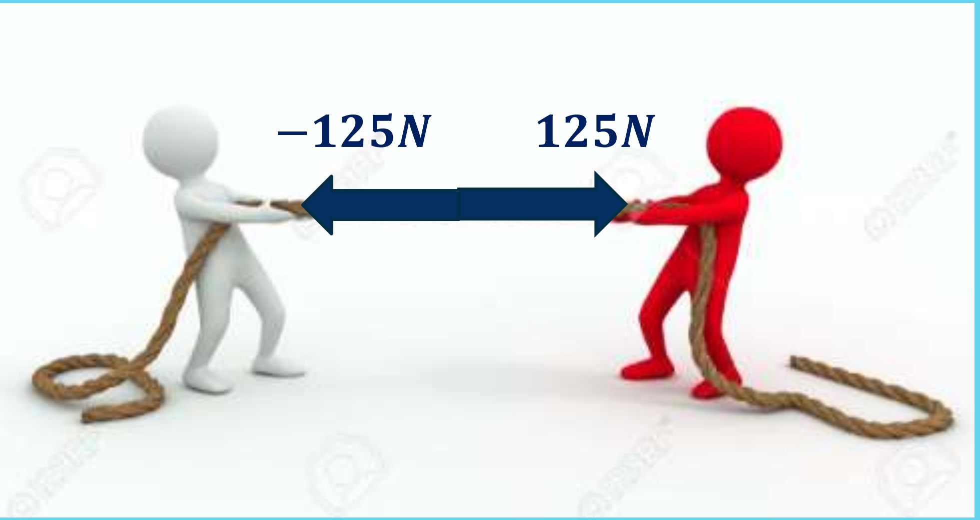
EJERCICIOS DE VECTORES DEL LIBRO ANÁLISIS VECTORIAL DE SCHAWM

Realizó Efrén Giraldo T. solo con fines didácticos

- Todo lo que se pueda definir como vector cumple la teoría y fórmulas de los vectores.
- Por ejemplo, la Fuerza es un vector, porque tiene magnitud y dirección. La fuerza se mide en Newtons (N) o en libras fuerza, o en kilogramos fuerza. También son vectores la aceleración, el peso, la velocidad, el torque, el campo eléctrico, etc.
- Si Usted dice que existe una fuerza de 5N está expresando que la magnitud del vector fuerza es 5, y su dirección se referencia con un ángulo respecto al eje x, y o z.

Ejercicio # 1

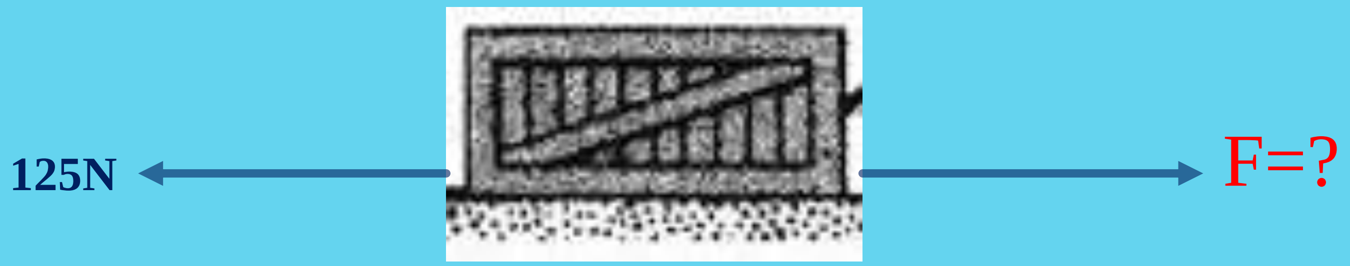


$$-125N + 125N = 0$$

Dos fuerzas iguales y contrarias se anulan

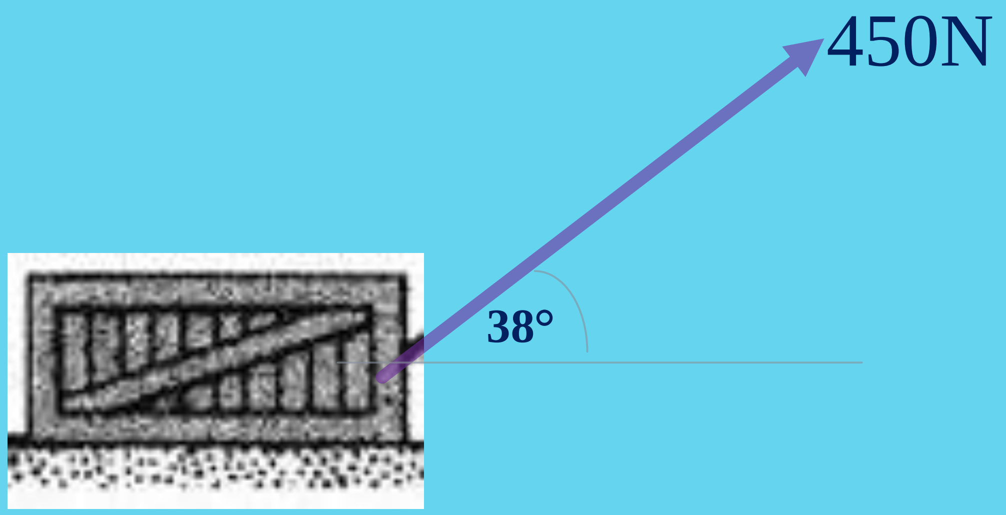
Ejercicio # 2

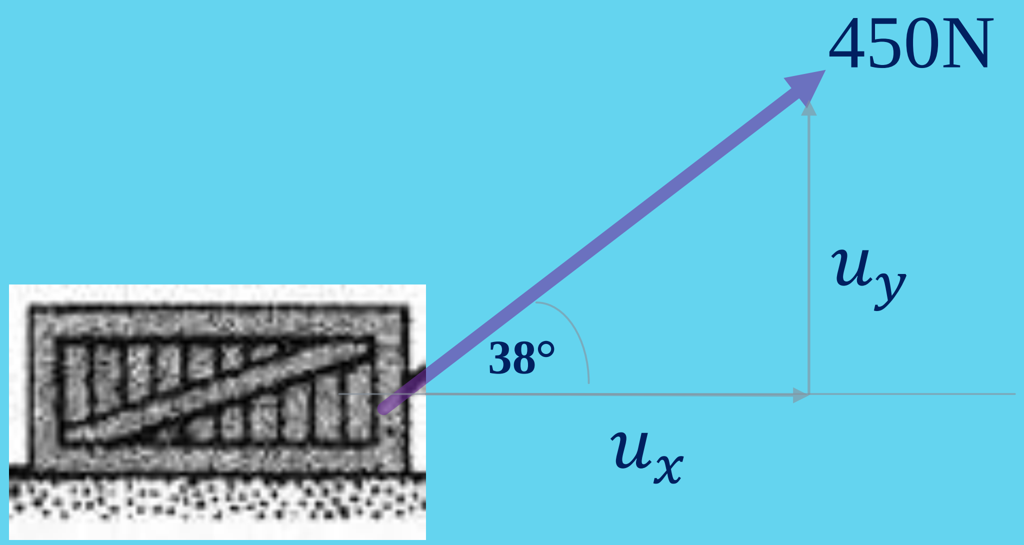
¿Qué fuerza F se requiere para que el objeto (sin peso) se mueva hacia adelante?

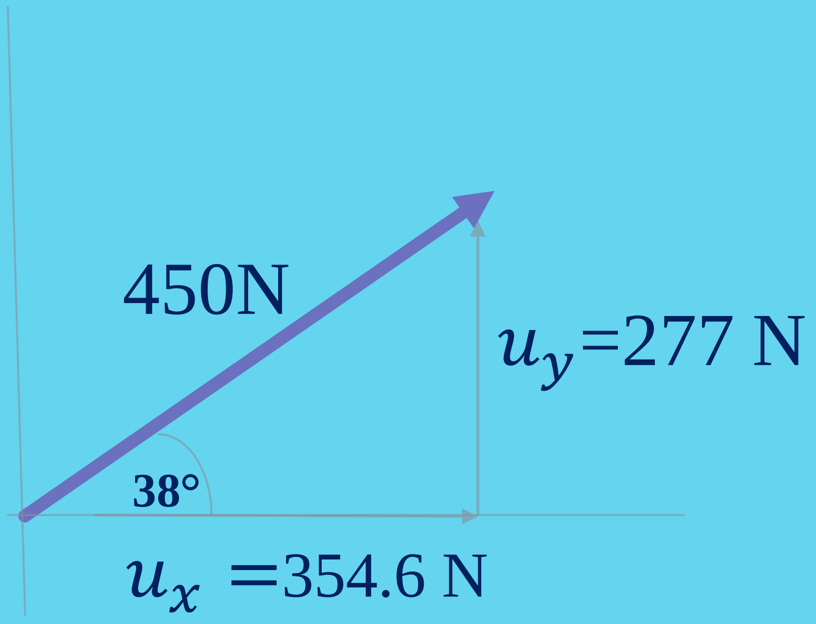


Ejercicio # 3

Si se aplica una fuerza de 450N formando un ángulo de 38° con el eje x, ¿cuáles serán las componentes en x, e y ?





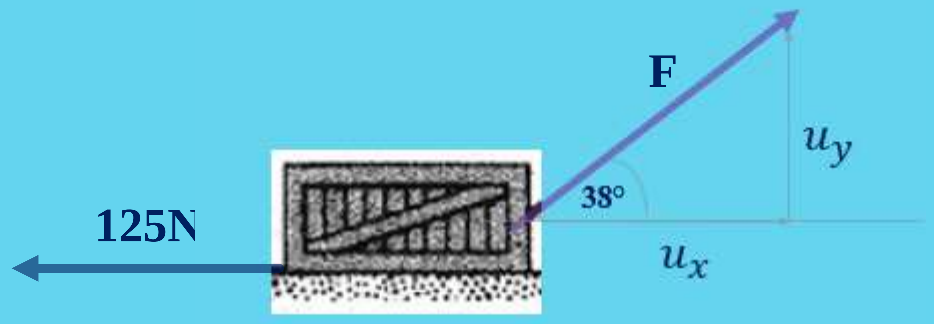


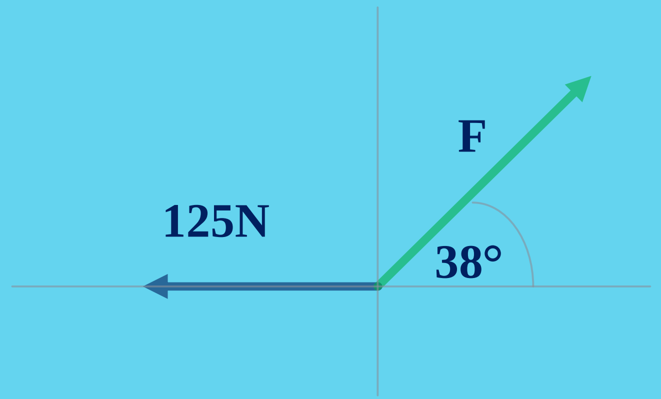
u_x=450*cos 38= 450*0.79= 354.6 N

u_y=450*sen 38= 450*0.61= 277 N

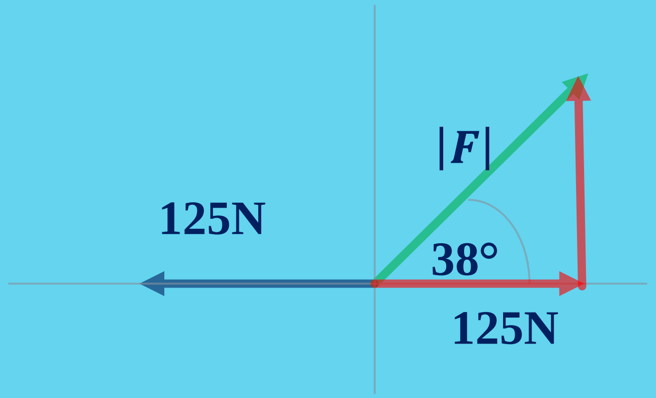
Ejercicio # 4

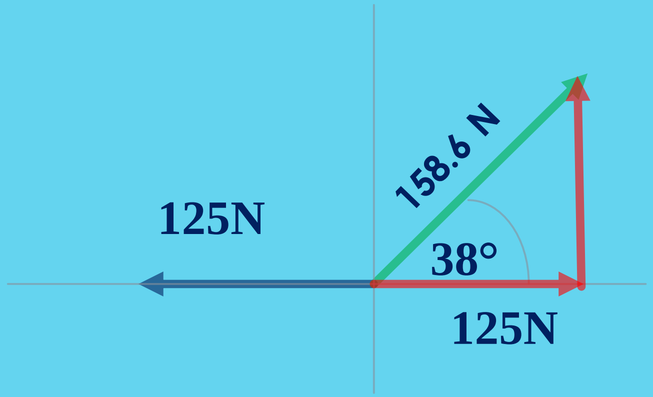
Suponga que sobre el mismo objeto actúa una fuerza negativa en $x = -125N$, y otra fuerza F comienza a incrementarse progresivamente formando un ángulo de 38°





- Cálcule la fuerza F necesaria para que el objeto comience a moverse

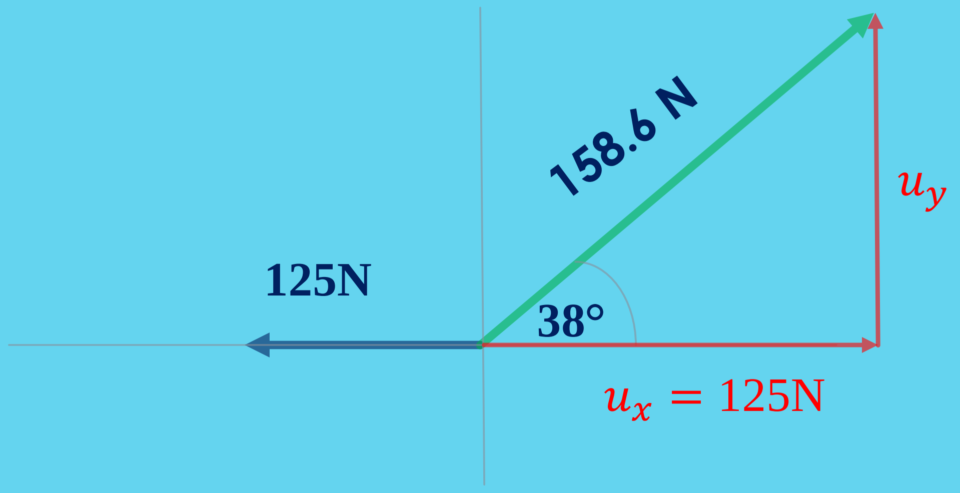




$$\text{Cos } 38° = \frac{125}{|\boldsymbol{F}|} \longrightarrow |\boldsymbol{F}| * \cos \mathbf{38°} = \mathbf{125}$$

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{\mathbf{125}}{\boldsymbol{cos}\ \mathbf{38°}} = 158.6 \text{ N}$$

Se requiere que la fuerza sea de 158.6 N para que se produzca una fuerza horizontal en x de 125N La fuerza que resulte en el eje y, u_y lo que hace es tratar de subir el objeto.

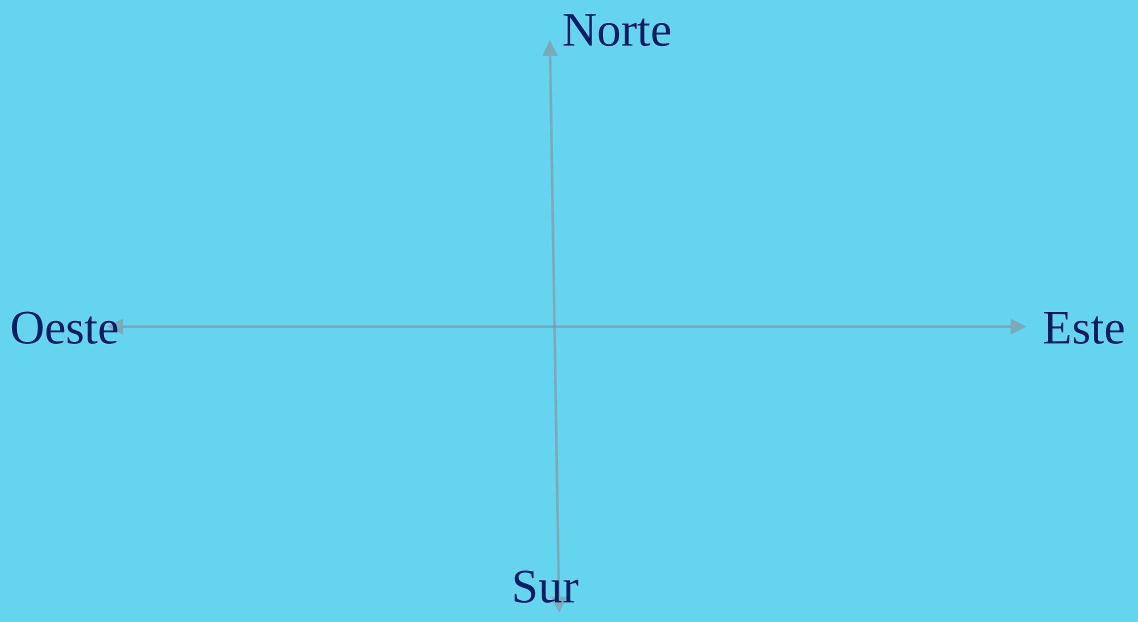


El objeto permanecerá sin moverse horizontalmente hasta que la componente horizontal u_x sea igual a 125N.

La fuerza necesaria para que el objeto comience a moverse horizontalmente es justamente cuando la componente u_x sea igual a 125N.

La fuerza total en un ángulo de 38° es de 158.6N

Ejercicio # 5



1.2. Represente en forma gráfica: *a*) una fuerza de 10 lb con dirección 30° al noreste, (con eje x).
b) una fuerza de 15 lb con dirección 30° al este del norte. (con eje y)

Represente en forma gráfica: *a*) una fuerza de 10 lb con dirección 30° al noreste,
b) una fuerza de 15 lb con dirección 30° al este del norte.

Solución

Al elegir la unidad de magnitud que se muestra, los vectores requeridos son los indicados en la figura 1-5.

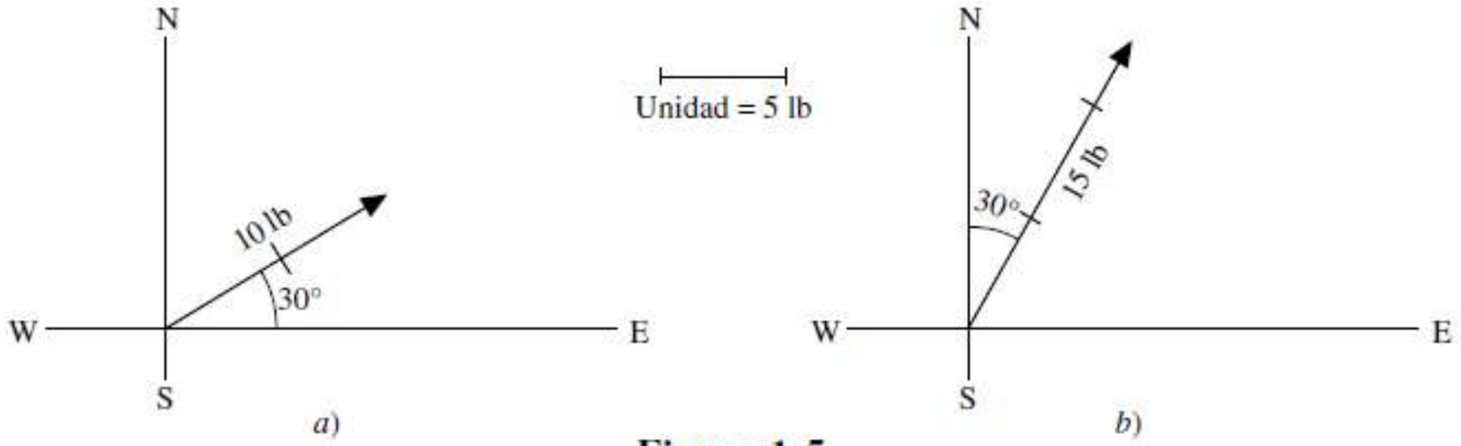
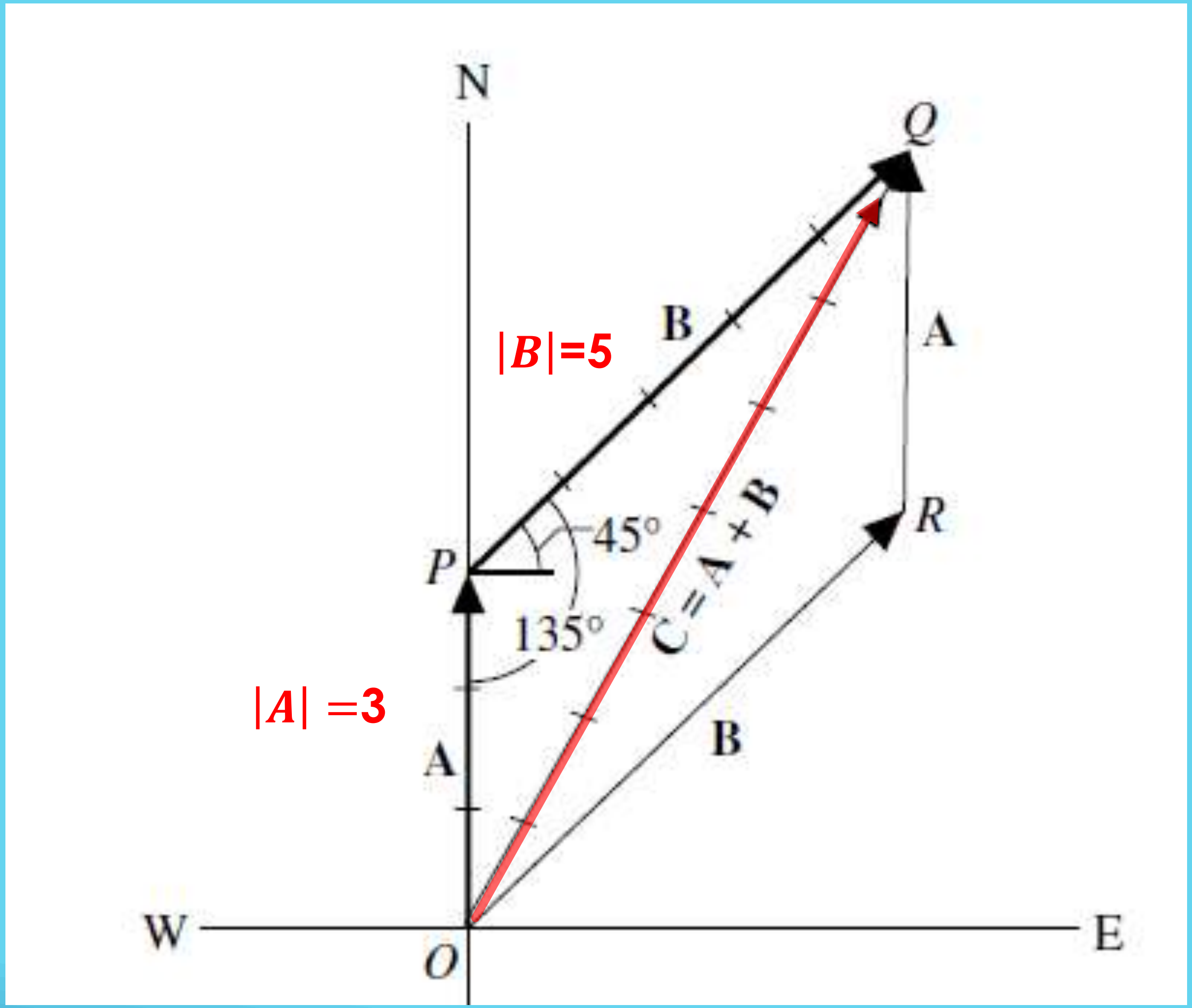


Figura 1-5

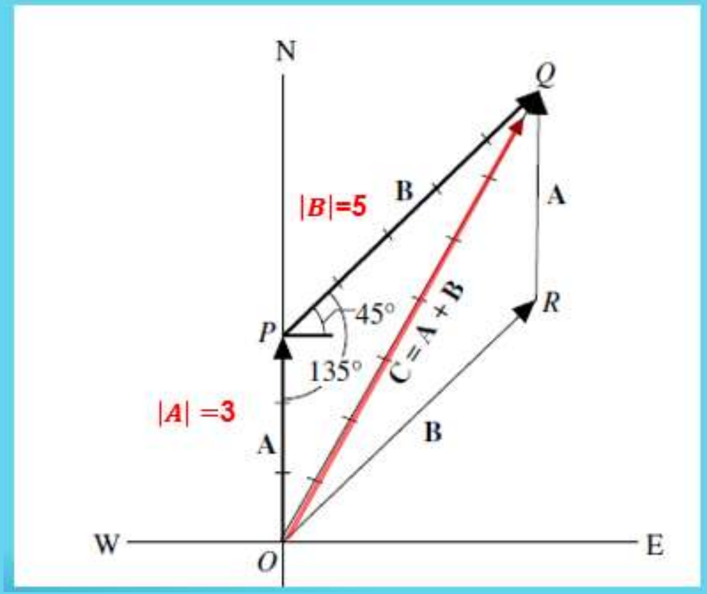
Ejercicio # 6

Un automóvil viaja 3 millas (magnitud) hacia el norte, (en el eje y) luego 5 millas (magnitud) en ángulo de 45° con el N (con eje y.
Represente estos desplazamientos en forma gráfica y determine el desplazamiento resultante: *a*) en forma gráfica y *b*) analíticamente.

Representación gráfica



Analíticamente



$|B|$=5

$\vec{A}\langle 0,3\rangle$ $\vec{B}\langle b_x, b_y\rangle = \vec{B}\langle 3.5, 3.5\rangle$

$\vec{B}$ forma ángulo de 45° con eje x

$b_x=|B|\text{Cos } 45° = 5*0.71=3.5$

$b_y=|B|\text{sen } 45° = 5*.71 =3.5$

$\vec{C} = A\langle 0,3\rangle + \text{B}\langle 3.5, 3.5\rangle = \text{C}\langle 3.5, 6.5\rangle$ $|C|=\sqrt{3.5^2+6.5^2} = 7.38$

Hallar el ángulo que forma el vector C con el eje x

Ejercicio # 8

Dados tres vectores $\mathbf{a}\langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1} \rangle$, $\mathbf{b}\langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2} \rangle$ y $\mathbf{c}\langle \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{z_3} \rangle$ en el espacio (no coplanares), encuentre una expresión para cualquier vector **r (una combinación)** del espacio.

Ejercicio # 9

Considere los puntos ***P*(2, 4, 3) y *Q*(1, -5, 2)** en el espacio **R**3

a) encuentre los vectores de posición $\boldsymbol{r_1} = \mathbf{OP}$ y $\boldsymbol{r_2} = \mathbf{OQ}$ para *P* y *Q*, en términos de los vectores unitarios **i**, **j**, **k**.

b) Determine en forma algebraica la resultante de estos vectores de posición.

Puntos $P(2, 4, 3)$ y $Q(1, -5, 2)$

Vectores posición

$$P\langle 2,4,3\rangle \qquad Q\langle 1,-5,2\rangle$$

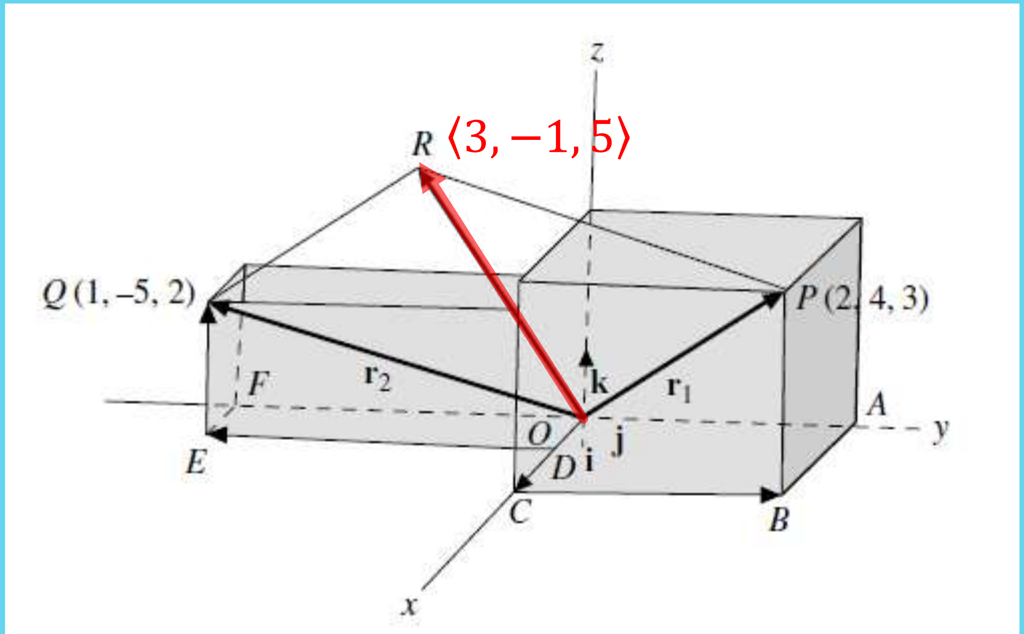
$$\vec{P}=2i+4J+3k \qquad \vec{Q}=i-5J+2k$$

Vector Resultante

$$\vec{R}=P\langle 2,4,3\rangle + Q\langle 1,-5,\ 2\rangle = R\langle 2+1,\ 4-5, 3+2\rangle$$

Vector resultante en las formas

$$R\langle 3,\ -1,\ 5\rangle=3i-j+5k$$



b) *En forma gráfica*, la resultante de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se obtiene como la diagonal **OR** del paralelogramo *OPRQ*. *En forma analítica*, la resultante de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está dada por

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Ejercicio # 10

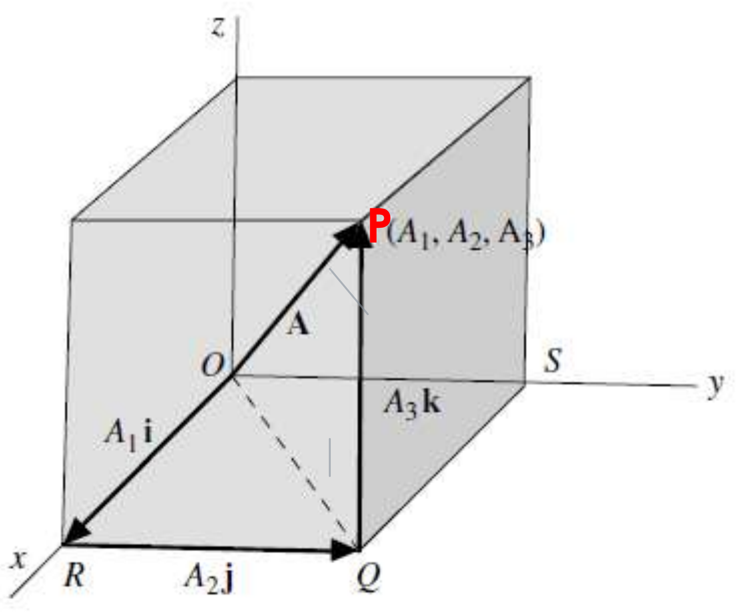


Figura 1-19

1.20. Demuestre que la magnitud del vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, que se ilustra en la figura 1-19 es $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

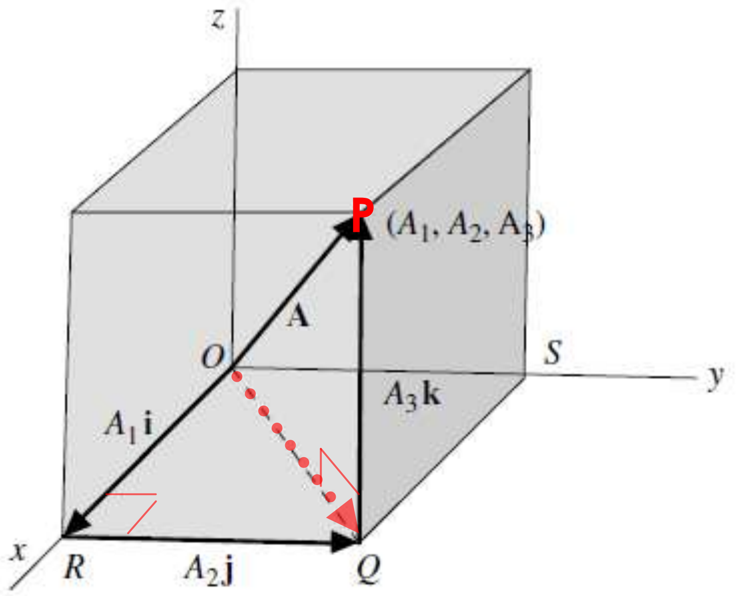


Figura 1-19

Con el teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo OQP, la hipotenusa es OP.

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

Luego en triángulo rectángulo ORP :

donde $\overline{OP}$ denota la magnitud del vector **OP**, y así sucesivamente. En forma similar $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.

Entonces $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ o bien $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ (es decir, $\mathbf{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$).

Ejercicio # 11

1.21. Dados los vectores $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Encuentre las magnitudes de: *a)* $\mathbf{r}_3$, *b)* $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, *c)* $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3$.

1.21. Dados los vectores [illegible] $= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Encuentre las magnitudes de: *a)* $\mathbf{r}_3$, *b)* $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, *c)* $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3$.

Solución

a) $|\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3.$

b) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, por lo que $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$

c) $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Ejercicio # 12

1.22. Encuentre un vector unitario **u** paralelo a la resultante **R** de los vectores $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

La resultante $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Asimismo,

$$\text{Magnitud de } \mathbf{R} = |\mathbf{R}| = |\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Entonces, $\mathbf{u}$ es igual a $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$. Es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3 = (1/3)\mathbf{i} + (2/3)\mathbf{j} - (2/3)\mathbf{k}$$

Comprobación: $|(1/3)\mathbf{i} + (2/3)\mathbf{j} - (2/3)\mathbf{k}| = \sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2 + (-2/3)^2} = 1.$

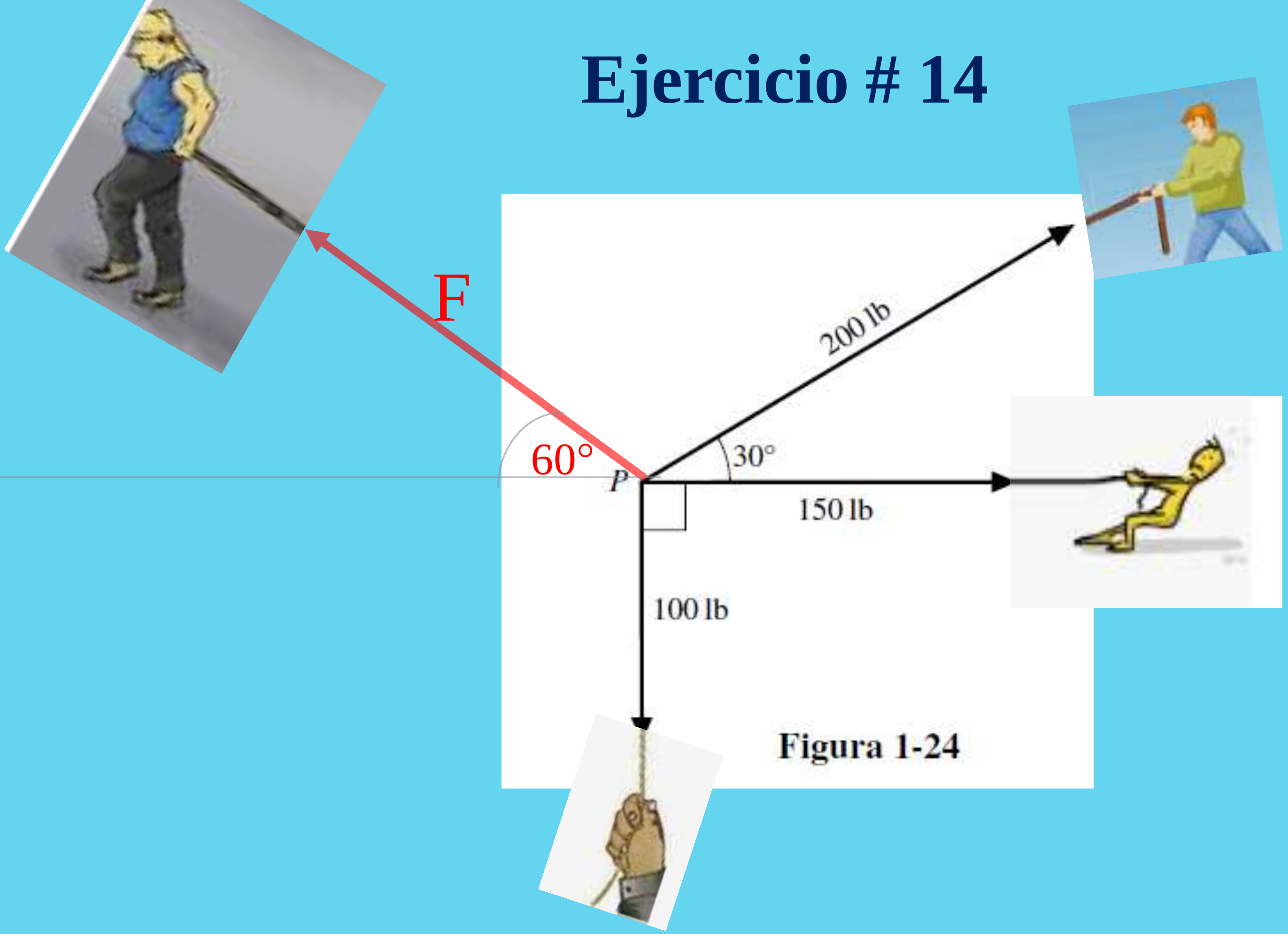
Ejercicio # 13

1.23. Suponga que $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Escriba dos combinaciones lineales de los tres vectores anteriores.

Nota: una es la suma de los tres vectores, otra cuál sería?

Ejercicio # 14



1.41. Sobre un objeto actúan tres fuerzas coplanares, como se ilustra en la figura. Calcule la cuarta fuerza F para que el objeto esté en equilibrio. Calcule la fuerza necesaria para impedir que *P* se mueva.

Sugerencia: descomponga la fuerza de 200 lb es componentes x, y. Como el objeto está en equilibrio las cuatro fuerzas se deben anular entre si.