EJERCICOS DE APLICACIÓN DE RECTAS Y PLANOS

Memorizar términos matemáticos o ejercicios y no tener la mínima idea de lo que significan, es equivalente a no saberlos..” “Las matemáticas no se memorizan… se deben razonar!!”

- **MISVALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

- **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

- **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
  Servir a las personas.

Táctica de solución de ejercicios.

- Primero: leer varias veces hasta entender el ejercicio.
- Segundo: hacer un dibujo.
- Tercero: qué datos nos da el enunciado.
- Cuarto: comenzar a solucionarlo.
- Quinto: solucionarlo.
- Sexto: estudiarlo profundamente entendiendo los conceptos involucrados.

Conceptos Previos.

- Un vector perpendicular a un plano, también es perpendicular a todas las rectas o vectores del plano.
- Si 3 vectores son perpendiculares entre si, y conozco las coordenadas de 2 de ellos, el producto vectorial de dos, da el otro vector.
- El vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2 se halla por medio del producto vectorial $N_1 \times N_2$ de los 2 vectores normales a los 2 planos.

¿La ecuación $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{4}$ representa la ecuación de una recta?

Aún cuando la división entre el cero no está permitida, si.

Representa la recta que tiene el punto P(1,-3,5) y tiene por vector director a $v\langle 3,0,4\rangle$

Ejercicio # 1

Determinar la posición relativa de los planos:

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$
$$4x - 6y + 2z + 4 = 0$$

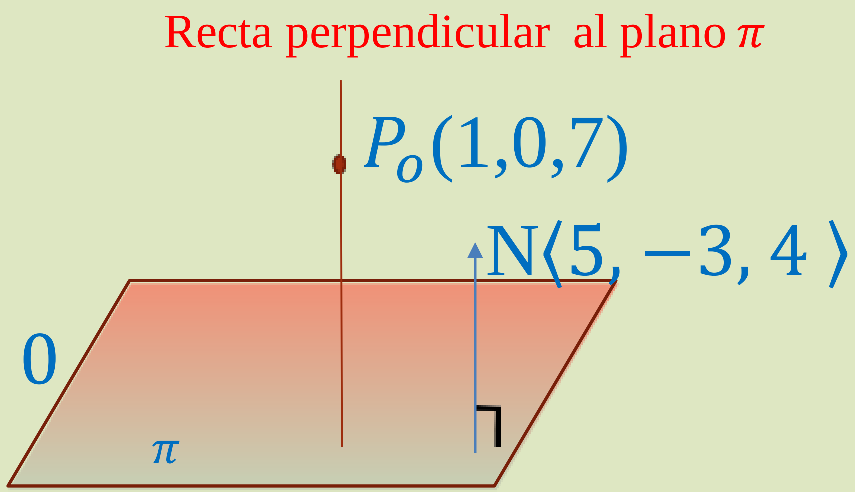
Son paralelos puesto que:

$$\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$$

Ejercicio # 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,0,7) y es perpendicular al plano π 5x-3y+4z +4=0

$\pi \ \ 5x - 3y \ + 4z + 4 = 0$



El vector normal al plano π *es* $N\langle 5, -3,4 \rangle$, este vector es $\parallel$ *a la recta*, por tanto, es su vector director.

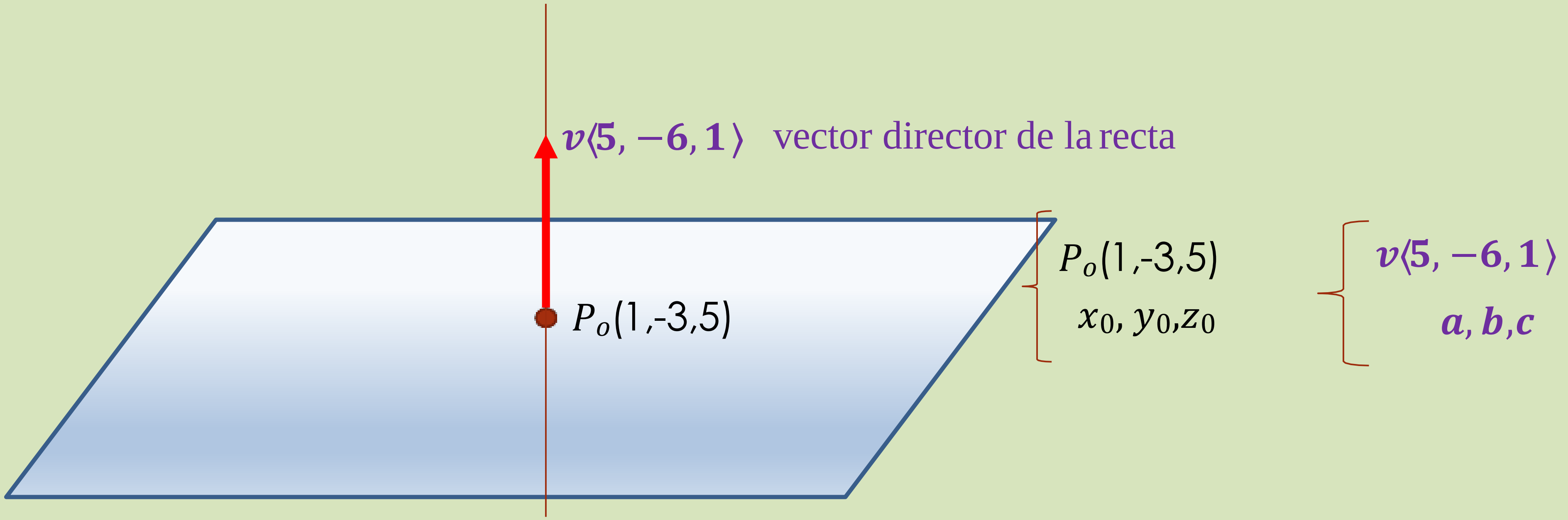
$$x = 1+5\propto$$
$$y = 0 \ -3\propto$$
$$z = 7+4\propto$$

Ejercicio #3

Hallar la ecuación analítica e implícita del plano que pasa por el punto P(1,-3,5) y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+7}{-6}=\frac{z-0}{1}$$

Vector director de la recta $v\langle 5,-6,1\rangle$



$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Para hallar la ecuación analítica requerimos un vector normal y un punto. El punto lo tenemos: P_o**(1,-3,5).** Como el plano es perpendicular a larecta, el vector director de la recta es perpendicular al plano. Por tanto, el vector director de la recta $v\langle 5,-6,1\rangle$ es también el vector normal al plano.

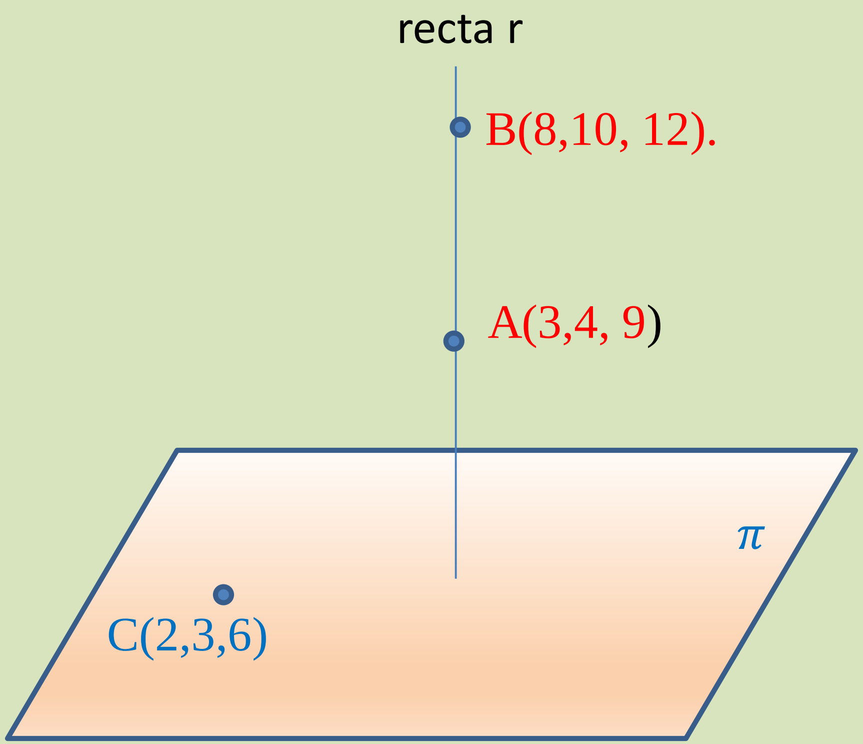
$$5(x-1)-6(y-(-3))+1(z-5)=0$$

Ejercicio 4

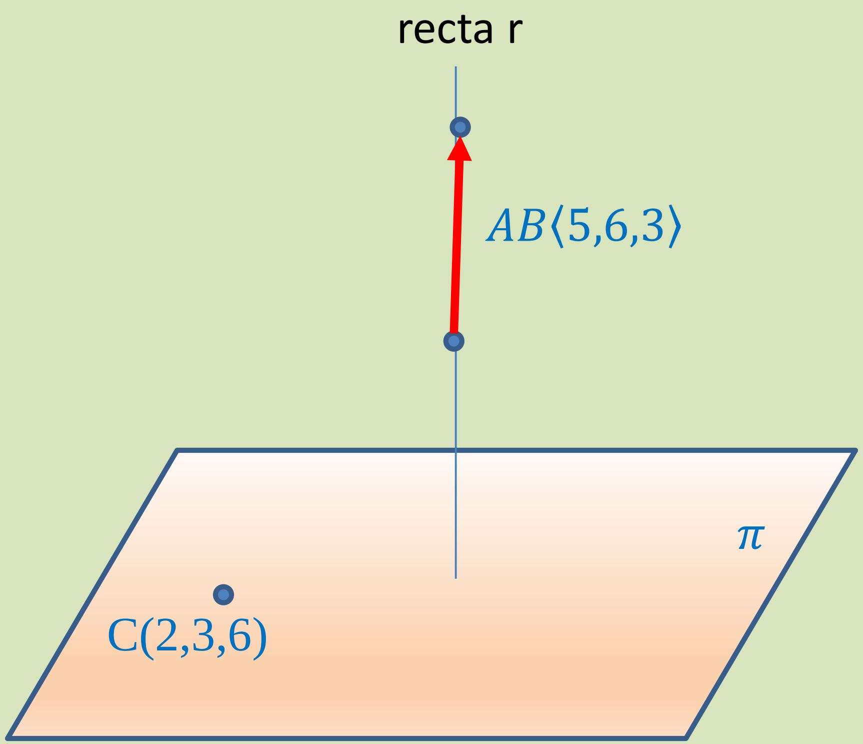
Se tiene una recta r perpendicular a un plano π.

La recta r pasa por los puntos A(3,4,9) y B(8,10, 12).

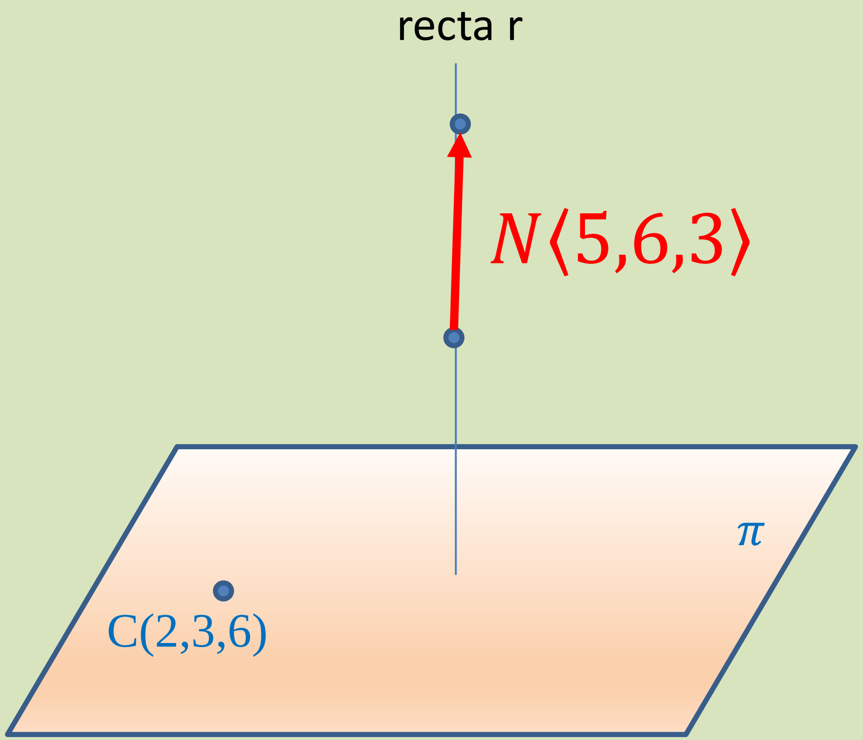
Hallar una ecuación del plano si este tiene un punto C(2,3,6)

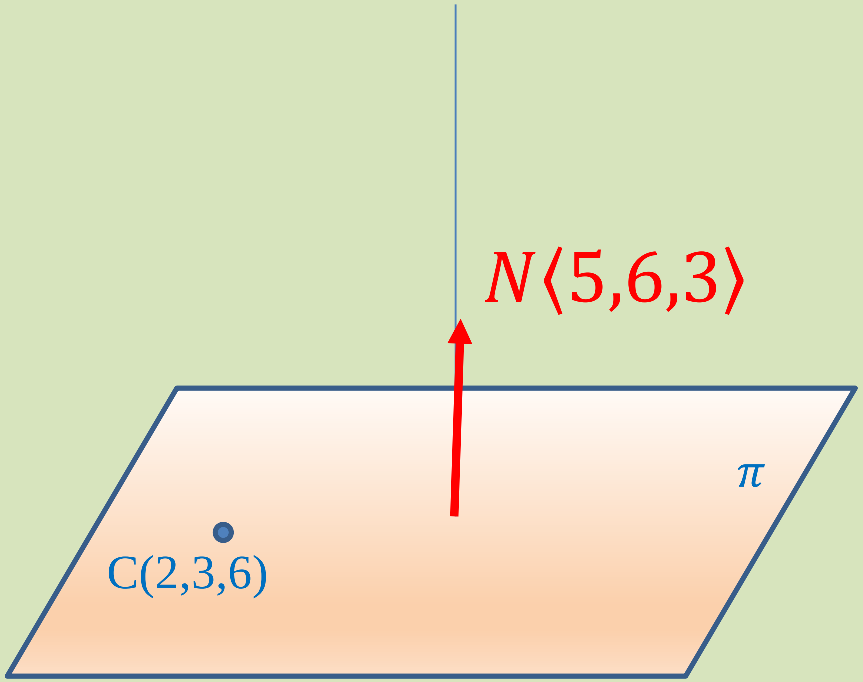


Se halla en vector $AB\langle 5,6,3\rangle$



$AB\langle 5,6,3\rangle$ es un vector normal al plano π



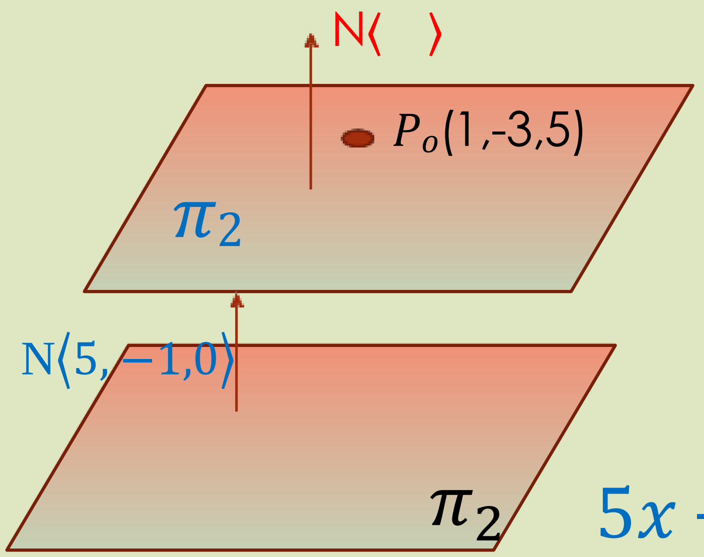


$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + \mathrm{c}(z - z_0) = 0$$

$$5(x - 2) + 6(y - 3) + 3(z - 6) = 0$$

Ejercicio # 5

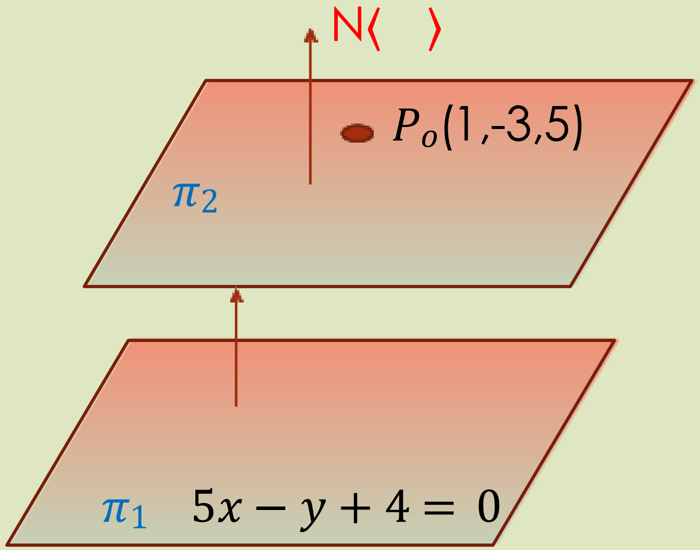
Hallar la ecuación del plano π_2 que pasa por el punto $P_0(1, -3, 5)$ y es paralelo al plano π_1 con ecuación $5x - y + 4 = 0$.



$5x - y + 4 = 0 \longrightarrow N\langle 5, -1{,}0\rangle$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Como los planos son $\parallel s$ tienen el mismo vector Normal (o vectores múltiplos), el vector $N\langle 5, -1{,}0\rangle$ es también el vector Normal del plano π_2.



$N\langle 5,-1,0\rangle$ $P_0(1,-3,5)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

$N\langle 5,-1,0\rangle$ $P_0(1,-3,5)$ $\longrightarrow$ $5(x-1) - 1(y - (-3)) + 0(z-5) = 0$

Ejercicio # 6

Determinar la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a otra recta s.

Las ecuaciones de las rectas r y s son:

$$r: \begin{cases} x = 5 + \propto \\ y = -1 + 0\propto \\ z = 8 + 2\propto \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 3\propto \\ y = 3 - \propto \\ z = 5 + 4\propto \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 5 + \propto \\ y = -1 + 0 \propto \\ z = 8 + 2 \propto \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 3 \propto \\ y = 3 - \propto \\ z = 5 + 4 \propto \end{cases}$$

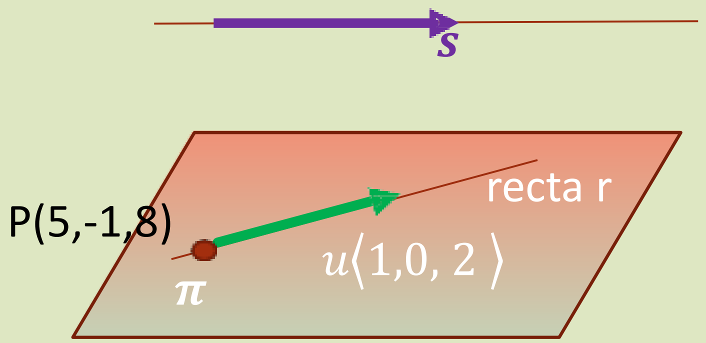
$u\langle 1,0,2 \rangle$ vector director de r

$v\langle 3,-1,4 \rangle$ vector director de s

$P(5,-1,\ 8)$ punto de la recta r

Dibujo el plano con su recta r y el vector paralelo $v\langle 3,-1,4\rangle$

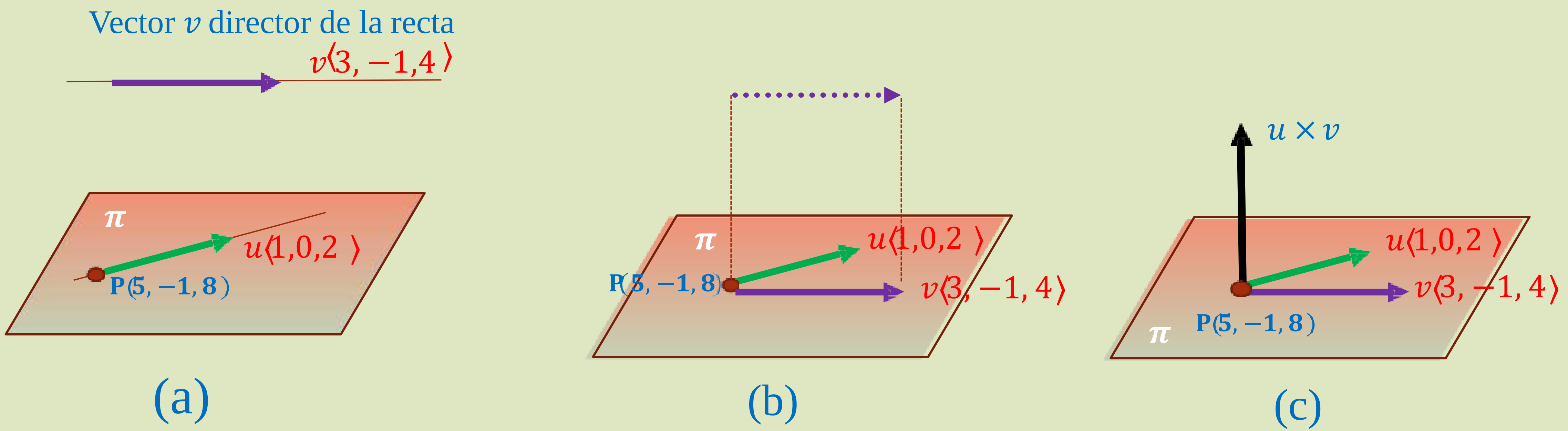
$v\langle 3,-1,4\rangle$ es el vector director de la recta s



$v\langle 3,-1,4\rangle$ y $u\langle 1,0,2\rangle$ no son paralelos, ¿ por qué?

Puesto que r está contenida en π, el punto $P(5,-1,8)$ de r es un punto del palno π, este punto sirve para la ecuación del plano.

El vector v lo puedo trasladar al plano π

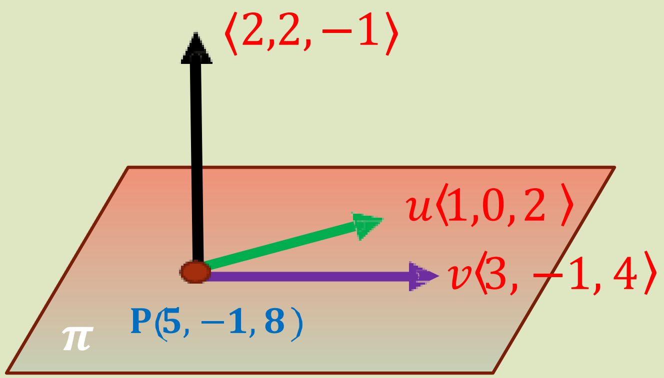


En (a) el plano π pasa por $\mathbf{P}(\mathbf{5},-\mathbf{1},\mathbf{8})$ y contiene el vector $u\langle 1,0,2\rangle$ y es $\parallel$ al vector $v\langle 3,-1,4\rangle$

En (b) el vector v se trasladó al plano (un vector director se puede trasladar paralelamente a si mismo).

En (c) el vector perpendicular a los vectores v y u es $u\times v$. Este vector también es $\perp$ a π.

.



$$u\langle 1,0,2\rangle \times v\langle 3,-1,4\rangle = \mathrm{u} \times v \; = \langle 2,2,-1\rangle$$

$$\mathrm{a}(x - x_0) + \mathrm{b}(y - y_0) + c(z - z_0)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x - 5) + 2(y - (-1) - (z - 8) = 0$$

$$2x + 2y - z = 0$$

Ejercicio # 7

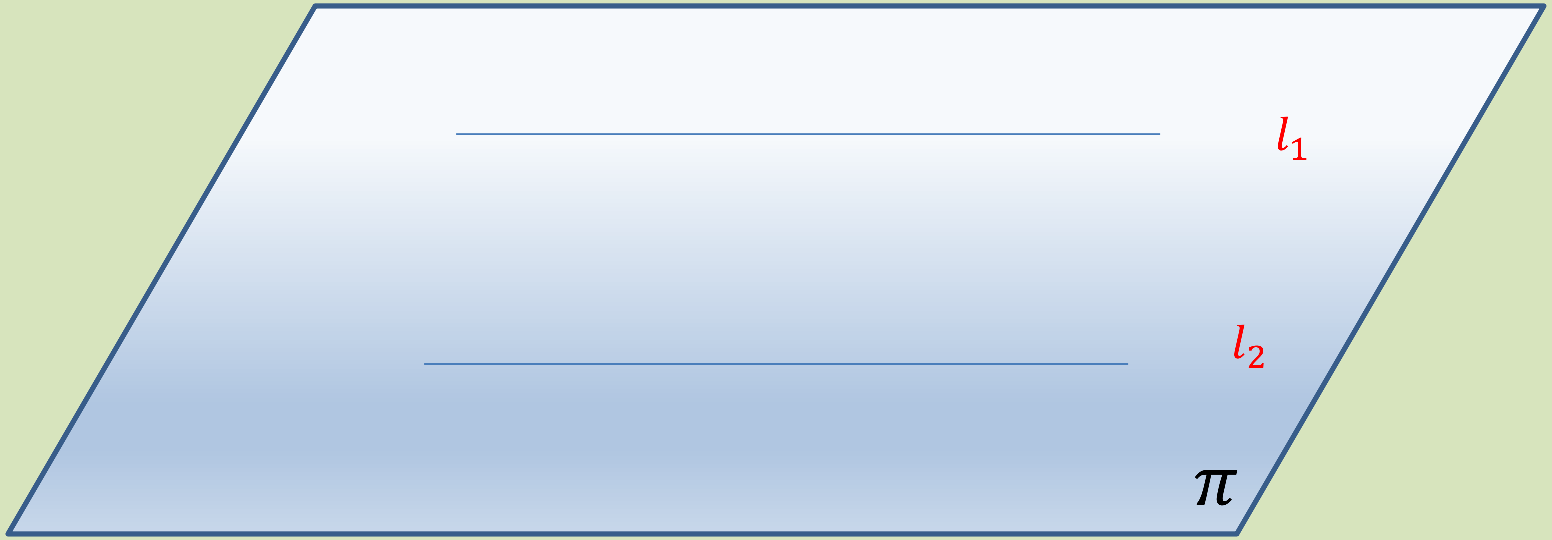
Hallar la ecuación de un plano que contiene dos rectas paralelas no coincidentes

L_1

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

L_2

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-4}{2}$$



1. Compruebe que las rectas son paralelas no coincidentes.

Se extraen de cada recta el punto y el vector correspondiente

L_1

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

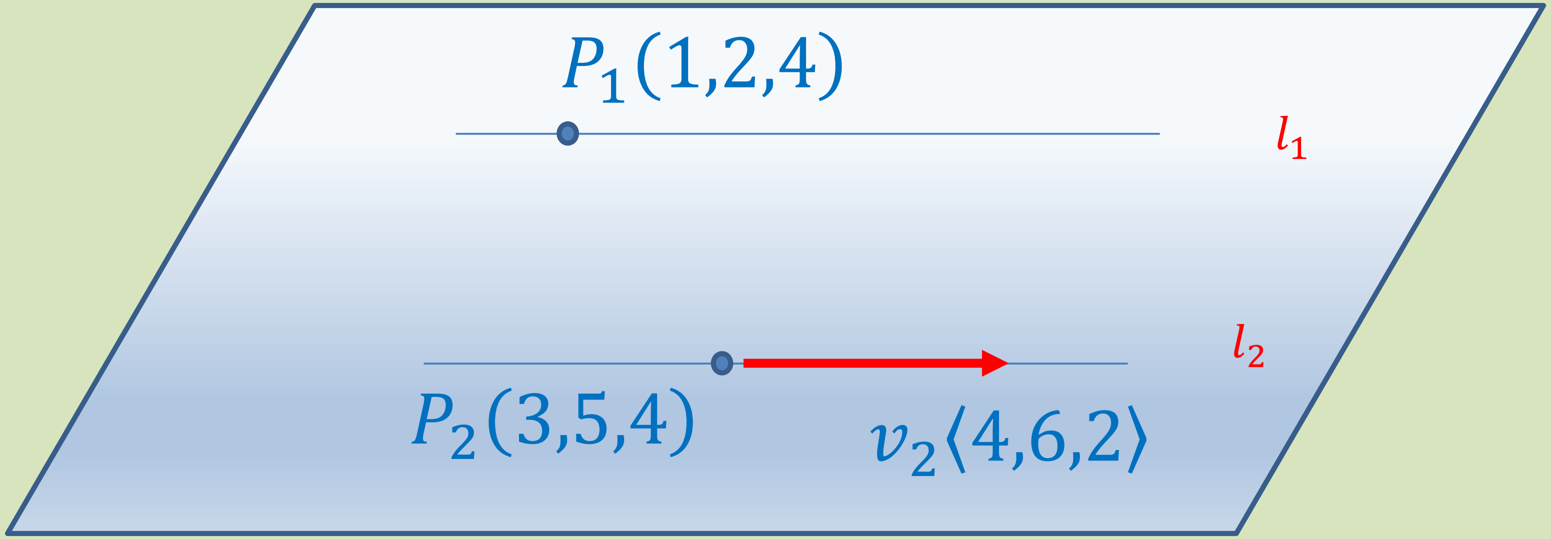
L_2

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-4}{2}$$

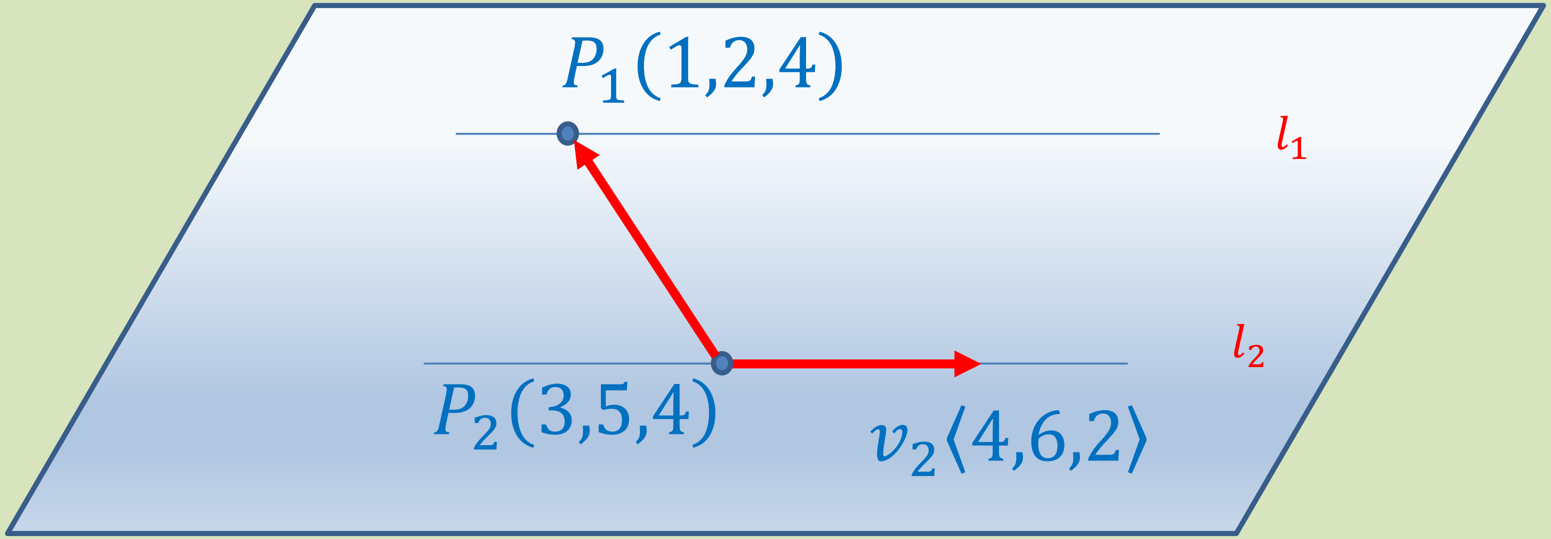
$P_1(1,2,4) \quad v_1\langle 2,3,1\rangle$

$P_2(3,5,4) \quad v_2\langle 4,6,2\rangle$

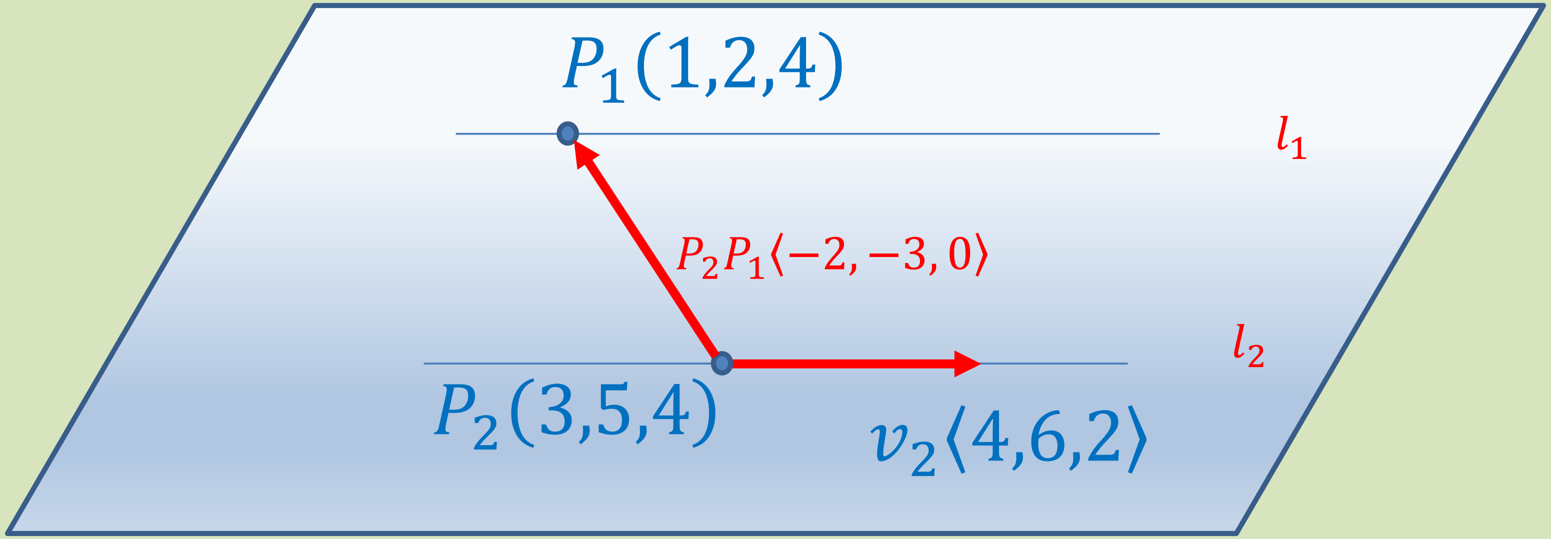
Se hace el dibujo

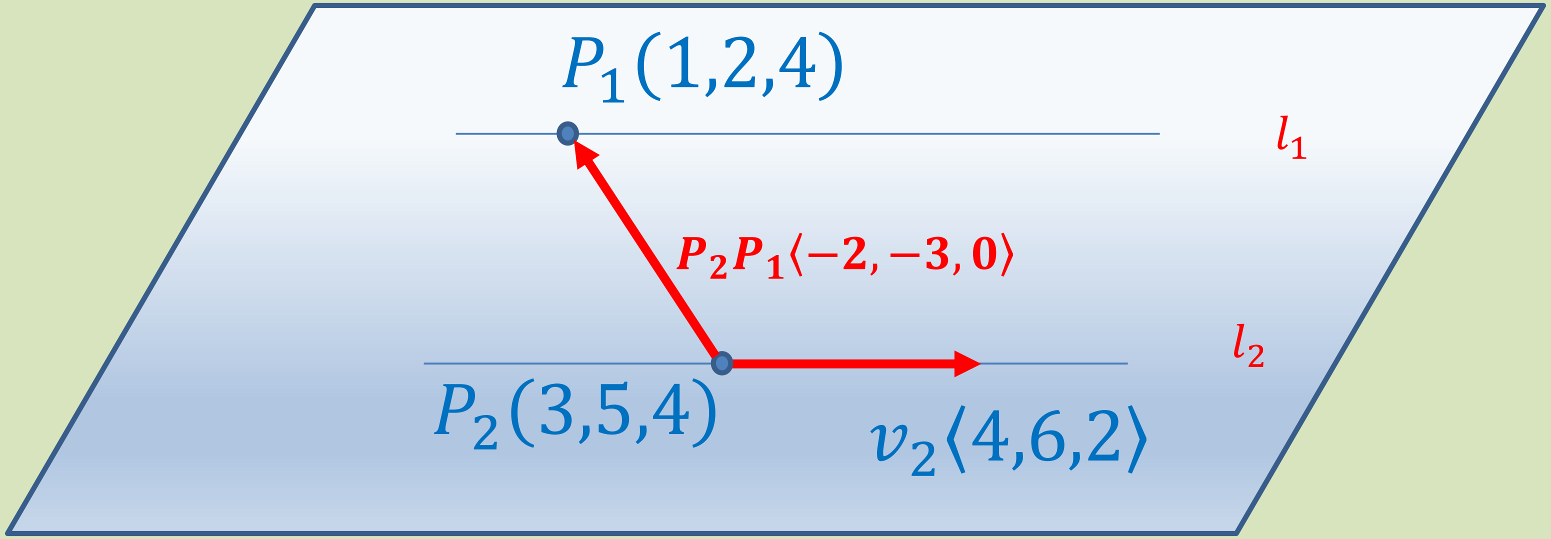


Con los puntos $P_2(3,5,4)$ y $P_1(1,2,4)$ hallo el vector P_2P_1



$$P_2P_1\langle -2, -3, 0\rangle$$


$P_1(1,2,4)$
l_1
$P_2P_1\langle -2,-3,0\rangle$
l_2
$P_2(3,5,4)$
$v_2\langle 4,6,2\rangle$



Con cualquiera de los puntos y los dos vectores hallo la ecuación paramétrica:

$$x = 3 + 4\alpha - 2\beta$$
$$y = 5 + 6\alpha - 3\beta$$
$$z = 4 + 2\alpha + 0\beta$$

Ejercicio # 8

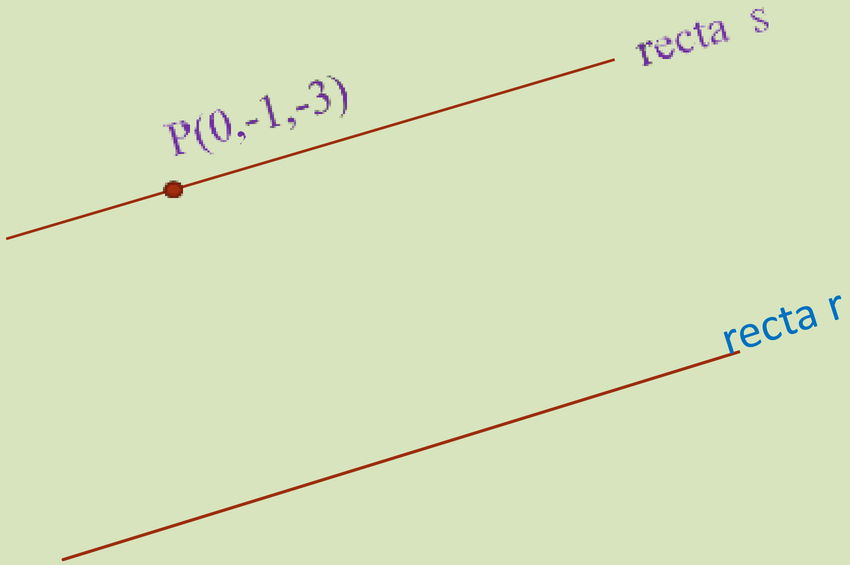
Se tiene una recta s que pasa por el punto $P_0(0,-1,-3)$ $y\ es\ paralela\ a\ la\ recta\ r$ $que\ tiene\ por\ ecuación$:

$$\text{recta r}\ \begin{cases} 3x-5y+7z-5=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$$

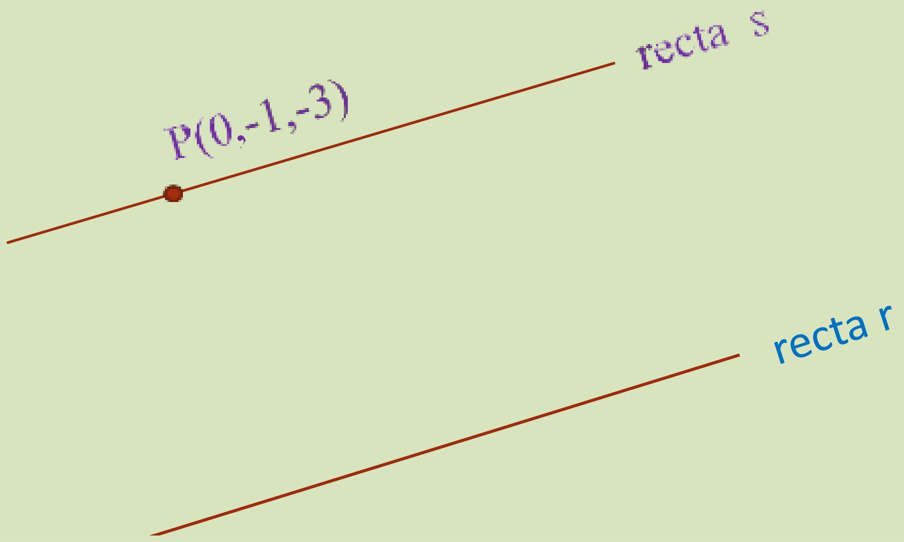
Hallar la ecuación de la primera recta s.

Lo fundamental aquí es entender que recta r $\begin{cases} 3x - 5y + 7z - 5 = 0 & \pi_1 \\ x - 2y + z + 3 = 0 & \pi_2 \end{cases}$

es una recta formada por dos planos. Inicialmente te olvidas de los planos y asumes solo que es una recta como otra cualquiera. Y haces el dibujo.



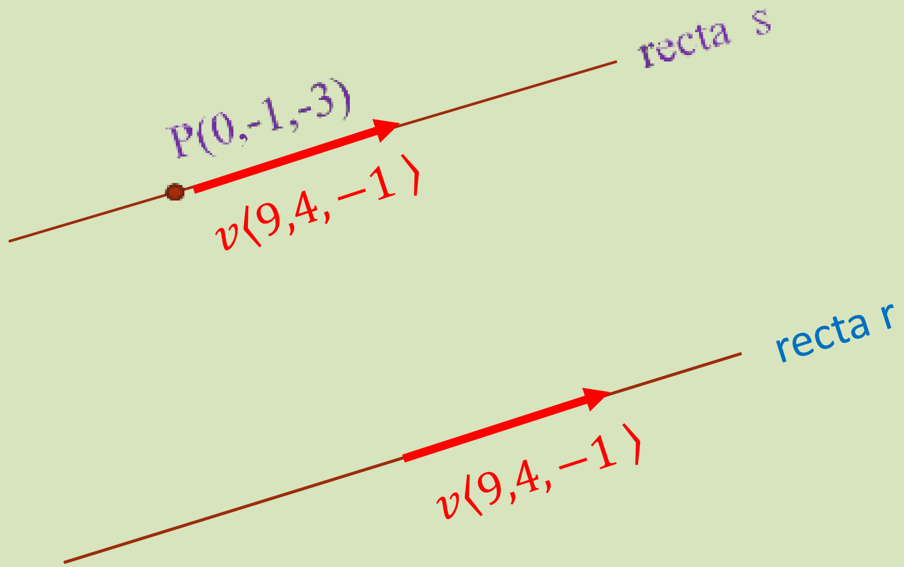
Conozco un punto de la recta s. Solo basta encontrar el vector director de esta recta. Si logro encontrar el un vector director para la recta s, el ejercicio está resuelto.



$$\text{recta r}\begin{cases} 3x-5y+7z-5=0 & \pi_1 \\ x-2y+z+3=0 & \pi_2 \end{cases}$$

$N_1\langle 3,,-5,7\rangle$
$N_2\langle 1,,-2,1\rangle$

Como la recta r es la intersección de dos planos π_1 y π_2, el vector director de la recta r es el vector de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2. Se halla el producto vectorial de los vectores normales a los planos π_1 y π_2.



$$P(0,-1,-3)$$

$$N_1\langle 3,,-5,7\rangle \times N_2\langle 1,,-2,1\rangle = v\langle 9,4,-1\rangle$$

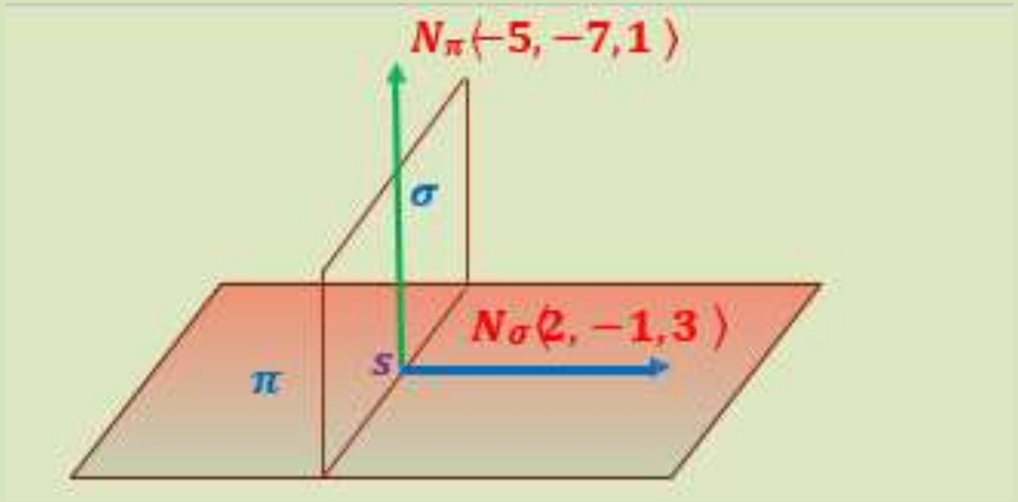
$$x = 0 + 9\alpha$$
$$y = -1 + 4\alpha$$
$$z = -3 - \alpha$$

Ejercicio # 9

Hallar la ecuaciones paramétricas de la recta de intersección determinada por los planos π y σ:

$$\pi: \; 5x + 7y - z + 3 = 0$$

$$\sigma: \; 2x - y + 3z + 1 = 0$$



Nπ⟨−5, −7,1 ⟩
σ
Nσ⟨2, −1,3 ⟩
S
π

Ejercicio # 10

Tenemos la recta r y los planos π_1, π_2 siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases} \qquad \begin{matrix} x + 2y - z = 1 & \pi_1 \\ x - y + z = 3 & \pi_2 \end{matrix}$$

a) Halla el punto P donde se cortan la recta r y el plano π_1

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y π_2

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π:

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

Este valor se reemplaza en las paramétricas de la recta

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$

b) De la misma forma hallamos Q:

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

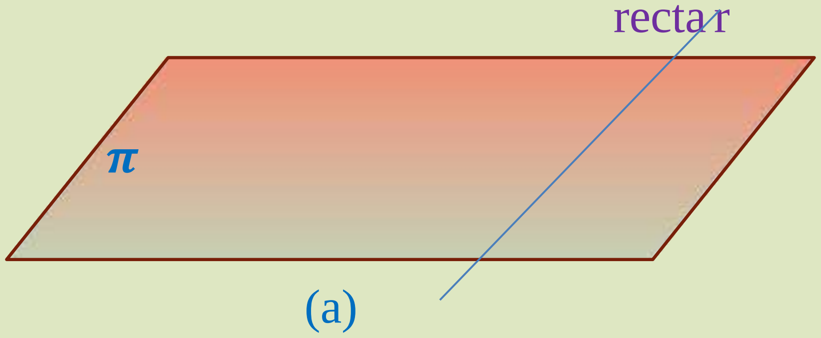
Ejercicio # 11

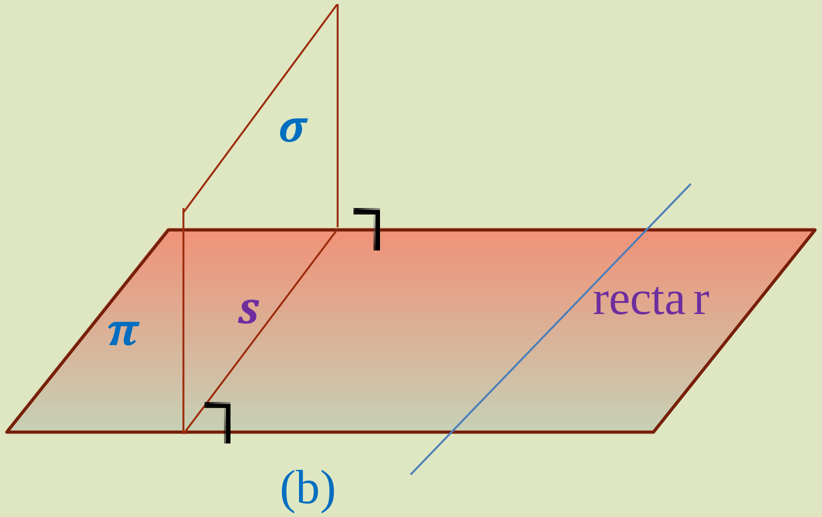
Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta r determinada por la intersección de los planos:

$$r: \begin{cases} \pi_{1}: x + y - z + 1 = 0 \\ \pi_{2}: x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Además, el plano π es perpendicular al plano σ: $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Hallar las ecuaciones paramétricas, analítica e implícita del plano π.



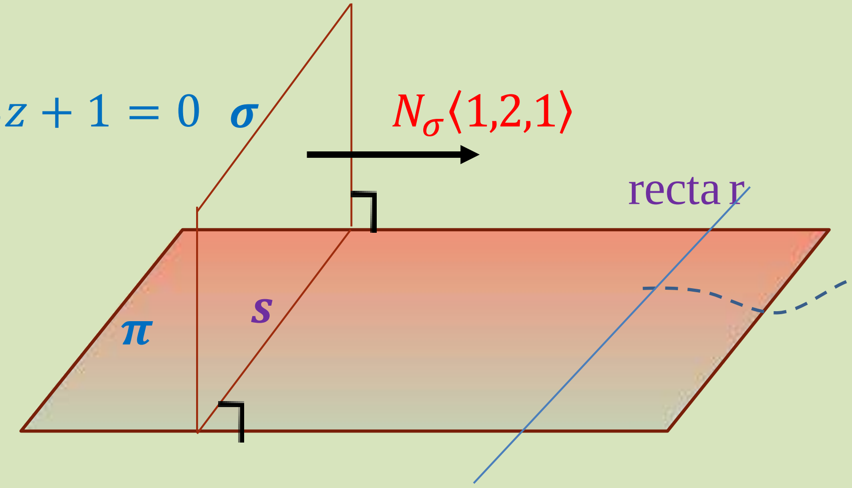


(a) La recta $\boldsymbol{r}$ está contenida en el plano π.

(b) Los planos π y σ son perpendiculares.

.

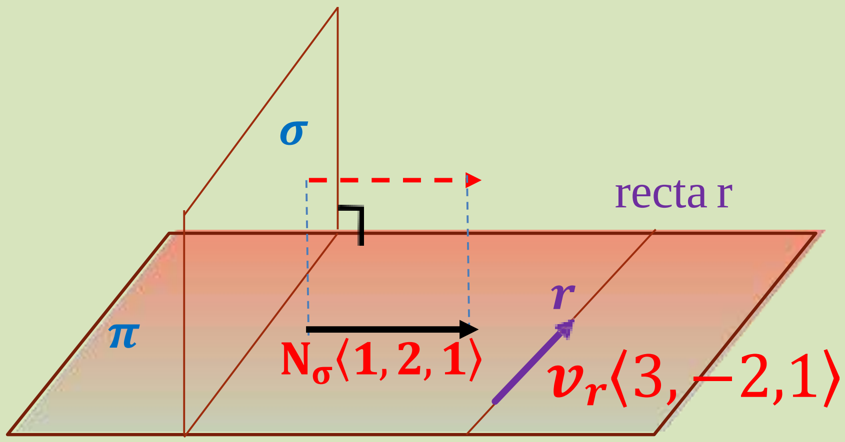
$2x - y + 3z + 1 = 0$ $\boldsymbol{\sigma}$ $N_\sigma\langle 1,2,1\rangle$



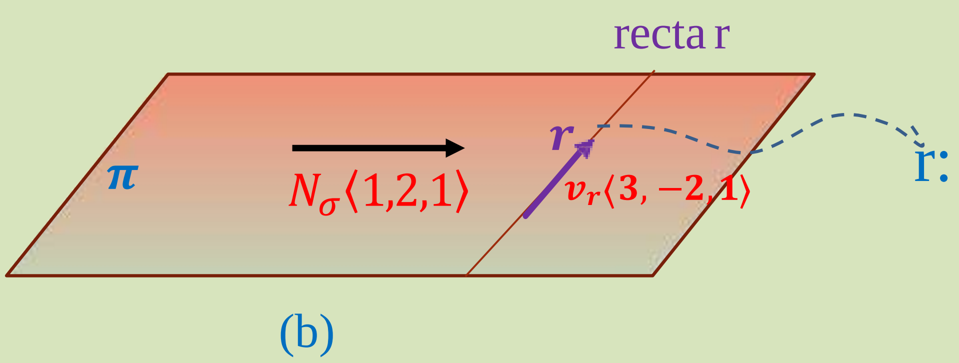
La recta r es la intersección de los planos π_1, π_2

$$r: \begin{cases} \pi_1 \quad x + y - z + 1 = 0 & N_1\langle 1,1,-1\rangle, \\ \pi_2 \quad x + 2y + z = 0 & N_2\langle 1,2,1\rangle \end{cases}$$

El vector director de σ es $N_\sigma\langle 1,2,1\rangle$



$El\ vector\ normal\ N_\sigma\langle 1,2,1\rangle$ lo traslado, hasta el plano π.

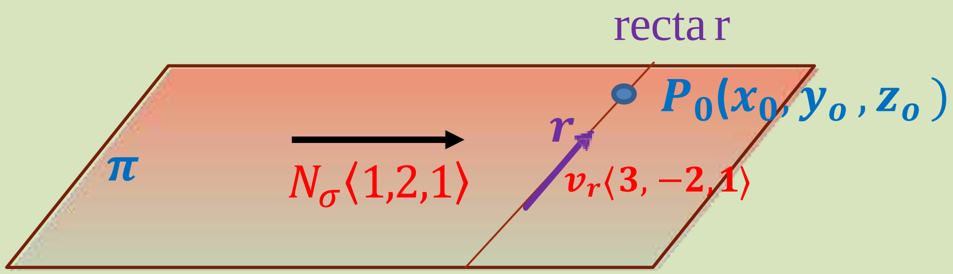


La recta r es la intersección de los planos π_1, π_2

$$r: \begin{cases} \pi_1 & x+y-z+1=0 \\ \pi_2 & x+2y+z=0 \end{cases} \qquad N_1\langle 1,1,-1\rangle, \; N_2\langle 1,2,1\rangle$$

Con los vectores normales de los planos π_1, π_2: $N_1\langle 1,1,-1\rangle$, $N_2\langle 1,2,1\rangle$ hallamos el vector director de la recta r de intersección de los planos π_1, π_2:

$$N_1\langle 1,1,-1\rangle \times N_2\langle 1,2,1\rangle = \boldsymbol{v_r}\langle \mathbf{3,-2,1}\rangle$$



$$r: \begin{cases} \pi_1 \quad x + \ \ y - z + 1 = 0 & N_1\langle 1, 1, -1\rangle, \\ \pi_2 \quad x + 2y + z = 0 & N_2\langle 1, 2,1\rangle \end{cases}$$

Solo falta hallar las coordenadas de un punto $\boldsymbol{P_0(x_0, y_o, z_o)}$ de la recta de intersección de los planos π_1, π_2:

Las coordenadas de un punto $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0, z_0)}$ de la recta de intersección r se determinan mediante las ecuaciones de π_1 y π_2, cono se vio en clase.

$$\pi_1 \qquad x + y - z + 1 = 0$$
$$\pi_2 \qquad x + 2y + z = 0$$

Si hago z=1

$$x + y - 1 + 1 = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$

$\boldsymbol{P_0(\; , \; , 1)}$

$$x + y = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$

Ahora multiplico por -1

$$-x - y = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$

$$y + 1 = 0$$

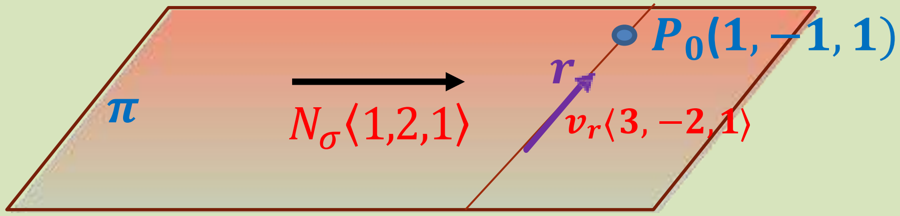
$$\boxed{y = -1}$$

Reemplazo y= -1 en $x + y \quad = 0$

$$x - 1 \ = 0$$

$$x = 1$$

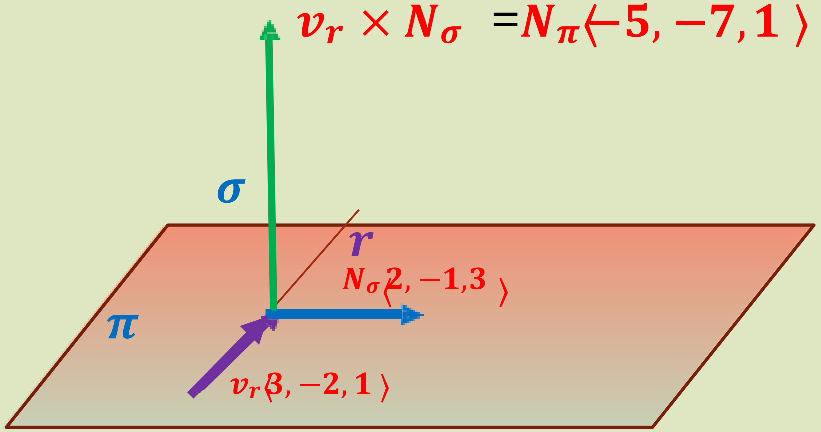
Las coordenadas del punto son: $P_0(1, -1, 1)$



$P_0(1,-1,1)$ $\quad\quad$ $v_r\langle 3,-2,1\rangle$

Ecuación de la linear:

$$x = 1 + 3\propto$$
$$y = -1 - 2\propto$$
$$z = 1 + \propto$$

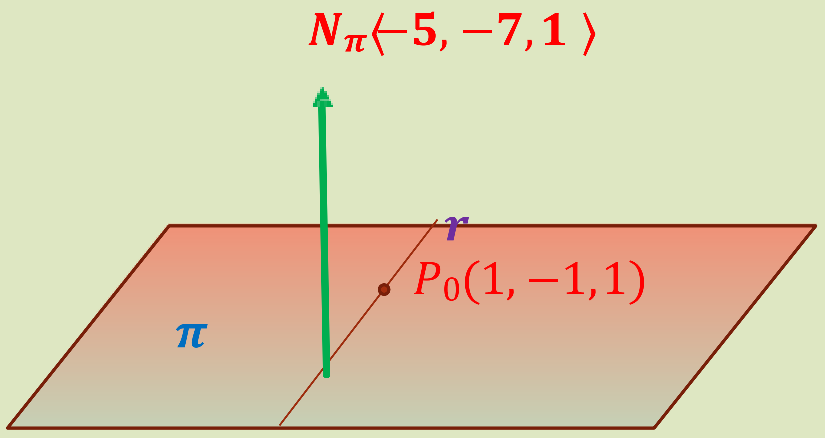


(c)

v_r 3, −2,1

Con los vectores $\mathbf{N_\sigma \langle 1, 2, 1 \rangle}$ y $v_r \langle 3, -2, 1 \rangle$ hallo el vector normal al plano π mediante el producto vectorial $\boldsymbol{v_r} \times \boldsymbol{N_\sigma}$. Con este vector normal y un punto la ecuación analítica del plano $\boldsymbol{\pi}$.

$$\boldsymbol{v_r \langle 3, -2, 1 \rangle \times N_\sigma \langle 2, -1, 3 \rangle = N_\pi \langle -5, -7, 1 \rangle}$$



$N_{\pi}\langle -5,-7,1\rangle$ $P_0(1,-1,1)$

$$-5(x-1)-7(y+1)+(z-1)=0$$

$$5(x-1)+7(y+1)-(z-1)=0$$

Ecuación del plano π $5x+7y-z+3=0$

Ejercicio # 12

Se tienen dos rectas r y s perpendiculares. La recta r tiene por ecuación

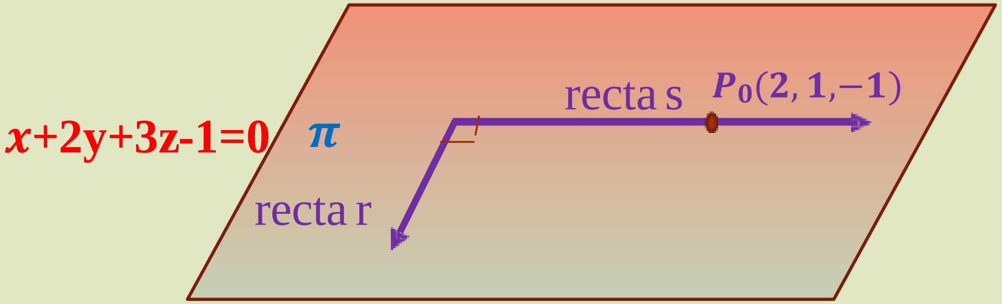
$$\mathbf{r}: \begin{cases} x \;\; -2z+3=0 & \pi_2 \\ y - z - 4 \;\; =0 & \pi_1 \end{cases}$$

El ejercicio además dice:

Las rectas r y s forman un plano π cuya ecuación es **x+2y+3z-1=0.**

La recta s pasa por el punto $P_0(2,1,-1)$.

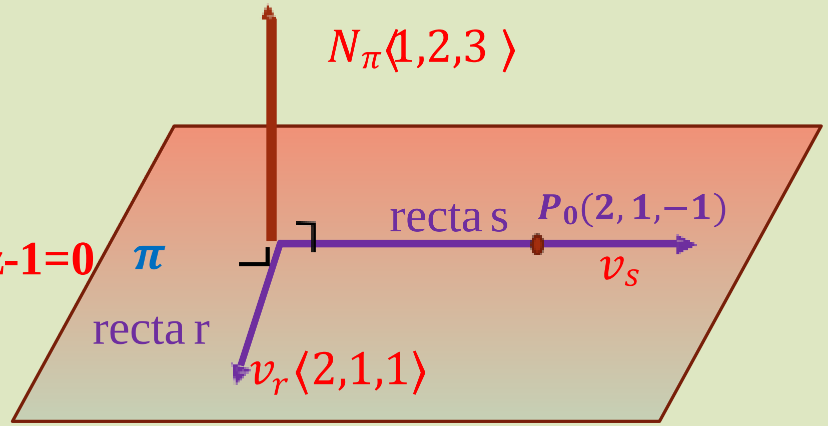
Hallar la ecuación de la recta s.



Se tienen dos rectas r y s perpendiculares. La recta r tiene por ecuación

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 & \pi_2 \\ y - z - 4 = 0 & \pi_1 \end{cases}$$

Las rectas r y s forman un plano π cuya ecuación es $\boldsymbol{x}$**+2y+3z-1=0** π.
La recta s pasa por el punto $P_0(2,1,-1)$. Hallar la ecuación de la recta s.



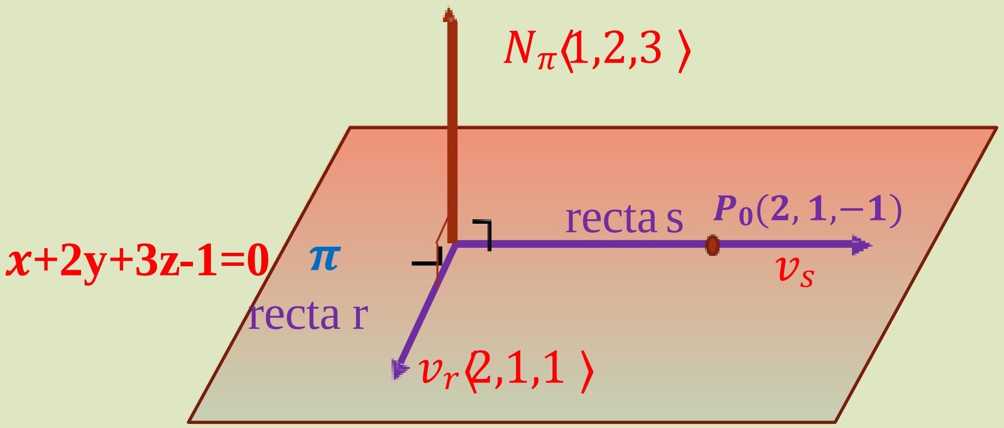
Tercero: datos que nos da el enunciado.

De la ecuación del plano π **x+2y+3z-1=0** *sabemos que* el vector normal al plano es $N_\pi\langle 1,2,3\rangle$.

De **r**: $\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 & \pi_1 \longrightarrow \\ y - z - 4 = 0 & \pi_2 \longrightarrow \end{cases}$

sabemos que el vector normal del plano π_1 N_{π_1} *es* $\langle 1, 0, -2\rangle$
y del plano π_2 es $N_{\pi_2}\langle 0,1,-1\rangle$

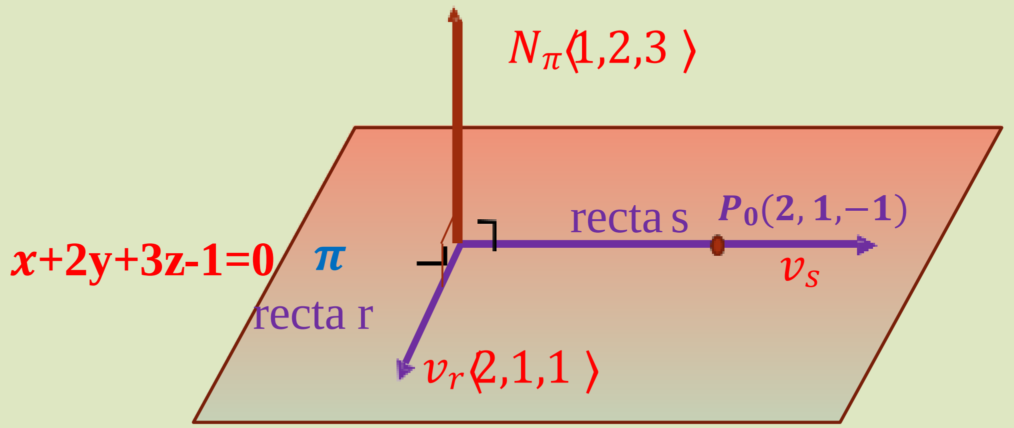
.



Por tanto, el vector director de la recta r (de intersección de los planos π_1 y π_2) es $N_{\pi_1} \times N_{\pi_2}$:

$$N_{\pi_1}\langle 1, 0, -2\rangle \times N_{\pi_2}\langle 0, 1, -1\rangle = v_r\langle 2,1,1\rangle$$

El vector normal $N_\pi\langle 1,2,3\rangle$ al plano π es perpendicular a cualquier vector del plano, esto implica que sea perpendicular a v_r y a v_s.



Los tres vectores son perpendiculares, luego, puedo emplear el producto vectorial $N_\pi \times v_r$ para determinar v_s:

$$v_r\langle 2,1,1\rangle \times N_\pi\langle 1,2,3\rangle = v_s\langle 1,-5,3\rangle$$

Con el punto $\boldsymbol{P_0(2,1,-1)}$ y el vector director $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}\langle\boldsymbol{1,-5,3}\rangle$ puedo hallar cualquiera de la ecuaciones paramétricas o simétricas de la rectas:

$$x = 2 + \propto$$

$$y = 1 - 5\propto$$

$$z = -1 + 3\propto$$

Ejercicio # 13

CUESTIONES TEÓRICAS

83 La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene dicho plano en cada uno de los casos siguientes:

I) $a = 0, \; b = 0$

II) $b = 0, \; c = 0$

III) $a = 0, \; c = 0$

IV) $d = 0$

I) Es perpendicular al eje OZ. (Paralelo al plano OXY).

II) Es perpendicular al eje OX. (Paralelo al plano OYZ).

III) Es perpendicular al eje OY. (Paralelo al plano OXZ).

IV) Pasa por el origen, $(0, 0, 0)$.

Ejercicio # 14

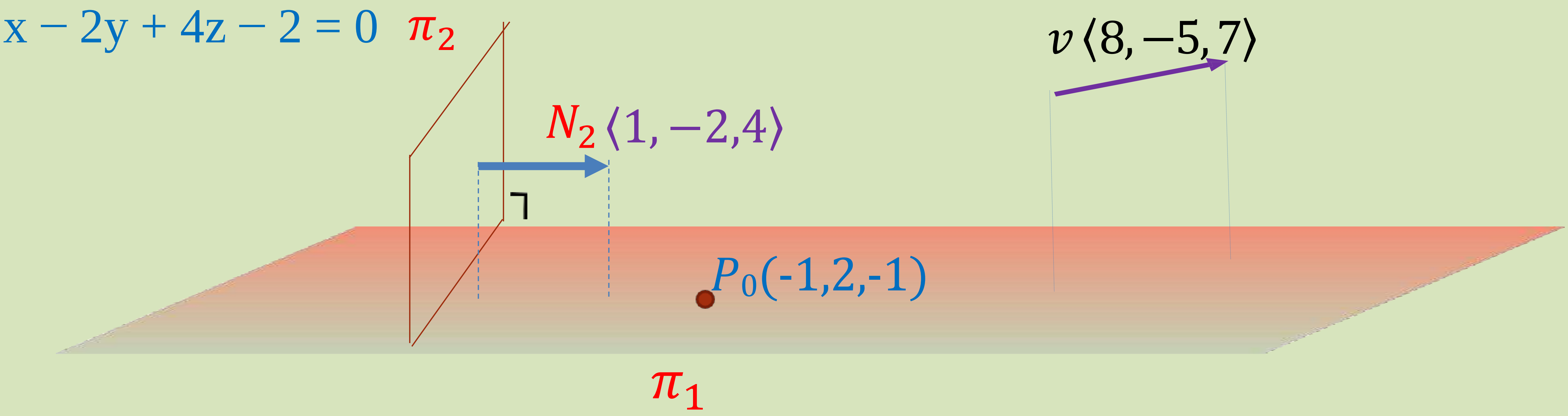
Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene al punto P(-1,2,1). Además, π_1 es perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi_2}$ que tiene por ecuación

$$x - 2y + 4z - 2 = 0 \quad \boldsymbol{\pi_2}$$

Adicionalmente, hay una recta que es paralela al plano π_1 cuya vector director es:

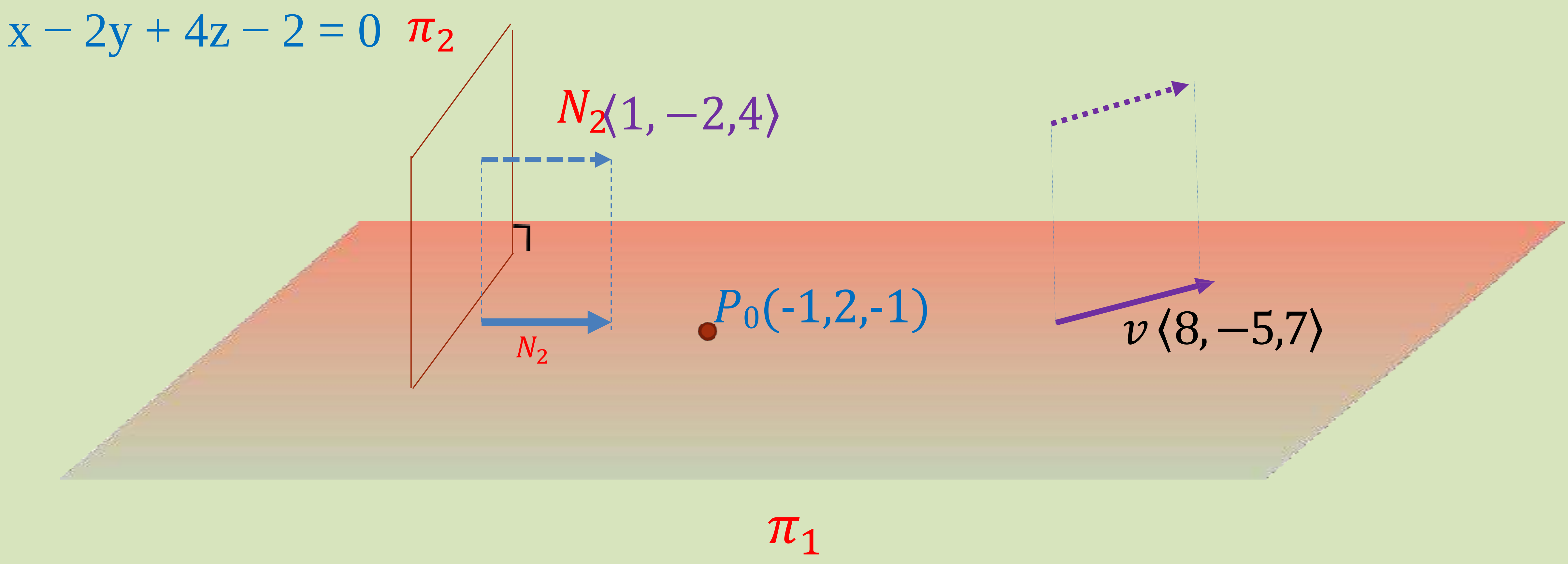
$$8i - 5j + 7k$$

Se pide hallar una ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_1}$

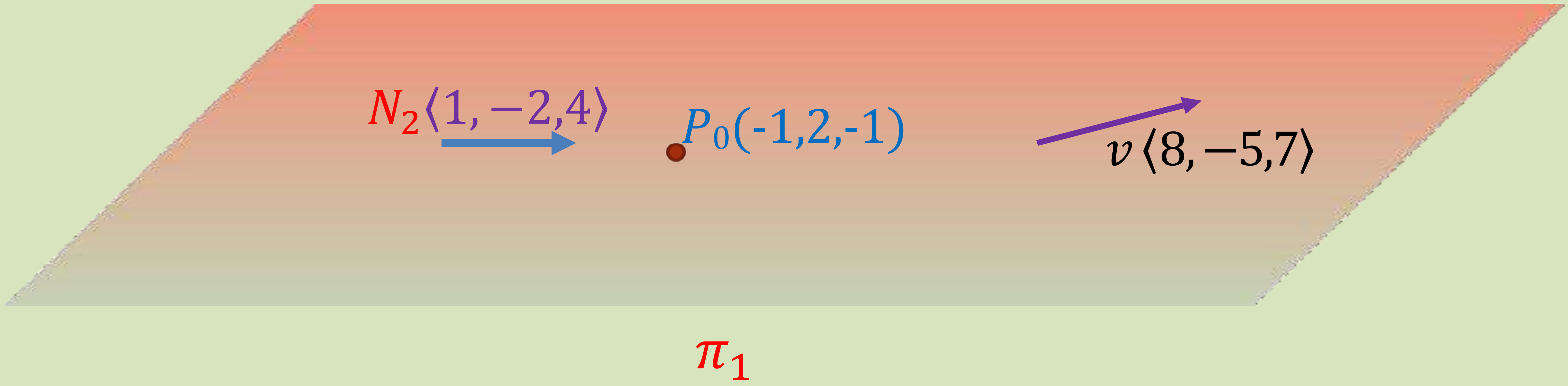


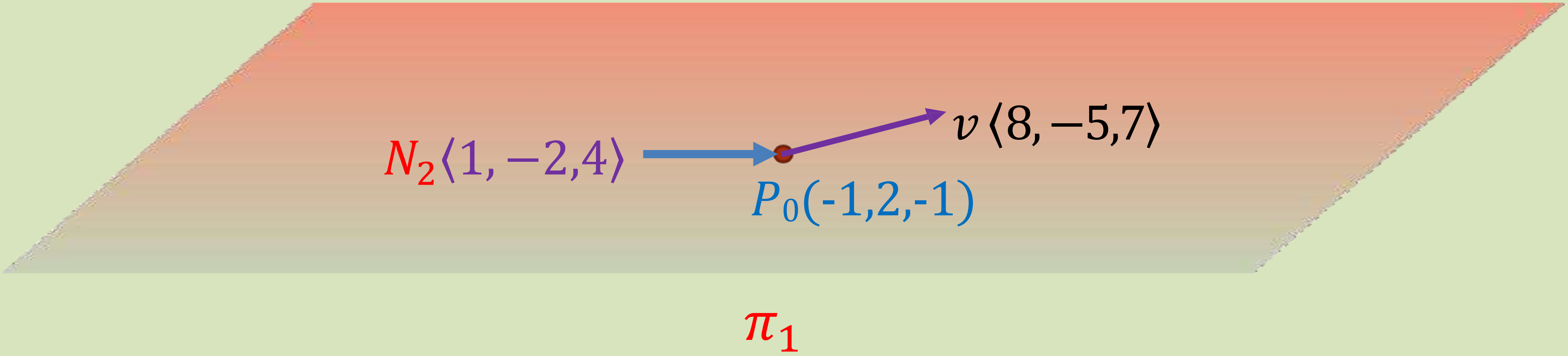
El vector normal del plano π_2 *es* $N_2\langle 1, -2, 4\rangle$

Elaboró Efrén Giraldo T.



$x - 2y + 4z - 2 = 0$
π_2
$N_2\langle 1, -2, 4\rangle$
N_2
$P_0(-1,2,-1)$
$v\,\langle 8, -5, 7\rangle$
π_1


$N_2\langle 1,-2,4\rangle$
P_0(-1,2,-1)
$v\langle 8,-5,7\rangle$
π_1



$$x = -1 + \alpha + 8\beta$$
$$y = 2 - 2\alpha - 5\beta$$
$$z = -1 + 4\alpha + 7\beta$$