Clase 2

DISTANCIAS

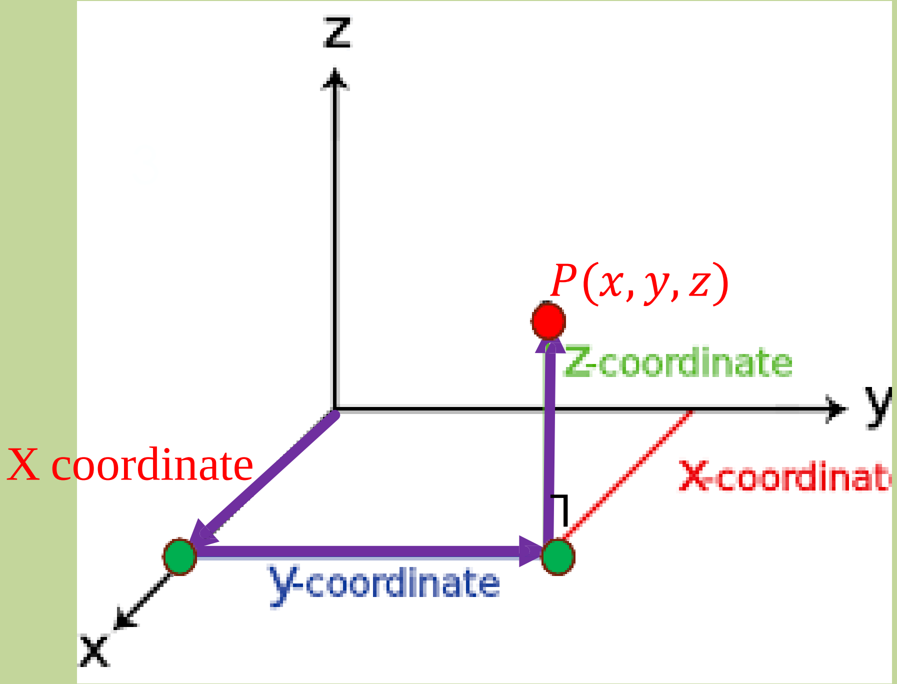
DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

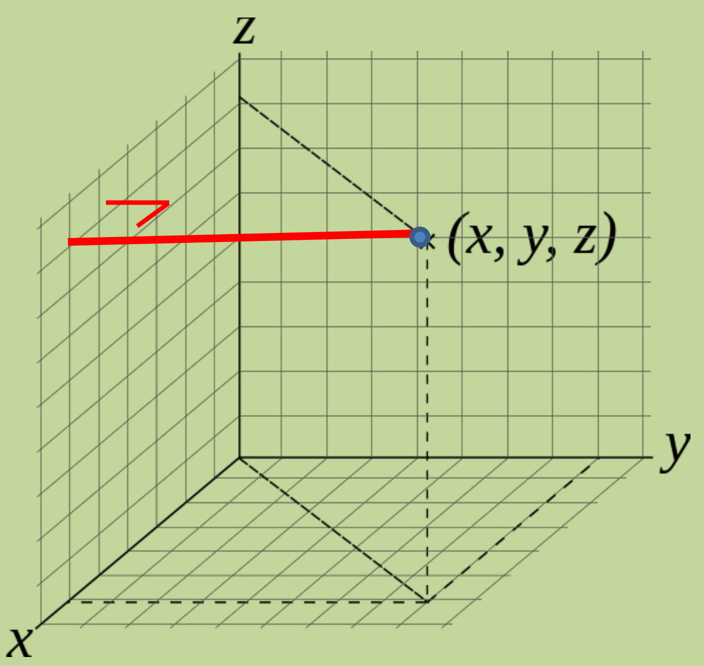
❖MIS VALORES
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

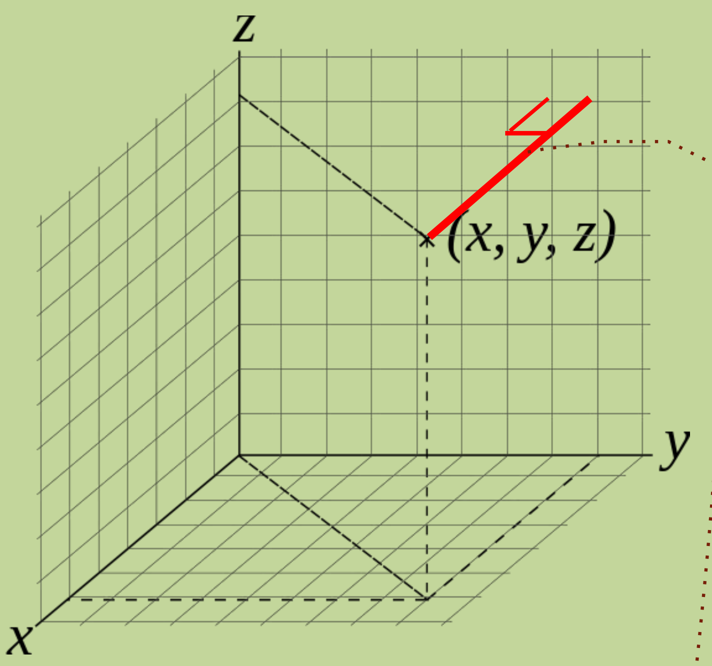
❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Índice



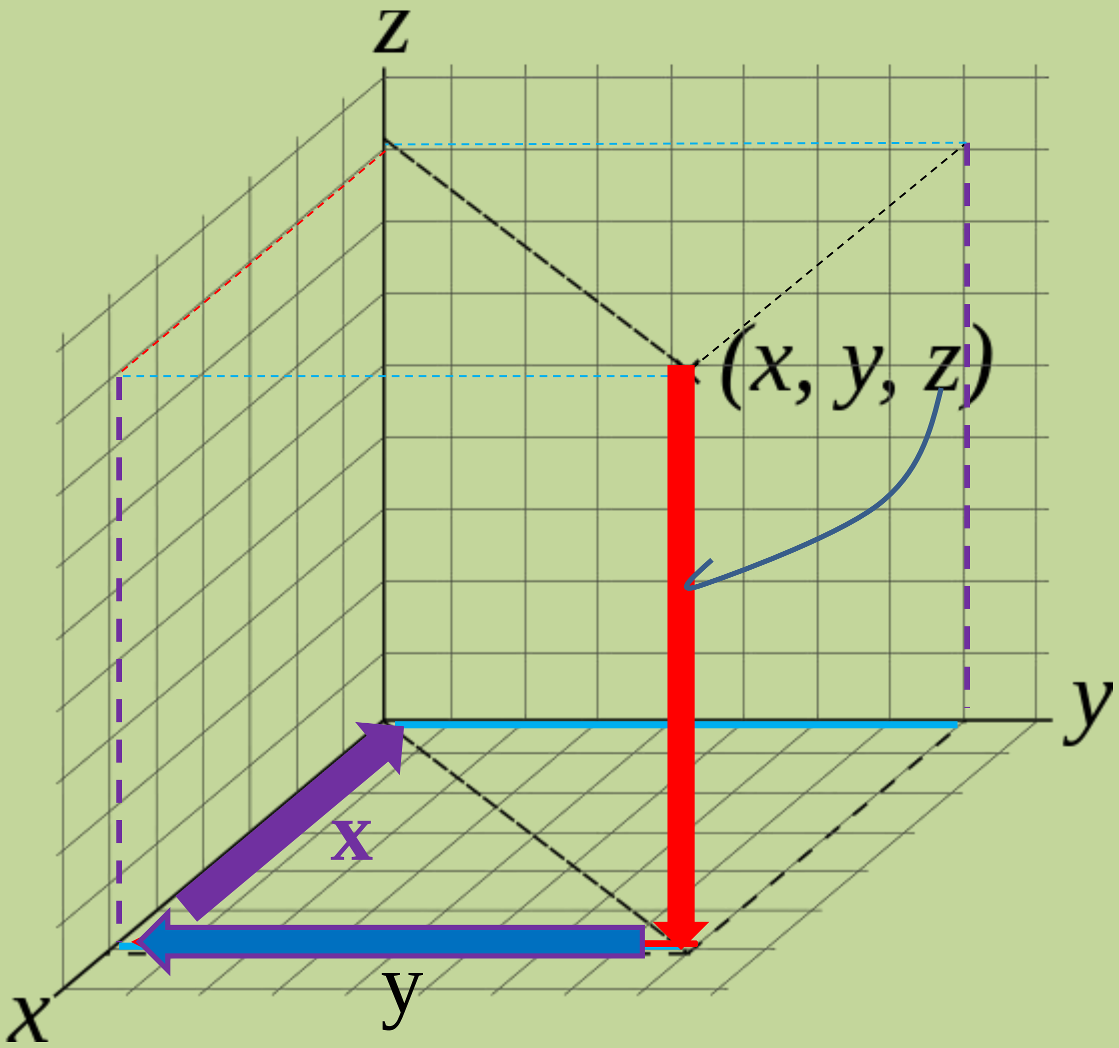




Observemos que al trazar una recta paralela a uno de los ejes (en este caso al eje z) desde un punto $P(x, y, z)$ cualquiera en el espacio, intercepta perpendicularmente con alguno de los planos cartesianos (plano xy).

Si es paralela al eje z, intercepta al plano xy, si es paralela al eje x intercepta al plano zy, si es paralela al eje y intercepta al plano xz. O sea, el plano interceptado está determinado por las otras dos letras.

Dado un punto en el espacio determinar sus coordenadas



P(-3,4,5).

Primero se ubica a partir del punto la coordenada en el eje z, para lo cual:

(1) Se baja (o se sube) una paralela al eje z hasta el plano xy

La paralela al eje z debe medir 5.

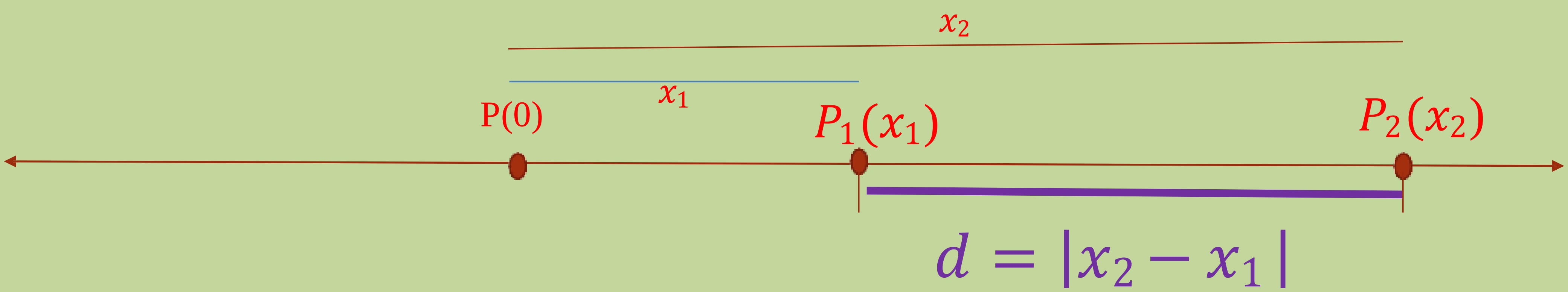
(2) Luego desde el punto de intersección , trazo una paralela al eje y que llegue hasta el eje x.

(3) Y a partir de allí la coordenada x:3.

Nota importante

La coordenada siempre tendrá su propio signo positivo (+) o negativo, y cuando se hacen operaciones con ellas se debe considerar su signo.

Distancia (módulo) entre dos puntos P(x_2) y P(x_1) en R1



Para una segmento de recta P_1P_2 (tomado en una dimensión) comprendido entre dos puntos de coordenadas $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, la distancia es el valor absoluto de su longitud y corresponde al **valor absoluto de la diferencia entre sus coordenadas .**

Este signo es propio de la fórmula

$$\text{Distancia } P_1P_2 = |x_2 - x_1|$$

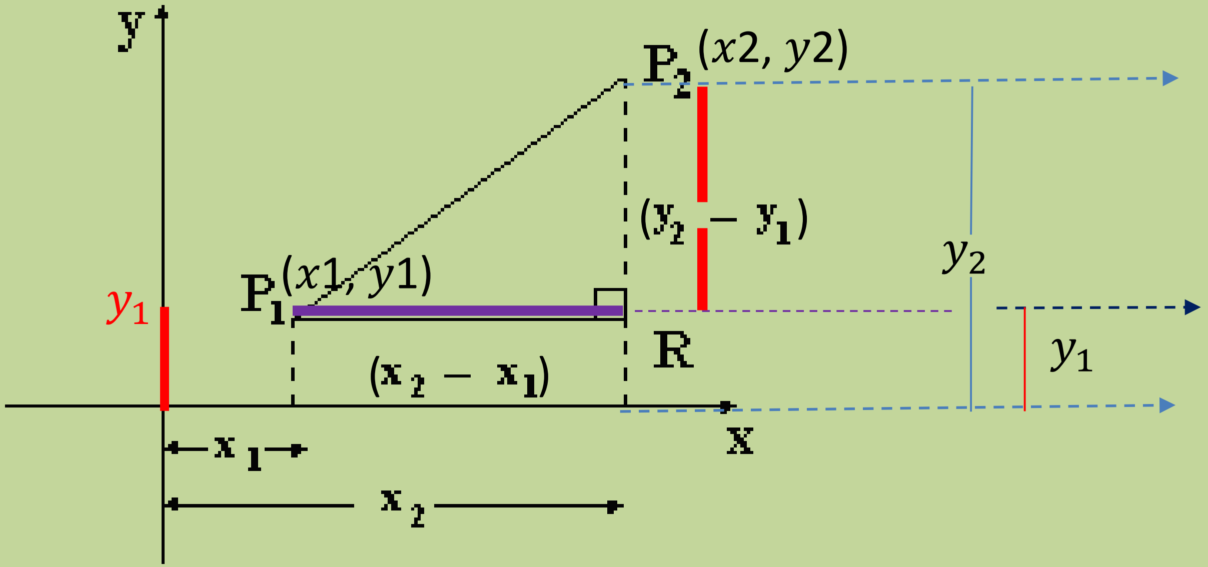
Como es el valor absoluto, da lo mismo si se toma primero x_2 o x_1 en la diferencia.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Hallar la distancia entre los puntos } \end{array}\overset{x_1}{A(-5)} \text{ y } \overset{x_2}{B(9)}$$

Distancia AB $= |x_2 - x_1|$

Distancia AB$= |9 - 5| = |4| = 4$

Distancia en 2D



$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Distancia en el espacio

Cuando nos referimos a la distancia entre dos puntos del espacio con coordenadas $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, hacemos mención a la longitud positiva que le corresponde al segmento de recta P_1P_2.

Su fórmula viene dada por:

$$\text{Distancia } |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Hallar la distancia entre los puntos A(3,1,-2) y B(2,-2,1)

x_1, y_1, z_1 $\quad$ x_2, y_2, z_2

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2 + (1-(-2))^2}$$

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (3)^2}$$

$$AB = \sqrt{1+9+9}$$

$$AB = \sqrt{19}$$

Si nos referimos a la *distancia* entre *dos puntos que están en dos dimensiones* (un plano) la ecuación anterior se convierte en:

Distancia $|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (0 - 0)^2}$

Distancia $|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

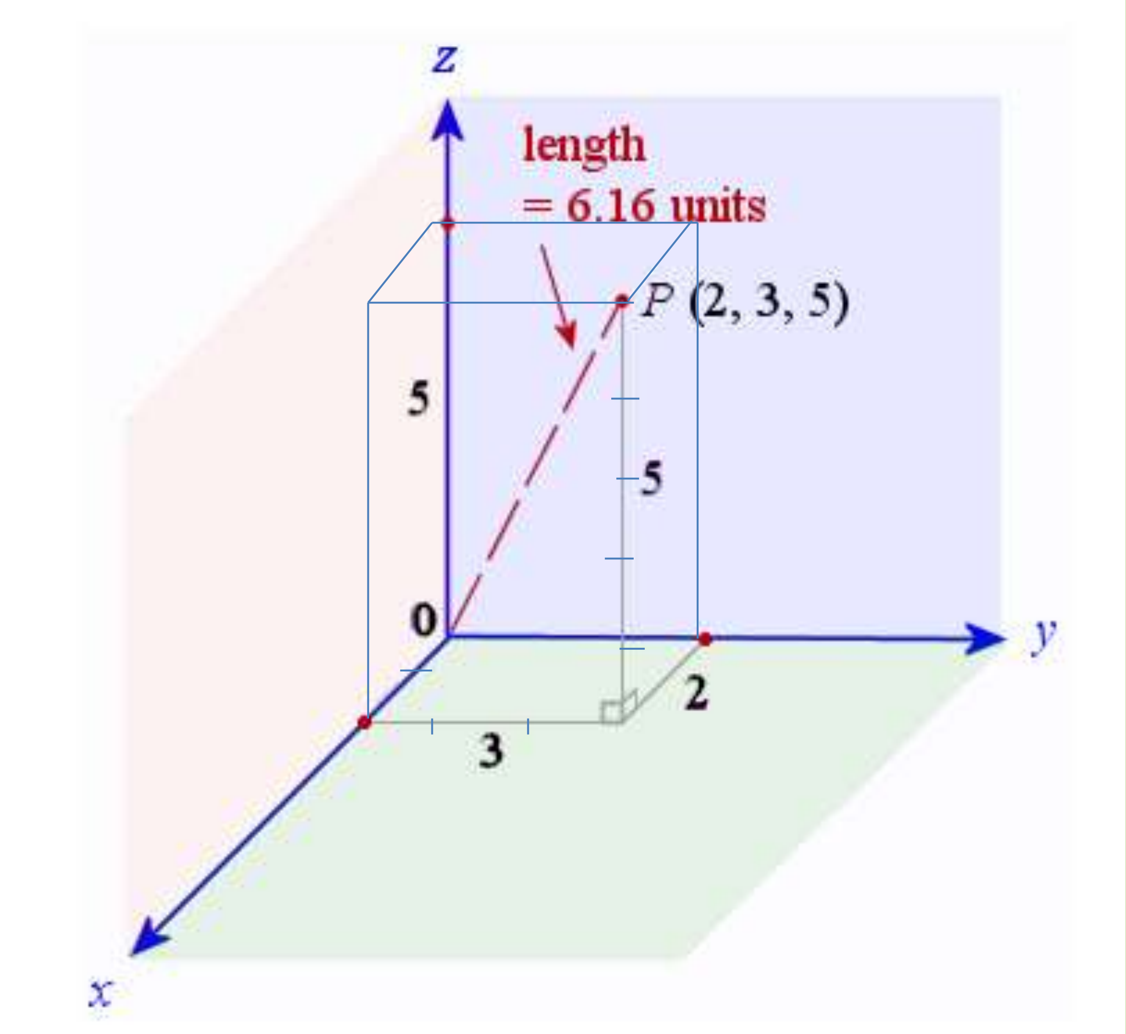
Misma de la diapositiva 12

Para la *distancia* entre dos *puntos que están en una dimensión* (una recta) la fórmula se convierte en:

Distancia $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 +) + (0,0)^2 + (0,0)^2}$

Distancia $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)$

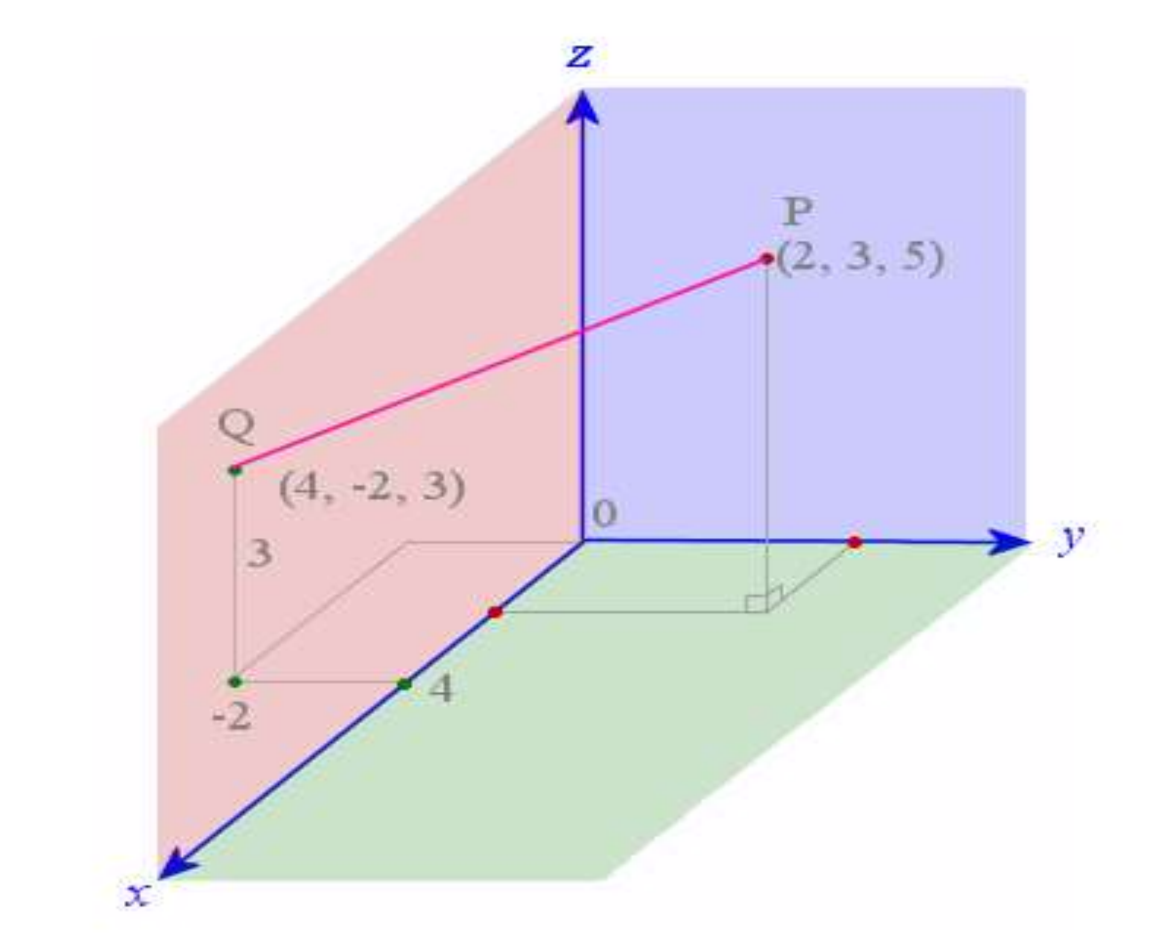
Que es la misma ecuación de la diapositiva 10



Encuentre la distancia desde el origen O hasta el punto B(2,3,5)

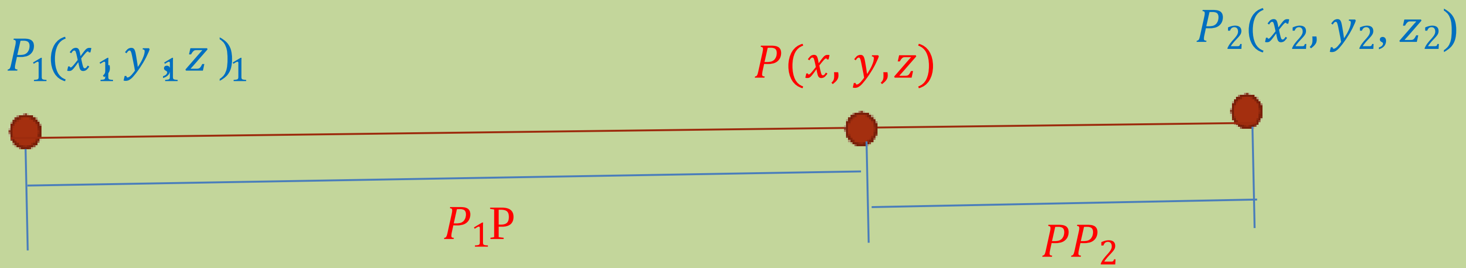
https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php

Hallar la distancia entre los puntos Q (4, -2, 3) y P (2, 3, 5).



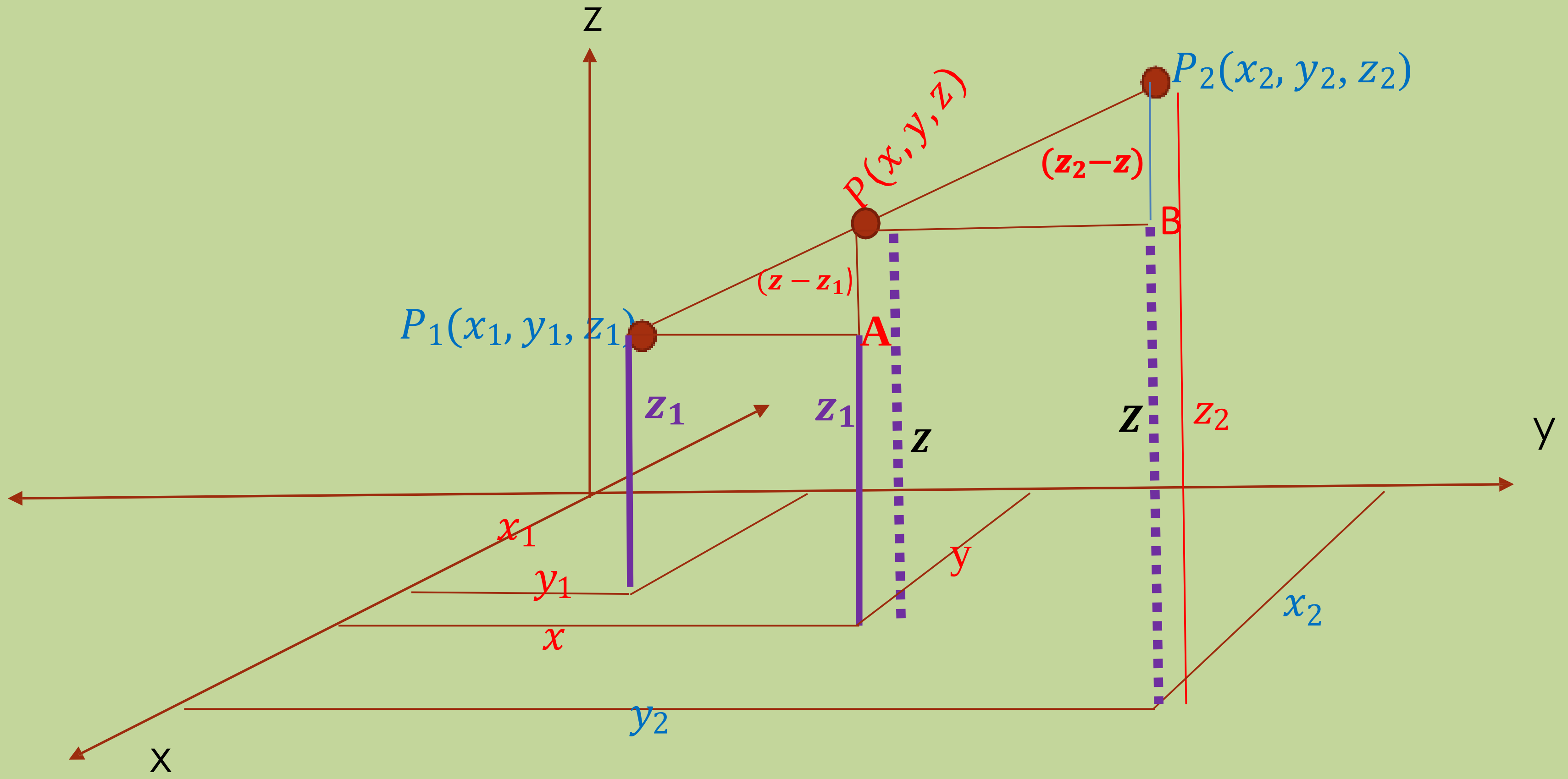
https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php

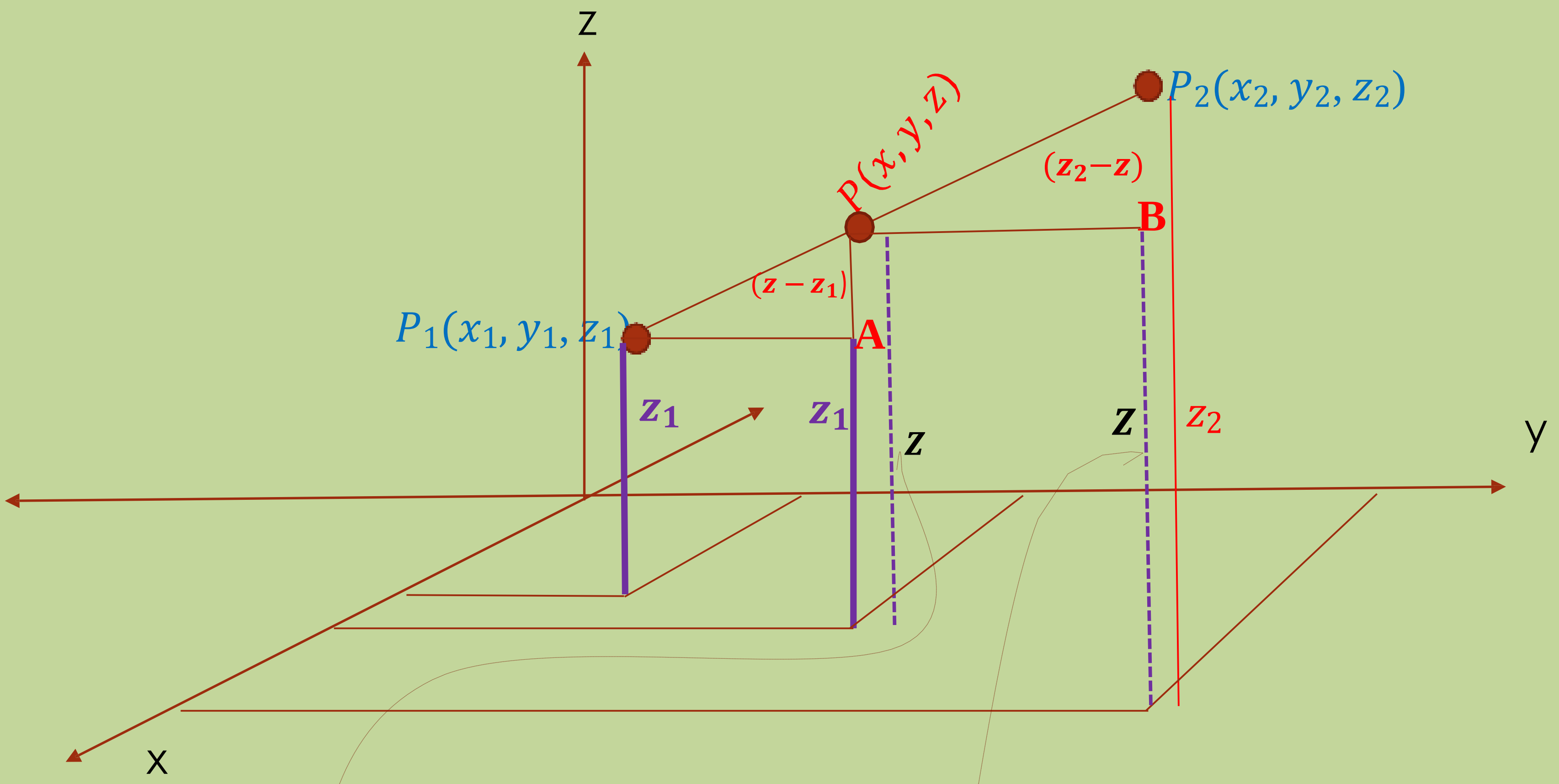
División de un segmento en una razón dada



El segmento P_1P_2 lo podemos dividir en dos segmentos menores P_1P y PP_2. Una razón es un numerador sobre un denominador, *e indica cuántas veces el numerador es el denominador*. En este caso definimos la razón como el primer segmento P_1P sobre el segundo PP_2.

$$R=\frac{P_1P}{PP_2}$$

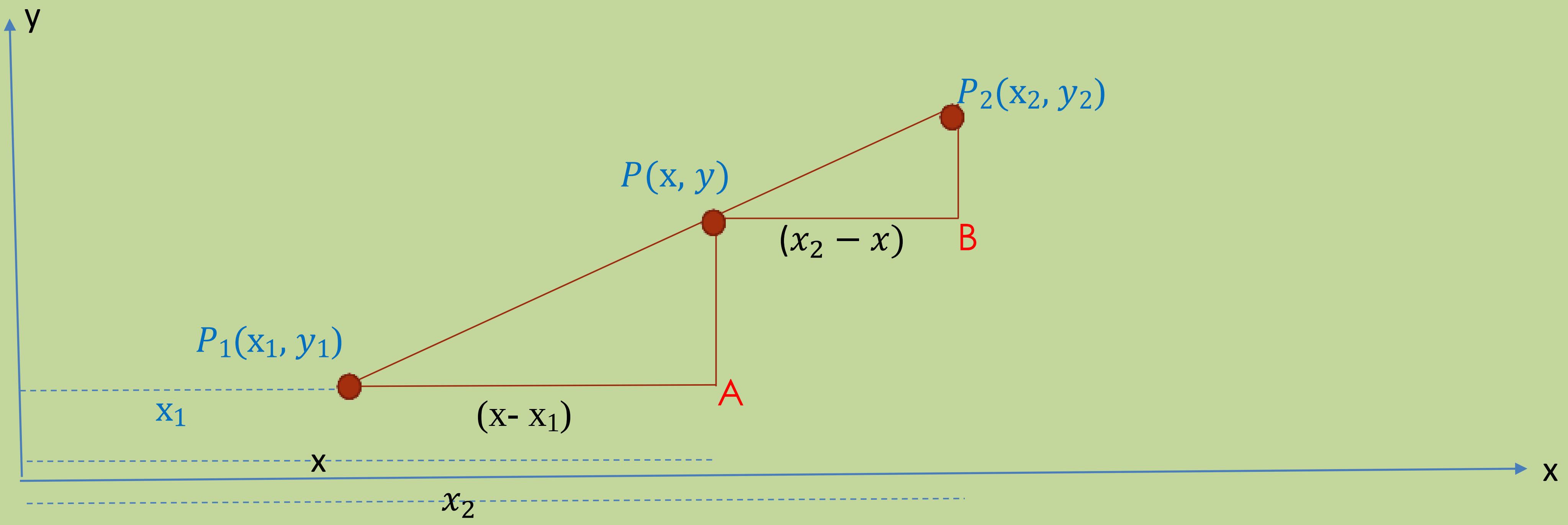

z
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
$P(x, y, z)$
$(z_2 - z)$
B
$(z - z_1)$
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
A
z_1
z_1
z
z
z_2
y
x_1
y_1
y
x
x_2
y_2
x



Note que la z en $P(x, y, z)$ es igual a z en el punto B, aunque a simple vista no se vea así (inicia en el plano xy, y llega a la misma altura). Lo

Por simplicidad, supongamos que estamos solo en el plano xy

Los triángulos P_1AP y PBP_2 son semejantes por tener sus lados paralelos, sus respectivos lados son proporcionales.



$$\frac{P_1P}{PP_2} = R = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = R$$

Reacomodando términos

$$x - x_1 = R(x_2 - x)$$

$$x = x_1 + Rx_2 - Rx$$

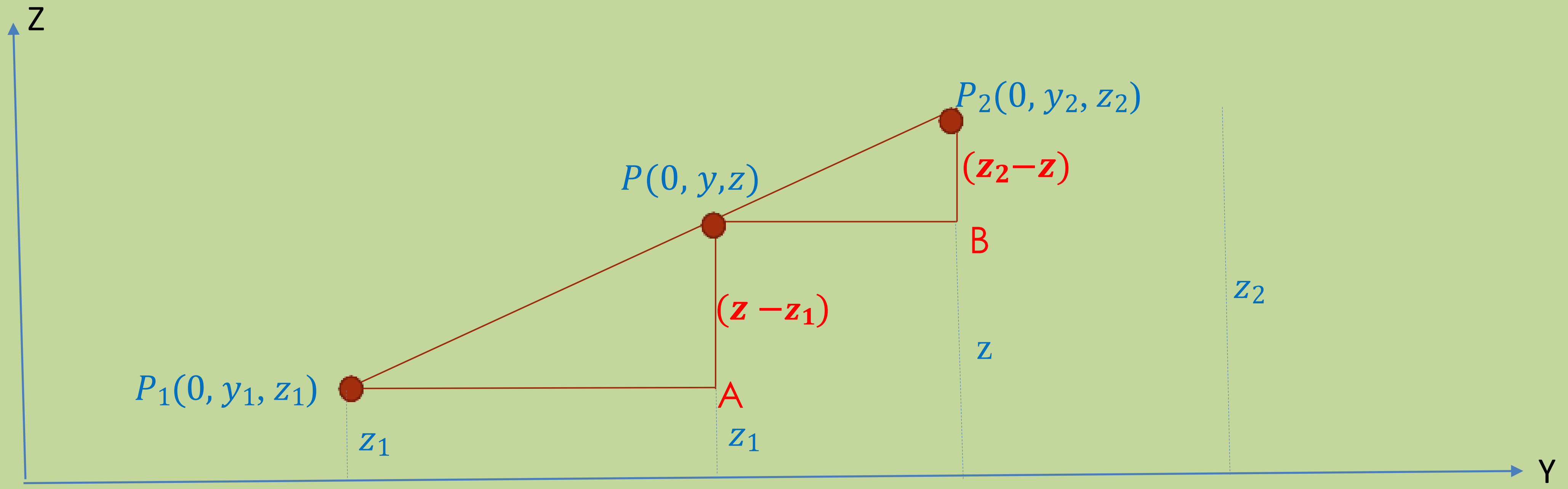
$$x + Rx == x_1 + Rx_2$$

$$x(1 + R) = x_1 + Rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + Rx_2}{R + 1}$$

Los triángulos P_1 AP y PBP_2 son semejantes por tener sus lados paralelos, sus respectivos lados son proporcionales.

Por simplicidad, supongamos que estamos solo en plano zy



$$\frac{P_1P}{PP_2} = R = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = R$$

Reacomodando términos

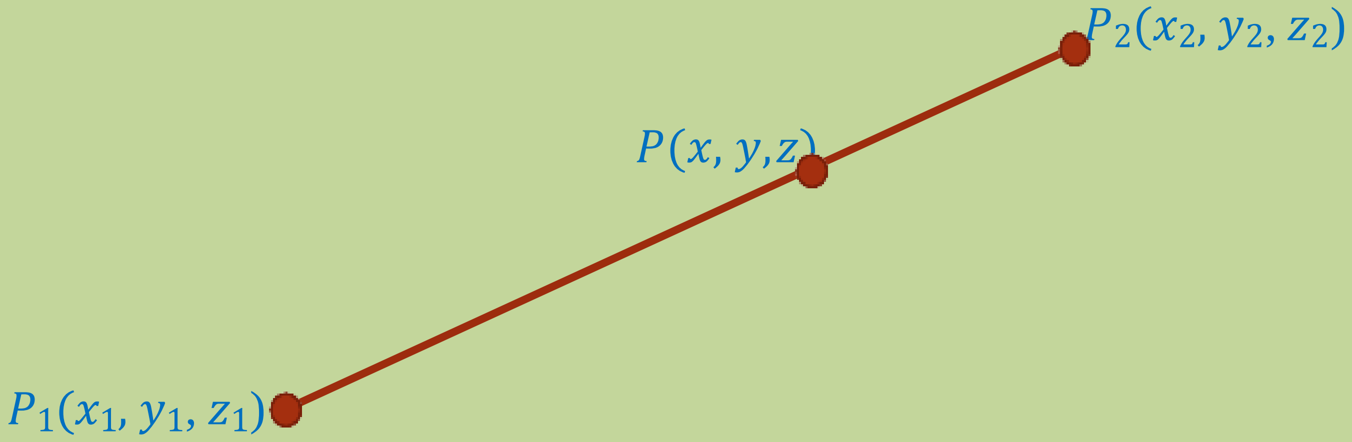
$$z - z_1 = R(z_2 - z)$$

$$z = z_1 + Rz_2 - Rz$$

$$z + Rz == z_1 + Rz_2$$

$$z(1 + R) = z_1 + Rz_2$$

$$z = \frac{z_1 + Rz_2}{1 + R}$$



De la misma manera se hace para la coordenadas y. Estas coordenadas son las del punto de división del segmento. Las coordenadas x_1, y_1, z_1, son las que corresponden al primer extremo del primer segmento y x_2, y_2, z_2 al segundo extremo del segundo segmento.

$$x = \frac{x_1 + Rx_2}{1 + R} \qquad y = \frac{y_1 + Ry_2}{1 + R} \qquad z = \frac{z_1 + Rz_2}{1 + R}$$

Hallar las coordenadas del punto que está a $\frac{1}{3}$ de la distancia de A(-1) a B(3) partiendo de A.

$A(x_1)$ $\quad$ $\mathrm{B}(x_2)$

Lo primero es entender bien el problema y ver qué datos nos dan. Para ayudarnos hacemos un gráfico. Estamos en una sola dimensión. Como no conocemos la coordenada del punto P, las denotamos por x. x es igual a:

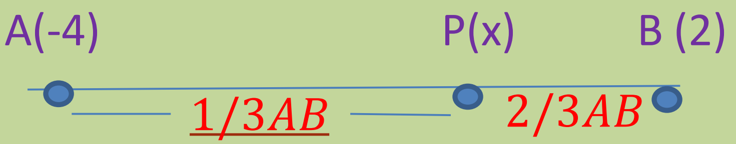
$$x = \frac{x_1 + Rx_2}{R+1}$$

Se conoce x_1 y x_2, falta encontrar R.

La distancia de A a B la denomino AB

Decir que un punto P está a una distancia de $\frac{1}{3}\ de\ AB$,

es lo mismo que decir que la distancia de A hasta el punto P es $\frac{1}{3}\ AB$



Sea P(x) el punto que está a 1/3 de AB

AP= $\frac{1}{3}AB$ y la distancia PB: $\frac{2}{3}AB$

Y por definición R= $\frac{AP}{PB}$ $\frac{1/3AB}{\frac{2}{3}AB}$ $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1*3}{3*2} = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{-1+0.5*3}{0.5+1} = \frac{0.5}{1.5} = 0.33$$

Ejercicio para hacer (una dimensión)

La distancia entre dos puntos A y B es 10. si uno de los puntos tiene por coordenadas A(-5) hallar el otro punto.

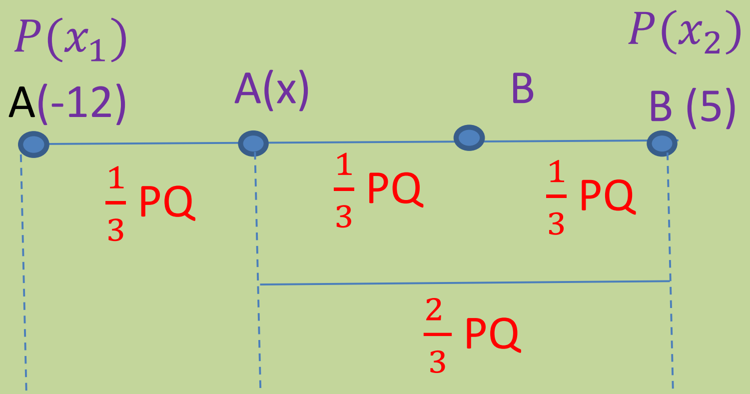
Sugerencia: no es un punto de razones , es de distancias, trabaje con la fórmula de la distancia en una dimensión.

(Pérez y Paniagua, 2013)

Hallar los puntos de trisección del segmento A(-10), B(-1/3)
Hallar el punto medio del segmento AB.

Nota: trisección es dividir el segmento en tres partes iguales

(Pérez y Paniagua, 2013)



$$x = \frac{x_1 + Rx_2}{R+1}$$

Se conoce $x_1, x_2,$ y se puede hallar la razón R

$$R = \frac{PA}{AQ} = \frac{\frac{1}{3}\text{PQ}}{\frac{2}{3}\text{PQ}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} * \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Con x_1, x_2 y la razón R se halla x

$$x = \frac{x_1 + R\,x_2}{1+R} = \frac{-12+0.5*5}{1+0.5} = -6.3$$

Razón para el punto medio de un segmento

Si fuera el punto medio, la razón quedaría igual a 1, porque los dos segmentos son iguales. P_1P=PP_2 $\frac{P_1P}{P_1P} = 1$

R=1

$$x = \frac{x_1+x_2}{1+1} = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

Bibliografía

PANIAGUA, Juan. PÉREZ, John. Geometría Vectorial y analítica. 2017. Grossman Stanley, Septima Edición, 2012.

Graficador de funciones:

http://fooplot.com/#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIrMSIsImNvbG9yIjoiIzAwMDA wMCJ9LHsidHlwZSI6MTAwMH1d

Distancia en el espacio: http://distanciapuntosenelespacio.blogspot.com.co/2010/04/como- calcular-la-distancia-entre-dos_19.html