Institución Universitaria	FACULTAD DE CIENCIAS PROGRAMA DE CIENCIAS BÁSICAS SOLUCIÓN - EXAMEN INSTITUCIONAL	Código	FDE 097
		Versión	01
		Fecha	2010-01-27

Asignatura: Geometría Vectorial y Analítica – **Jornada 1** **Código: XRGV03 -** _____

Docente: ____ **Fecha:** _________________

Nombre: ____ **Carné:** _________________

NOTA

Instrucciones:
Escriba su nombre completo y su número de carné en la parte superior de la hoja.
Los puntos serán evaluados de acuerdo a su procedimiento.
Para este parcial no se permite el uso de celulares, ni fichas.
La prueba está diseñada para una duración de máximo dos horas (2:00)

1. (Valor 24%) Este punto comprende los numerales 1.1. a 1.4.

1.1. (**Valor 6%)** Todo punto que esté a 2/5 de la distancia de un punto P a un punto Q divide al segmento a una razón de,

A. $r = \frac{3}{2}$
B. $r = 2$
C. r =$\frac{1}{5}$
D. $r = \frac{2}{3}$

1.2. (**Valor 6%)** Las ecuaciones de las rectas

$$l_1 = \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 9 + 7t \end{cases} \quad y \quad l_2 = \begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = -9 + 9t \\ z = -5 + 21t \end{cases}$$

A. Son perpendiculares porque el producto escalar entre los vectores directores es igual a cero.
B. No son paralelas porque el producto vectorial entre los vectores directores es diferente a cero.
C. Son paralelas porque el producto vectorial entre los vectores directores es igual a cero.
D. Son paralelas porque el producto escalar entre los vectores directores es igual a cero.

1.3. (Valor 6%) El punto $Q(-1,5,2)$ no pertenece a la recta $t = \frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{2}$ porque,

A. No existe un único valor para el parámetro *t* en cada de las ecuaciones simétricas.
B. El parámetro *t* es igual a 1 en dos de las ecuaciones simétricas.
C. No es posible determinar esta afirmación con las ecuaciones simétricas dadas.
D. El parámetro *t* es igual a $\frac{7}{4}$ en una de las ecuaciones simétricas.

1.4. (**Valor 6%)** Para conformar la base de un plano, basta con tener:

A. Dos vectores directores linealmente independientes.
B. Tener dos puntos.
C. Un punto y el vector director de la recta.
D. La ecuación paramétrica de la recta.

2. (**Valor 22%**) Hallar la ecuación del plano que contenga al punto $(3\,,-5\,,4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(3\,,-2\,,1)$ y $(5\,,-1\,,3)$.

Se calcula el vector director de la recta perpendicular al plano

$\vec{v} = (3,-2,1) - (5,-1,3)$

$\vec{v} = \langle -2,-1,-2 \rangle$ Este vector director es perpendicular al plano, luego la ecuación del plano se puede calcular con la fórmula:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$-2(x - 3) + (-1)\big(y - (-5)\big) + (-2)(z - 4) = 0$

$-2x + 6 - y - 5 - 2z + 8 = 0$

$-2x - y - 2z + 9 = 0$

$2x + y + 2z = 9$

3. (**Valor 28%**) Considere los planos $\pi_1 = x - y + 2z + 1 = 0$ y $\pi_2 = -2x + y + 3z + 2 = 0$. Determine si los planos:

a) Son paralelos
b) Son perpendiculares
c) Son coincidentes
d) Se cortan. En caso de que se corten halle la recta de intersección de los planos.

Solución

a) Son paralelos

Los vectores normales a los planos son:

$$\overrightarrow{N_1} = \langle 1, -1, 2\rangle \qquad y \qquad \overrightarrow{N_2} = \langle -2, 1, 3\rangle$$

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

$$N_1 x N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = i(-3-2) - j\big(3-(-4)\big) + k(1-2) = -5i - 7j - k$$

Como el producto vectorial no es cero, entonces podemos concluir que los vectores normales de los planos no son paralelos. Por tanto, los planos tampoco son paralelos.

b) Son perpendiculares

Para ver si los planos son perpendiculares verificamos si los vectores normales son perpendiculares, se utiliza el producto escalar para esto,

$N_1 \,.\, N_2 = \langle 1, -1, 2\rangle \,.\, \langle -2, 1, 3\rangle = -2 - 1 + 6 = 3$

Como el producto escalar entre los vectores normales no es cero, concluimos que los vectores normales no son perpendiculares. Por tanto, los planos tampoco son perpendiculares.

c) Son coincidentes

Para que los planos sean coincidentes es necesario que sean paralelos, al no ser los planos paralelos tampoco son coincidentes.

d) Se cortan. En caso de que se corten halle la recta de intersección de los planos.

En el literal **a)** se probó que los planos no son paralelos, este hecho garantiza que los planos se cortan en una recta.

El vector director $\vec{v}$ de la recta es perpendicular a $\overrightarrow{N_1}$ y $\overrightarrow{N_2}$, entonces:

$$\vec{v} = \overrightarrow{N_1}\, x\, \overrightarrow{N_2} = \langle -5, -7, -1\rangle$$

Para hallar la ecuación paramétrica de la recta se debe hallar un punto de la recta, se sabe que este punto satisface:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -1 \\ -2x + y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y cada solución representa un punto de la recta.

Si $z = 0$

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \qquad Ec\,(1) \\ -2x + y &= -2 \qquad Ec\,(2) \end{aligned}$$

Al sumar las ecuaciones 1 y 2 s encuentra que $x = 3 \quad y \quad y = 4$

Por tanto, el punto de la recta es $P(3, 4, 0)$, y la ecuación paramétrica es:

$$l = \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 4 - 7t \\ z = -t \end{cases}$$

4. (**Valor 26%**) Determine si las rectas se cortan o si son oblicuas. En caso de que se corten halle el punto de corte.

$$l_1: t = 3 - x = y - 2 = \frac{z-8}{2} \qquad\qquad l_2 = \beta = \frac{2x-2}{2} = \frac{4-2y}{2} = \frac{z}{3}$$

Solución

Al organizar las ecuaciones de las rectas dadas:

$l_1: t = \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{2}$

$l_2 = \beta = \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$

Veamos si las rectas son paralelas, notemos que los vectores directores de las rectas son:

$\overrightarrow{v_1} = \langle -1,1,2 \rangle \qquad y \qquad \overrightarrow{v_1} = \langle 1,-1,3 \rangle$

Se realiza el producto vectorial entre $\overrightarrow{v_1}\ y\ \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{v_1} x \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = i(3+2) - j(-3-2) + k(1-1) = -5i - 5j$$

Luego, $\overrightarrow{v_1}\ y\ \overrightarrow{v_2}$ no son paralelos y por tanto las rectas no son paralelas.

Veamos si se cortan o se cruzan. Supongamos que se cortan:

$$l_1 = \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \qquad\qquad l_1 = \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 - \beta \\ z = \quad 3\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3 - t &= 1 + \beta && Ec.(1) \\ 2 + t &= 2 - \beta && Ec.(2) \\ 8 + 2t &= 3\beta && Ec.(3) \end{aligned}$$

Al utilizar las ecuaciones 2 y 3 para resolver y la primera para verificar:

$2 + t = 2 - \beta \qquad Ec.(2)$
$8 + 2t = 3\beta \qquad Ec.(3)$

$t + \beta = 0 \qquad Ec.(2) * 3$
$2t - 3\beta = -8 \qquad Ec.(3)$

Al resolver:
$3t + 3\beta = 0 \qquad Ec.(2)$
$2t - 3\beta = -8 \qquad Ec.(3)$

$5t = -8 \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{-8}{5}$

$\beta = \frac{8}{5}$

Al verificar en la ecuación 1 se encuentra que: $3 - \frac{-8}{5} = 1 + \frac{8}{5} \qquad entonces, \qquad \frac{23}{5} \neq \frac{13}{5}$

Como no se da igualdad, concluimos que las rectas son oblicuas.