Ecuaciones de Líneas rectas en R2

Profesor Efrén Giraldo T. MSc.

Ecuaciones lineales son aquellas donde la variables x e y tienen como exponente solo el 1. Su gráfica es una línea recta.

❖MISVALORES
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Temas a tratar.

Razones de cambio.
Pendiente de una recta.
Ecuaciones de líneas rectas.
Pendiente como rapidez de cambio de una variable con respecto a otra.

El cambio para cualquier variable se da cuando se pasa de un estado inicial a uno final. Para medir el cambio de una variable restamos su valor en el estado final menos su valor en el estado inicial:

$$T_{final} - T_{inicial} = \Delta T$$

% %

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz_C3_B3n_de_Cambio.pdf

Para la variable temperatura T el cambio lo mide la diferencia:

$$T_{final} - T_{inicial} = \Delta T$$

donde ΔT representa el cambio, aumento o disminución, de la temperatura.

% %

Razones

Una razón es una relación entre un numerador y un denominador.

Podría ser de la forma $\frac{y}{x}$, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o cualquier otra. Es importante entender su significado, pues es de uso común en todas las ramas de la ciencia.

ELABORÓ MSc. EFRÉN GIRALDO T. 2/13/2018

Existen dos razones de cambio principales para un fenómeno:

- Razón de cambio promedio.
- Y la razón de cambio instantáneo.

- La razón de cambio instantáneo es en un tiempo t y se estudia en cursos posteriores, mediante el límite o la derivada.

Razón de cambio promedio.

Razón de cambio promedio de una variable respecto a otra es el valor del **cambio** de una variable en el numerador por unidad de **cambio** de la otra en el denominador. También se le llama tasa de **cambio**.

El concepto de **razón de cambio** se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra.

% %

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz_C3_B3n_de_Cambio.pdf

¿Cambio de la temperatura con respecto a qué?

Podemos preguntarnos, ¿con qué velocidad cambia la temperatura? Para contestar esta pregunta debemos relacionar el cambio de temperatura respecto del cambio del tiempo comparando los cocientes.

Si el numerador tiene unidades y el denominador también, por ejemplo grados centígrados para la temperatura en el numerador (eje y), y segundos para el tiempo en el denominador (eje x) se podría tener:

$$\frac{50°C-30°C}{20s-10s}=\frac{20°C}{10s}=\frac{2\ °C}{s}$$

O sea, que luego de hacer la operación, se tiene una razón de cambio promedio de $\frac{2\ °C}{s} = \frac{2\ °C}{1s}$, lo cual significa que cada 1segundo la temperatura *varía 2 grados centígrados*. O hay una variación de 2°C cada 1 segundo. Lo mismo se puede aplicar a cualquier razón de cambio para su interpretación.

La razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo da como resultado la velocidad promedio con la que cambia la temperatura respecto del tiempo.

La razón de cambio más frecuente es la **velocidad**, que se calcula dividiendo un trayecto o distancia recorrida entre una unidad de tiempo.

Esto quiere decir que la velocidad promedio se define a partir del vínculo que se establece entre la **distancia** y el **tiempo**.

Supongamos que un automóvil pasa de 10 km a 110 kilómetros desde un tiempo cero a un tiempo de dos horas. La razón de cambio promedio existente entre la distancia y el tiempo es: 110km-10km = 100km
2hr-0hr= 2hr

$$\frac{\mathbf{100}\boldsymbol{km}}{\mathbf{2}\boldsymbol{h}} = \frac{\mathbf{50}\boldsymbol{km}}{\mathbf{1}\boldsymbol{h}}$$

Cada hora se recorren 50km

Para qué sirven las razones de cambio?

A través del estudio de los conceptos “razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo”, que son conceptos relativos a los cambios de una magnitud con respecto a otra, podremos resolver problemas que involucran el cambio de una población respecto al tiempo, el cambio de la temperatura de un líquido, el cambio de la distancia en relación con el tiempo, la velocidad respecto del tiempo, la producción en cierto tiempo, y muchas otras relaciones entre variables.

Definición: se llama razón de cambio promedio de la variable y respecto a x, al cociente entre el **cambio en el valor de y**: $(y_2 - y_1)$, **y el cambio en x**: $(x_2 - x_1)$ La razón de cambio promedio es:

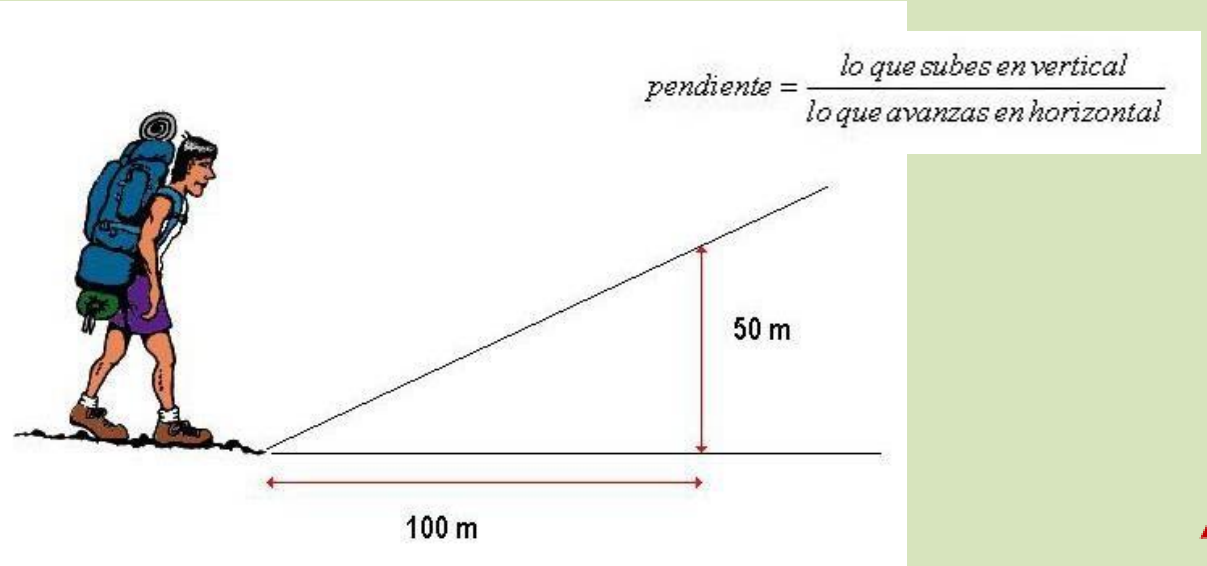
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

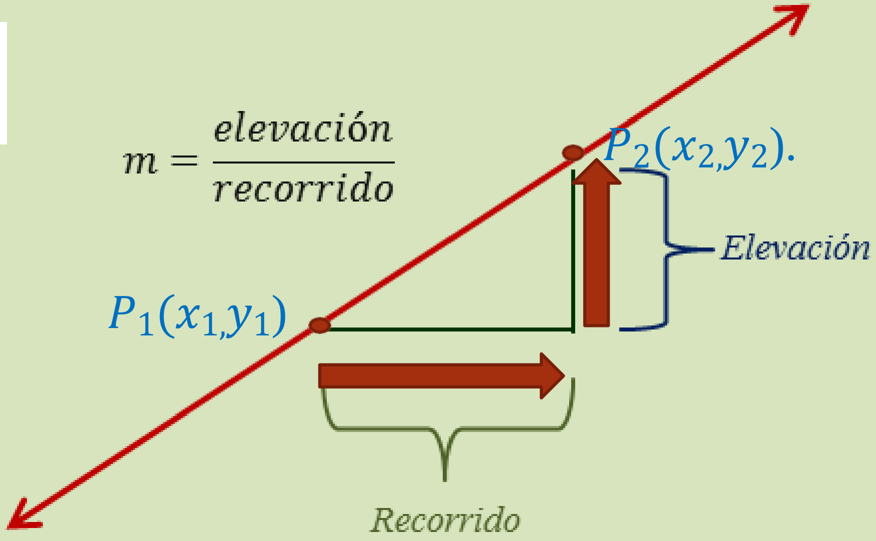
Una razón de cambio muy común es la pendiente:

% %

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz_C3_B3n_de_Cambio.pdf

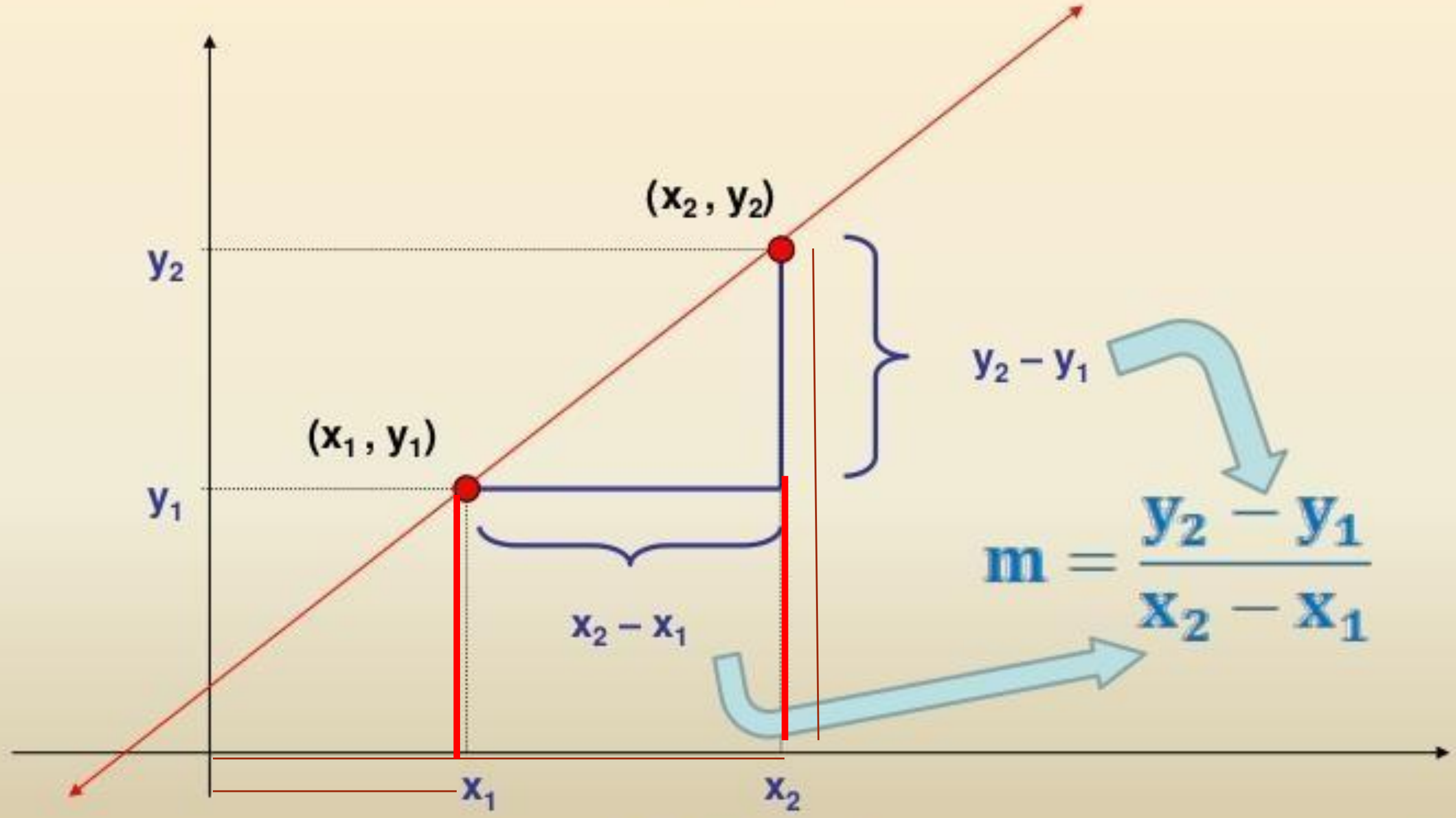
Pendiente de una recta





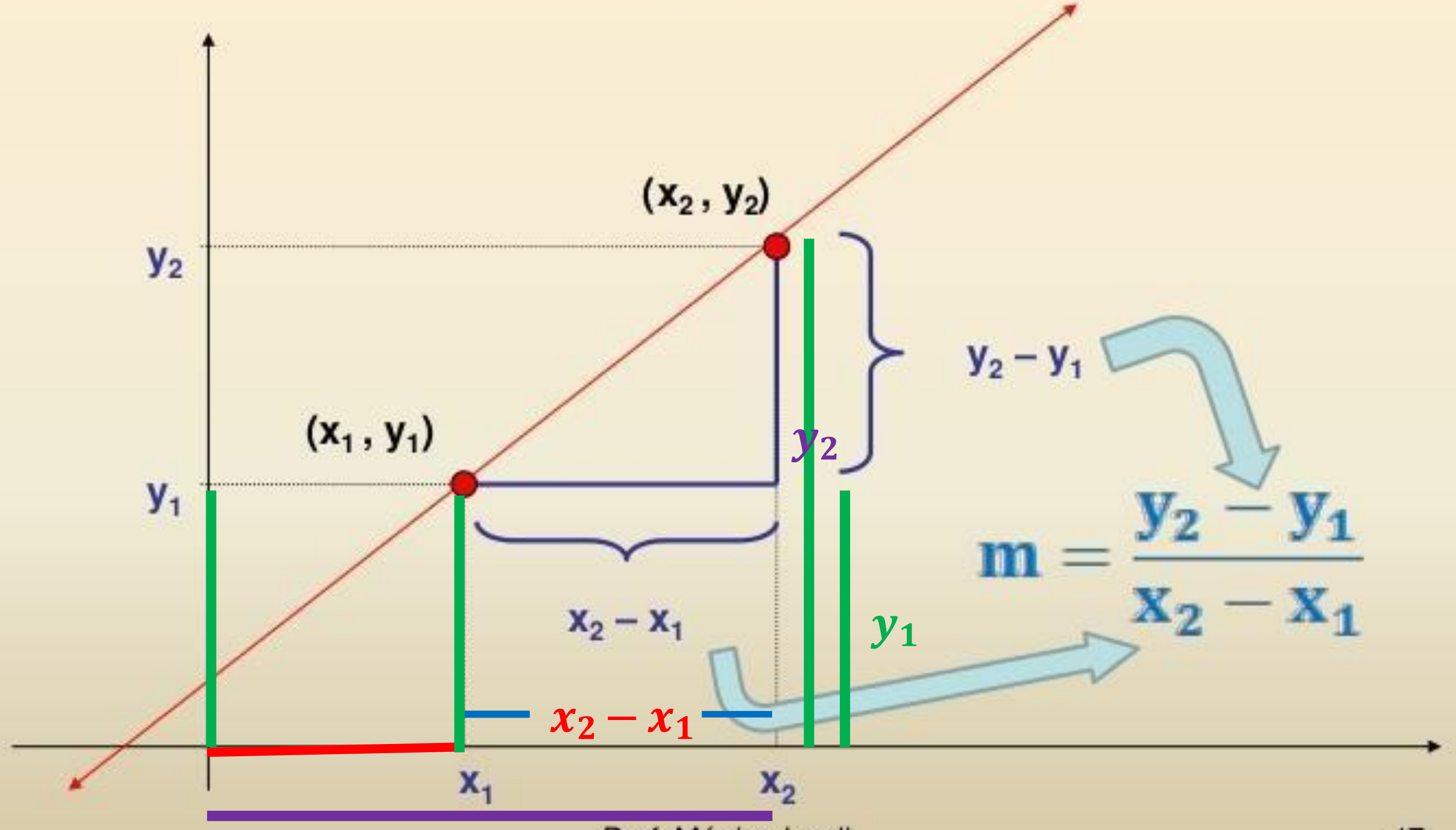
- Primero comenzaremos con la pendiente de una recta. La cual es una manera de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la **rapidez con la que sube** (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Por cada x unidades que nos desplazamos a la derecha (recorrido), subimos (m +) (elevación) (o bajamos ($-$m) y unidades).
- Se parte de dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Cálculo de la pendiente de una recta



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

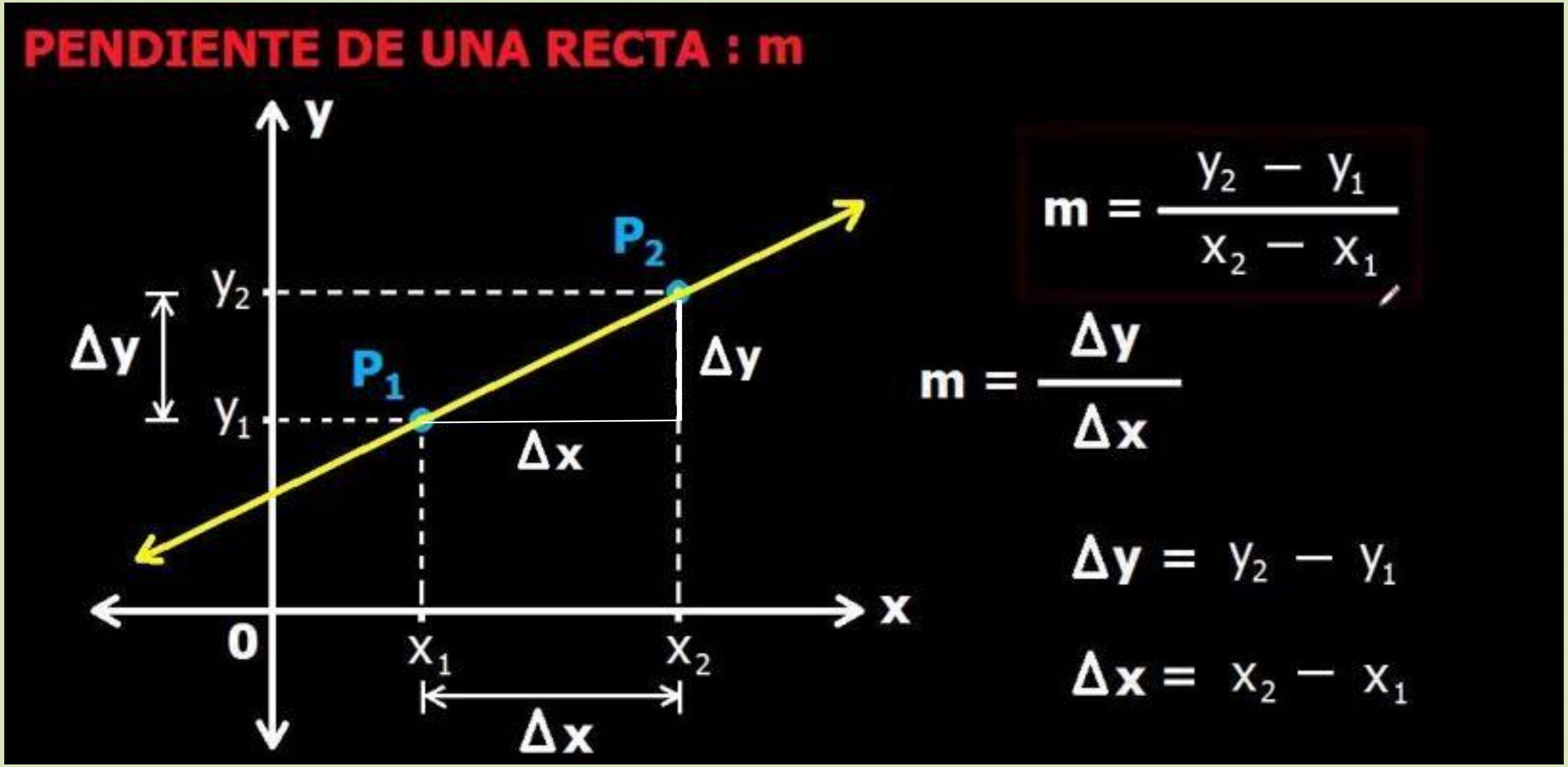
Cálculo de la pendiente de una recta



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Prof. Mónica Lordi 17

http://mastermatematico.blogspot.com.co/2015/10/pendiente-y-distancia-entre-dos-puntos.html



https://www.youtube.com/watch?v=xeZElTAyMOk

PENDIENTE DE UNA RECTA

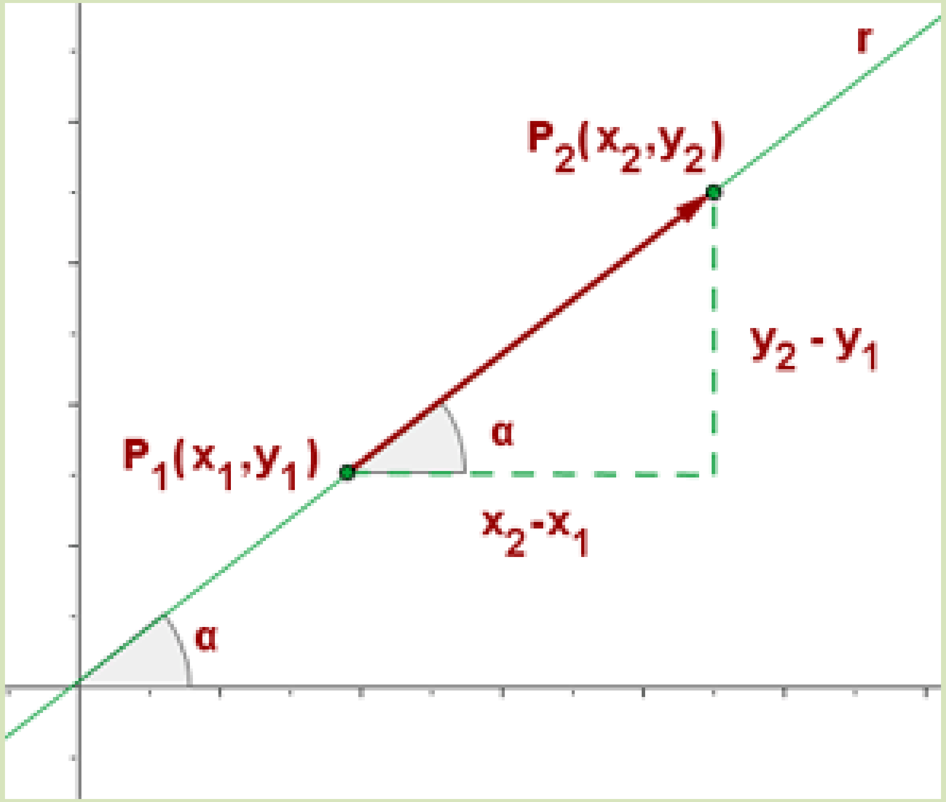
La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \propto$$

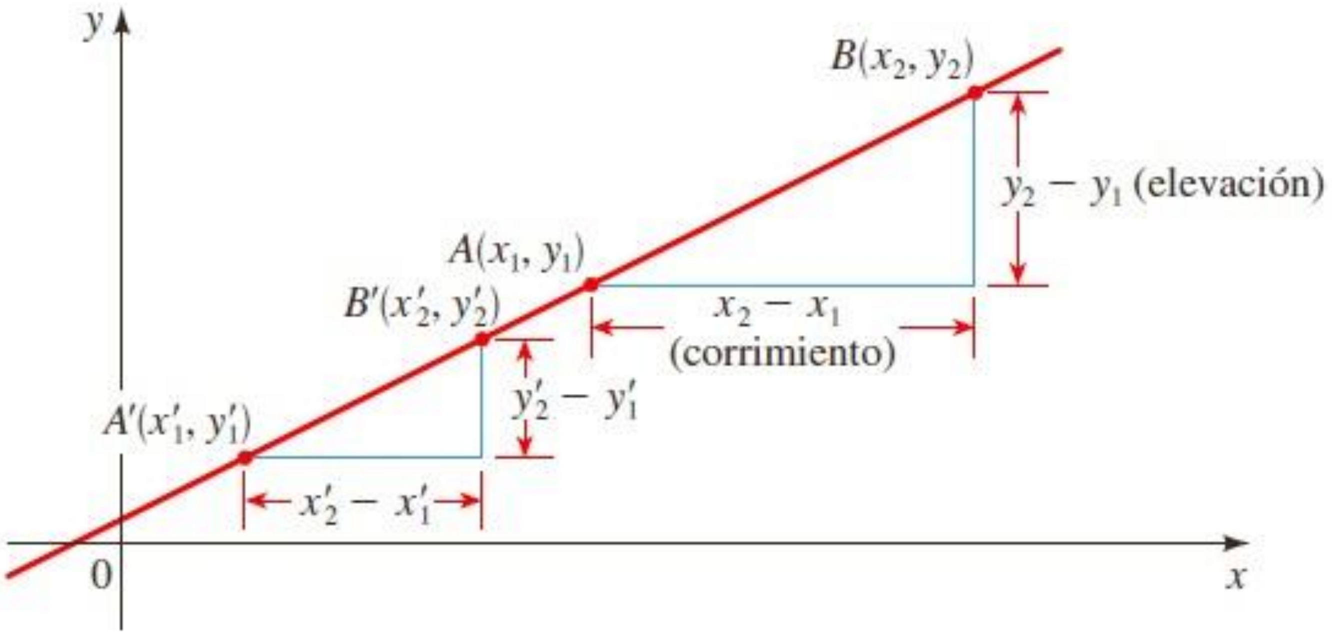
$$\propto = tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

La **pendiente** de una recta también es la ta**ngente** del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas

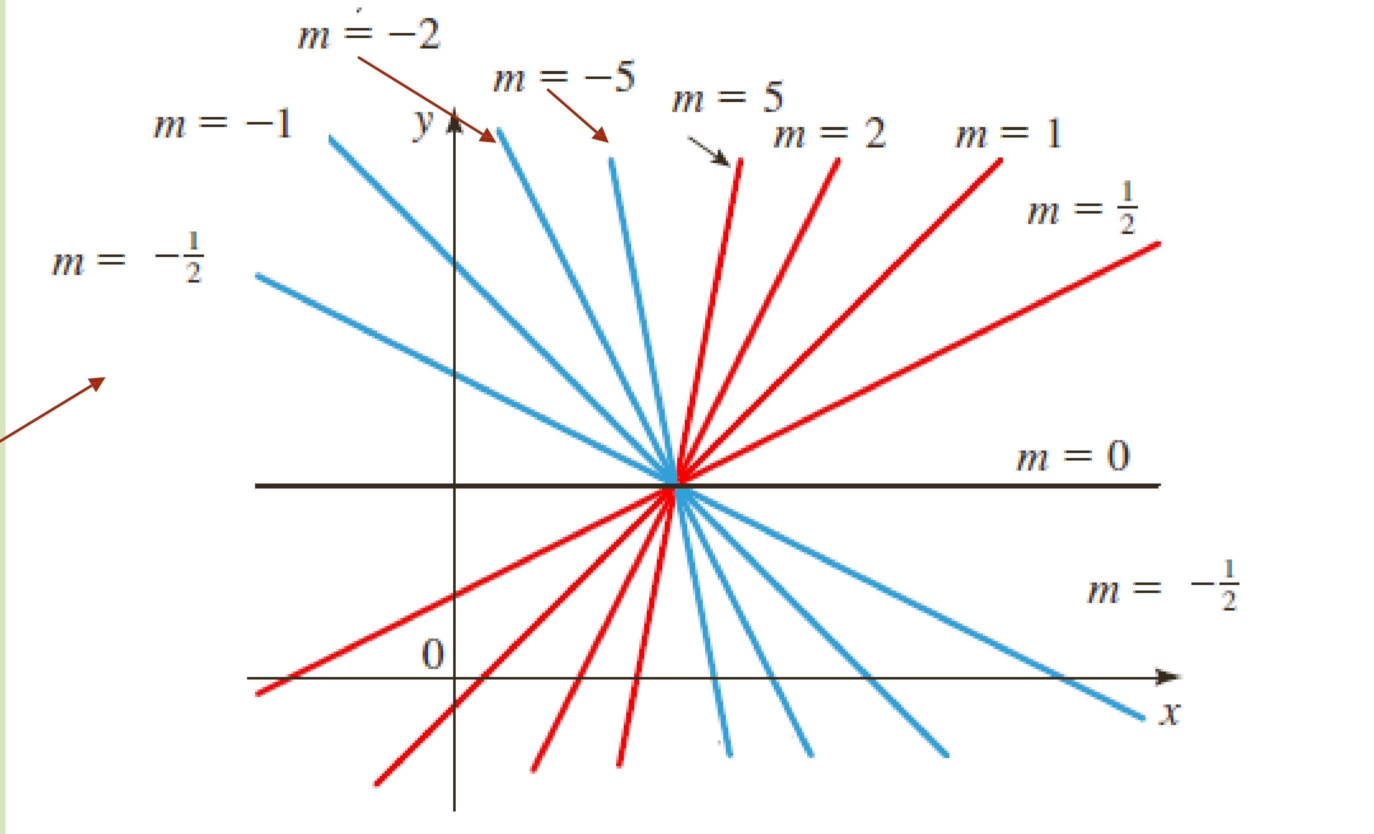
https://www.ditutor.com/funciones/pendiente-recta.html

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$



(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



- Las rectas con pendiente + se inclinan a la derecha.
- Las rectas con pendiente - se inclinan a la izquierda.
- Las rectas horizontales tienen pendiente 0.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

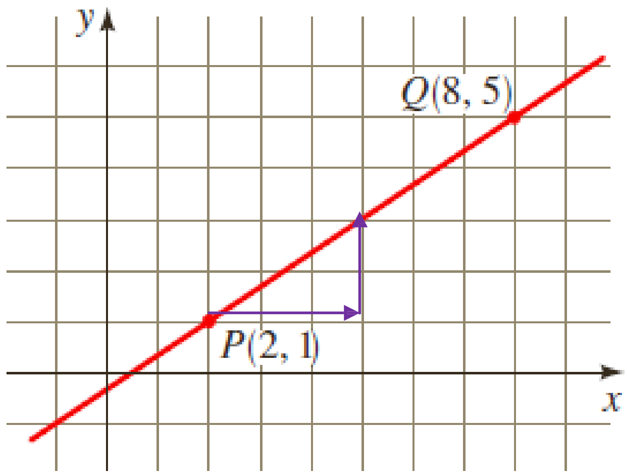


FIGURA 5

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

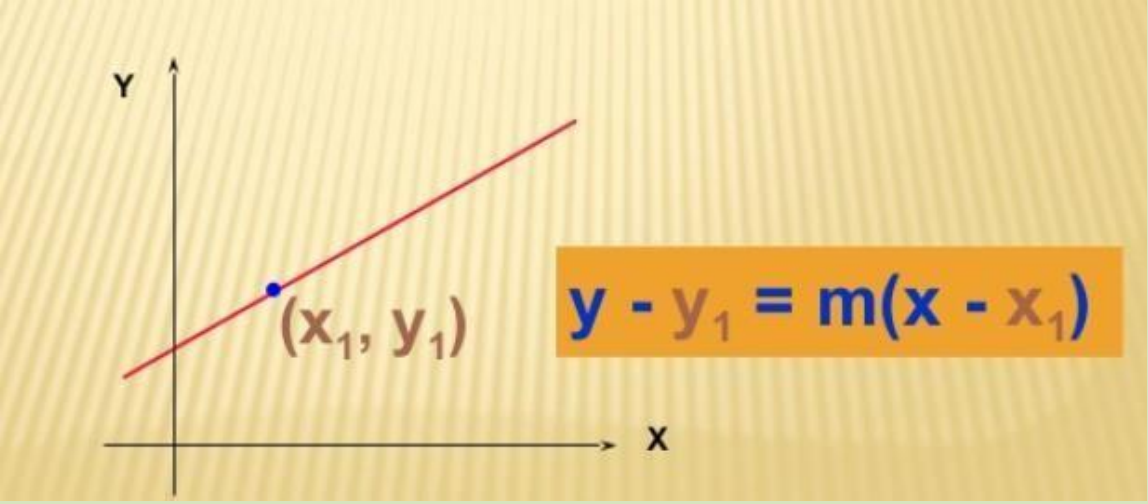
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuaciones de líneas rectas en R2

De la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ podemos deducir la ecuación de la línea recta que pasa por un punto de coordenadas conocidas $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m conocida:



Liberamos el punto $P_2(x_{2,}y_2)$, esto es lo generalizamos haciéndolo $P(x, y)$

$$\frac{y - y_1}{x - y_2} = m$$

https://es.slideshare.net/yolandasarmiento/ecuacion-de-la-recta-16673959

Ecuación de la recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

x_1, y_1 m=-1/2

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Trace la gráfica de la recta.

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

SOLUCIÓN

(a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}\text{, punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

(b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

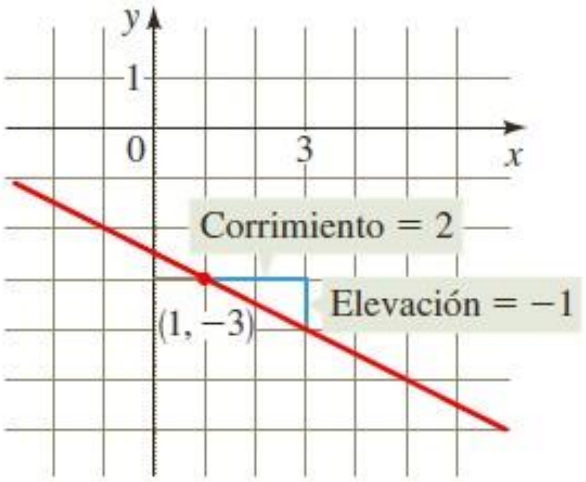


FIGURA 7

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

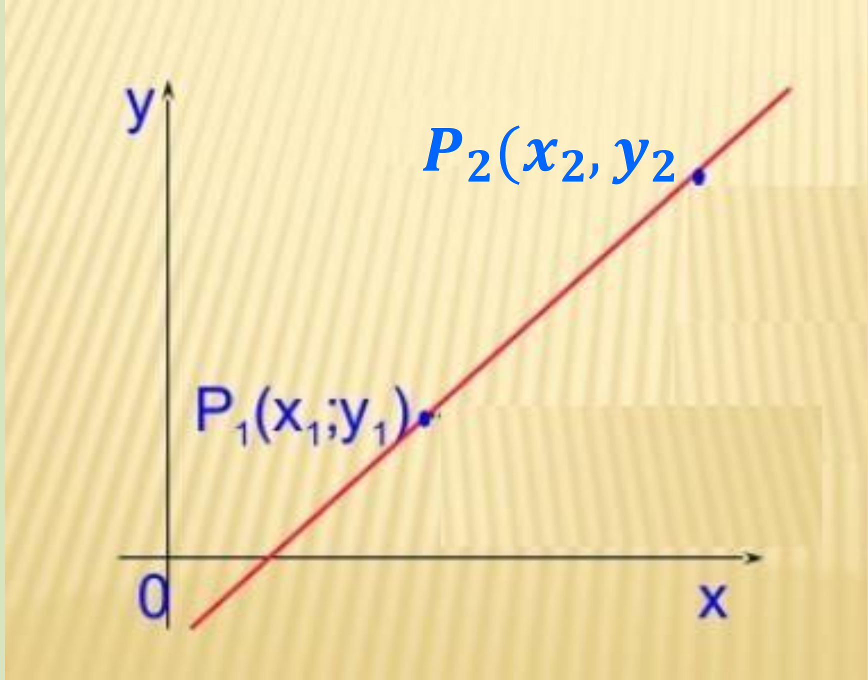
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

A partir de la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Y de la ecuación de la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$



EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

x_1, y_1 x_2, y_2

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

EJEMPLO 3 | **Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}\text{, punto } (-1, 2)$$

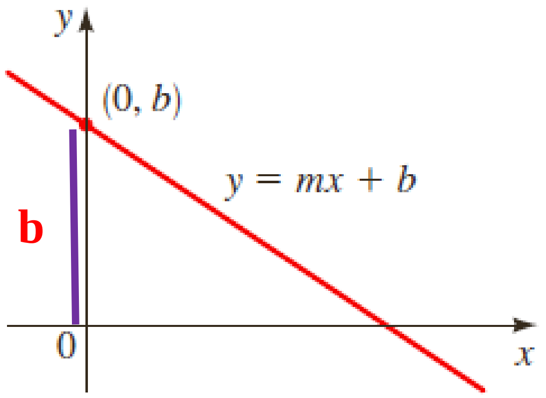
$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de la línea recta con pendiente m e intercepción b en el con el eje y

$$y = mx + b$$



Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

(a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$\begin{aligned} 3y - 2x &= 1 \\ 3y &= 2x + 1 && \text{Sume } 2x \\ y &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

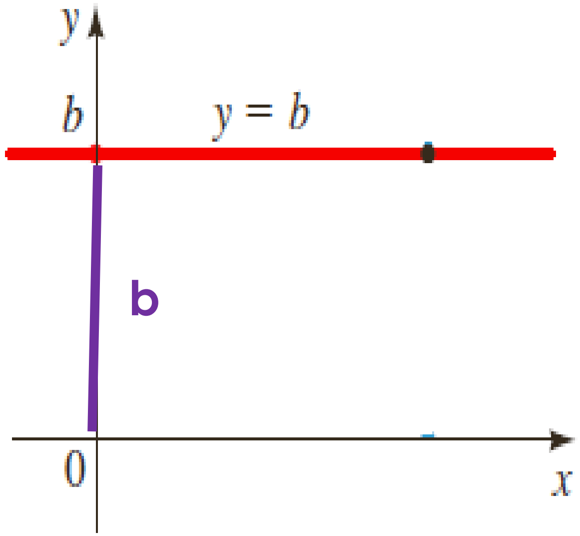
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de una recta paralela al eje x: y=b

Ecuación del eje x: y = 0

Si una recta es horizontal su pendiente es 0.

Así: $y = mx + b$ $\quad y = 0x + b$ $\quad y = b$



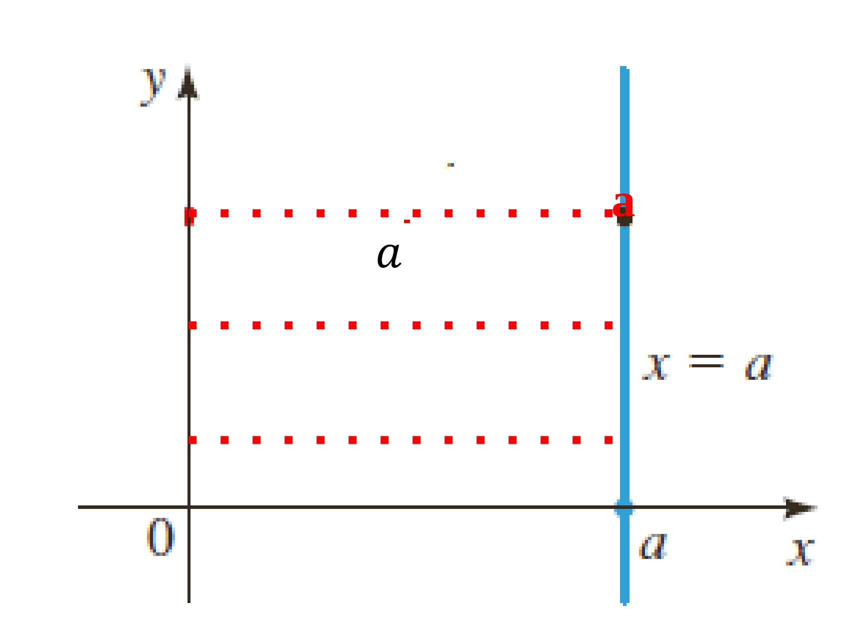
▼ Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de una recta paralela al eje y: $\rightarrow$ $x = a$

Ecuación del eje y: $x = 0$



Rectas verticales

Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

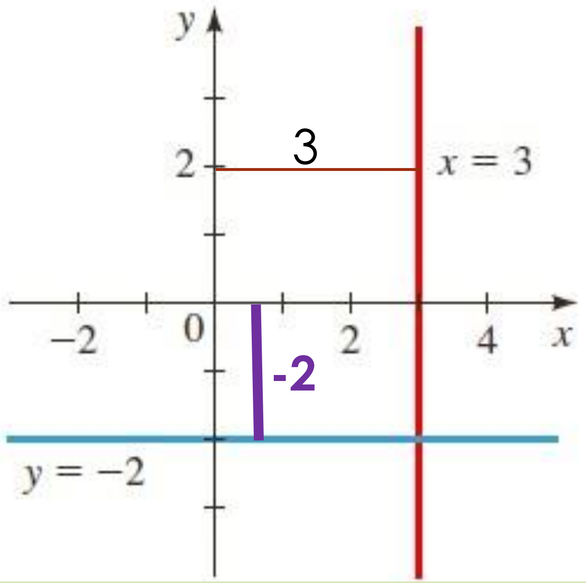
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

(a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.

(b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

(c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

(d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

▼ Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

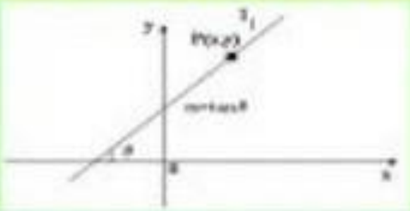
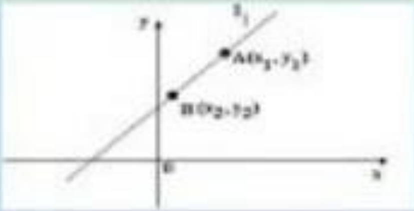
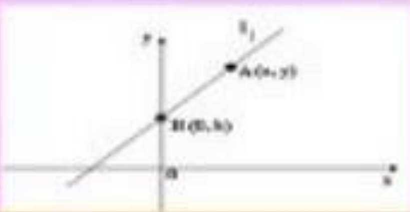
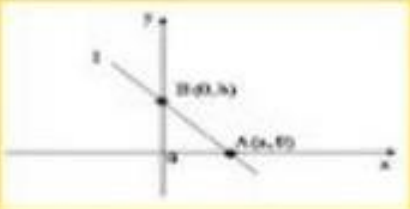
donde A, B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de la recta que intercepta al eje y en b y al eje x en a

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA

ECUACION GENERAL DE LA RECTA:		$A_X + B_Y + C = 0$
1.- PUNTO - PENDIENTE		$(y - y_1) = m(x - x_1)$
2.- DADO DOS PUNTOS		$(y - y_1) = \left[\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x - x_1)$
3.- INTERCEPTO EN EJE "Y"		$y = mx + b$
4.- SIMETRICA		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ MATEMATICA_EDKEN

1

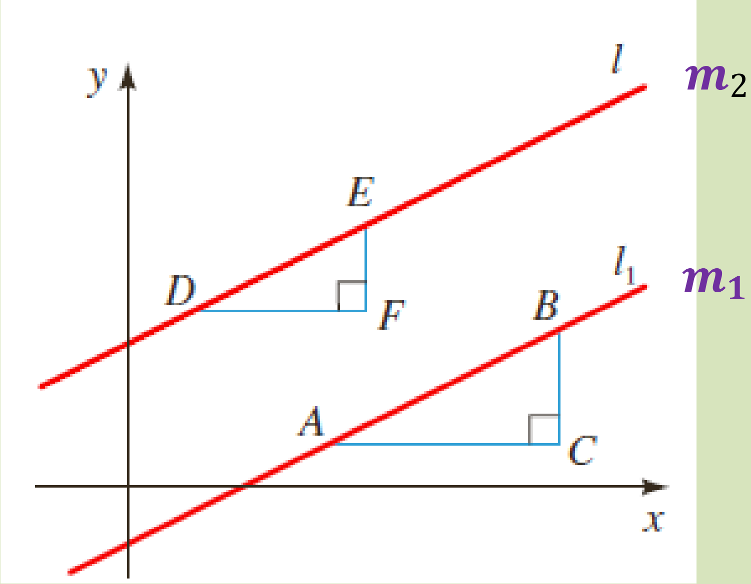
https://es.slideshare.net/jcaicedo14/ecuacion-de-la-recta-pendiente

ELABORO MSc. EFREN GIRALDO T.

Ubique los puntos en el plano y determine la pendiente de estos segmentos:

1. A(-6; 1) y B(1; 2)
2. C(-1; 4) y D(3; 1)
3. E(3; 2) y F(8; 2)
4. G(2; 1) y H(2; -3)

Halle la ecuación en cada caso mediante $y = mx + b$



$$m_1 = m_2$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | **Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \qquad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} \qquad \text{Divida entre 6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

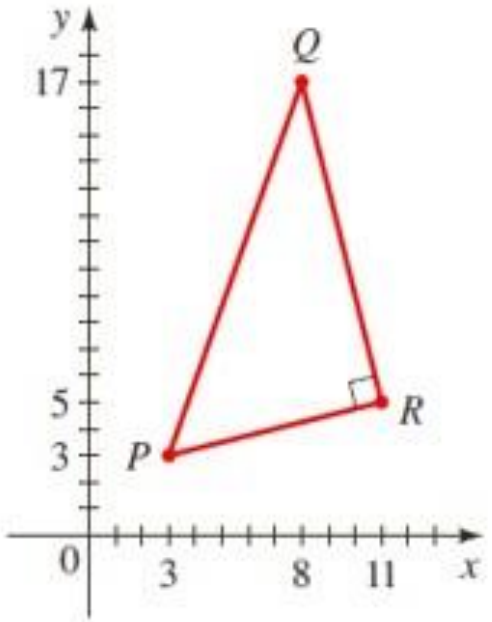
RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad m_1 m_2 = -1$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

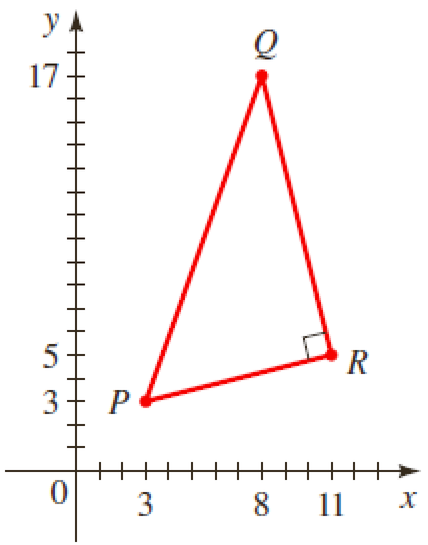
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



EJEMPLO | Rectas p

FIGURA 15

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



EJEMPLO 8 | Rectas p

FIGURA 15

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen. Origen: P(0,0)

EJEMPLO 9 | **Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada**

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por $(0, 0)$, la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}\text{, punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Rapidez o velocidad de cambio de una variable con respecto a otra

▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

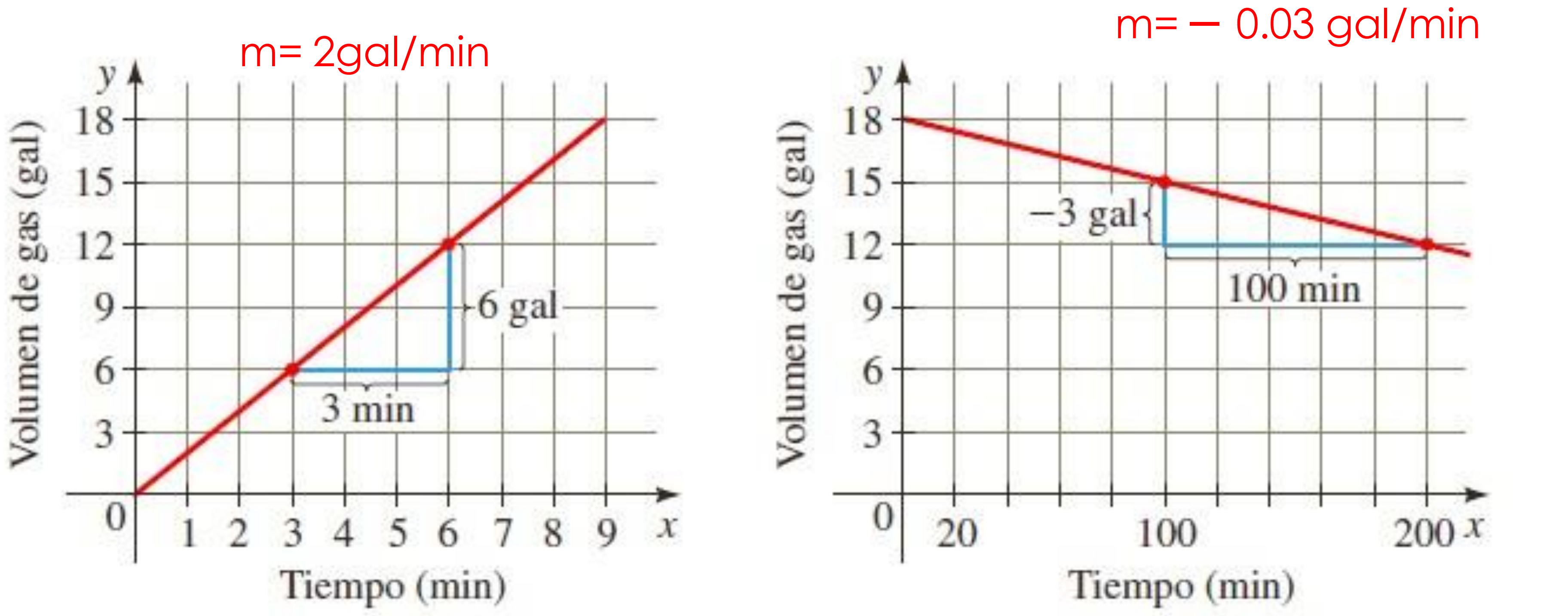
Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

Cada minuto entran dos galones de gas al tanque.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es −0.03.



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es −0.03

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Bibliografía

- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo, Matemáticas para el Cálculo. Cencage Learning, 6 Ed. México.
- https://mate2uap.wikispaces.com/file/view/MATEM%C3%81TICA+II+PARCIAL_Solucion.pdf
- http://mastermatematico.blogspot.com.co/2015/10/pendiente-y-distancia-entre-dos-puntos.html
- https://www.ditutor.com/funciones/pendiente-recta.html