}{a}, c-\frac{b^2}{a}+\frac{1}{4a}\right)$ y directriz $y=c-\frac{b^2}{a}-\frac{1}{4a}$

21. Encontrar la ecuación de las tangentes a la curva $x=y^2-y+1$ que pasan por el origen.

22. Encontrar las ecuaciones ordinarias y vectoriales de las elipses cuyos elementos son los que se indican:

a) Vértices $V_1(7,-2)$, $V_2(-5,-2)$; $e=\frac{2}{3}$

b) Focos $F_1(5,4)$, $F_2(-1,4)$; $\mathrm{lr}=\frac{32}{5}$

c) Focos $F_1(5,1)$, $F_2(-1,1)$; longitud del eje menor 10 unidades.

d) Centro $C(3,-3)$, vértice $V(3,5)$, $\mathrm{lr}=4$

23. Encontrar todos los elementos (centro, ejes, focos, excentricidad y lado recto) de las elipses:

a)
$$\frac{\langle x+4\rangle^2}{25}+\frac{\langle y-1\rangle^2}{16}=1$$

b)
$$x^2+4y^2+8x-16y+28=0$$

c)
$$16x^2+y^2-32x+6y-39=0$$

24. Encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen y que pase por los puntos $P(1,3)$, $Q(4,2)$.

25. Determinar la ecuación vectorial de la elipse con focos $(-1,-3)$, $(1,-2)$ si $a=3$. Proporcione también las coordenadas de los vértices y los covértices.

26. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos ejes son $x+2y-3=0$; $4x-2y+1=0$ con respectivas longitudes 6 y 4.

27. Encontrar la recta tangente a la elipse $2x^2+y^2=9$ en $P(2,-1)$.

28. Determinar los elementos (vértices, focos, ejes, extremos de los lados rectos, longitud del lado recto), al igual que las ecuaciones paramétrica y cartesiana y finalmente dibujar los lugares geométricos de las colecciones

a)
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, \langle x,y\rangle=\langle -1,4\rangle+x'\,\hat{\imath}+y'\,\hat{\jmath};\ \frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{9}=1\right\}$$

b)
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, \langle x,y\rangle=\langle 5,2\rangle+x'\,\hat{\jmath}-y'\,\hat{\imath};\ \frac{(x')^2}{49}+\frac{(y')^2}{16}=1\right\}$$

29. Encontrar las ecuaciones ordinarias y vectoriales de las hipérbolas que cumplen con las siguientes condiciones:

a) Centro $C(-5,3)$, $2a=10$, $2b=6$, eje focal paralelo al eje x

b) Focos $(7,1),(-5,1)$ longitud del eje transverso 6

c) Vértices $(-1,8)$, $(-1,-4)$, $\mathrm{lr}=3$

d) Asíntotas $x - 4y + 4 = 0,\ 2x + y - 2 = 0$, que pase por $(2, 3)$

30. Encontrar los elementos (centro, ejes, focos, vértices, excentricidad, lado recto y asíntotas) de las hipérbolas que se presentan a continuación. Haga también un dibujo.

    a) $16(x+3)^2 - 4(y-5)^2 = 64$

    b) $16x^2 - 9y^2 + 128x - 72y + 256 = 0$

    c) $9x^2 - y^2 + 18x - 10y + 19 = 0$

31. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(-1, 4), (2, -3)$ y la longitud del eje real es $2a = 6$.

32. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los puntos P tales que el cociente de la distancia entre P y $F_1(ae, 0)$ y la distancia entre P y la recta $\mathcal{D}_1 : x = \frac{a}{e}$, es igual a e. Demostrar que $\mathcal{H}$ es una hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

    siempre y cuando $e > 1$ y $b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$

33. Para las siguientes ecuaciones que definen ciertos lugares geométricos determinar a qué tipo de gráfica corresponden y proporcionar todos sus elementos.

    a) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 41 = 0$

    b) $-4x^2 + y^2 - 24x - 2y - 51 = 0$

    c) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

    d) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

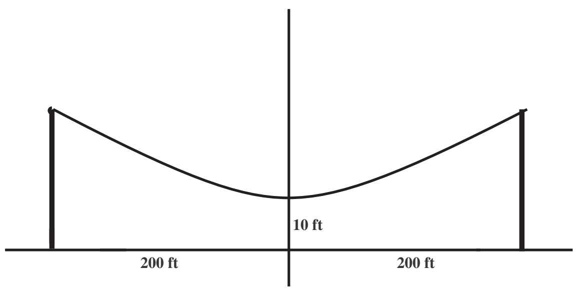

Figura 4.1: Ejercicio (34)

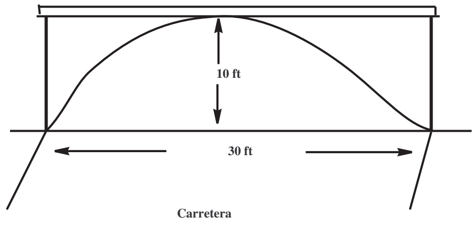

Figura 4.2: Ejercicio (35)

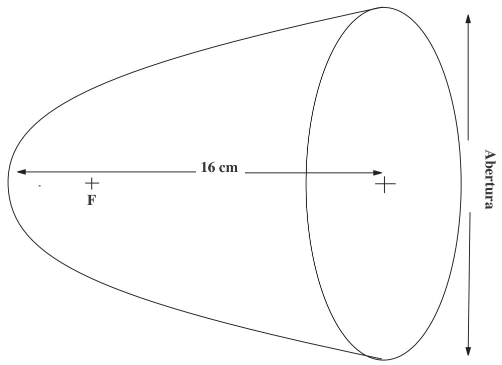

Figura 4.3: Ejercicio (36)

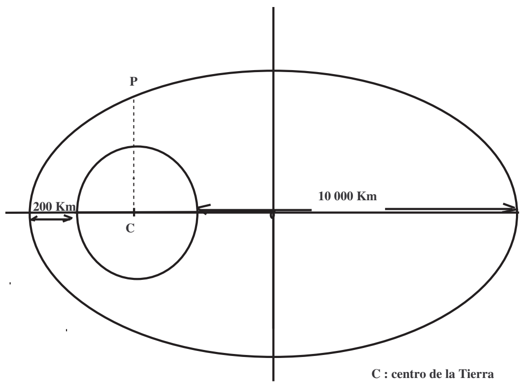

Figura 4.4: Ejercicio (37)

34. Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre dos torres gemelas que distan 400 pies una de la otra y que se elevan a 90 pies sobre una carretera horizontal. Un cable suspendido entre los extremos superiores de las torres tiene forma parabólica y su punto medio se encuentra a 10 pies por encima de la carretera.
    Considere los ejes coordenados de la figura y encuentre la ecuación de la parábola que hace el cable. (Figura 4.1)

35. Un arco de un puente tiene forma semielíptica con el eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies y la parte más alta está a 10 pies por encima de la carretera horizontal que pasa por abajo del puente. Calcular la altura del arco sobre el punto del suelo que está a 6 pies del centro. (Figura 4.2)

36. Se tiene un reflector parabólico cuya forma se obtiene haciendo girar, alrededor de su eje, un arco de parábola que empieza en el vértice. Si el foco está a 9cm del vértice y el arco parabólico tiene 16cm de profundidad, determine la abertura del reflector. (Figura 4.3)

37. Un satélite es puesto en órbita elíptica alrededor de la Tierra. El radio terrestre mide 6000km (aproximadamente) y su centro de localiza en uno de los focos de la órbita. (Figura 4.4)

    a) Utilice la infomación dada en la Figura (4.4) que se presenta a continuación y en el enunciado para obtener la ecuación de una órbita.

    b) ¿Cuál es la altura del satélite sobre la superficie de la Tierra en el punto P ?

Capítulo 5

Ecuaciones Paramétricas.

5.1. Tarea 4

1. Sea el siguiente lugar geométrico

$$\mathcal{G} = \begin{cases} x &= t^2(3-2t) \\ y &= t^3(3-2t) \end{cases}$$

Encontrar:

a) El o los puntos (x, y) en donde corta los ejes coordenados.

b) El o los puntos (x, y) en donde hay una tangente horizontal.

c) El o los puntos (x, y) en donde hay una tangente vertical.

d) La ecuación vectorial de la recta tangente en el punto correspondiente a $t = \frac{1}{2}$

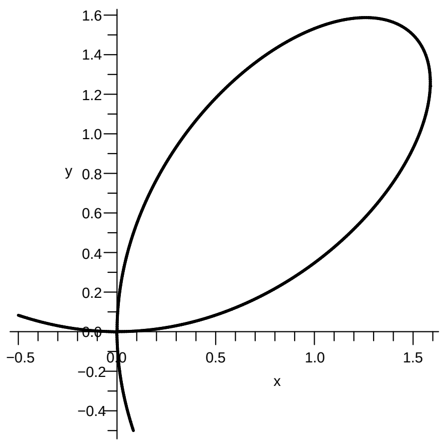

Figura 5.1: Folio de Descartes, ejercicio (3)

2. Graficar y anotar similaridades y diferencias entre:

a)

$$\mathcal{G}_1 = \begin{cases} x &= t \\ y &= \sqrt{t^2-1} \end{cases}$$

b)

$$\mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{t} \\ y & = & \sqrt{t-1} \end{array} \right.$$

Expresar la ecuación de cada curva mediante la eliminación del parámetro.

3. Sea P un punto sobre la curva folio de Descartes que aparece en la Figura 5.1 y cuya ecuación es: $x^3 + y^3 = 3axy$ con $a = 1$
Parametrizar esta ecuación considerando a P como el punto de intersección la recta $y = tx$ con el rizo .

4. En cada inciso parametrizar la ecuación con respecto a $y = tx$

   a) $x^4 - 3xy^2 + 2y^3 = 0$

   b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

5. Eliminar el parámetro en los siguientes lugares geométricos:

   a)

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + \cos\phi \\ y & = & -1 + \operatorname{sen}\phi \end{array} \right.$$

   b)

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t^3 \\ y & = & t^2 \end{array} \right.$$

6. Encontrar la ecuación rectangular correspondiente a:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\cos\phi \\ y & = & \operatorname{sen}^2\phi \end{array} \right.$$

y dibujar la gráfica de la ecuación resultante.

7. Encontrar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + 3\tan\theta \\ y & = & 1 + 4\sec\theta \end{array} \right.$$

8. Considere una recta con pendiente m tangente a la parábola $y^2 = 4px$. Considere ahora una recta *normal* a la tangente anterior y que pase por el foco de la parábola.
Los puntos de intersección de todas las tangentes con su respectiva recta normal forman un lugar geométrico denotado como la *podaria* de la parábola $y^2 = 4px$.
Determine la ecuación de ese lugar geométrico.

9. Encontrar las ecuaciones paramétricas de los siguientes lugares geométricos:

   a) Elipse (Figura 5.2)

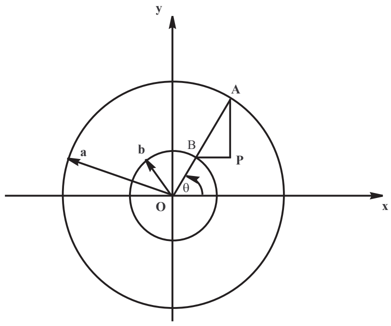

Figura 5.2: Elipse, ejercicio (9a.)

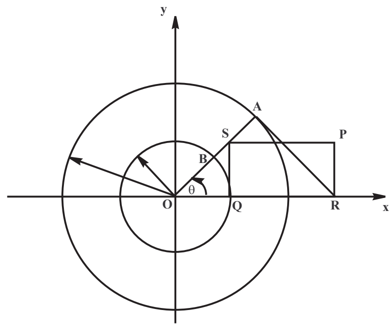

Figura 5.3: Hipérbola, ejercicio (9b.)

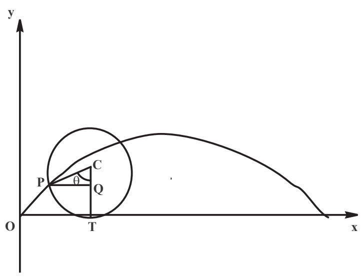

Figura 5.4: Cicloide, ejercicio (9c.)

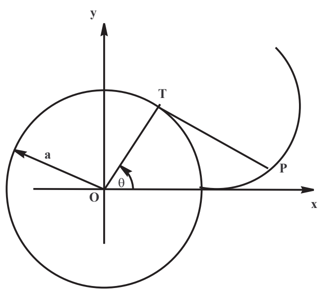

Figura 5.5: Involuta, ejercicio (9d.)

b) Hipérbola (Figura 5.3)

c) Cicloide (Figura 5.4)

d) Involuta (Figura 5.5)

e) Epicicloide (Figura 5.6)

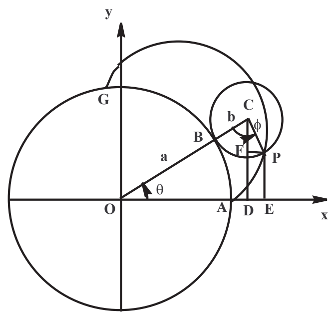

Figura 5.6: Epicicloide, ejercicio $(9e)$

10. Por el punto fijo $A(-a, 0)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se traza una cuerda AB. Demostrar que el lugar geométrico descrito por los puntos medios es $x^2 + y^2 + ax = 0$

    Sugerencias

    - Expresar en forma paramétrica la ecuación de la circunferencia.
    - Encontrar el punto medio de AB.
    - Eliminar el parámetro.

11. Con referencia a la figura (6.3), sean O y B los extremos de un diámetro fijo de una circunferencia de radio a. t es la tangente a la circunferencia en el punto B. Desde O se traza una secante s que corta a la circunferencia en el punto C y a la tangente en el punto D. Determine el la ecuación paramétrica del lugar geométrico que describe el punto P de la secante s si $d(O,P) = d(EB)$ para toda posición de la secante en la medida que gira alrededor de O.

12. En la Figura (6.2) determinar la ecuación paramétrica el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que $d(O,P) = d(T,M)$

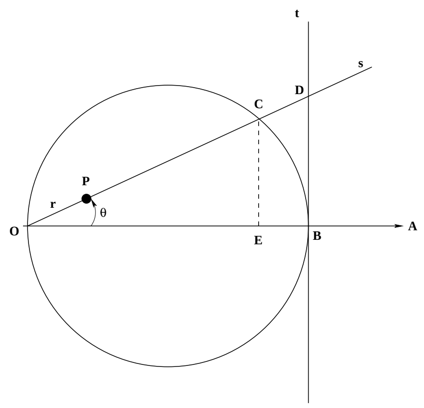

Figura 5.7: Cisoide de Diocles, ejercicio (11)

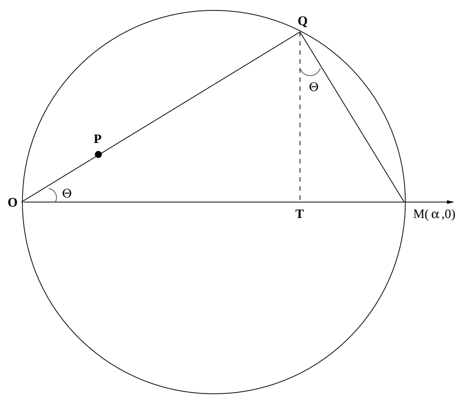

Figura 5.8: Ejercicio (12)

Capítulo 6

Coordenadas Polares.

6.1. Tarea 5

1. Proporcionar las coordenadas de los puntos que aparecen en la Figura (6.1)

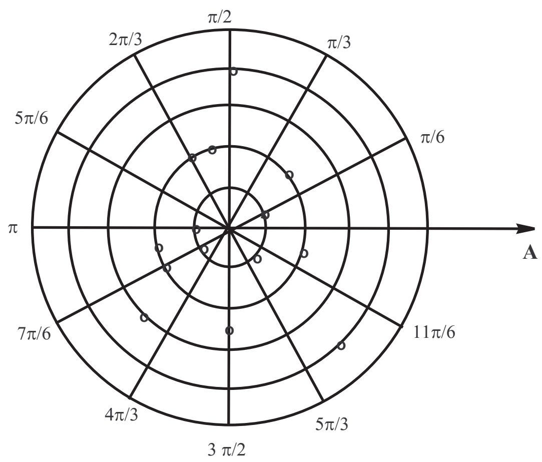

Figura 6.1: Coordenadas polares, ejercicio (1)

2. Dibuje los puntos que aparecen a continuación:

   a) $(-1, \pi)$
   b) $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$
   c) $\left(-3, \frac{-4\pi}{3}\right)$
   d) $\left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$
   e) $\left(5, \frac{-4\pi}{3}\right)$
   f) $\left(3, \frac{-23\pi}{12}\right)$

3. Escriba otras parejas de coordenadas polares para los puntos:

   a) $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$
   b) $\left(6, \frac{-\pi}{6}\right)$
   c) $(-4, \pi)$
   d) $(2, \pi)$
   e) $\left(4, \frac{-3\pi}{2}\right)$

4. Graficar las siguientes ecuaciones indicando las intersecciones con los ejes, simetrías, extensión, etc. y proporcionar la ecuación correspondiente en coordenadas cartesianas.

   a) $r = \cos 3\phi$

   b) $r^2 = \operatorname{sen} \phi$

   c) $r^2 = 9 \cos 2\phi$

5. Encontrar gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las curvas:

   a)
   $$\begin{aligned} r^2 &= 9 \cos 2\phi \\ r &= \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} r^2 &= \operatorname{sen} \theta \\ r^2 &= \cos \theta \end{aligned}$$

6. Dibujar las siguientes curvas y encontar los puntos de intersección entre ellas.
   $$\begin{aligned} r &= 1 \\ r &= 2 \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

7. Demostrar que la ecuación en coordenadas polares de $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$ es
   $$r^2 = \operatorname{sen}^2 2\theta$$

8. Transformar la siguiente ecuación polar a una ecuación cartesiana.
   $$r = \tan \phi \sec \phi$$

9. Si la distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a una recta $\mathcal{L}$ expresada en su forma normal
   $x \cos \alpha + \sin \alpha - p = 0$, está dada por
   $$d(P, L) = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$$
   demostrar que la distancia de P a la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0$ con $A^2 + B^2 \neq 0$, está dada por
   $$d(P, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

10. Demostrar que si
$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\phi}$$
es la ecuación de una elipse, entonces
$$\frac{2ep}{\sqrt{1-e^2}}$$
es la longitud del *eje menor*. (**NO** transformar a coordenadas cartesianas)

11. En la Figura (6.2) determinar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que $d(O, P) = d(T, M)$

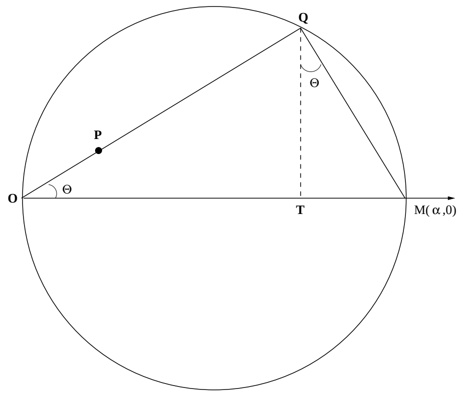

Figura 6.2: Ejercicio (11)

12. Con referencia a la figura (6.3), sean O y B los extremos de un diámetro fijo de una circunferencia de radio a. t es la tangente a la circunferencia en el punto B. Desde O se traza una secante s que corta a la circunferencia en el punto C y a la tangente en el punto D. Determine el la ecuación del lugar geométrico que describe el punto P de la secante s si $d(O, P) = d(EB)$ para toda posición de la secante en la medida que gira alrededor de O.

13. En la Figura (6.4) que se presenta a continuación puede observarse la forma general de la *Bruja de Agnesi* al variar el ángulo ϕ.

    a) Encontar sus ecuaciones paramétricas.

    b) Encontrar su ecuación cartesiana

14. Una podaria es el lugar geométrico que describe un punto P resultado de la intersección de la recta tangente $\mathcal{L}_T$ a otro lugar geométrico (una cónica, por ejemplo) y la recta $\mathcal{L}_N$ perpendicular a $\mathcal{L}_T$ satisfaciendo una condición adicional.
    Demostrar que la ecuación de la podaria a la parábola $y^2 = 4px$ con respecto al foco $F(p, 0)$ es el eje-y.

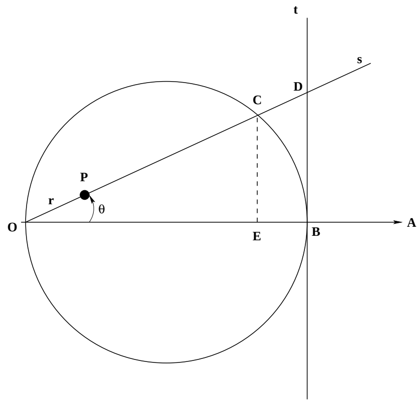

Figura 6.3: Cisoide de Diocles, ejercicio (12)

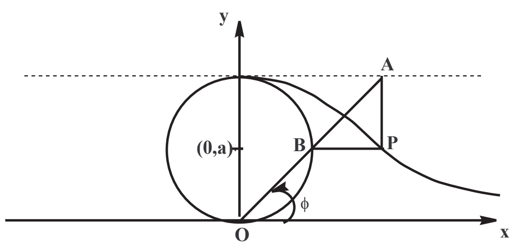

Figura 6.4: Bruja de Agnesi, ejercicio (13)

15. Un satélite tiene una órbita elíptica alrededor de la Tierra. El planeta es uno de sus focos. Los puntos más cercanos y más lejanos están a 100 millas y a 500 millas respectivamente. Encontrar la ecuación polar de la órbita si se considera que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

Apéndice A

Espacios Vectoriales.

A.1. Espacios vectoriales

A.1.1. Introducción

Todo discurso matemático requiere de un soporte estructural que permita su desarrollo. Para el enfoque de la Geometría Analítica que nos interesa estudiar, el soporte requerido es el que suministra el concepto de Espacio Vectorial. Conversamente, en muchas ramas de la matemática actual como en la de las ecuaciones diferenciales, análisis funcional, álgebra lineal, programación lineal, etc. el concepto de Espacio Vectorial es toral para su discusión. Creemos que el estudio de la Geometría Analítica es un excelente vehículo para introducir esa estructura.

A.1.2. Espacios vectoriales sobre los números reales.

Definición A.1 *Un conjunto* $\mathbf{V}$ *de objetos llamados* vectores $\hat{v}$ *tiene estructura de* Espacio Vectorial *sobre los números reales* $\mathbb{R}$*, si bajo las definiciones de dos operaciones denotadas como* adición *y* multiplicación por un número real *se satisfacen todos y cada uno de los axiomas siguientes:*

Sean $\hat{a},\ \hat{b},\ \hat{c} \in \mathbf{V}$ y sean $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, entonces
para la adición:

1. $$\hat{a} + \hat{b} \in \mathbf{V} \qquad \text{cerradura} \tag{A.1}$$

2. $$\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a} \qquad \text{conmutatividad} \tag{A.2}$$

3. $$\hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) = (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} \qquad \text{asociatividad} \tag{A.3}$$

4. Existe un único elemento de $\mathbf{V}$ llamado *neutro aditivo* y denotado como $\hat{0}$, tal que para todo elemento $\hat{a} \in \mathbf{V}$ se satisface:
$$\hat{a} + \hat{0} = \hat{a} \tag{A.4}$$

5. Para todo elemento $\hat{a} \in \mathbf{V}$ existe otro elemento llamado *inverso aditivo*, también en $\mathbf{V}$, denotado como $(-\hat{a})$ tal que:
$$\hat{a} + (-\hat{a}) = \hat{0} \tag{A.5}$$

Para la multiplicación por un escalar:

6. $$\alpha\, \hat{a} \in \mathbf{V} \qquad \text{cerradura} \tag{A.6}$$

7.

$$\alpha\,(\hat{a}+\hat{b}) = \alpha\,\hat{a} + \alpha\,\hat{b} \qquad \text{distributividad} \qquad (A.7)$$

8.

$$(\alpha+\beta)\hat{a} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a} \qquad \text{distributividad} \qquad (A.8)$$

9.

$$\alpha\,(\beta\hat{a}) = \beta\,(\alpha\hat{a}) = (\alpha\beta)\,\hat{a} \qquad \text{asociatividad} \qquad (A.9)$$

10.

$$\alpha\,\hat{a} = \hat{a} \quad \text{sis (si y sólo si)} \quad \alpha = 1 \qquad \text{neutro multiplicativo} \qquad (A.10)$$

A.1.3. El conjunto de flechas dirigidas.

El primer conjunto de interés que se estudiará es el conjunto de las flechas dirigidas en el plano, que se denota por $\{\nearrow\}$ y consiste del conjunto de segmentos de recta dirigidos caracterizados por:

a) Su magnitud, que es la longitud del segmento de recta respecto a una longitud unitaria de referencia.

b) Su dirección, que corresponde al ángulo θ que hace el segmento de recta con una horizontal y tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

c) Su sentido, que es hacia donde apunta la única punta de flecha que contiene el segmento de recta.

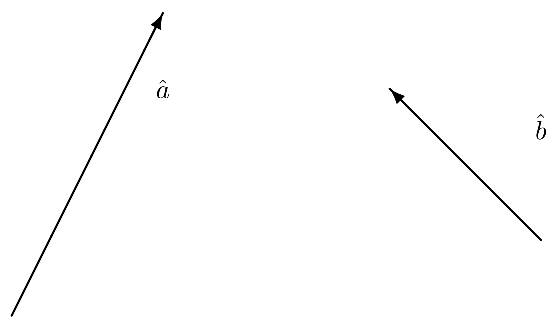

Figura A.1: Flechas dirigidas.

A continuación se definen las operaciones de adición y multiplicación por un escalar para este conjunto:

Definición A.2 *La adición de dos flechas dirigidas se lleva a cabo utilizando cualesquiera de los procedimientos que se describen a continuación:*
Método del Triángulo: *se coloca el origen de la segunda flecha en la punta de la primera, la flecha suma es la que resulta de unir el origen de la primera flecha con la punta de la segunda.* (Figura 1.2)
Método del paralelogramo: *en este caso se hacen coincidir el origen de las dos flechas, se construye un paralelogramo trazando paralelas a ellas y la flecha suma es la diagonal que parte del origen común al vértice opuesto.* (Figura A.2)

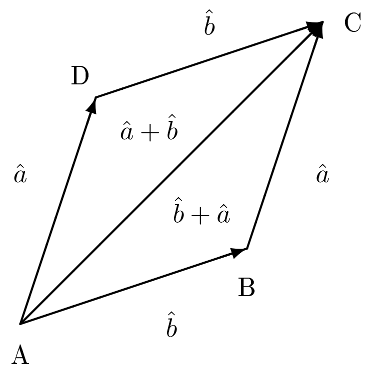

Figura A.2: Adición de flechas dirigidas.

Definición A.3 *La multiplicación de una flecha dirigida por un número real (un escalar) está definida por una de las siguientes operaciones:*

a) Si $\alpha \geq 1$ la longitud de la flecha se estira α veces.

b) Si $0 < \alpha < 1$ la longitud de la flecha se acorta α veces.

c) Si $\alpha < 0$ se cambia el sentido de la flecha y su magnitud cambia siguiendo las reglas a) *y* b) *aplicadas a $|\alpha|$.* (Figura 1.3)

Para verificar que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial es necesario constatar que todos los axiomas (A.1 - A.10) se cumplan. Así, para la adición:

1. El axioma de cerradura implica que si los sumandos son elementos de un conjunto, su suma también lo es. En el conjunto de flechas dirigidas este axioma es cierto ya que de su definición la suma de flechas dirigidas es otra flecha dirigida.

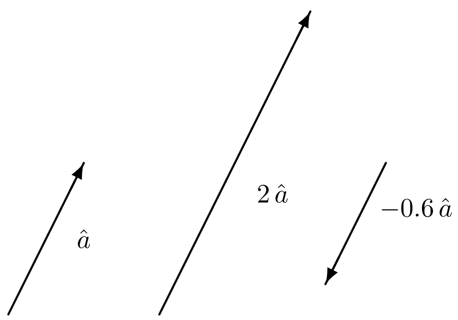

Figura A.3: Multiplicación por un escalar.

2. Conmutatividad. En la Figura 1.2 se puede observar que la flecha dirigida suma $(\hat{a}+\hat{b})$ es la diagonal (segmento AC del paralelogramo $ABCD$. Entonces de acuerdo con del método del triángulo:

$$(\hat{a}+\hat{b}) = \widehat{AC} = \left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{AD}+\widehat{DC} & = & \hat{a}+\hat{b} \\ \widehat{AB}+\widehat{BC} & = & \hat{b}+\hat{a} \end{array} \right.$$

   y por lo tanto la flecha resultante es única.

3. Asociatividad. En la Figura 1.4 se lleva a cabo una construcción en la que se ilustra la veracidad de este axioma con los vectores arbitrarios $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

4. Neutro aditivio. La flecha cero $(\hat{0})$ se define como aquella flecha con magnitud cero, es decir un segmento de recta con longitud cero, más aún debe satisfacer:

$$\hat{a}+\hat{0}=\hat{a}$$

   para toda $\hat{a} \in \{\nearrow\}$.
   La flecha $\hat{0}$ es la única sin dirección ni sentido. Por esta razón y por el hecho de para que cualquier otra flecha la longitud de su segmento de recta es distinto de cero, se concluye que flecha cero es única.

5. Inverso aditivo. Para toda flecha $\hat{a} \in \{\nearrow\}$ existe en $\{\nearrow\}$ otra denotada como $-\hat{a}$, tal que:

$$\hat{a}+(-\hat{a})=\hat{0}$$

   La flecha $-\hat{a}$ tiene la misma magnitud que $\hat{a}$ pero tienen sentidos opuestos, por tanto su suma deviene en una flecha de longitud cero, es decir, en la flecha cero.

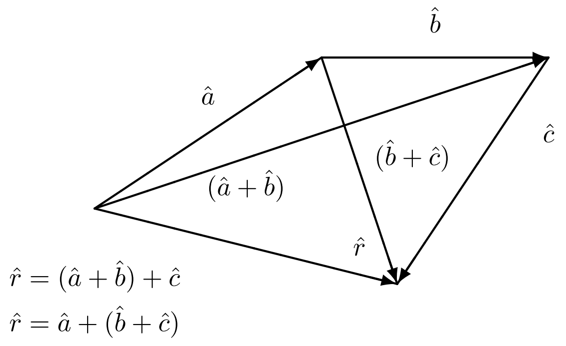

Figura A.4: Asociatividad de la adición de flechas.

Se puede concluir que el conjunto $\{\nearrow\}$ cumple con todos los axiomas de la adición.

A continuación se presentan los axiomas correspondientes a la multiplicación por un escalar.

6. Cerradura. De la definición de multiplicación de un número real por una flecha es claro que el resultado de esta operación es otra flecha, por tanto este axioma se satisface.

7. Distributividad. Antes de proponer una demostración de este axioma es conveniente hacer algunos comentarios. La situación se describe en la Figura A.5.

   Geométricamente esta proposición implica que si a las flechas $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se les cambia su magnitud en la misma proporción entonces la diagonal del paralelogramo $AEFG$ cambia su magnitud en la misma medida, y conversamente, si se cambia la magnitud de la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ entonces sus lados cambian en la misma proporción. Entonces: Sean los triángulos $\triangle CAB$ y $\triangle FAE$, éstos son semejantes ya que:

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle FAE \\ \angle ABC &= \angle AEF \\ \angle BCA &= \angle EFA \end{aligned}$$

   Si se denota la longitud de una flecha mediante el símbolo $\|\cdot\|$ se tienen

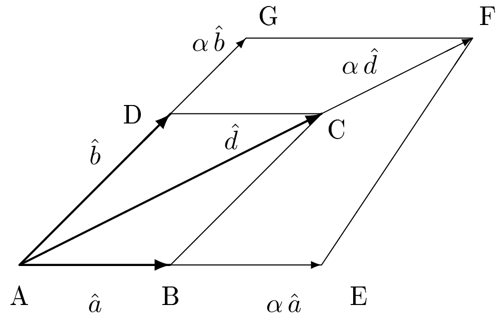

Figura A.5: Distributividad de la multiplicación de un escalar sobre una suma de flechas.

entonces las siguientes longitudes:

$$\begin{aligned} AB &= \|\widehat{AB}\| \quad \text{longitud de } \widehat{AB} \\ AC &= \|\widehat{AC}\| \quad \text{longitud de } \widehat{AC} \\ AE &= \|\widehat{AE}\| \quad \text{longitud de } \widehat{AE} \\ AE &= \alpha\, AB \end{aligned}$$

De las propiedades de los triángulos semejantes (Tales de Mileto) se tiene:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} \tag{A.11}$$

entonces, si a la flecha $\widehat{AB}$ se le cambia su magnitud α veces, esto es:

$$\widehat{AE} = \alpha\,\widehat{AB}$$

lo que se tiene que demostrar es que la magnitud de la flecha $\widehat{AC}$ cambia en la misma proporción:

$$\widehat{AF} = \alpha\,\widehat{AC}$$

pero esto es inmediato de la ecuación (A.11) ya que:

$$\begin{aligned} AF &= \frac{AC}{AB} AE \\ &= \frac{AC}{AB} \alpha\, AB \\ &= \alpha\, AC \end{aligned}$$

Más aún, si $\hat{u}$ es una flecha de longitud uno en la dirección de $\widehat{AF}$ y de $\widehat{AC}$, dado que son colineales, se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{AF} &= AF\,\hat{u} \\ &= \alpha\, AC\,\hat{u} \\ &= \alpha\,\widehat{AC} \end{aligned}$$

Finalmente la prueba se completa haciendo una demostración similar para los triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle GAF$.

La demostración de los axiomas (A.8) y (A.9) se deja al lector como ejercicio.

8. Neutro multiplicativo. En este caso el único real que no modifica ni la longitud ni el sentido de una flecha es el número 1, y éste es único ya que $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces sea $\hat{a} \in \mathbf{V}$ distinto de $\hat{0}$:

$$\begin{aligned} \alpha\,\hat{a} &= 1\,\hat{a} = \hat{a}, \qquad \text{pero} \\ (\alpha - 1)\hat{a} &= \hat{0}, \qquad \text{por tanto} \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

Consecuentemente, el conjunto de las flechas dirigidas satisface los axiomas para la multiplicación por un escalar.

Se concluye entonces que bajo las operaciones de adición (**Definición A.2**) y multiplicación por un escalar (**Definición A.3**) arriba definidas, el conjunto de flechas dirigidas $\{\nearrow\}$ tiene estructura de espacio vectorial. $\ldots\square$

Un resultado adicional de la operación de multiplicación por un escalar consiste en las definiciones de vectores flecha paralelos, vectores colineales y vectores no colineales:

Definición A.4 (Vectores paralelos.) *Se dice que dos vectores flecha, distintos de la flecha cero, son paralelos si tienen la misma dirección. (c.f. A.3) Es decir, las rectas a lo largo de las cuáles actuan tienen el mismo ángulo respecto a la horizontal.*

esta definición implica que si las flechas $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son paralelas entonces existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que la siguiente igualdad es verdadera:

$$\hat{b} = \alpha\hat{a}$$

Un caso especial de vectores paralelos son las flechas colineales, es decir, aquéllas que comparten la misma línea de acción.

Definición A.5 *Dos flechas, distintas de la flecha cero, son no colineales si sus direcciones respectivas son disitintas.*

De esta definición se puede concluir que no existe un escalar α tal que:

$$\hat{b} = \alpha\hat{a}$$

ya que la operación de multiplicación por un escalar sólo cambia la magnitud y/o el sentido de la flecha pero no su dirección.

A.1.4. El conjunto de parejas de números reales $\mathbf{R^2}$.

En la sección anterior se presentó como ejemplo de espacio vectorial al conjunto de flechas dirigidas con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, en ésta se analizará otro conjunto con dos operaciones para determinar si tiene estructura de espacio vectorial.

Existen tanto en la matemática como en la vida diaria objetos o situaciones que requieren, para ser especificados adecuadamente, de dos o más números reales en los que el orden de los números es significativo, por ejemplo, el marcador de un juego, las coordenadas de un punto, la fecha, etc.

Se definirá en esta sección el concepto de "par ordenado" de elementos, la notación para escribir dichos pares y algunas operaciones algebraicas sobre ellos para posteriormente, analizar, si es posible pensar en una estructura de espacio vectorial sobre ese conjunto con las operaciones definidas.

Es fundamental, antes de empezar, definir el producto cartesiano de dos conjuntos:

Definición A.6 (Producto cartesiano) *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos conjuntos, el* producto cartesiano*, denotado por* $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$*, es el conjunto de parejas ordenadas* (x,y) *donde* $x\in\mathbf{A}$ *y* $y\in\mathbf{B}$*, esto es:*

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{(x,y)|x\in\mathbf{A},y\in\mathbf{B}\}$$

y la igualdad *de pares* (x,y) *y* (r,s) *en* $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ *se define con:*

$$(x,y)=(r,s) \quad \textit{si y sólo si} \;\; x=r,\; y=s$$

a los elementos de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ *se les denomina* pares ordenados.

Ejemplo A.1.4.1 Sea $\mathbf{A}=\{a,b,c\}$, $\mathbf{B}=\{1,2\}$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \{(x,y)|x\in\mathbf{A}\ ,\ y\in\mathbf{B}\}\\ &= \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}\end{aligned}$$

$\ldots\square$

Puede observarse que el conjunto $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ no contiene los mismos elementos que $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ya que:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\times\mathbf{A} &= \{(x,y)|x\in\mathbf{B},\ y\in\mathbf{A}\}\\ &= \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}\end{aligned}$$

Definición A.7 ($\mathbb{R}^2$) *Los elementos de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ *se llaman* pares ordenados de números reales *y se denotarán por:* (a_1,a_2) *o* $\hat{a}$*, asumiendo que* $\hat{a}$ *representa a la pareja de números reales* (a_1,a_2)*. Una forma de escribir* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *es* $\mathbb{R}^2$*.*

Dos ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ son: $(2,1),(1,2)$, que además son diferentes, ya que el primer elemento del primer par no es igual al primer elemento del segundo par.

A continuación se definen las operaciones de adición de dos pares ordenados de números y reales y la multiplicación de un par ordenado por un escalar real:

Definición A.8 (Adición de dos pares ordenados de números reales) *Sean $\hat{a} = (a_1, a_2)$ y $\hat{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$, la* adición *de dos pares ordenados de números reales en $\mathbb{R}^2$, se denota por $\hat{a} + \hat{b}$ y se define como:*

$$\hat{a} + \hat{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Esto implica que la suma de dos pares ordenados es también un par ordenado, cuyas componentes se obtienen sumando las componentes respetivas de cada uno de los sumandos.

Ejemplo A.1.4.2 Sumar $\hat{a} = (1,2)$ y $\hat{b} = (-3,4)$

$$\hat{a} + \hat{b} = (1 + (-3), 2 + 4) = (-2, 6)$$

$\ldots \square$

Definición A.9 (Multiplicación de un par ordenado de números reales por un número real) *Sea $\hat{a} = (a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ la* multiplicación *de un par ordenado de números reales por un número real se denota por $\alpha\hat{a}$ y se define como:*

$$\alpha\hat{a} = \alpha(a_1\, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

Entonces la multiplicación por un escalar también da como resultado un par ordenado cuyos elementos son α veces los elementos de $\hat{a}$.

Ejemplo A.1.4.3 Calcular $\alpha\hat{a}$ si $\hat{a} = (-1, 4)$ y $\alpha = 2$.

$$\alpha\hat{a} = (2(-1), 2(4)) = (-2, 8)$$

$\ldots\square$

Se analizará a continuación si el conjunto de pares ordenados de números reales, $\mathbb{R}^2$, con las operaciones de suma de parejas ordenadas y multiplicación de un par ordenado de números reales por un número real cumple los axiomas de un espacio vectorial.

Sean

$$\hat{a} = (a_1, a_2),\ \hat{b} = (b_1, b_2),\ \hat{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Para la adición de parejas ordenadas:

1. Cerradura. El axioma de la cerradura en la adición implica que si se suman dos pares ordenados de números reales el resultado debe ser también un par ordenado de números reales, esto es:

$$\hat{a} + \hat{b} \in \mathbb{R}^2$$

   De la definición de adición:

$$\hat{a} + \hat{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

   que es una pareja en $\mathbb{R}^2$.

2. Conmutatividad.

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$$

   De la definición de suma de en $\mathbb{R}^2$y haciendo uso de las propiedades de las operaciones de los números reales, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{a} + \hat{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \\ &= \hat{b} + \hat{a} \end{aligned}$$

3. Asociatividad en la suma

$$\hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) = (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c}$$

   De igual forma, para demostrar que este axioma se cumple, se invocarán las propiedades de los números reales y las definiciones de adición de parejas en $\mathbb{R}^2$, así:

$$\begin{aligned} \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) &= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\ &= (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} \end{aligned}$$

4. Neutro aditivo. Existe un elemento $\hat{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\hat{a} + \hat{0} = \hat{a}$$

Si $\hat{0} = (0, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \hat{a} + \hat{0} &= (a_1 + 0, a_2 + 0) \\ &= (a_1, a_2) \\ &= \hat{a} \end{aligned}$$

5. Inverso aditivo. Para toda $\hat{a} \in \mathbb{R}^2$, existe $-\hat{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\hat{a} + (-\hat{a}) = \hat{0}$$

Si se define $-\hat{a} = (-a_1, -a_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \hat{a} + (-\hat{a}) &= (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) \\ &= (a_1 - a_1, a_2 - a_2) \\ &= (0, 0) \\ &= \hat{0} \end{aligned}$$

Para la multiplicación por un escalar:

6. Cerradura. El resultado de la multiplicación de una pareja ordenada por un escalar es una pareja ordenada, esto es, $\alpha\hat{a} \in \mathbb{R}^2$.

   Por definición $\alpha\hat{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$que es una pareja ordenada en $\mathbb{R}^2$.

7. Distributividad.
$$\alpha(\hat{a} + \hat{b}) = \alpha\hat{a} + \alpha\hat{b}$$

   Al aplicar las definiciones de las operaciones en $\mathbb{R}^2$ y las propiedades de las operaciones de números reales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{a} + \hat{b}) &= \alpha(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (\alpha(a_1 + b_1), \alpha(a_2 + b_2)) \\ &= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) \\ &= (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\alpha b_1, \alpha b_2) \\ &= \alpha(a_1, a_2) + \alpha(b_1, b_2) \\ &= \alpha\hat{a} + \alpha\hat{b} \end{aligned}$$

8. Distributividad. También:

$$(\alpha + \beta)\hat{a} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a}$$

ya que:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\hat{a} &= ((\alpha+\beta)a_1,(\alpha+\beta)a_2)\\ &= (\alpha a_1+\beta a_1,\alpha a_2+\beta a_2)\\ &= (\alpha a_1,\alpha a_2)+(\beta a_1,\beta a_2)\\ &= \alpha(a_1,a_2)+\beta(a_1,a_2)\\ &= \alpha\hat{a}+\beta\hat{a}\end{aligned}$$

9. Asociatividad en la multiplicación por un escalar.

$$(\alpha\beta)\hat{a}=\alpha(\beta\hat{a})$$

De la misma manera que en los casos anteriores:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\hat{a} &= ((\alpha\beta)a_1,(\alpha\beta)a_2)\\ &= (\alpha(\beta a_1),\alpha(\beta a_2))\\ &= \alpha(\beta a_1,\beta a_2)\\ &= \alpha(\beta\hat{a})\end{aligned}$$

10. Neutro multiplicativo. El $1\in\mathbb{R}$ cumple con la propiedad: $1\hat{a}=\hat{a}$, ya que:

$$\begin{aligned}1\hat{a} &= 1(a_1,a_2)\\ &= (1a_1,1a_2)\\ &= (a_1,a_2)\\ &= \hat{a}\end{aligned}$$

Dado que todas las condiciones se satisfacen se puede afirmar que el conjunto de parejas ordenadas de reales con la suma y el producto por un escalar constituyen un espacio vectorial. $\ldots\square$

Ejercicios Para los conjuntos $\mathcal{V}$ y las operaciones de adición ($\oplus$) y de multiplicación ($\otimes$) por un número real que se describen a continuación, determine si $\mathcal{V}$ tiene o no estructutra de espacio vectorial.

1. $\mathcal{V}=\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, las operaciones son

Sean	$x,y\ \in\mathbb{R}^+,\quad \lambda\in\mathbb{R}$	
Adición	$x\oplus y=xy$	el producto algebraico de números reales
Multiplicación por un escalar	$\lambda\otimes x=x^\lambda$	exponenciación algebraica

2. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$, el conjunto de parejas ordenadas de números reales, las operaciones son

Sean	$\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Adición	$\hat{x} \oplus \hat{y} = \langle x_1 + y_1, 0 \rangle$
Multiplicación por un escalar	$\lambda \otimes \hat{x} = \langle \lambda x_1, \lambda x_2 \rangle$

3. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$, el conjunto de parejas ordenadas de números reales, las operaciones son

Sean	$\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Adición	$\hat{x} \oplus \hat{y} = \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2 \rangle$
Multiplicación por un escalar	$\lambda \otimes \hat{x} = \langle \lambda x_1, 0 \rangle$

4. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$, el conjunto de parejas ordenadas de números reales, las operaciones son

Sean	$\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Adición	$\hat{x} \oplus \hat{y} = \langle x_1 + y_1, x_2\, y_2 \rangle$
Multiplicación por un escalar	$\lambda \otimes \hat{x} = \langle \lambda x_1, x_2 \rangle$

(*Sugerencia* considere el neutro aditivo como $\langle 0, 1 \rangle$)

A.1.5. Dimensión y bases de un espacio vectorial V.

Una vez demostrado que $\{\nearrow\}$ y que $\mathbb{R}^2$ son dos espacios vectoriales es conveniente encontrar una manera sucinta para describirlos, más aún, esta metodología debe ser aplicable para cualquier espacio vectorial. A continuación se presentan y se comentan algunas definiciones que se aplicarán más adelante a los espacios vectoriales objeto de este estudio.

Definición A.10 (Combinación lineal de vectores) *Sean los vectores $\hat{a}$, $\hat{b}, \ldots, \hat{c}$ elementos de un espacio vectorial* **V** *y sean los números reales α, $\beta, \ldots, \gamma$, entonces una expresión como:*

$$\alpha\hat{a} + \beta\hat{b} + \cdots + \gamma\hat{c} \tag{A.12}$$

se define como una combinación lineal *de esos vectores.*

En esta definición se utilizan los axiomas de adición de vectores y de su multiplicación por un número real. De hecho, el resultado de esa suma (A.12) es otro vector. Esta ecuación (A.12) puede ser leída de una manera muy sugerente:

$$\hat{d} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b} + \cdots + \gamma\hat{c}$$

esto es el vector suma $\hat{d}$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\cdots$, $\hat{c}$. De particular interés es determinar cuándo un vector se puede expresar como combinación lineal de otros y más aún cuándo esa combinación lineal es única. De aquí las siguientes definiciones:

Definición A.11 (Dependencia lineal de vectores) *Sea* **V** *un espacio vectorial. Entonces, se dice que:*

$$\hat{a},\, \hat{b}, \ldots,\, \hat{c} \in \mathbf{V}$$

son linealmente dependientes si existen números reales:

$$\alpha,\, \beta, \ldots, \gamma$$

no todos cero tales que se satisface la combinacón lineal*:*

$$\alpha\, \hat{a} + \beta\, \hat{b} + \cdots + \gamma\, \hat{c} = \hat{0}$$

Los vectores que no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes*.*

En otras palabras, los vectores $\hat{a},\, \hat{b}, \ldots,\, \hat{c}$ son linealmente independientes si la igualdad:

$$\alpha\, \hat{a} + \beta\, \hat{b} + \cdots + \gamma\, \hat{c} = \hat{0}$$

implica que

$$\alpha = \beta = \cdots = \gamma = 0$$

necesariamente.

Supongamos que ya se encontró una colección de, digamos, n vectores que no pueden ser expresados como combinacion lineal de los otros, entonces, podría preguntarse si estos n vectores son suficientes para expresar cualquier vector de **V** como una combinación lineal de ellos, es decir, si *generan* todo el espacio vectorial. De aquí las siguientes definiciones:

Definición A.12 (Dimensión de un espacio vectorial) *Un espacio vectorial* **V** *se dice que es de dimensión n, y se escribe dim* $\mathbf{V} = n$ *si contiene n vectores linealmente independientes y si cualquier conjunto de $n + 1$ vectores éstos son linealmente dependientes.*

Definición A.13 (Base de un espacio vectorial de dimensión n) *Sea* **V** *un espacio vectorial de dimensión n entonces cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes tales que cualquier otro elemento de* **V** *se puede expresar como una única combinación lineal de ellos, se dice que es una base de* **V***.*

Es claro de esta última definición que un espacio vectorial no tiene una y sólo una base, de hecho existe un número infinito de ellas, sin embargo el número de vectores de cada base es siempre el mismo y un tema muy importante del algebra lineal consiste en expresar un vector respecto de varias bases.

En las siguientes secciones se aplican estas definiciones a los espacios vectoriales $\{\nearrow\}$ y $\mathbb{R}^2$.

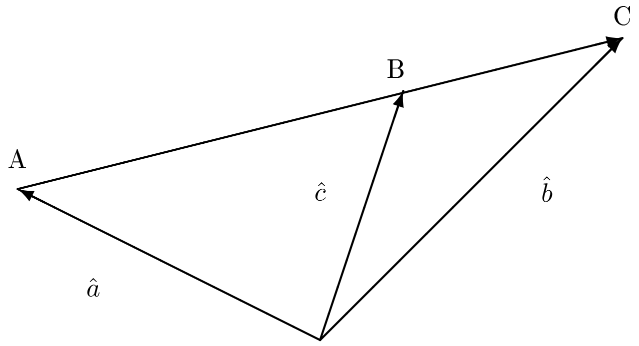

Figura A.6: Combinación lineal.

A.1.6. Dimensión y bases en $\{\nearrow\}$.

Para el caso del espacio vectorial de las flechas dirigidas $\{\nearrow\}$ las ideas presentadas al principio de esta sección se ilustran a continuación.

Ejemplo A.1.6.1 Expresar al vector $\hat{c}$ como una combinación lineal de los vectores $\hat{a}$ y $\hat{b}$.(cf. Figura 1.6)

Se puede observar en la Figura A.6 que el vector $\widehat{AB} = \frac{2}{3}\widehat{AC}$, además usando la definición de adición de vectores, se tiene que:

$$\hat{c} = \hat{a} + \widehat{AB} = \hat{a} + \frac{2}{3}\widehat{AC}$$

pero:

$$\widehat{AC} = \hat{b} - \hat{a}$$

por lo que finalmente:

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \hat{a} + \frac{2}{3}(\hat{b} - \hat{a}) \\ &= \frac{1}{3}\hat{a} + \frac{2}{3}\hat{b} \end{aligned}$$

que es la combinación lineal que se busca. $\ldots\square$

Una primera pregunta que se puede hacer en relación al ejemplo anterior consiste en indagar si el vector $\hat{c}$ se puede expresar como una combinación lineal de tres vectores flecha arbitrarios $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{d}$, distintos de la flecha cero, es decir, si existen números reales α, β, γ no todos igual a cero tales que:

$$\hat{c} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b} + \gamma\hat{d}$$

La respuesta es que sí es posible. Para demostrar tal afirmación se invita al lector a hacer gráficamente la siguiente construcción:

- Dibujar las flechas $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$, arbitrarias de preferencia en distintas direcciones.

- Seleccionar los números reales α' y β' (distintos de cero) y utilizar la regla del paralelogramo para hacer la suma:

$$\hat{p} = \alpha'\hat{a} + \beta'\hat{b}$$

- Poner bajo un origen común las vectores $\hat{p}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ y construir cuidadosamente un paralelogramo cuya diagonal es precisamente la flecha $\hat{c}$.

  Esto último implica determinar escalares (números reales) γ y ω tales que:

$$\hat{c} = \gamma\hat{d} + \omega\hat{p}$$

- Finalmente se tiene la siguiente combinación lineal:

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \gamma\hat{d} + \omega\hat{p} \\ &= (\omega\alpha')\hat{a} + (\omega\beta')\hat{b} + \gamma\hat{d} \\ \hat{c} &= \alpha\hat{a} + \beta\hat{b} + \gamma\hat{d} \qquad \text{(A.13)} \end{aligned}$$

que es la combinación lineal deseada. $\ldots\square$

Una segunda pregunta relacionada también con el ejemplo de arriba sería si la combinación lineal (A.13) es única, esto es, si no existe otra combinación lineal que exprese al vector flecha $\hat{c}$ como una combinación lineal de las otras flechas del enunciado. La respuesta es que existe un número ilimitado de combinaciones lineales que lleva a cabo esta operación. Por ejemplo, en la construcción anterior hágase $\alpha' = 0$ y se tiene una nueva combinación lineal; etc.

Más aún, con una argumentación similar se llega a las mismas conclusiones cuando se expresa $\hat{c}$ como una combinación lineal de más de tres vectores flecha distintos de la flecha cero y con distintas direcciones, por tanto sí es posible construir la combinación lineal y que ésta no sea única.

Entonces, llevando el argumento un poco más allá, existiría un número mínimo de vectores flecha tales que:

- Cualquier otro elemento de $\{\nearrow\}$ pueda ser expresado como una combinación lineal de esos vectores.

- La combinación lineal obtenida sea única.

De la discusión de arriba es claro que tres o más vectores flecha no satisfacen estos requerimientos. Por otra parte, un solo vector flecha apuntando en alguna dirección solamente puede generar otros vectores flecha que tengan esa misma dirección (aunque pueda cambiar de sentido) por lo que cualquier otro vector flecha que no tenga esa dirección no puede ser expresado como una combinación lineal de la flecha original. De los resultados del Ejemplo (A.1.6.1) se puede afirmar que es posible expresar un vector flecha cualquiera en términos de otras dos flechas que no tengan la misma dirección y que sean distintas de la flecha cero. Más aún, de la definición de la operación de adición por el método del paralelogramo, es claro que si $\hat{c}$ es la diagonal de un paralelogramo, este paralelogramo es único; esto es, no existen dos paralelogramos distintos con la misma diagonal (Wentword, 1972), por lo que la combinación lineal es única.

Estos resultados se pueden resumir como sigue:

- Un solo vector flecha distinto de la flecha cero actuando en su línea de acción sólo genera flechas paralelas a él. Por tanto todas estas flechas generadas son linealmente dependientes.

- Dos o más vectores flecha colineales son linealmente dependientes. Esto es evidente ya que:

$$\alpha\hat{a} + \beta\hat{b} + \cdots + \gamma\hat{c} = \hat{0}$$

  se puede reescribir haciendo uso de las propiedades de las operaciones de adición y multiplicación por un escalar como:

$$\begin{aligned} \alpha\hat{a} &= -(\beta\hat{b} + \cdots + \gamma\hat{c}) \\ &= \hat{d} \end{aligned}$$

  Como $\hat{d} \neq \hat{0}$ se tiene que existe un número real $\alpha \neq 0$ y los vectores son paralelos.

- Dos vectores no colineales distintos de la flecha cero, son linealmente independientes. Esto se hace evidente si se considera que la flecha resultante de la adición de tales vectores es la diagonal de un paralelogramo cuyos lados no paralelos son las susodichas flechas. Entonces la única manera como la flecha resultante sea igual a la flecha cero es multiplicar por el real cero cada una de ellas.

- Tres o más vectores flecha no colineales son linealmente dependientes. El ejercicio anterior (ec. A.13) es evidencia suficiente.

De esta discusión se concluye que es verdadera la siguiente proposición:

Proposición A.1 *Cualquier conjunto de dos vectores flecha no colineales es una base del espacio vectorial* $\{\nearrow\}$.

A.1.7. Dimensión y bases en $\mathbf{R^2}$

Al principio de esta sección se presentaron las definiciones generales de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial y en la primera subsección se aplicaron dichas definiciones al espacio de $\{\nearrow\}$, aquí analizaremos esos conceptos en el contexto del espacio vectorial de las parejas ordenadas, esto es de $\mathbb{R}^2$.

Dado que en la sección A.1.4 se demostró que el conjunto de parejas ordenadas de números reales con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar forma un espacio vectorial, a las parejas ordenadas se les puede llamar vectores.

El aplicar la definición A.11, específicamente a $\mathbb{R}^2$ nos lleva a considerar que la expresión:

$$\alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) + \ \ldots \ + \gamma(c_1, c_2)$$

corresponde a una combinación lineal de los vectores (a_1, a_2), (b_1, b_2), $\ldots$, (c_1, c_2) de $\mathbb{R}^2$ con $\alpha\,\beta$, $\ldots$, γ reales.

Ejemplo A.1.7.1 $\alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$ es una combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

$\ldots\square$

Ejemplo A.1.7.2 Una combinación lineal de los vectores $(1, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$ es:

$$-2(1, 0) - 3(0, 1) + 5(1, 1)$$

$\ldots\square$

El problema de expresar un vector (d_1, d_2) de $\mathbb{R}^2$ como una combinación lineal de otros vectores (a_1, a_2), (b_1, b_2), $\ldots$, (c_1, c_2) del mismo espacio vectorial, implica determinar los escalares α, β, $\ldots$, γ, si estos existen, que permitan escribir:

$$(d_1, d_2) = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) + ... + \gamma(c_1, c_2) \tag{A.14}$$

Ejemplo A.1.7.3 Expresar el vector $(3, 4)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

Como se mencionó arriba, el problema se reduce a encontrar los valores de α y β tales que:

$$(3, 4) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$$

entonces

$$\begin{aligned} (3, 4) &= \alpha(1, 1) + \beta(1, 2) \\ &= (\alpha, \alpha) + (\beta, 2\beta) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

Por definición, para que dos vectores sean iguales deben ser iguales elemento a elemento, lo que lleva a:

$$\alpha + \beta = 3 \qquad \text{y} \qquad \alpha + 2\beta = 4$$

al resolver el sistema se obtiene:

$$\alpha = 2 \qquad \text{y} \qquad \beta = 1$$

por lo que el vector $(3, 4)$ puede expresarse en forma única, como combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(1, 2)$, quedando:

$$(3, 4) = 2(1, 1) + 1(1, 2)$$

$\ldots\square$

Ejemplo A.1.7.4 Expresar el vector $(3, 2)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Se deben encontrar valores para α, β y γ tales que:

$$(3, 2) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(1, 1)$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha + \gamma \\ 2 &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

donde α, β y γ deben satisfacer ambas ecuaciones. Si se despeja α en la primera ecuación y β en la segunda, se obtiene:

$$\alpha = 3 - \gamma \qquad \text{y} \qquad \beta = 2 - \gamma$$

Al quedar α y β en términos de γ puede observarse que para cada valor de γ que se seleccione se encuentra una solución al sistema:

$$(3, 2) = (3 - \gamma)(1, 0) + (2 - \gamma)(0, 1) + \gamma(1, 1)$$

Esto implica que existen una infinidad de formas de expresar el vector $(3, 2)$ en términos de los otros 3, por ejemplo:

si se selecciona $\gamma = 1$ entonces $\alpha = 2, \beta = 1$ y

$$(3, 2) = 2(1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$$

si $\gamma = 5$ entonces $\alpha = -2, \beta = -3$ y

$$(3, 2) = -2(1, 0) - 3(0, 1) + 5(1, 1)$$

etc. $\ldots\square$

Ejemplo A.1.7.5 Expresar el vector $(3,4)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-2,-2)$.

Para encontrar los valores de α y β tales que:

$$(3,4) = \alpha(1,1) + \beta(-2,-2)$$

es necesario que:

$$\alpha - 2\beta = 3 \qquad \text{y} \qquad \alpha - 2\beta = 4$$

es fácil notar que no existe solución para este sistema de ecuaciones, en este caso se dirá que el vector $(3,4)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-2,-2)$. $\ldots\Box$

Ejemplo A.1.7.6 Expresar el vector $(3,4)$ como el producto de un real por el vector $(2,-1)$.

Es necesario encontrar el valor de α tal que

$$(3,4) = \alpha(2,-1)$$

es decir

$$2\alpha = 3 \qquad \text{y} \qquad -\alpha = 4$$

es fácil notar que no existe solución para este sistema de ecuaciones, en este caso se dirá que el vector $(3,4)$ no puede expresarse a partir del vector $(2,-1)$. $\ldots\Box$

Ejemplo A.1.7.7 Determinar si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$.

Por definición para que los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$ generen $\mathbb{R}^2$ es necesario que cualquier pareja ordenada (x,y) pueda escribirse como una combinación lineal de ellos, esto es:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,2)$$

donde α y β son números reales.

Para analizar si esto es posible se plantea el sistema de ecuaciones como se hizo en los ejemplos anteriores, esto es:

$$\begin{aligned} (x,y) &= \alpha(1,1) + \beta(1,2) \\ &= (\alpha,\alpha) + (\beta,2\beta) \\ &= (\alpha+\beta+,\alpha+2\beta) \end{aligned}$$

obteniéndose:

$$\alpha + \beta \qquad y \qquad \alpha + 2\beta = y$$

La solución del sistema es:

$$\alpha = 2x - y \qquad \text{y} \qquad \beta = y - x$$

por lo que el vector (x, y) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(1, 2)$, quedando:

$$(x, y) = (2x - y)(1, 1) + (y - x)(1, 2)$$

$\ldots \square$

Por ejemplo, si se proporciona la pareja $(3, 4)$ del ejemplo A.1.7.3,

$$\alpha = 2(3) - 4 = 2 \qquad \text{y} \qquad \beta = 4 - 3 = 1$$

entonces:

$$(3, 4) = 2(1, 1) + 1(1, 2)$$

Es importante observar que en el sistema de ecuaciones las incognitas son α y β y deben expresarse en términos de x y y. $\ldots \square$

Como puede observarse en los ejemplos A.1.7.3 al A.1.7.7, al reducir el problema de determinar si un vector puede expresarse como combinación lineal de un conjunto de vectores, al problema de resolver el sistema de ecuaciones (A.14) se llega a que:

- el vector puede expresarse en forma única como combinación lineal de un conjunto de vectores, si el sistema tiene solución única,
- existe un número infinito de formas de expresar el vector como combinación lineal de un conjunto de vectores, si el sistema tiene una infinidad de soluciones, y
- el vector no puede expresarse como combinación lineal del conjunto de vectores, si no existe solución para el sistema que se plantea.

Podríamos pensar igual que en la sección A.1.6, si existe un número mínimo de vectores tales que:

- cualquier otro elemento de $\mathbb{R}^2$ pueda ser expresado como combinación lineal de estos vectores,
- la combinación lineal obtenida sea única,

y demostrar una proposición análoga a la proposición A.1 para los elementos de $\mathbb{R}^2$, esto es, que cualquier conjunto de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$
Analicemos primero con la definición A.11 si los conjuntos de vectores que se utilizaron para formar las combinaciones lineales en los ejemplos A.1.7.3 al A.1.7.5 son linealmente dependientes o independientes.

Ejemplo A.1.7.8 Determinar si los vectores del ejemplo A.1.7.3, $(1,1)$ y $(1,2)$, son linealmente dependientes.

Para determinar la dependencia lineal es necesario resolver

$$(0,0) = \alpha(1,1) + \beta(1,2) \tag{A.15}$$

y analizar si la única solución es $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ o si existen α y β no necesariamente cero que satisfacen A.15, entonces:

$$\begin{aligned}(0,0) &= \alpha(1,1) + \beta(1,2)\\ &= (\alpha,\alpha) + (\beta, 2\beta)\\ &= (\alpha+\beta, \alpha+2\beta)\end{aligned}$$

que lleva al sistema:

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha + 2\beta = 0$$

cuya solución única es: $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ por lo que se puede concluir que los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$ son linealmente independientes. ... $\Box$

Ejemplo A.1.7.9 Determinar si los vectores del ejemplo A.1.7.4,$(1,0),(0,1)$ y $(1,1)$, son linealmente independientes.

Para encontrar α, β y γ tales que

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) \tag{A.16}$$

el sistema que hay que resolver es:

$$0 = \alpha + \gamma \qquad \text{y} \qquad 0 = \beta + \gamma$$

este sistema tiene un número infinito de soluciones; para cada valor de γ que se seleccione se encuentra una solución al sistema calculando $\alpha = -\gamma$, y $\beta = -\gamma$,

$$(0,0) = -\gamma(1,0) - \gamma(0,1) + \gamma(1,1)$$

lo que implica que existen α, β y γ ***no todos cero*** que satisfacen A.16 por lo que los vectores $(1,0),(0,1)$ y $(1,1)$ son linealmente dependientes. ... $\Box$

Ejemplo A.1.7.10 Determinar si los vectores del ejemplo A.1.7.5, $(1,1)$ y $(-2,-2)$, son linealmente independientes.

$$(0,0) = \alpha(1,1) + \beta(-2,-2) \tag{A.17}$$

esto es

$$(0,0) = (\alpha - 2\beta, \alpha - 2\beta)$$

por tanto

$$\alpha - 2\beta = 0$$

de donde

$$\alpha = 2\beta$$

para cada valor de β que se seleccione puede encontrarse una solución particular a la ecuación A.17, sustituyendo el valor en

$$(0,0) = 2\beta(1,1) + \beta(-2,-2)$$

por ejemplo, si $\beta = -3$ entonces $\alpha = -6$ y

$$(0,0) = -6(1,1) - 3(-2,-2)$$

el sistema tiene un número infinito de soluciones, por lo se puede concluir que existen valores de α y β no necesariamente cero que satisfacen A.17 y entonces los vectores $(1,1)$ y $(-2,-2)$ son linealmente dependientes. $\ldots\square$

Analicemos dos teoremas antes de demostrar que cualquier conjunto de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

El primer teorema permite analizar rápidamente la dependencia o independencia lineal entre *dos* vectores, el segundo determinar que más de de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son siempre linealmente dependientes.

Teorema A.1 *Sean $\hat{a}$ y $\hat{b}$ dos vectores en un espacio vectorial $\mathbf{V}$, en particular en $\mathbb{R}^2$, son linealmente dependientes si y sólo si existe un escalar γ tal que $\hat{a} = \gamma\hat{b}$.*

Demostración: Sean $\hat{a}$ y $\hat{b}$ dos vectores en un espacio vectorial $\mathbf{V}$, y α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$

- Se demostrará primero que si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son linealmente dependientes entonces existe un escalar γ tal que $\hat{a} = \gamma\hat{b}$.
  Que dos vectores sean linealmente dependientes implica que existen $\alpha \neq 0$ y/o $\beta \neq 0$ tales que $\alpha\hat{a} + \beta\hat{b} = \hat{0}$, si se supone que $\alpha \neq 0$ entonces $\hat{a}$ puede escribirse como
  $$\hat{a} = \frac{-\beta}{\alpha}\hat{b}$$
  entonces:
  $$\gamma = \frac{-\beta}{\alpha}$$
- Se demostrará ahora que si existe un escalar γ tal que $\hat{a} = \gamma\hat{b}$, entonces $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son linealmente dependientes.
  Si existe un escalar γ tal que $\hat{a} = \gamma\hat{b}$, para demostrar que $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son linealmente dependientes es necesario probar que existen $\alpha \neq 0$ y/o $\beta \neq 0$ tales que:
  $$\alpha\hat{a} + \beta\hat{b} = \hat{0}$$
  De $\hat{a} = \gamma\hat{b}$ se tiene $\hat{a} - \gamma\hat{b} = 0$, si $\alpha = 1$ y $\beta = -\gamma$, como $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ se concluye que los vectores $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son linealmente dependientes.

$\ldots \square$

Aplicando el teorema a los vectores $(1,1)$ y $(-2,-2)$, del ejemplo A.1.7.10, puede demostrarse fácilmente que son linealmente dependientes ya que para $\gamma = -2$ se tiene $(-2,-2) = -2(1,1)$.

Al aplicar el teorema a los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$ del ejemplo A.1.7.8 se puede observar que no existe γ que satisfaga $(1,1) = \gamma(1,2)$ por lo que son linealmente independientes.

Es importante hacer notar que en conjuntos con más de dos vectores

- Si se observa que al menos dos de ellos son linealmente dependientes se puede decir que los vectores del conjunto son linealmente dependientes, por ejemplo el conjunto $\{(1,1),(-2,-2),(1,2)\}$

- Sin embargo, si no es obvia la dependencia lineal entre dos de los vectores de un conjunto dado, la dependencia lineal **no puede probarse por parejas**, ya que puede ocurrir que no existan escalares que permitan expresar a uno de ellos específicamente a partir de sólo uno de los demás. Pero es posible que sí existan escalares que permitan expresarlo como combinación de algunos de ellos, por ejemplo para los vectores $(1,0),(0,1),(1,1)$ no existen escalares α, β y γ tales que:

$$\begin{aligned} (1,0) &= \alpha(0,1) \\ (1,1) &= \beta(0,1) \\ (1,0) &= \gamma(1,1) \end{aligned}$$

pero como se demostró en el ejemplo A.1.7.9 si existen escalares α, β y γ tales que:

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0)$$

En particular, para $\mathbb{R}^2$ se puede demostrar el siguiente:

Teorema A.2 *Tres o más vectores en $\mathbb{R}^2$ siempre son linealmente dependientes.*

Demostración: Sean $\hat{a} = (a_1,a_2), \hat{b} = (b_1,b_2), \ldots, \hat{c} = (c_1,c_2)$, n vectores en $\mathbb{R}^2$ $(n > 2)$ y $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ n números reales, entonces para determinar la dependencia lineal es necesario establecer si $\alpha = \beta = \ldots = \gamma = 0$ es la única solución del sistema:

$$\alpha(a_1,a_2) + \beta(b_1,b_2) + ... + \gamma(c_1,c_2) = (0,0)$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta b_1 + \ldots + \gamma c_1 &= 0 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \ldots + \gamma c_2 &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema con dos ecuaciones y n incógnitas por lo que tendrá al menos un grado de libertad, esto implica que no existe solución única y por tanto los vectores $\hat{a}, \hat{b}, ..., \hat{c}$ son linealmente dependientes. $\ldots \square$

En el ejemplo A.1.7.9 la aplicación de este teorema es suficiente para demostrar que los vectores no pueden ser linealmente independientes.

A continuación se discute si es posible determinar si existe un número mínimo de vectores linealmente independientes que permitan expresar, en forma única, cualquier elemento de $\mathbb{R}^2$.

Proposición A.2 *Con un solo vector* (a_1, a_2) *no podemos expresar cualquier elemento* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$

Es suficiente con exhibir un cotraejemplo, concretamente en el ejemplo A.1.7.6 no es posible encontrar un real α tal que:

$$(x, y) = \alpha(a_1, a_2)$$

$\ldots \square$

Proposición A.3 *Con dos vectores linealmente dependientes no necesariamente es posible expresar cualquier otro vector de* $\mathbb{R}^2$

Demostración.
Sean (a_1, a_2) y (b_1, b_2) linealmente dependientes esto es $\hat{a} = \gamma\hat{b}$, al tratar de encontrar la combinación lineal

$$(x, y) = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$

se llega a

$$(x, y) = (\alpha + \gamma)(a_1, a_2)$$

lo que nos lleva a una ecuación análoga a la del caso anterior que como se vió no necesariamente tiene solución. (ver ejemplo A.1.7.5) $\ldots \square$

Proposición A.4 *Con dos vectores linealmente independientes se puede encontrar una combinación lineal única.*

Demostración.
Sean (a_1, a_2) y (b_1, b_2) dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ para demostrar que generan todo $\mathbb{R}^2$ es necesario probar que para cualquier vector (x, y) en $\mathbb{R}^2$ existen reales α y β tales que:

$$(x, y) = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$

esto es:

$$\alpha a_1 + \beta b_1 = x \qquad \text{y} \qquad \alpha a_2 + \beta b_2 = y$$

es fácil observar que si los vectores son linealmente independientes siempre existe solución para este sistema de ecuaciones y la solución es única. $\ldots\square$

Proposición A.5 *Con dos o más vectores linealmente dependientes puede no existir una combinación lineal, o determinarse un número infinito de combinaciones lineales para expresar un vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$*

La demostración de esta proposición se le deja al lector, se le sugiere ver ejemplos A.1.7.5 A.1.7.4

Utilizando entonces la definición A.12 llegamos a que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2 y por la definición A.13 podemos concluir que cualquier conjunto de dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ constituye una base para ese espacio vectorial.

Revisemos ahora los siguientes ejemplos.

Ejemplo A.1.7.11 Determinar si $\{(1,1),(1,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

En el ejemplo A.1.7.8 se demostró que los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$ son linealmente independientes y por el teorema A.2 generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto se puede decir que $\{(1,1),(1,2)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$. $\ldots\square$

Ejemplo A.1.7.12 Determinar si los vectores $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

En el ejemplo A.1.7.9 se demostró que $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ son linealmente dependientes por lo que, aunque puedan generar $\mathbb{R}^2$, no pueden constituir una base para $\mathbb{R}^2$ $\ldots\square$

Ejemplo A.1.7.13 Determinar si el conjunto de vectores $\{(1,1),(-2,-2)\}$ constituyen una base de $\mathbb{R}^2$.

En el ejemplo A.1.7.10 se demostró que $\{(1,1),(-2,-2)\}$ son linealmente dependientes por lo que no pueden considerarse como una base de $\mathbb{R}^2$. $\ldots\square$

A.1.8. Relación entre $\mathbf{R}^2$ y $\{\nearrow\}$.

En lo que sigue se establecerá una regla de asociación entre los elementos del espacio vectorial de flechas dirigidas y el de las parejas de números reales de manera que los vectores resultantes de las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, definidas en cada espacio vectorial, también sigan esa regla de asociación. Una consecuencia de establecer esta regla es que los espacios vectoriales mencionados se vuelven indistiguibles, cualidad que se utilizará para obtener nuevos resultados que serán válidos tanto para un espacio vectorial como para el otro. Algunas definiciones necesarias se presentan a continuación.

Definición A.14 *(Isomorfismo entre espacios vectoriales) Sean los espacios vectoriales* $\mathbf{V}_1$ *y* $\mathbf{V}_2$*, se dice que son isomorfos si es posible establecer una correspondencia uno a uno* $(\hat{x} \leftrightarrow \hat{u})$ *entre los elementos* $\hat{x}$, $\hat{y} \in \mathbf{V}_1$ *y* $\hat{u}$, $\hat{v} \in \mathbf{V}_2$ *tal que si:*

$$\begin{array}{rrcl} & \hat{x} & \longleftrightarrow & \hat{u} \\ & \hat{y} & \longleftrightarrow & \hat{v} \\ \textit{entonces} & \alpha\hat{x} + \beta\hat{y} & \longleftrightarrow & \alpha\hat{u} + \beta\hat{v} \end{array}$$

donde α, β *son números reales.*

A continuación se introduce la idea geométrica que asocia a cada elemento de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uno y sólo un punto del plano.

Definición A.15 *(Sistema Cartesiano de coordenadas) Sea* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *el producto cartesiano del conjunto* $\mathbb{R}$ *consigo mismo, si el conjunto de la izquierda del producto se representa como una recta horizontal y el de la derecha como una recta vertical y si además, el punto de intersección entre ellas se denota como* 0 *u origen del sistema coordenado, y se le asocia la pareja* $(0, 0)$*, entonces:*

se define a la recta horizontal como el eje de las abscisas ó eje-x *cuya dirección positiva es a la derecha de* 0 *y la dirección de* x *creciente es de izquierda a derecha,*

se define a la recta vertical como el eje de las ordenadas ó eje-y *cuya dirección positiva es arriba del punto* 0 *y la dirección de* y *creciente es de abajo hacia arriba.*

A cada punto del plano le corresponde una pareja ordenada de números reales: la primera entrada o componente de la pareja corresponde a la posición del punto respecto al eje-x *y se denota como la abscisa del punto; la segunda componente de la pareja corresponde a la posición del punto respecto al* eje-y *y se denota como la ordenada del punto.*

De las propiedades de los números reales se tiene que a cada punto le corresponde una y sólo una pareja de números reales y conversamente, a cada pareja de números reales le corresponde uno y sólo un punto del plano. Por esta razón al plano se le conoce también como $\mathbb{R}^2$.

Por otra parte, como ya se demostró arriba (Proposición A.1), dos vectores flecha no colineales son una base de $\{\nearrow\}$, considere el siguiente conjunto de flechas no colineales que parten del punto 0:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\imath} & : & \text{una flecha de longitud unitaria en la dirección de } x \text{ creciente} \\ \hat{\jmath} & : & \text{una flecha de longitud unitaria en la dirección de } y \text{ creciente} \end{array} \tag{A.18}$$

la base que constituyen se denota como la base canónica de $\{\nearrow\}$.

En consecuencia, toda flecha $\hat{a}$ puede escribirse mediante la combinación lineal:

$$\hat{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} \tag{A.19}$$

De igual forma, para $\mathbb{R}^2$ es posible designar una base, en este caso las parejas:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= <1,0> \\ \hat{e}_2 &= <0,1> \end{aligned} \tag{A.20}$$

como la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Con esto y la definición A.14 de isomorfismo es posible demostrar la siguiente:

Proposición A.6 *Los espacios vectoriales $\{\nearrow\}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos.*

Demostración.
Considere la siguiente asociación entre los vectores base de $\{\nearrow\}$ y $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\imath} &\longleftrightarrow \hat{e}_1 \\ \hat{\jmath} &\longleftrightarrow \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Es suficiente con demostrar que la combinación lineal $a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ corresponde al vector $a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$, esto es que:

$$a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} \longleftrightarrow a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$$

Pero esto es inmediato ya que la flecha $a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath}$ comienza en el origen del sistema coordenado y termina en el punto A cuyas coordenadas son (a_1, a_2) y que corresponde a la suma $a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$ lo que implica que:

$$A \longleftrightarrow \hat{a}$$

pero $\hat{a}$ es un vector arbitrario de $\{\nearrow\}$ y por tanto esto es cierto para todo $\hat{a} \in \{\nearrow\}$ y todo $A \in \mathbb{R}^2$, consecuentemente los dos espacios vectoriales son isomorfos. $\ldots\square$

Dado que un punto de $\mathbb{R}^2$ puede ser representado por una flecha que parta del origen de sistema de coordenadas y viceversa en lo que sigue se hablará indistintamente de flechas o puntos en $\mathbb{R}^2$. Más aún, para distinguir vectores de puntos se seguirá la notación siguiente:
Un punto se prepresentará como

$$A(a_1, a_2) \tag{A.21}$$

mientras que el vector asociado, por:

$$\hat{a} =< a_1, a_2 > \tag{A.22}$$

Se mencionó arriba que las bases de los espacios vectoriales no son únicas, en el ejemplo que se presenta a continuación se explora la idea de expresar las coordenadas de un vector dado respecto a una base nueva. Este problema se conoce como cambio de coordenadas y es de fundamental importancia no solo aquí sino en otras áreas como algebra lineal y optimización, entre otras.

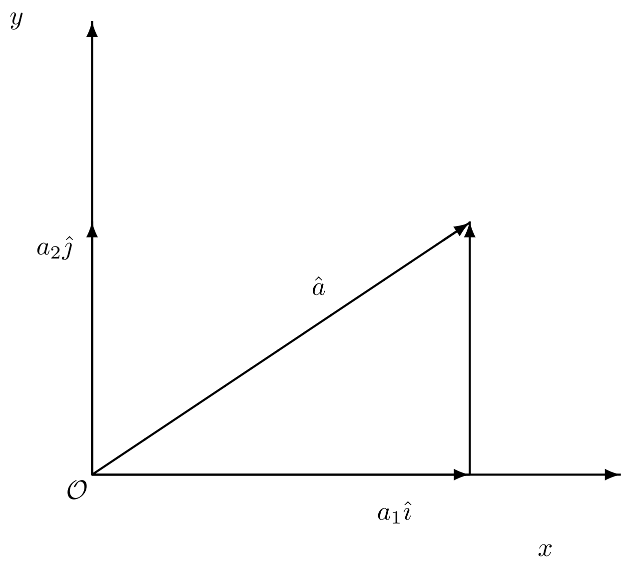

Figura A.7: Sistema Ortogonal de Coordenadas

Ejemplo A.1.8.1 *El vector $\hat{a}$ tiene como componentes respecto a la báse canónica a*
$< a_1, a_2 >$.

- *Demuestre que el conjunto de vectores:*

$$\{< 1, -3 >, < -1, 1 >\}$$

es otra base de $\mathbb{R}^2$.

- *Exprese al vector $\hat{a}$ en términos de la nueva base.*

Como $dim\, \mathbb{R}^2 = 2$ es necesario primero demostrar que

$$\{\hat{q}_1 =< 1, -3 >, \hat{q}_2 =< -1, 1 >\}$$

son linealmente independientes. Así, la combinación lineal:

$$\alpha_1 < 1, -3 > +\alpha_2 < -1, 1 >= \hat{0}$$

implica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

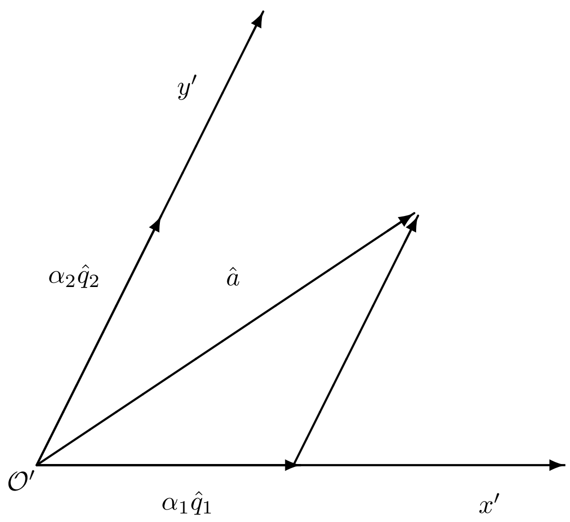

Figura A.8: Sistema Oblicuo de Coordenadas

por tanto:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

necesariamente, por lo que $\hat{q}_1$ y $\hat{q}_2$ son linealmente independientes.

Como ya se demostró arriba cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ es expresable de manera única como una combinación lineal de dos vectores linealmente independientes. En particular esto debe ser verdadero para $\hat{a}$, así:

$$\hat{a} = \beta_1\hat{q}_1 + \beta_2\hat{q}_2$$

donde β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$ son constantes a determinar y deben ser únicas. Dado que el vector $\hat{a} \in \mathbb{R}^2$ las siguientes ecuaciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 \\ &= \beta_1\hat{q}_1 + \beta_2\hat{q}_2 \end{aligned}$$

Más aún:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= r_1\hat{q}_1 + r_2\hat{q}_2 \\ \hat{e}_2 &= s_1\hat{q}_1 + s_2\hat{q}_2 \qquad \text{(A.23)} \end{aligned}$$

con $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ coeficientes a determinar dado que $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2 \in \mathbb{R}^2$. Por lo que sustiruyendo en la ecuación de arriba:

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= a_1(r_1\hat{q}_1 + r_2\hat{q}_2) + a_2(s_1\hat{q}_1 + s_2\hat{q}_2 \\
&= (a_1r_1 + a_2s_1)\hat{q}_1 + (a_1r_2 + a_2s_2)\hat{q}_2 \\
&= \beta_1\hat{q}_1 + \beta_2\hat{q}_2
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= a_1r_1 + a_2s_1 \\
\beta_2 &= a_1r_2 + a_2s_2
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Para terminar el problema sólo resta obtener valores para r_1, r_2, s_1, s_2 pero esto es muy sencillo ya que escribiendo los vectores $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ de las ecuaciones (A.23) componente a componente, se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
r_1 - r_2 &= 1 \\
-3\,r_1 + r_2 &= 0
\end{aligned}$$

y por tanto:

$$r_1 = -\frac{1}{2}; \quad r_2 = -\frac{3}{2} \tag{A.25}$$

También:

$$\begin{aligned}
s_1 - s_2 &= 0 \\
-3\,s_1 + s_2 &= 1
\end{aligned}$$

y por tanto:

$$s_1 = -\frac{1}{2}; \quad s_2 = -\frac{1}{2} \tag{A.26}$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (A.25, A.26) en las ecuaciones (A.24) se tiene:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{1}{2}\,a_1 - \frac{1}{2}\,a_2 \\
\beta_2 &= -\frac{3}{2}\,a_1 - \frac{1}{2}\,a_2
\end{aligned}$$

Dado que los números a_1, a_2 son únicos para un vector particular $\hat{a}$ se sigue de las ecuaciones de arriba que β_1, β_2, también lo son. Por lo tanto se concluye:

- Los vectores del conjunto:

  $$\{< 1, -3 >, < -1, 1 >\}$$

  son linealmente independientes y son una base de $\mathbb{R}^2$.

- El vector $\hat{a}$ respecto a la nueva base tiene las componentes:

$$\hat{a} = (-\frac{1}{2}\,a_1 - \frac{1}{2}\,a_2)\,\hat{q}_1 + (-\frac{3}{2}\,a_1 - \frac{1}{2}\,a_2)\,\hat{q}_2$$

$\ldots \square$