



# Posiciones relativas de Rectas en $R^3$

Diapositivas realizadas por

Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

## ❖ *MIS VALORES*

*Entrega*

*Transparencia*

*Simplicidad*

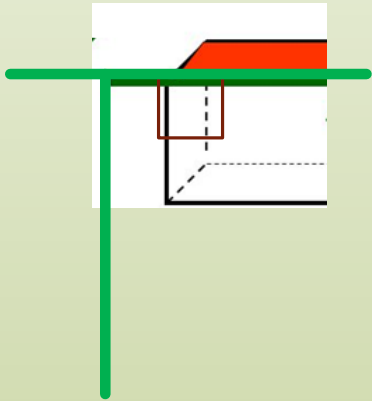
*y Persistencia*

❖ *MIS MISIÓN:* *Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.*

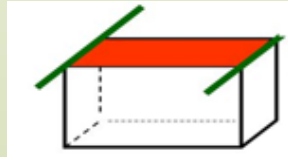
❖ *MIS MISIÓN:* *Entrega a la Voluntad Suprema.  
Servir a las personas.*



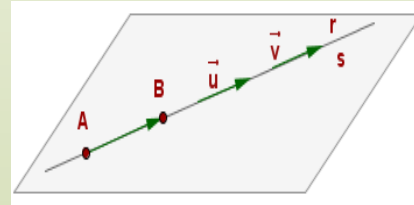
Perpendiculares



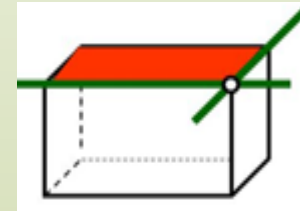
Paralelas



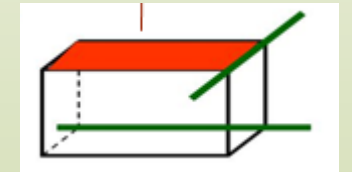
Coincidentes



Secantes  
Se interceptan

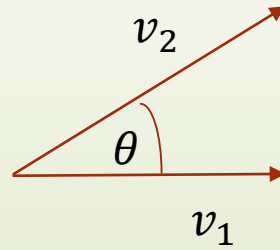


Se cruzan  
Alabeadas  
Oblicuas



# Ángulo entre dos vectores

4

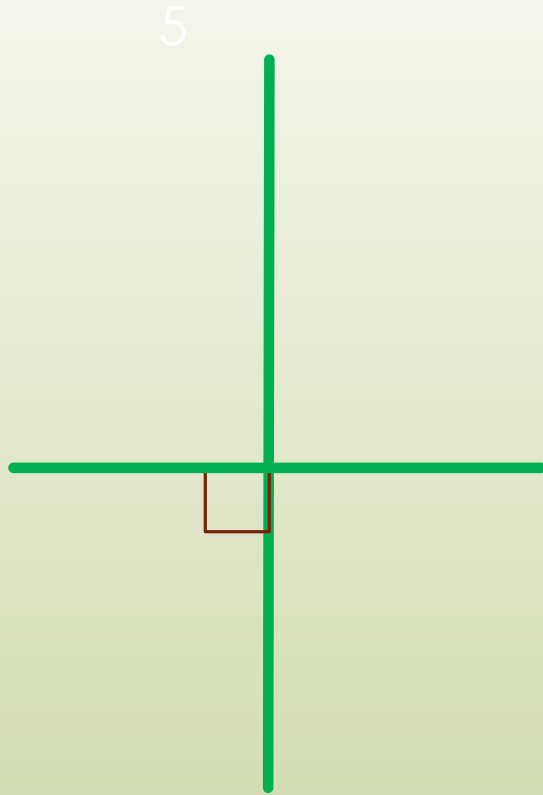


$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|}$$

$$\cos\theta = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|v_1| |v_2|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|v_1| |v_2|} \right)$$

# 1. Rectas Perpendiculares



$$\begin{array}{c} v_1 \langle x_1, y_1, z_1 \rangle \\ \downarrow + \downarrow + \downarrow \\ v_2 \langle x_2, y_2, z_2 \rangle \end{array}$$

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \quad v_1 \perp v_2$$

$$v_1 \cdot v_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

## Ejercicio # 1

6

Demuestre que el vector  $v_1$  que corresponde a los puntos  $P(0, 2, 2)$  y  $Q(2, -2, 12)$ , es perpendicular al vector  $v_2$  que pasa por los puntos  $R(-2, 1, 0.5)$  y  $M(-0.5, 3, 1)$ .

Primero se requiere hallar los vectores directores de PQ y RM. Se hallan por la diferencia de coordenadas entre los puntos Q y P y M y R.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &\langle 2, -4, 10 \rangle \\ \overrightarrow{RM} &\langle 1.5, 2, 0.5 \rangle\end{aligned}$$

7

Si estos vectores son perpendiculares entonces su producto punto o escalar es 0.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &\langle 2, -4, 10 \rangle \\ \overrightarrow{RM} &\langle 1.5, 2, 0.5 \rangle\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RM} = 3 - 8 + 5 = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{RM}$$

Por tanto, las rectas PQ y RM también son perpendiculares

8

## Ejercicio # 2 para resolver

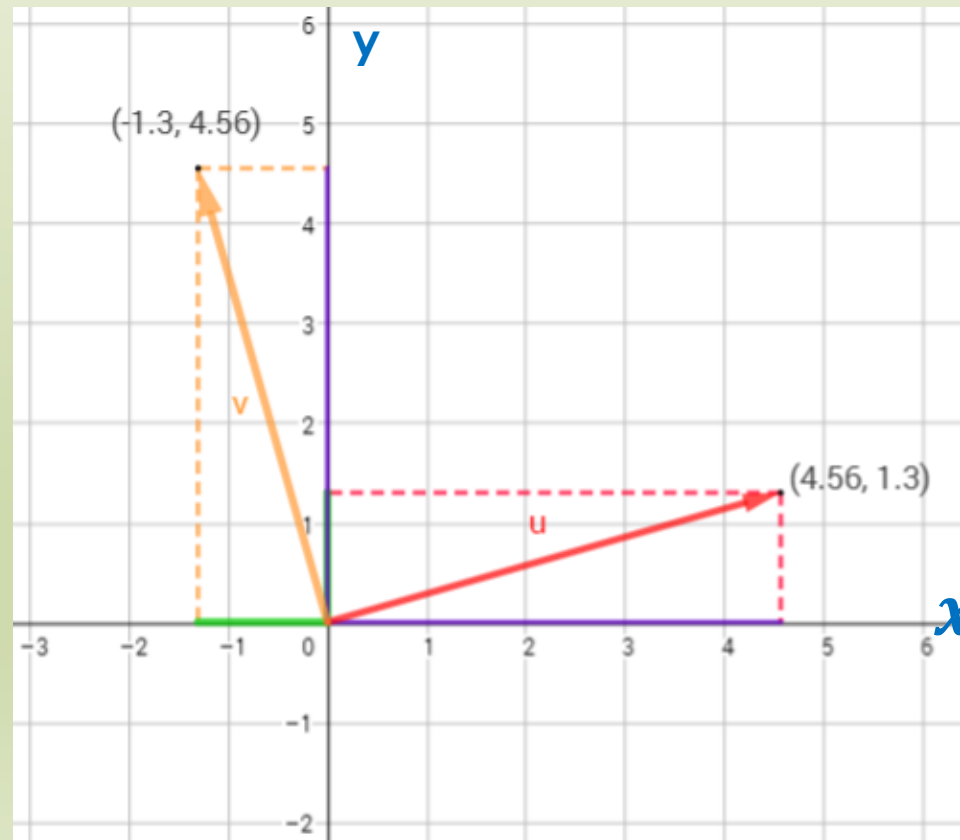
Demuestre que la recta PQ que pasa por los puntos  $P(0,2,2)$  y  $Q(0.5,-0.5,3)$  es perpendicular a la recta  $R(-2,1,0.5)$ ,  $M(-0.5, 3,1)$ .



## Ejercicio # 3 para resolver

9

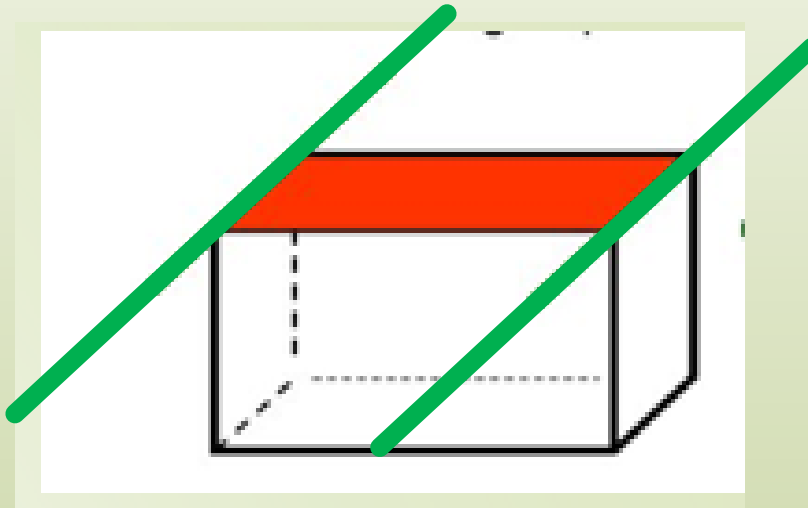
Demuestre que el vector  $v \langle 4.56, 1.3 \rangle$  es perpendicular al vector  $u \langle -1.3, 4.56 \rangle$   
Halle un vector perpendicular a  $u$  y  $v$ , ¿En qué dirección irá este vector?



## 2. Rectas paralelas:

10

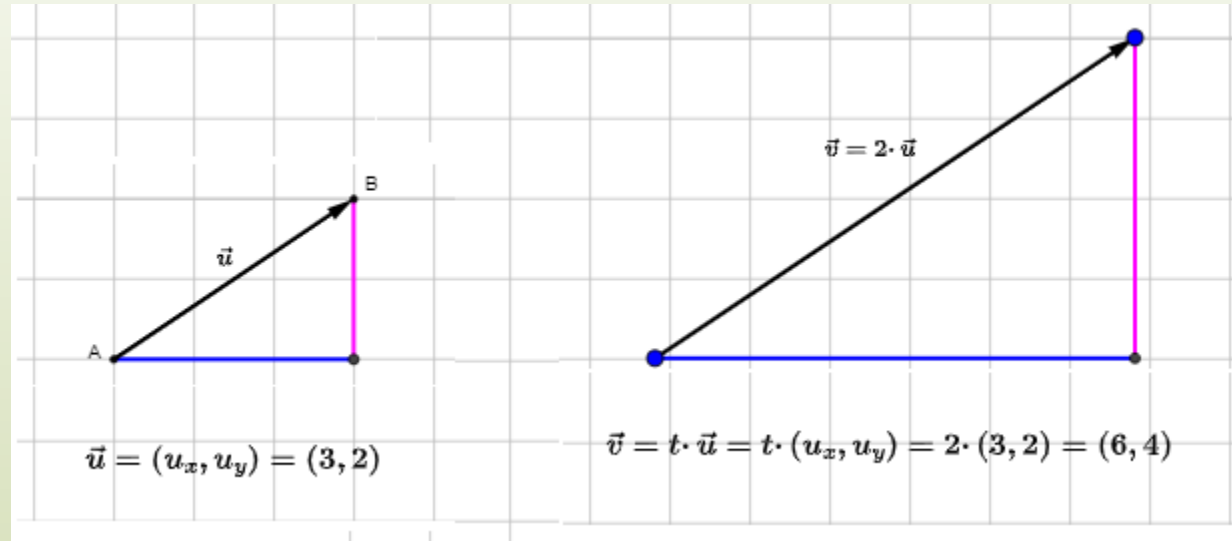
Si están en el mismo plano y no tienen un punto en común



$$u \times v = 0$$

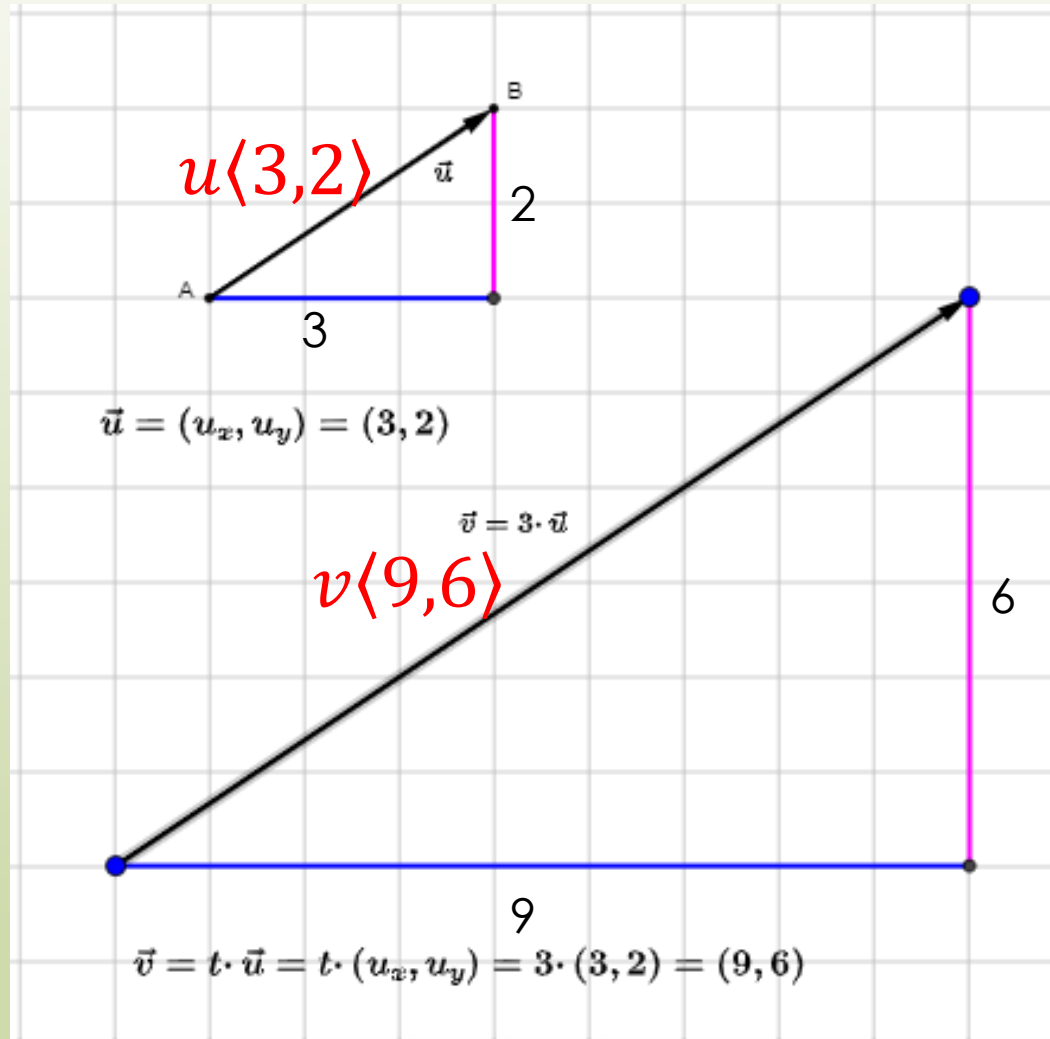
# Vectores paralelos: método alternativo

11



$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Dos vectores paralelos tienen sus respectivas coordenadas proporcionales



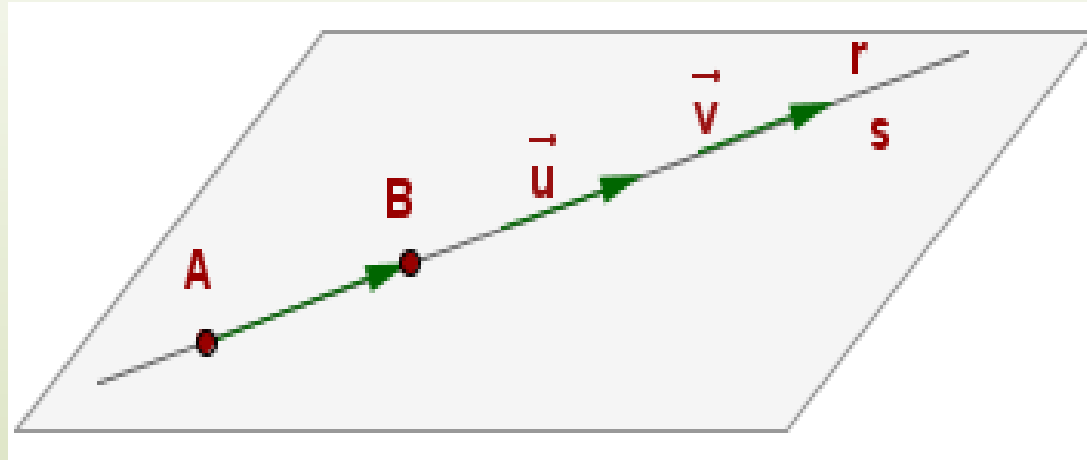
$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

<https://www.geogebra.org/m/uDy8774Q>

# 3. Rectas Coincidentes o superpuestas



$$\frac{x_2 - x_1}{u_1} = \frac{y_2 - y_1}{u_2} = \frac{z_2 - z_1}{u_3}$$

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/posiciones-relativas-de-dos-rectas.html>

Las rectas son **coincidentes**, si:

1. Son **paralelas**
2. Tienen **mínimo un punto en común.**

<https://www.youtube.com/watch?v=CYzWjCFzBq8>

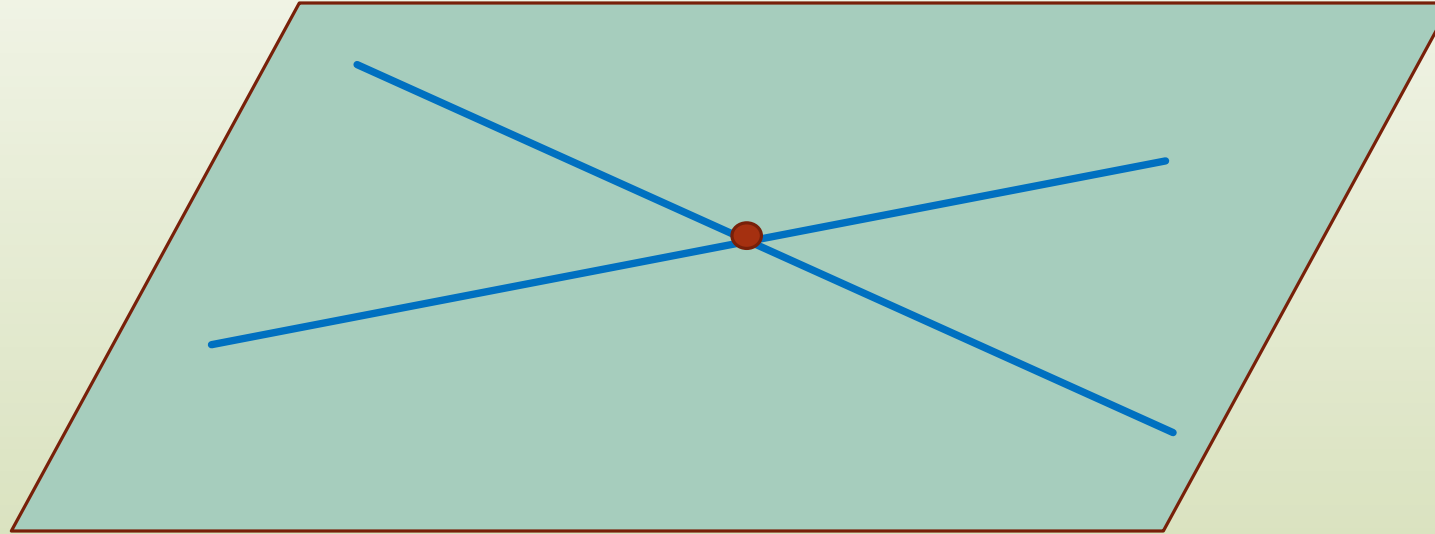
$$u \times v = 0$$

9/11/2019 4/2/2018

Para verificar si dos rectas paralelas son coincidentes basta con ver si un punto de una de ellas pertenece o no a la otra recta.

Dos rectas coincidentes gráficamente se representan por la misma recta, difieren en su representación analítica o ecuación. Deben primero cumplir que el producto cruz entre sus vectores directores sea 0.

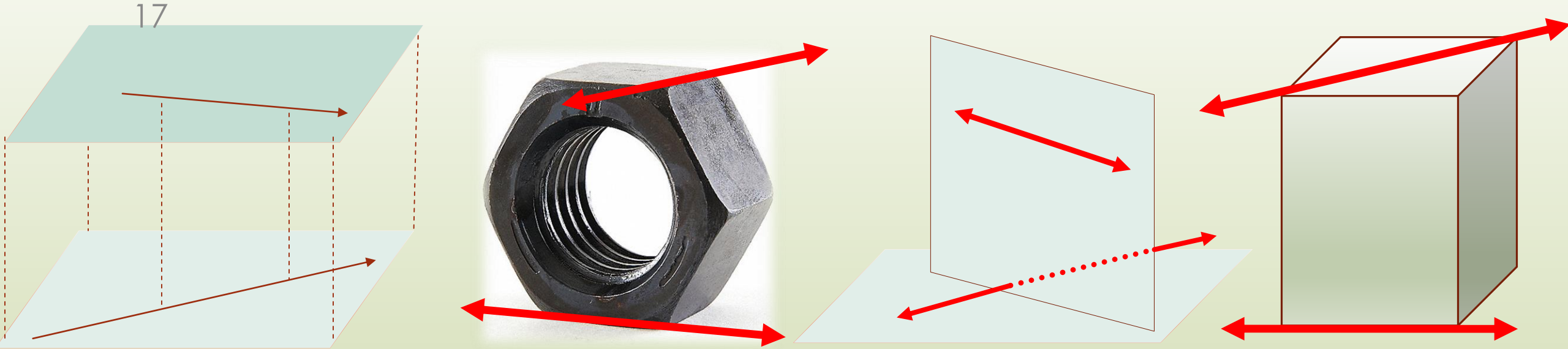
## 4. Las rectas se cortan, se interceptan, secantes



Son dos o más líneas que están en **un mismo plano** y se cortan **en un solo punto**. Las rectas se cortan, no son paralelas y tienen un punto en común.



## 5. Rectas que se cruzan, oblicuas



**Las líneas que se cruzan están en *diferente plano*.**

Son líneas rectas que **no son paralelas** en el sentido estricto de la palabra, ni se intersecan (no tienen punto en común o no se cortan). Nunca se encuentran. Pero una puede pasar por encima o por debajo de la otra. Un río en línea recta que pasa por debajo de un puente podría ser un ejemplo. Una autopista recta y un puente encima.

## Protocolo para saber si las rectas se interceptan o son oblicuas.

### Caso 4 y 5: Las Rectas pueden interceptarse o ser oblicuas

1. Se igualan las tres ecuaciones paramétricas en  $x$  de una recta con las ecuaciones en  $x$  de la otra , lo mismo con  $y, z$ .
2. Se toman solo dos ecuaciones por ejemplo las de  $x$  y las de  $y$ . Quedan dos ecuaciones con parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (son dos incógnitas). La tercera ecuación sirve de verificación al final.
3. Por el método de eliminación se obtienen los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ,
4.  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se reemplazan en la tercera ecuación igualada en  $z$ , para verificar si un lado es igual a otro lado. Si es igual existe un punto de intercepción, y sus coordenadas se hallan reemplazando los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en las paramétricas de cualquier de las rectas. Si un lado no da igual al otro las rectas son oblicuas y no existe punto común..

## Caso 4 : Las Rectas pueden ser secantes ( se interceptan)

1  
Paramétricas

$$\begin{array}{l} \text{recta } l_1 \\ x = 4 + 2\alpha_1 \\ y = -5 + 4\alpha_1 \\ z = 1 + 3\alpha_1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{recta } l_2 \\ x = 2 + 1\alpha_2 \\ y = -1 + 3\alpha_2 \\ z = 0 + 2\alpha_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{recta } l_1 \\ \text{recta } l_2 \end{array}} \right\} \text{Paramétricas}$$

2  
Igualar las paramétricas;  
se sacan las dos primeras.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 + 2\alpha_1 = 2 + 1\alpha_2 \\ -5 + 4\alpha_1 = -1 + 3\alpha_2 \end{array} \right. \quad \text{Dos ecuaciones dos incógnitas}$$

Se obtienen parámetros  $\alpha_1$   $\alpha_2$

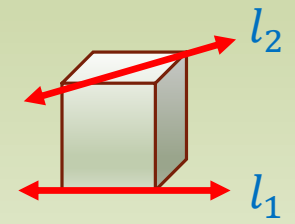
3  $\alpha_1 = -5$  ,  $\alpha_2 = -8$

Se reemplazan en la 3era ecuación

4  $1 + 3\alpha_1 = 0 + 2\alpha_2$

Igualdad..... se interceptan  
Desigualdad ..... oblicuas

5  $-14 \neq -16 \longrightarrow l_1$  es oblicua a  $l_2$



# Ejercicio #

21

Analizar si las siguientes rectas son:

Recta 1

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Recta 2

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Perpendiculares

Paralelas

Coincidentes

Secantes

Oblicuas

# Operaciones previas

22

Recta 1

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$P_1(1,2,1) \quad v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$$

Recta 2

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

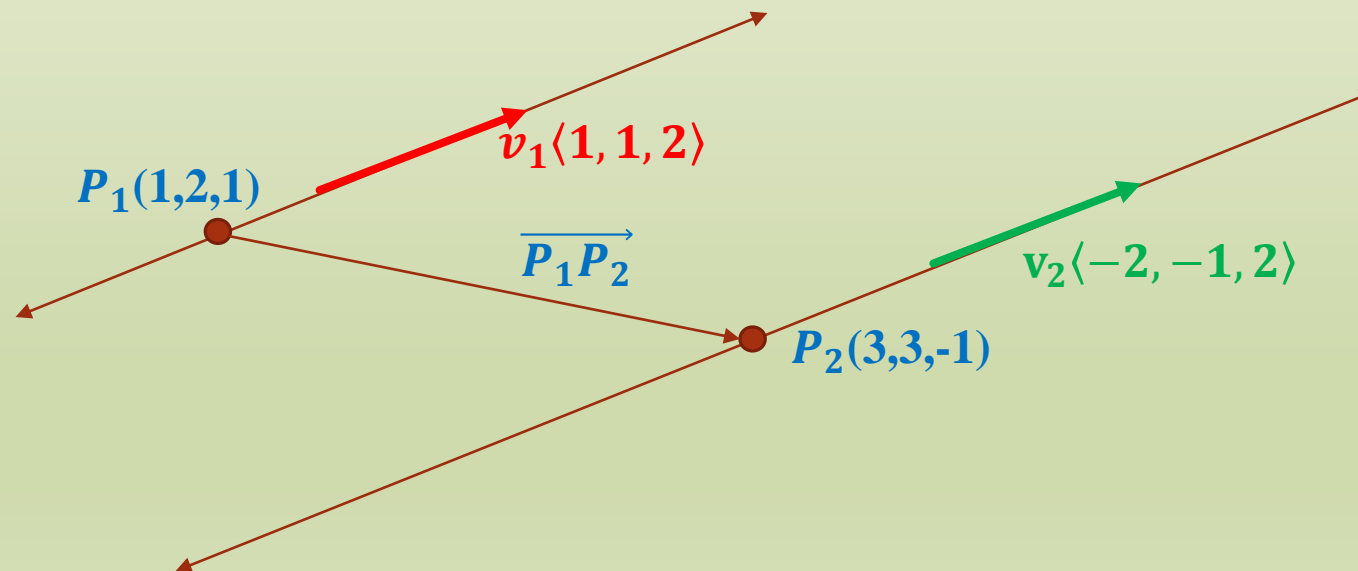
$$P_2(3,3,-1) \quad v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$$

# Vector que une dos rectas paralelas

$$P_1(1,2,1) \quad P_2(3,3,-1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \langle 3 - 1, 3 - 2, -1 - 1 - 1 \rangle$$

El vector  $\overrightarrow{P_1P_2} \langle 2, 1, -2 \rangle$



# Ecuaciones paramétricas

Recta 1

$$P_1(1,2,1) \quad v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$$

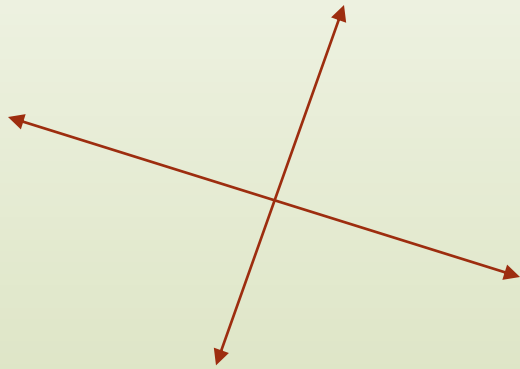
Recta 2

$$P_2(3,3,-1) \quad v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$$

$$\begin{array}{l} x = 1 + \alpha \longleftrightarrow x = 3 - 2\beta \\ y = 2 + \alpha \longleftrightarrow y = 3 - \beta \\ z = 1 + 2\alpha \longleftrightarrow z = -1 + 2\beta \end{array}$$



# 1. ¿Serán las rectas perpendiculares?



$$v_1 \langle 1, 1, 2 \rangle$$

$$v_2 \langle -2, -1, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = -2 - 1 + 4 = 1$$

No son perpendiculares

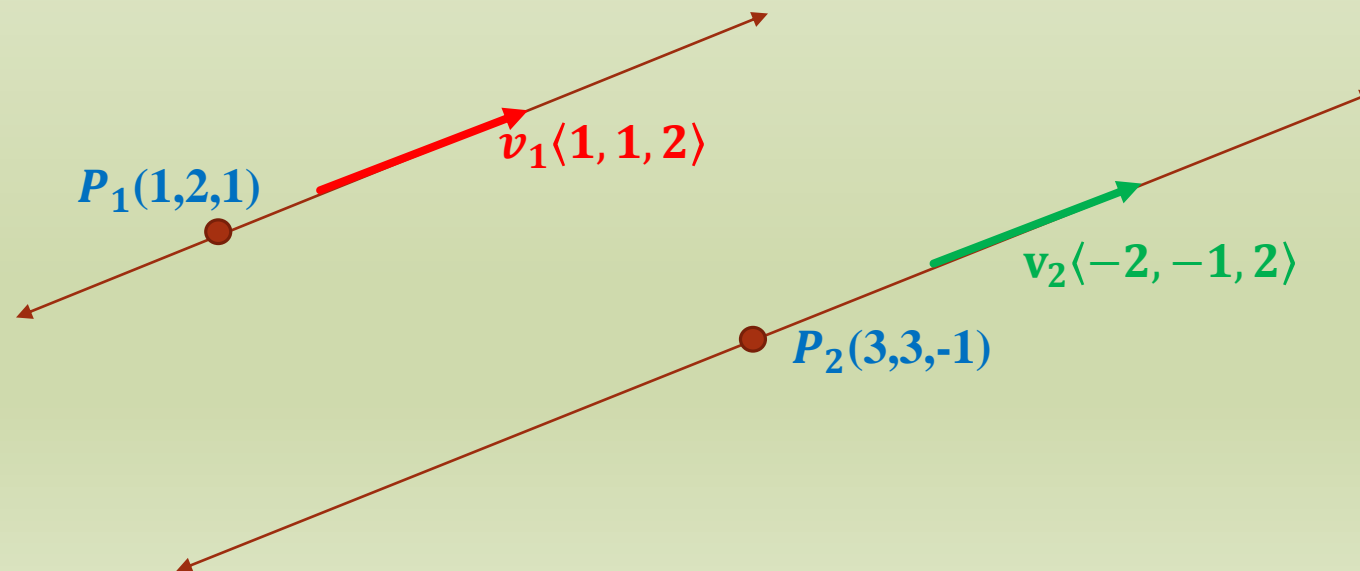
## 2. ¿Rectas paralelas?

26

$$P_1(1,2,1) \quad v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$$

$$P_2(3,3,-1) \quad v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$$

Si las rectas fueran paralelas los vectores  $v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$  y  $v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$  deben ser paralelos y sus respectivas coordenadas deben de ser proporcionales.



$$v_1 \langle 1, 1, 2 \rangle$$

$$v_2 \langle -2, -1, 2 \rangle$$

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{2}$$

Las rectas no son paralelas

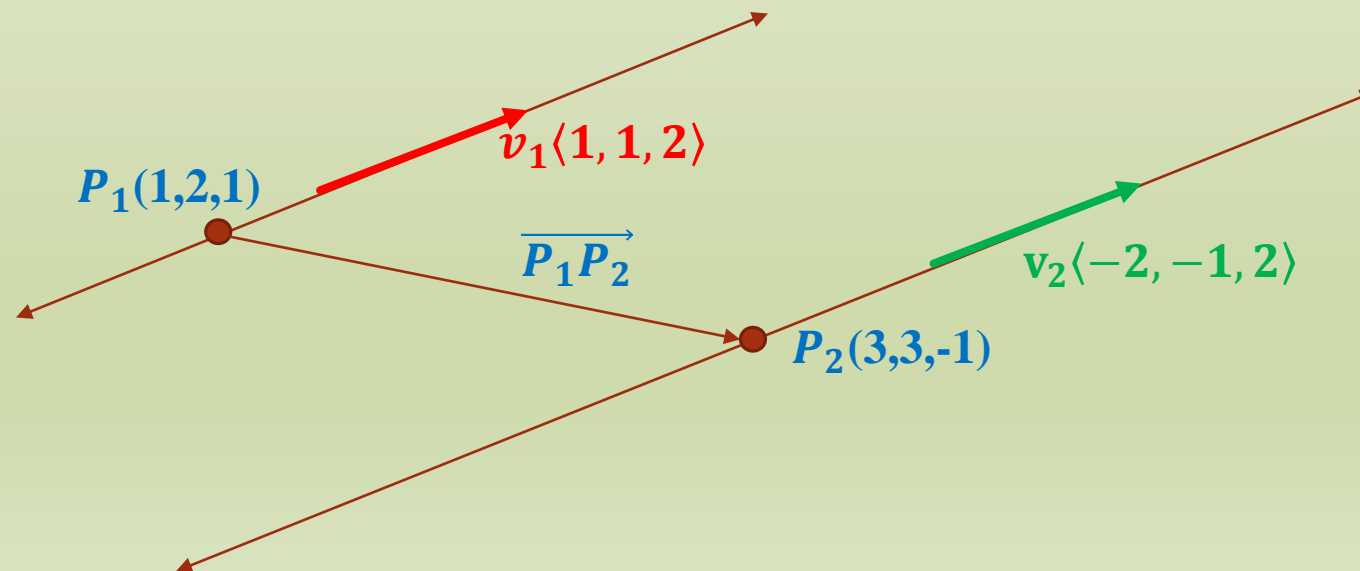
## Rectas paralelas otra manera

28

$$P_1(1,2,1) \quad v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$$

$$P_2(3,3,-1) \quad v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$$

También se puede probar por medio de el vector  $\overrightarrow{P_1P_2}$  que une las dos rectas. Este vector debe ser paralelo al vector  $v_1\langle 1, 1, 2 \rangle$  o al vector  $v_2\langle -2, -1, 2 \rangle$



### 3. ¿Rectas coincidentes?

Como las rectas no son paralelas tampoco son coincidentes.

## 4. ¿Rectas secantes u oblicuas?

Para averiguar si las rectas son secantes se hace la matriz de los tres vectores  $v_1\langle 1, 1, 2\rangle$ ,  $v_2\langle -2, -1, 2\rangle$ ,  $\overrightarrow{P_1P_2}\langle 2, 1, -2\rangle$ , si da cero (0), son secantes:

$$v_1\langle 1, 1, 2\rangle, v_2\langle -2, -1, 2\rangle, \overrightarrow{P_1P_2}\langle 2, 1, -2\rangle$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 1(2 - 2) - 1(4 - 4) + k(-2 + 2) = 0$$

Las rectas son **secantes**, se intersectan en **un punto común**

# Coordenadas del punto de intersección de las dos rectas

31

$$\begin{array}{l} x = 1 + \alpha \longleftrightarrow x = 3 - 2\beta \\ y = 2 + \alpha \longleftrightarrow y = 3 - \beta \\ z = 1 + 2\alpha \longleftrightarrow z = -1 + 2\beta \end{array}$$

1 Igualo las 2 primeras Paramétricas

$$1 + \alpha = 3 - 2\beta \quad (1)$$

$$2 + \alpha = 3 - \beta \quad (2)$$

2 ecuaciones con 2 incógnitas

2 Hallo los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$

$$1 + \alpha = 3 - 2\beta \quad (1)^* - 1$$

$$2 + \alpha = 3 - \beta \quad (2)$$

3 Método de eliminación

$$\begin{array}{r} -1 - \alpha = -3 + 2\beta \\ 2 + \alpha = 3 - \beta \end{array}$$

---

$$1 + 0 = 0 + \beta$$

$$1 = \beta \text{ en (2)}$$

$$2 + \alpha = 3 - 1$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$



$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

4

Se llevan a una cualquiera de las ecuaciones paramétricas (1) o (2) y se hallan las coordenadas  $x, y, z$  del punto de intersección de las dos rectas.

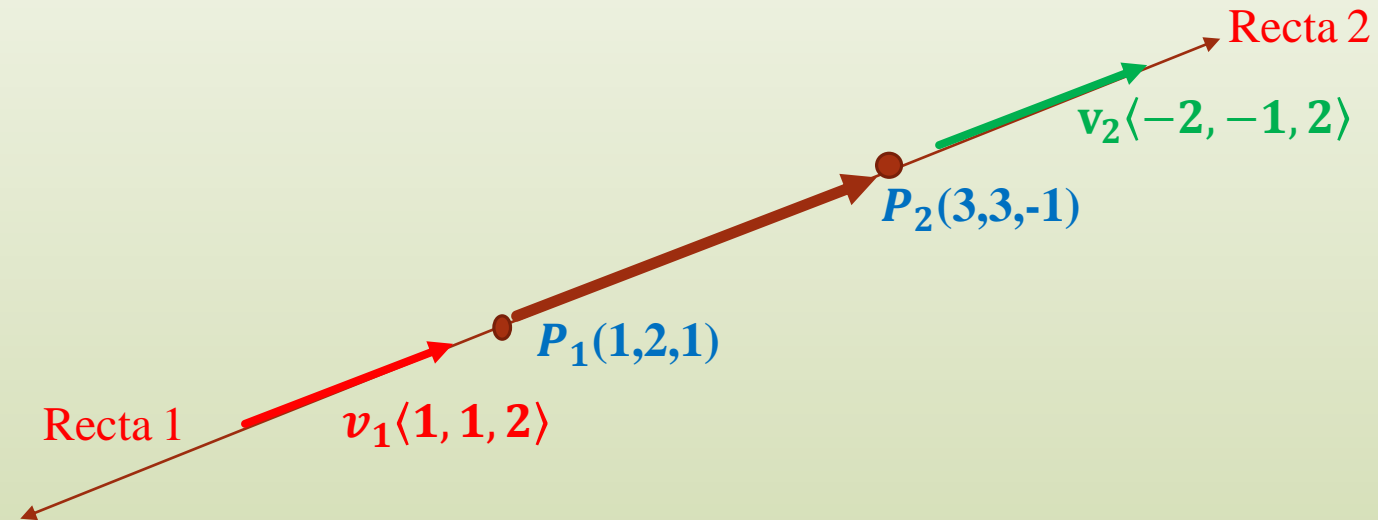
$$x = 1 + \alpha$$
$$y = 2 + \alpha$$
$$z = 1 + 2\alpha$$

$$x = 1 + 0$$
$$y = 2 + 0$$
$$z = 1 + 0$$

$$P(1,2,1)$$

Coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

## Rectas coincidentes



Si las rectas son coincidentes deben de ser:

1. Paralelas
2. El vector que une las dos rectas  $\overrightarrow{P_1P_2}$  debe ser paralelo al vector  $v_1 \langle 1, 1, 2 \rangle$  o al vector  $v_2 \langle -2, -1, 2 \rangle$

# Ejercicio #

10

Analizar si las siguientes rectas son:

Perpendiculares

Paralelas

Coincidentes

Secantes

Oblicuas

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

Lo primero es estandarizar las ecuaciones y obtener los vectores directores y el vector  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-(-5)}{4} = \frac{z-1}{3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-(-1)}{3} = \frac{z-0}{2}$$

$$P_1(4, -5, 1) \quad v\langle 2, 4, 3 \rangle$$

$$P_2(2, -1, 0) \quad v\langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$P_1(4, -5, 1)$$

$$P_2(2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \langle -2, 4, -1 \rangle$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas:

Recta 1

$$P(4,-5,1)$$

$$v\langle 2, 4, 3 \rangle$$

Recta 2

$$P(2,-1,0)$$

$$v\langle 1, 3, 2 \rangle$$

Recta 1

$$\begin{aligned}x &= 4 + 2\alpha_1 \\y &= -5 + 4\alpha_1 \\z &= 1 + 3\alpha_1\end{aligned}$$

Recta 2

$$\begin{aligned}x &= 2 + 1\alpha_2 \\y &= -1 + 3\alpha_2 \\z &= 0 + 2\alpha_2\end{aligned}$$

# 1. Analice si son Perpendiculares

$$v_1 \langle 2,4,3 \rangle \cdot v_2 \langle 1,3,2 \rangle = ?$$

$$\begin{array}{c} v_1 \langle 2,4,3 \rangle \\ | \quad | \quad | \\ + \quad + \\ v_2 \langle 1,2,3 \rangle \end{array}$$

$$v_1 \cdot v_2 = 2 + 8 + 9 = 19$$

$v_1$  y  $v_2$  no son  $\perp$

## 2. Analice si son Paralelos

$$v_1 \langle 2, 4, 3 \rangle$$

$$v_2 \langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}$$

Los vectores no son paralelos, la rectas tampoco.

$$v_1 \langle 2, 4, 3 \rangle$$

$$x = 4 + 2 \alpha_1$$

$$y = -5 + 4 \alpha_1$$

$$z = 1 + 3 \alpha_1$$

$$v_2 \langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$x = 2 + 1 \alpha_2$$

$$y = -1 + 3 \alpha_2$$

$$z = 0 + 2 \alpha_2$$

$$\begin{array}{l} v_1 \langle 2, 4, 3 \rangle \\ v_2 \langle 1, 3, 2 \rangle \end{array} \quad \frac{2}{1} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}$$

**No son paralelas**



### 3. Analice si son coincidentes

Como no son paralelas, tampoco son coincidentes

## 4. Ahora averiguaremos si las rectas son secantes

$$\begin{aligned} P_1(4, -5, 1) \\ P_2(2, -1, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_2} \langle -2, 4, -1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4(1) - 5(-2) + 1(8 - 2) = 4 + 10 + 6 = 20$$

No son secantes

Con las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

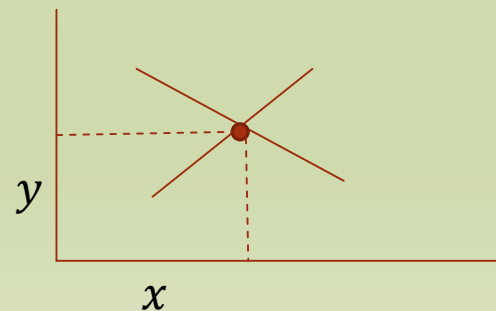
$$\begin{aligned}x &= 4 + 2\alpha_1 \\y &= -5 + 4\alpha_1 \\z &= 1 + 3\alpha_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 2 + 1\alpha_2 \\y &= -1 + 3\alpha_2 \\z &= 0 + 2\alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 4 + 2\alpha_1 \\y &= -5 + 4\alpha_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 2 + \alpha_2 \\y &= -1 + 3\alpha_2\end{aligned}$$

Si se supone que las rectas se **interceptan** (se cortan), entonces **tienen en común sus respectivas coordenadas** en el punto de intersección, por tanto, se pueden igualar las  $x$  entre sí, las  $y$  entre sí y las  $z$  entre sí.



$$\begin{aligned} x &= 4 + 2\alpha_1 \\ y &= -5 + 4\alpha_1 \\ z &= 1 + 3\alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + 1\alpha_2 \\ y &= -1 + 3\alpha_2 \\ z &= 0 + 2\alpha_2 \end{aligned}$$

$$x \longrightarrow 4 + 2\alpha_1 = 2 + 1\alpha_2 \quad (1)$$

$$y \longrightarrow -5 + 4\alpha_1 = -1 + 3\alpha_2 \quad (2)$$

$$z \longrightarrow 1 + 3\alpha_1 = 2\alpha_2 \quad (3)$$

Es un sistema de **3 ecuaciones con dos incógnitas** ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ), solo requiero dos ecuaciones, para quedar igual al número de incógnitas. La otra ecuación (3) se emplea como verificación.

Simplificando las ecuaciones (1) y (2)

$$2 \alpha_1 = -2 + \alpha_2 \quad (1)$$

$$4 \alpha_1 = 4 + 3\alpha_2 \quad (2)$$

En este sistema se trata de eliminar de una manera válida una de las incógnitas para obtener el valor de la otra.

Se observa que si multiplico la primera ecuación por  $-2$ , se puede cancelar  $\alpha_1$ .

$$-2(2 \alpha_1 = -2 + \alpha_2)$$

$$4 \alpha_1 = 4 + 3\alpha_2$$

Multiplico la primera ecuación por  $-2$ , para cancelar  $\alpha_1$ .

$$\begin{array}{r} -4\alpha_1 = 4 - 2\alpha_2 \\ 4\alpha_1 = 4 + 3\alpha_2 \\ \hline 0 = 8 + \alpha_2 \end{array}$$

$$\boxed{-8 = \alpha_2}$$

Este valor se reemplaza en ecuación (1) o en la (2)

$$2\alpha_1 = -2 + \alpha_2 \quad (1)$$

$$2\alpha_1 = -2 + (-8)$$

$$2\alpha_1 = -10$$

$$\alpha_1 = \frac{-10}{2}$$

$$\boxed{\alpha_1 = -5}$$



$$\alpha_1 = -5$$

$$\alpha_2 = -8$$

Hallados dos valores de los parámetros de ambas rectas, solo queda reemplazar en la ecuación de la z que no se ha usado (3) para verificar que las rectas se cortan o no: si la igualdad se cumple se interceptan, si no, no se interceptan.

$$1 + 3\alpha_1 = 2\alpha_2 \quad (3)$$

$$1 + 3(-5) \stackrel{?}{=} 2(-8)$$

$$\alpha_1 = -5$$

$$\alpha_2 = -8$$

$$1 + 3(-5) \stackrel{?}{=} 2(-8)$$

$$-14 \neq -16$$

Las rectas no se interceptan. Son oblicuas.

## Ejercicio # 5

Para las siguientes dos rectas determine si son perpendiculares, paralelas, coincidentes, secantes u oblicuas.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1.5} = \frac{z-3}{12}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0.5} = \frac{z-3}{4}$$

## Ejercicio # 6

Determinar si las dos rectas siguientes son perpendiculares, paralelas, coincidentes, secantes u oblicuas. Si son secantes hallar el ángulo entre ellas.

Recta 1

$$\frac{9x-27}{18} = \frac{12-3y}{15} = \frac{12-3z}{-3}$$

Recta 2

$$\begin{cases} x = 10 - 2\alpha \\ y = 6 + 4\alpha \\ z = 2 - 6\alpha \end{cases}$$

Método para demostrar que 3 vectores están en un mismo plano (coplanares)

$$A \langle a_x, a_y, a_z \rangle$$

$$B \langle b_x, b_y, b_z \rangle$$

$$C \langle c_x, c_y, c_z \rangle$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

54

Verificar si son coplanares los tres vectores siguientes:

$$A\langle 1,1,1\rangle$$

$$B\langle 1,3,1\rangle$$

$$C\langle 2,2,2\rangle$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ??????}$$

# Bibliografía

- Perez, J. A. y Paniagua j. G. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Instituto Tecnológico Metropolitano -ITM-Medellín.
- Posicion relativa de rectas en el espacio
- <http://www.vadenumeros.es/segundo/posiciones-rectas-espacio.htm>
- [http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias\\_2/rectas02.pdf](http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectas02.pdf)
- <http://www.acienciasgalilei.com/public/foro66/vicwtopic.php?t=3639>
- <https://prezi.com/efyjk1f0wsg/paralelismo-de-recta-y-plano/>

- ▶ <https://journals.plos.org/plosone/article/file?id=10.1371/journal.pone.0177127&type=printable>
- ▶ <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047248411002144>
- ▶ <http://www.portalciencia.net/antroevo10um.html>
- ▶ <https://news.nationalgeographic.com/news/2015/03/150304-homo-habilis-evolution-fossil-jaw-ethiopia-olduvai-gorge/>
- ▶ [https://www.nationalgeographic.com.es/historia/actualidad/primer-dibujo-humanidad-tiene-73000-anos-antiguedad\\_13159/1](https://www.nationalgeographic.com.es/historia/actualidad/primer-dibujo-humanidad-tiene-73000-anos-antiguedad_13159/1)



- ▶ Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura  
<http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf>
- ▶ Vectores interactivos en el espacio  
<https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php>
- ▶ <http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf>
- ▶ VIDEOS
- ▶ [http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/6906/mod\\_resource/content/2/Rectas%20alabeadas%20animaci%C3%B3n.mp4](http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/6906/mod_resource/content/2/Rectas%20alabeadas%20animaci%C3%B3n.mp4)