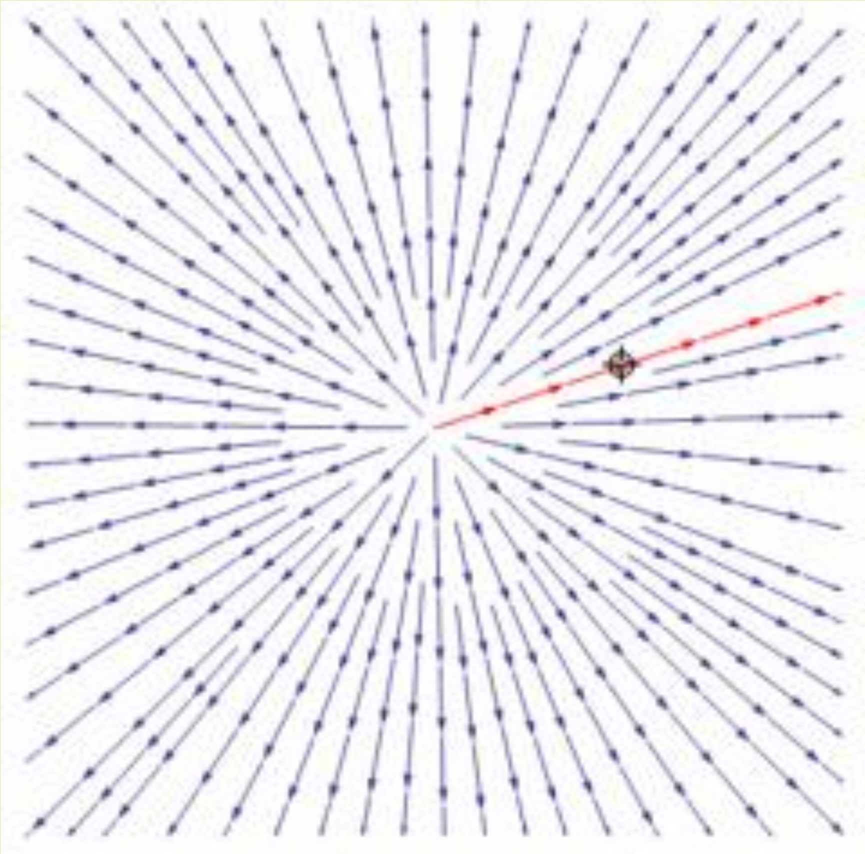


VECTORES 3

Presentación realizada por Efrén Giraldo T

Su único objetivo es facilitar el aprendizaje

1

❖MISVALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

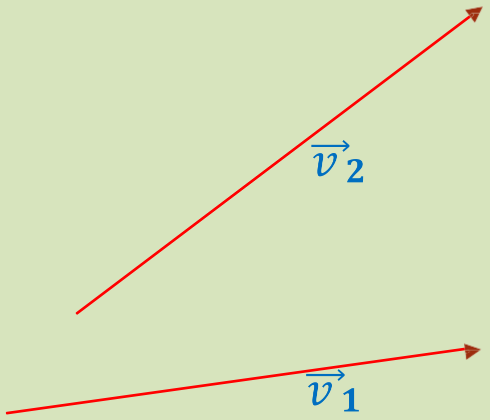
❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

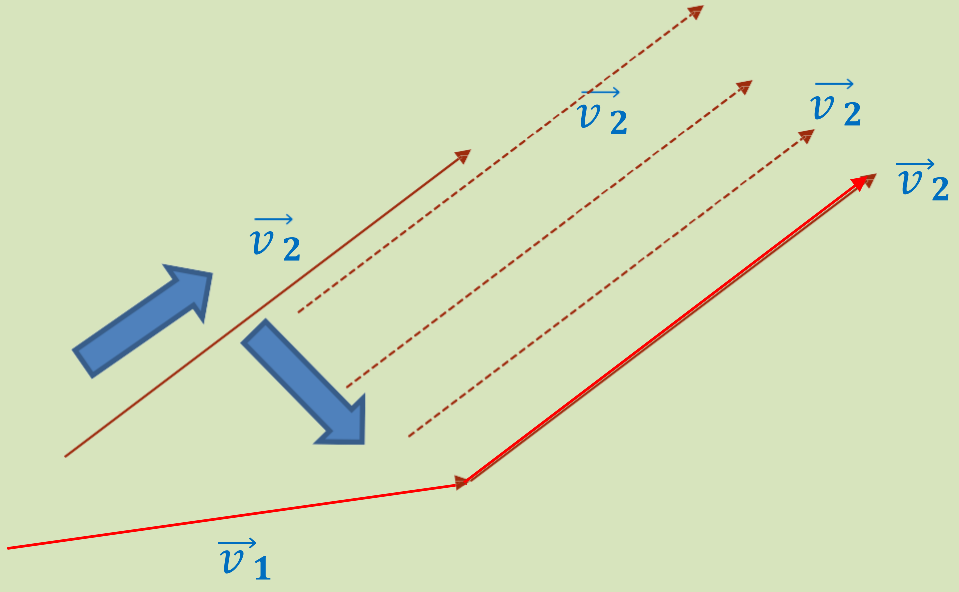
❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

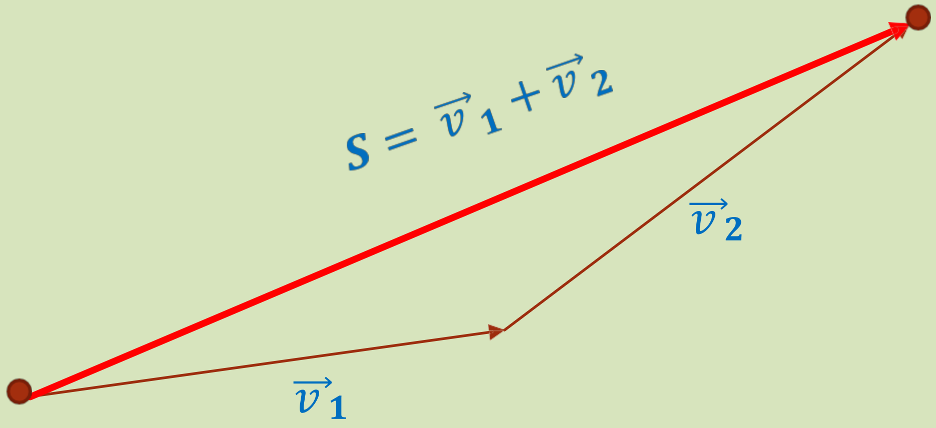
Suma geométrica de vectores con dirección diferente

Para sumar geométricamente dos vectores se ubica paralelamente el segundo vector de tal manera que su inicio coincida con el final del otro vector conservando su dirección, sentido y magnitud.

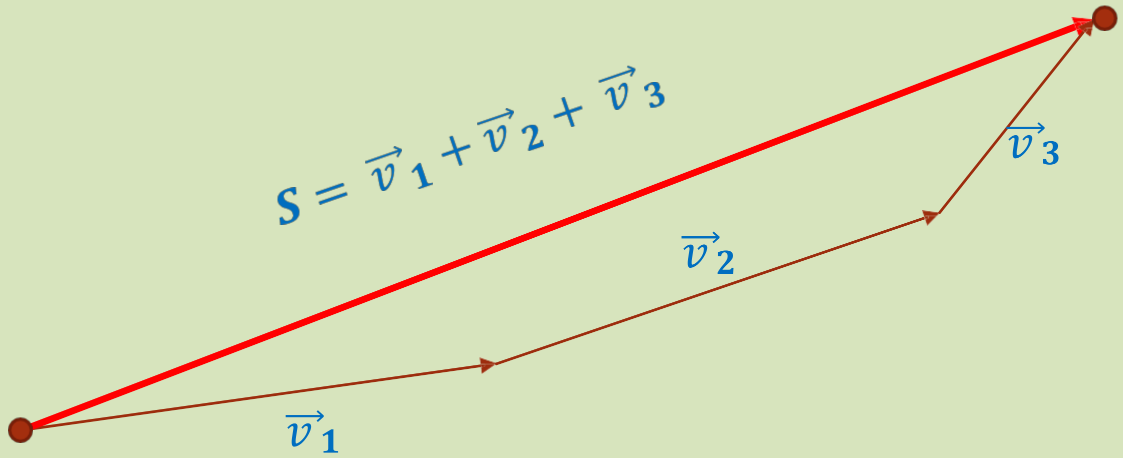




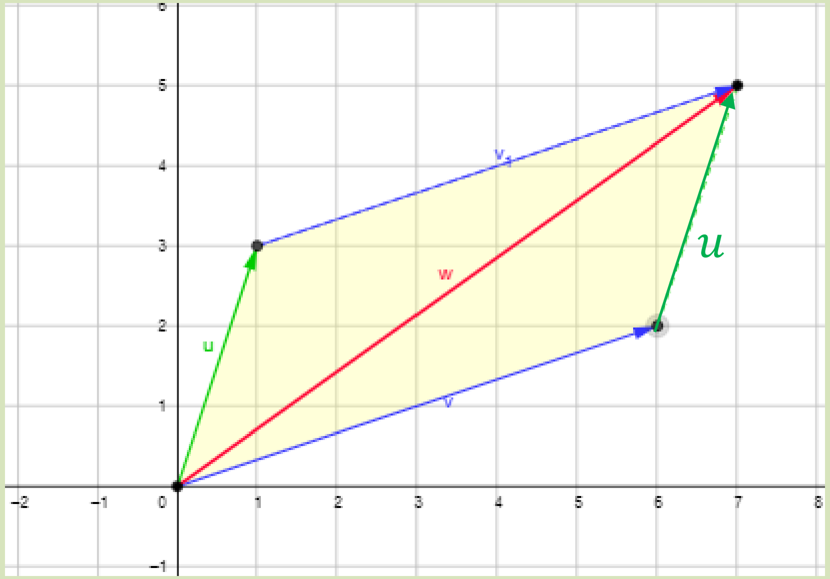
Luego desde el inicio del primer vector hasta el final del segundo se traza otro vector, este será el vector suma de los dos vectores.



Si fueren tres o más vectores se procede de idéntica manera.
Siempre colocando uno después del otro.



Método del triángulo y del paralelogramo para la suma de vectores

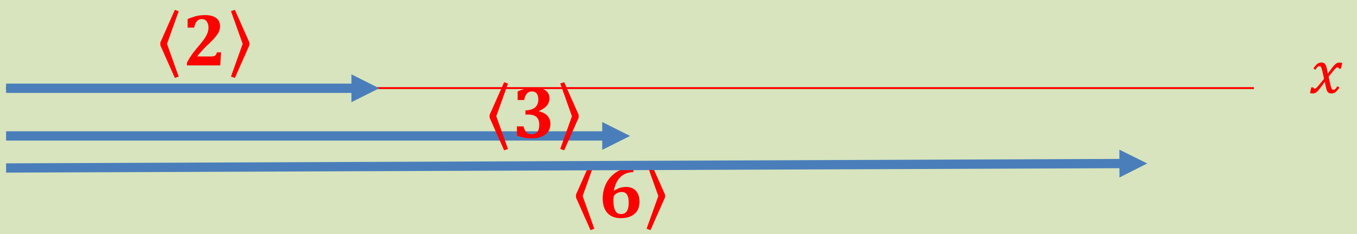


Se llega al mismo resultado representando ambos vectores con el mismo origen O, trazando un paralelogramo sobre A y B y definiendo la suma como la diagonal que pasa por O.

OPERACIONES CON VECTORES GEOGEBRA

Elaboró
MSc. Efrén

Suma algebraica de vectores con la misma dirección:



$$\langle 2\rangle + \langle 3\rangle + \langle 6\rangle = \langle 11\rangle$$

$$\langle -2\rangle + \langle -3\rangle + \langle 6\rangle = \langle 1\rangle$$

Como se dijo, todos estos los vectores se pueden sumar porque tienen la misma dirección. Se suman como se suman los números reales teniendo en cuenta su signo.

Suma algebraica de vectores con direcciones diferentes:

Si se conocen sus coordenadas es muy sencillo.
Si no se conocen hay que encontrarlas mediante las funciones trigonométricas

Si tienen las coordenadas en x, se suman solamente las coordenadas en x.
Luego solamente las coordenadas en y.
Luego las coordenadas solamente en z.

Estas serán las coordenadas del vector suma. Y la magnitud de halla con la fórmula:

$$|U| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{A}\langle a_x, a_y, a_z \rangle \\
\quad \downarrow + \quad \downarrow + \quad \downarrow + \\
B\langle b_x, b_y, b_z \rangle \\
\quad \downarrow + \quad \downarrow + \quad \downarrow + \\
C\langle c_x, c_y, c_z \rangle
\end{array}
$$

$$\vec{S} = \langle \underline{a_x + b_x + c_x}, \quad \underline{a_y + b_y + c_y}, \quad \underline{a_z + b_z + c_z} \rangle$$

$$A\langle 5,3,2\rangle$$

$$\downarrow$$

$$B\langle 2,3,4\rangle$$

$$\downarrow$$

$$C\langle 1,4,3\rangle$$

$$S\langle \underline{5+2+1}, \underline{3+3+4}, \underline{2+4+3}\rangle$$

$$S\langle 8, 10, 9\rangle$$

$$|U| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 9^2} = \sqrt{64+100+81} = \sqrt{241}$$

:

$$A\langle x_1, y_1, z_1\rangle + B\langle x_2, y_2, z_2\rangle + B\langle x_3, y_3, z_3\rangle$$

$$S = ABC\ \langle x_1 + x_2 + x_3\ ,\ y_1 + y_2 + y_3,\ z_1 + z_2 + z_3\rangle$$

$$A\langle 2,3,4\rangle + B\langle 1,3,5\rangle + B\langle 3,4,6\rangle$$

$$S = ABC\ \langle 2+1+3\ ,\ 3+3+4,\ 4+5+6\rangle$$

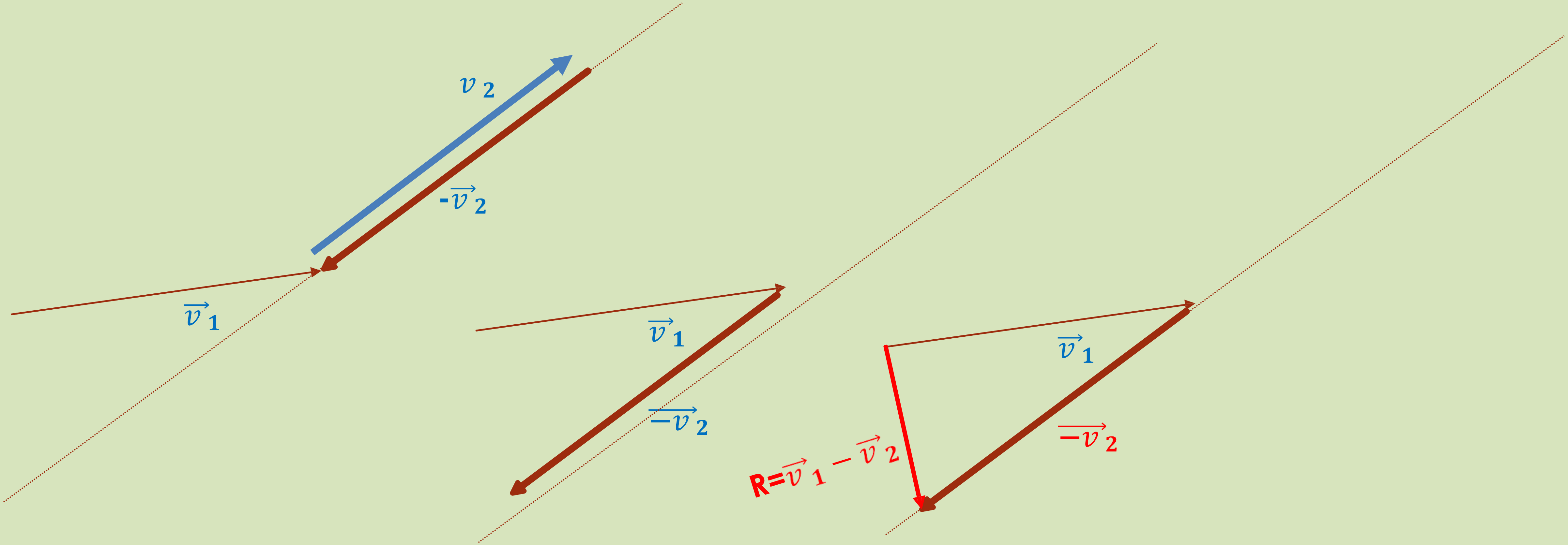
$$S\langle 6,10,15\rangle$$

$$|U| = \sqrt{6^2 + 10^2 + 15^2}$$

Elaboró
MSc. Efrén

Resta de dos vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$

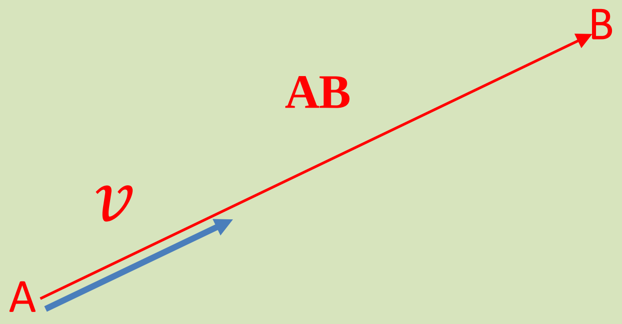
Para restar de v_1 el vector v_2 se cambia de signo el vector v_2

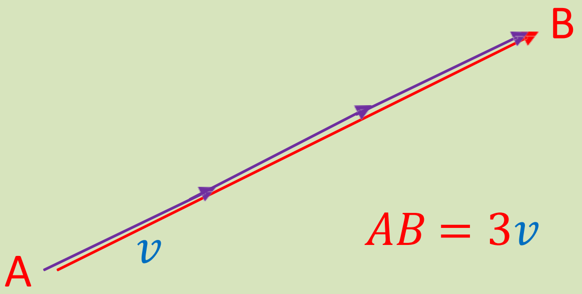


Combinación lineal de vectores

Una combinación lineal se define cuando un vector se puede expresar como la suma de otro u otros vectores. La combinación lineal más sencilla es cuando los vectores están en la misma dirección:

Combinación lineal de dos vectores en la misma dirección.





Dos vectores ***v*** y ***AB con la misma dirección***, el vector **AB** se pueden expresar:

Una **suma de *v***

Un **real multiplicado por el vector *v*.**

Entonces, se dice que AB es **combinación lineal de v**. En este caso **AB**= $3v$

(Si se suma el vector v tres veces da el vector AB)

En general, se puede expresar que el vector AB es combinación de v:

$$\mathbf{AB} = \alpha v$$

siendo α es un escalar (número).

Lo que significa que el vector **AB** es α veces v : en el caso anterior es 3 veces v

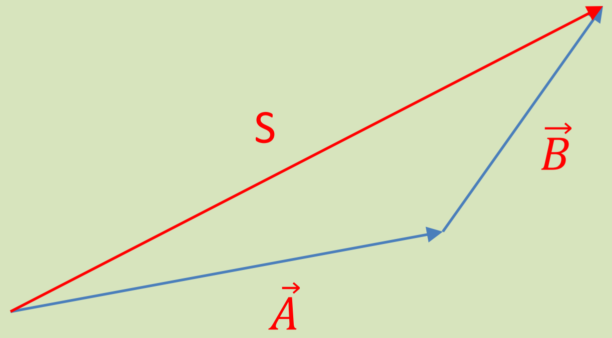
Otro vector CD se puede expresar como: **CD**= βv

Combinación lineal de dos o más vectores con dirección diferente

Una combinación lineal de dos o más vectores es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por números (escalares) apropiados.

En un plano, la combinación lineal más sencilla entre tres vectores es cuando uno de ellos es la suma de los otros dos. En este caso los escalares son 1 y 1:

Si se tienen dos vectores A y B, generan otro vector S:

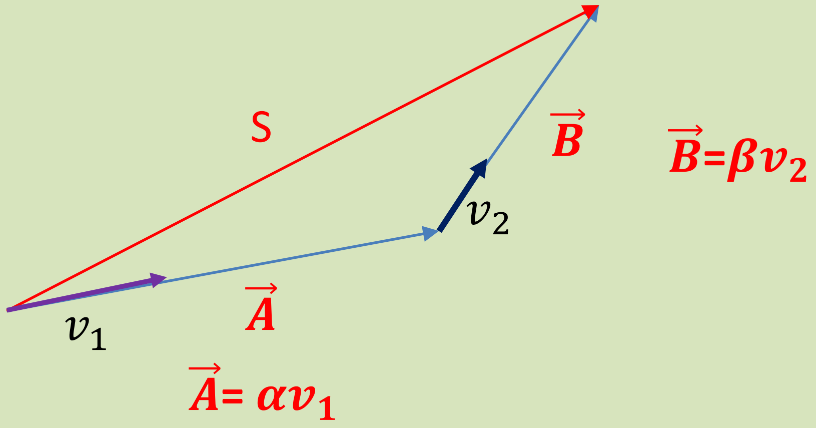


$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$

$\vec{S}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Combinación lineal general de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Si el vectores $\vec{A}$ se expresan en función de un vector v_1 con la misma dirección, y el vector $\vec{B}$ en función del vector v_2 con la misma dirección de $\vec{B}$, entonces:



$$\vec{S}= \alpha v_1 + \beta v_2$$

α y β *son números reales*, positivos o negativos, enteros o fraccionarios

Se tienen los vectores $A\langle 3,-2\rangle$, $B\langle 1,4\rangle$, y $C\langle 2,1\rangle$

Exprese el vector $C\langle 2,1\rangle$ como combinación lineal de los vectores $\vec{A}$ y $\overrightarrow{B}$

$$C\langle 2,1\rangle = \alpha A\langle 3,-2\rangle + \beta B\langle 1,4\rangle$$

$$C\langle 2,1\rangle = A\langle 3\alpha,-2\alpha\rangle + B\langle \beta, 4\beta\rangle$$

Los vectores $A\langle 3\alpha, -2\alpha\rangle \quad y \quad B\langle \beta, 4\beta\rangle$ se suman:

$$\langle 2,1\rangle = \langle 3\alpha + \beta, -2\alpha + 4\beta\rangle$$

$$(2,1) = (3\alpha + \beta, -2\alpha + 4\beta)$$

$$2 = 3\alpha + \beta \qquad (1)$$

$$1 = -2\alpha + 4\beta \qquad (2)$$

$(1) * (-4)$

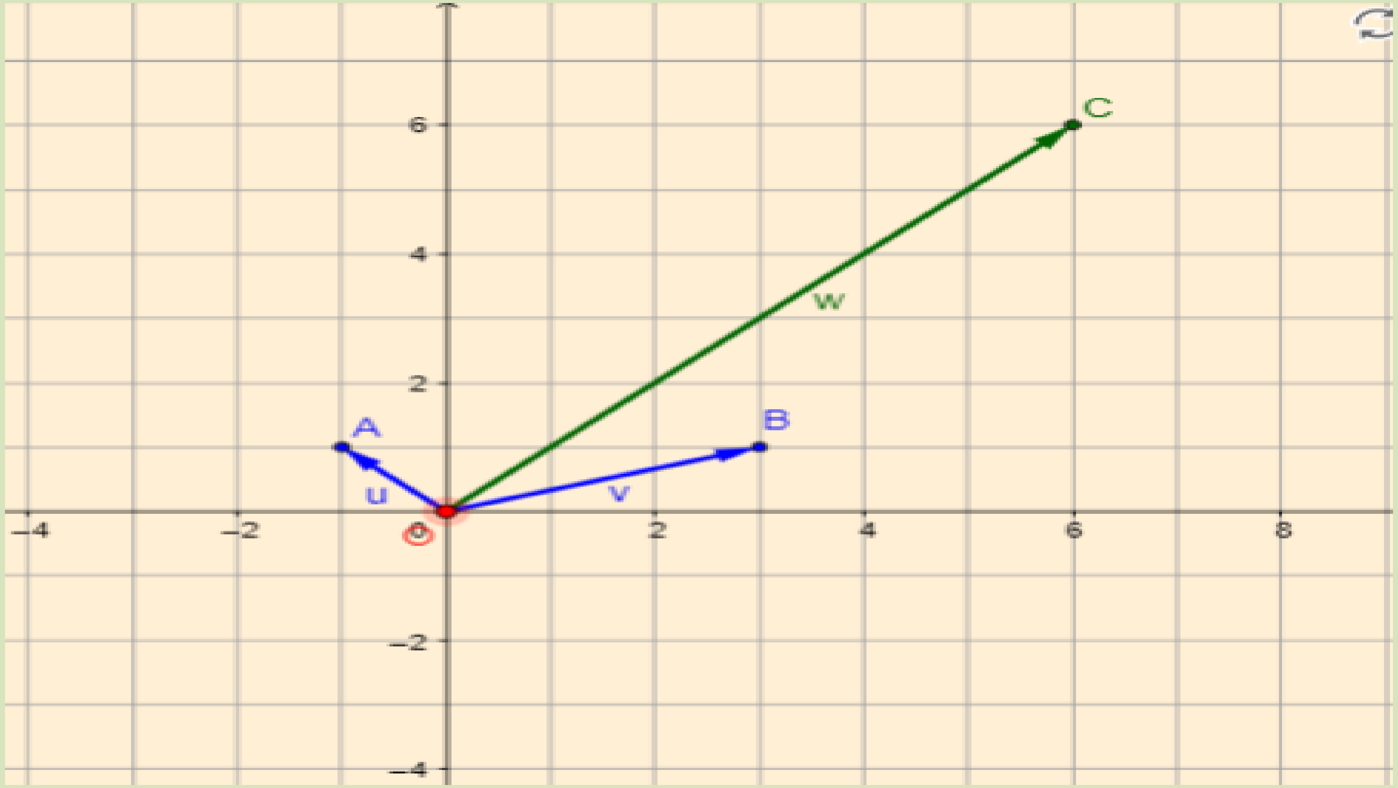
$$
\begin{aligned}
-8 &= -12\alpha - 4\beta \\
1 &= -2\alpha + 4\beta \\
\hline
-7 &= -14\alpha
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

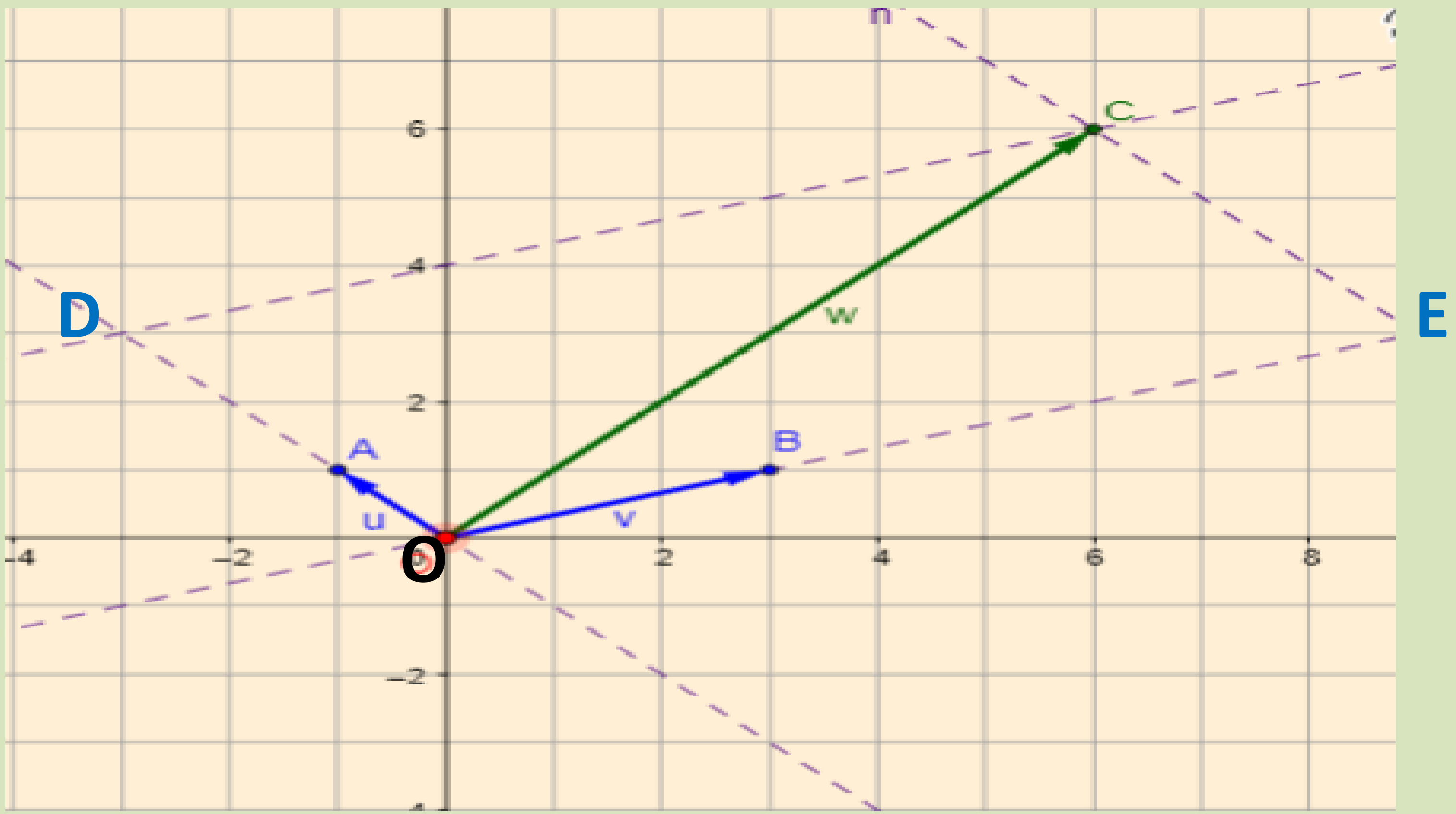
$$\mathrm{C}\langle 2,1\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}\langle 3,-2\rangle + \frac{1}{2}\,B\langle 1,4\rangle$$

Combinación lineal general geométrica de los vectores $\vec{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\vec{C}$



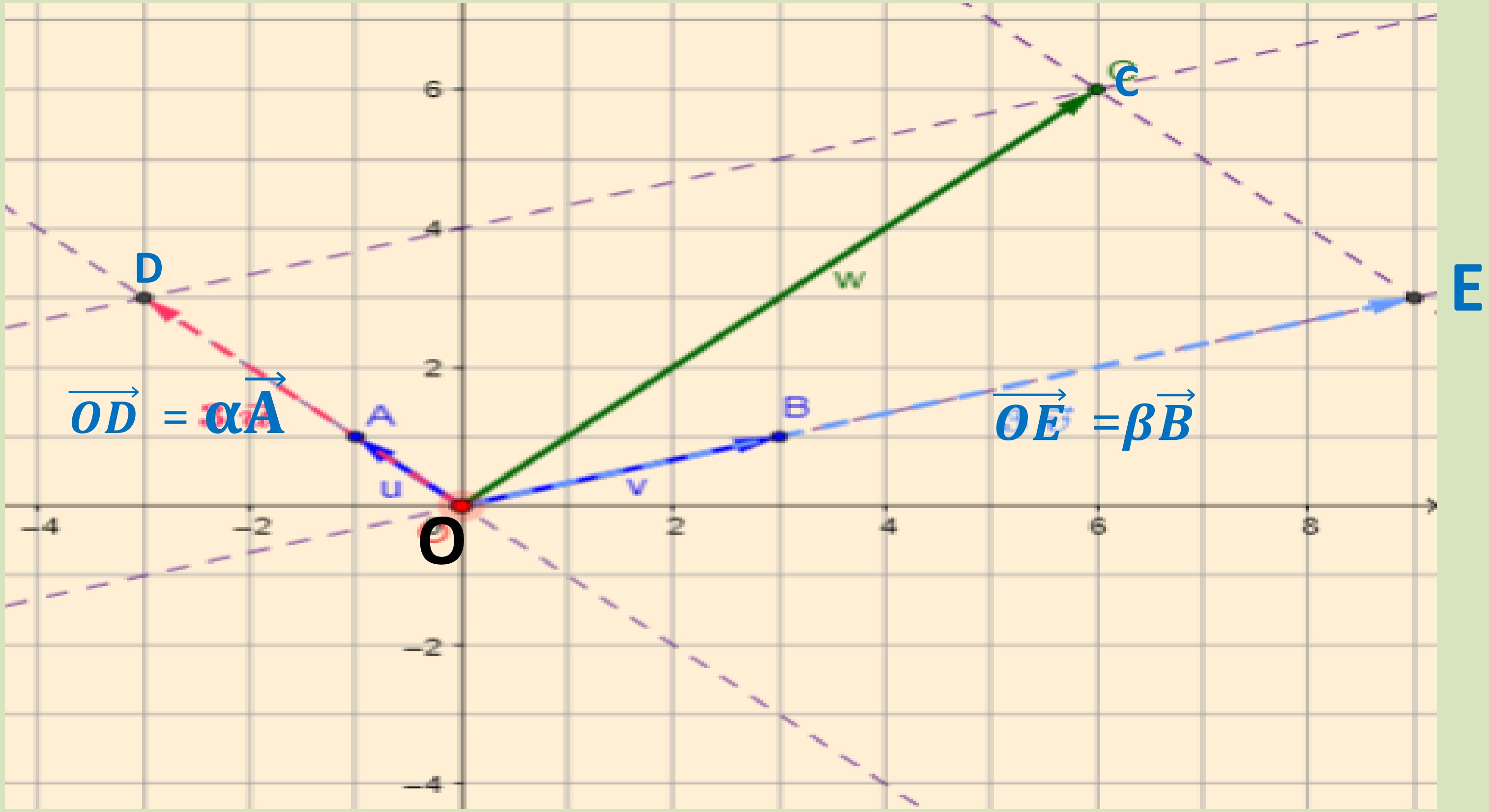
Si se tienen los vectores $\vec{A}$, $\overrightarrow{B}$ y se quiere que $\vec{C}$ sea combinación de ellos:

https://www.geogebra.org/m/jgZfCbpS



Se trazan las paralelas OD, OE, EC. Se forman los vectores $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$

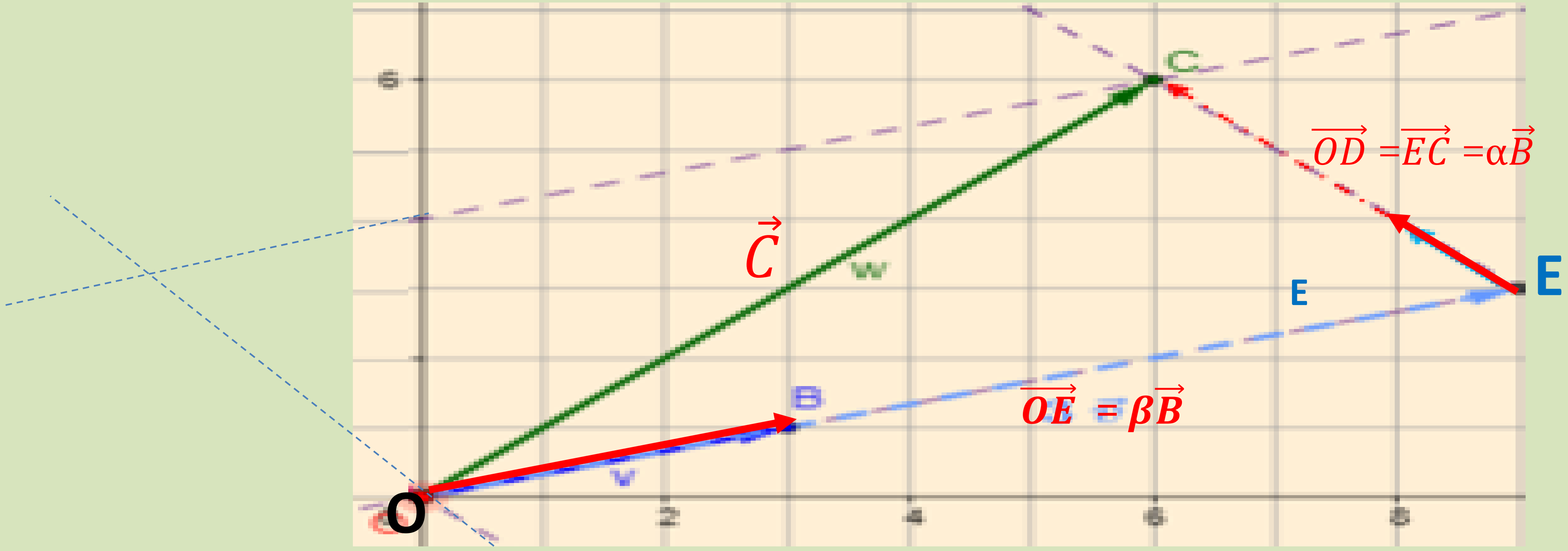
https://www.geogebra.org/m/jgZfCbpS



Se expresa el vector $\overrightarrow{OD}$ como combinación lineal sencilla de $\vec{A}$, $\overrightarrow{OD} = \alpha\vec{A}$

Se expresa el vector $\overrightarrow{OE}$ como combinación lineal sencilla de $\vec{B}$, $\overrightarrow{OE} = \beta\vec{B}$

https://www.geogebra.org/m/jg3fCbpS



Se traslada paralelamente el vector $\overrightarrow{OD}$ hasta EC, es el mismo vector $\overrightarrow{EC}$
Se aprecia que:

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$$

https://www.geogebra.org/m/jgZfCbpS

Vectores linealmente independientes y linealmente dependientes

Vectores linealmente independientes

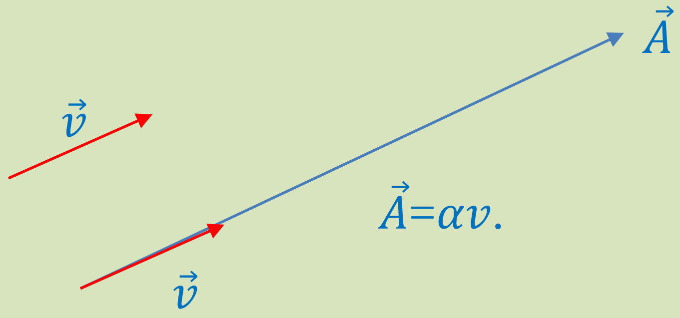
Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los restantes.

Esto es, ninguno puede ser escrito como la suma de los restantes.

Dependencia lineal

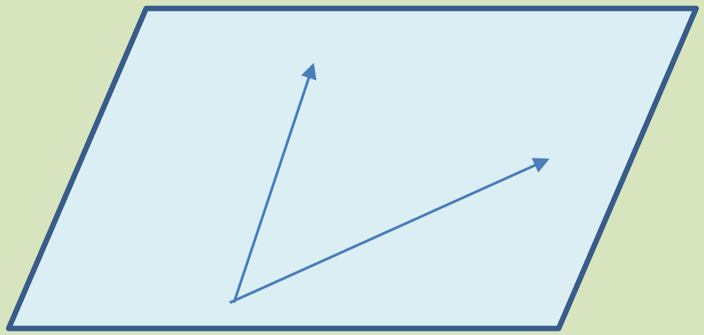
Este concepto aplica a conjuntos de vectores y significa que el conjunto tenga redundancia, es decir, que exista en el conjunto de vectores un vector que pueda ser expresado mediante otros dosvectores dentro del conjunto.

Dos vectores $\vec{A}, \vec{v}$ con **la misma dirección (en el plano o en el espacio):**



Dos vectores $\vec{A}, \vec{v}$ que **tienen la misma dirección**, siempre son linealmente dependientes porque se cumple $\vec{A}=\alpha v$.

Por tanto, dos o más vectores paralelos siempre son linealmente dependientes.



En el plano, dos vectores con dirección diferente siempre serán linealmente independientes. Es imposible expresar uno en función del otro.

Si dos vectores en un plano tienen su componentes no proporcionales serán vectores linealmente independientes.

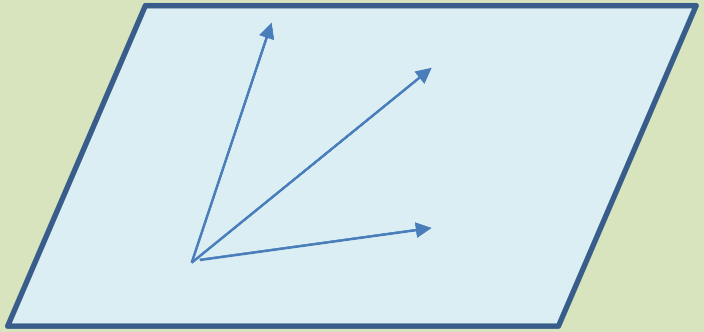
Detereminar si el vector $\vec{u}\,\langle 3,1\rangle$ y el vector $\vec{v}\,\langle 2,3\rangle$ son independientes o dependientes linealmente.

$$\frac{3}{2} \neq \frac{1}{3}$$

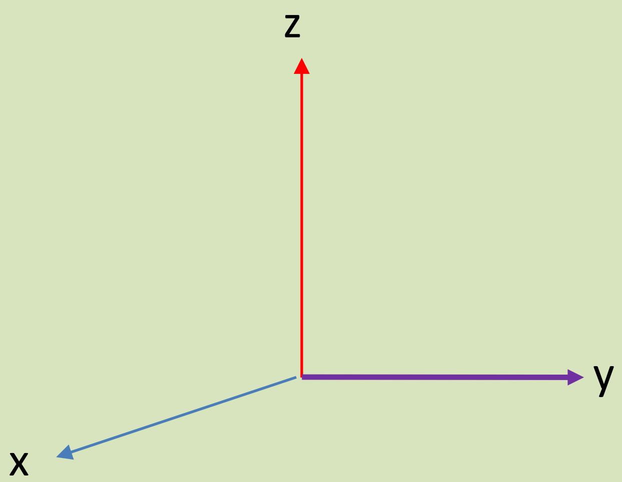
Dos vectores del plano son linealmente dependientes si son paralelos.

Componentes no proporcionales: vectores linealmente independientes

Mientras que los 3 vectores $\langle 3, -1, 2\rangle$, $\langle 2, -1, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 1\rangle$ no son linealmente independientes, ya que $\langle 3, -1, 2\rangle$ se puede expresar como la suma de $(2, -1, 1)$, $(1, 0, 1)$.



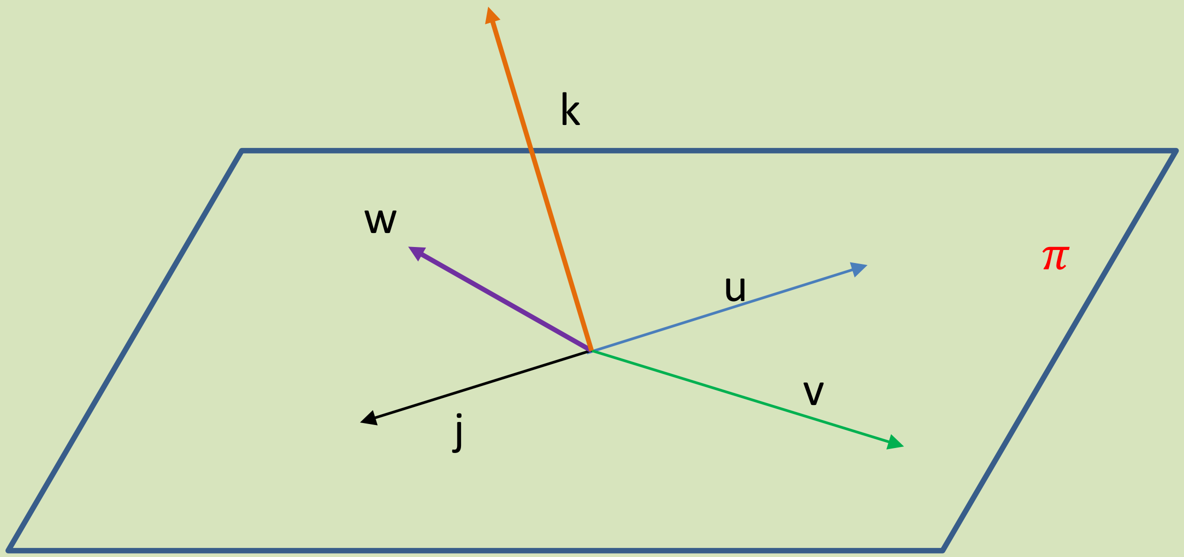
Tres vectores en un mismo plano y con direcciones diferentes siempre serán linealmente dependientes, porque uno de ellos se podrá expresar como suma de los otros dos (multiplicados por reales α, β).



En el espacio, tres <u>vectores con direcciónes diferentes siempres son linealmente independientes</u>.

Ninguno de ellos puede ser escrito como combinación lineal de los restantes.
Una forma sencilla de saber si son linealmente independientes:

<u>si la razón de sus respectivas componentes en x, y, z, es diferente.</u>



w, J, v, u están en un mismo plano π

- **u** y **j** son dependientes por tener la misma dirección.
- **u** y **v** son independientes por estar el plano π
- **u**, **v** y **w** son dependientes por estar los tres contenidos en el mismo plano π
- **u**, **v** y **k** son independientes por serlo **u** y **v** entre sí y **k** estar en un plano diferente (los 3 están el espacio con dirección diferente).

https://es.wikipedia.org/wiki/Dependencia_e_independencia_linea

La definición oficial de vectores linealmente independientes:

Dos o mas vectores son linealmente independientes si para la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \dots \dots \dots \alpha_n v_n = 0$$

Necesariamente de debe que cumplir que

$\alpha_1, \alpha_2\alpha_1, \alpha_3 \dots . \alpha_n$ sean todos iguales a 0

PANIAGUA, Juan. PÉREZ, John. Geometría Vectorial y analítica. 2017. Grossman Stanley, Septima Edición, 2012.

https://www.geogebra.org/m/vDyfH74J

http://www.vadenumeros.es/segundo/posiciones- rectas-espacio.htm

http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/re_ctasC2.pdf

http://www.acienciasgalilei.com/public/forobb/view_topic.php?t=3639

https://prezi.com/efyjkt1f0wsg/paralelismo-de-recta- y-plano/

- VIDEOS
- http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/6906/mod_resource/content/2/Rectas%20alabeadas%20animaci%C3%B3n.mp4

- Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf

Vectores interactivos en el espacio

https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php

http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf