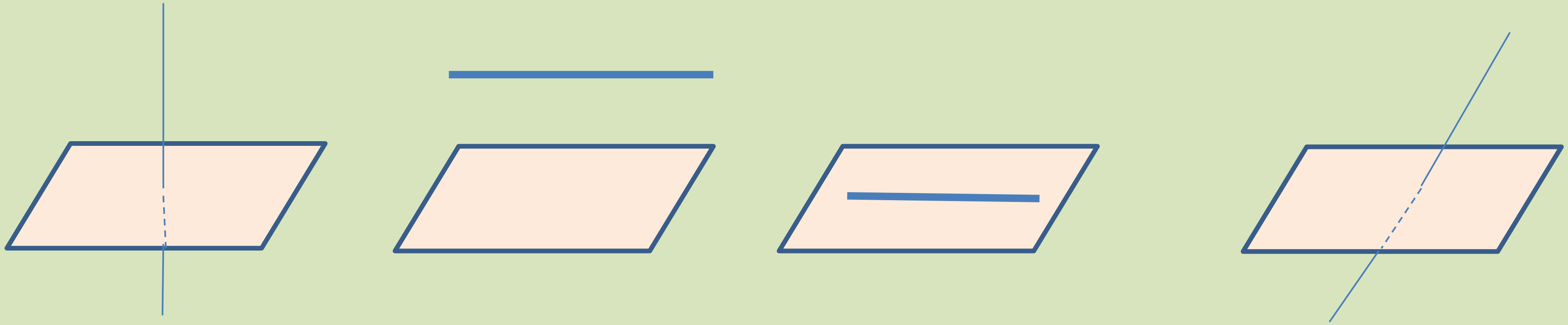


https://efrenmatematica.jimdo.com/posici%C3%B3n-entre-rectas-y-planos/

Posición relativa entre Rectas y Planos

Diapositivas realizadas por
Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

Email: hegiraldo2@Gmail.com

❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

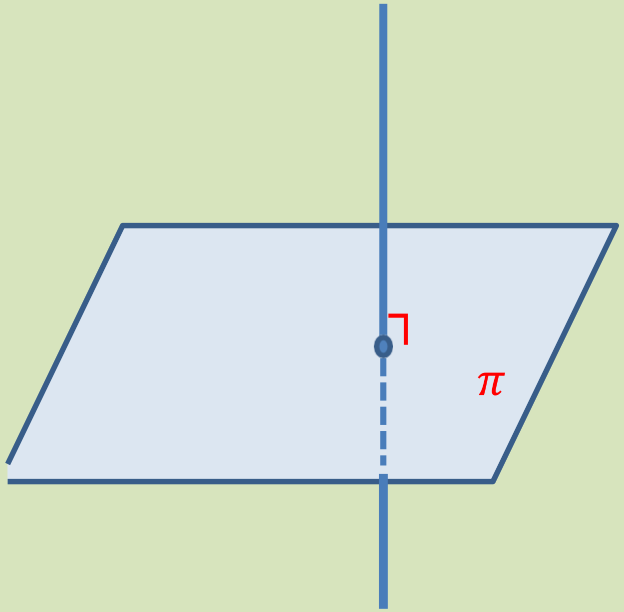
Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Tabla de Contenido

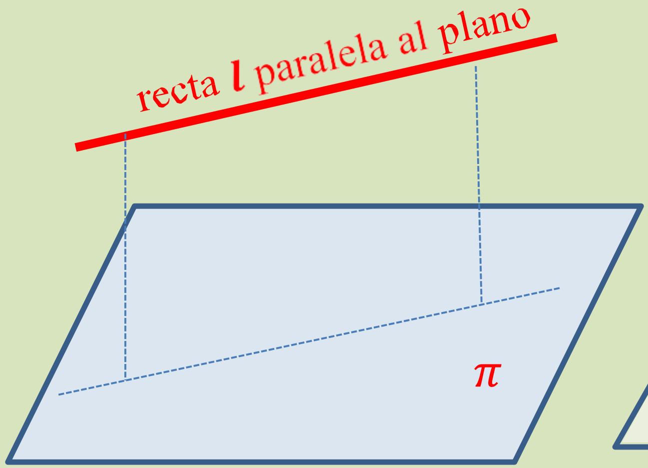
diapositiva

Posiciones relativas entre rectas y planos

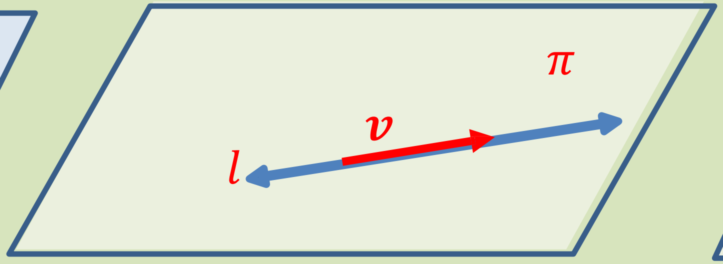
Recta y plano perpendiculares:
Un punto en común



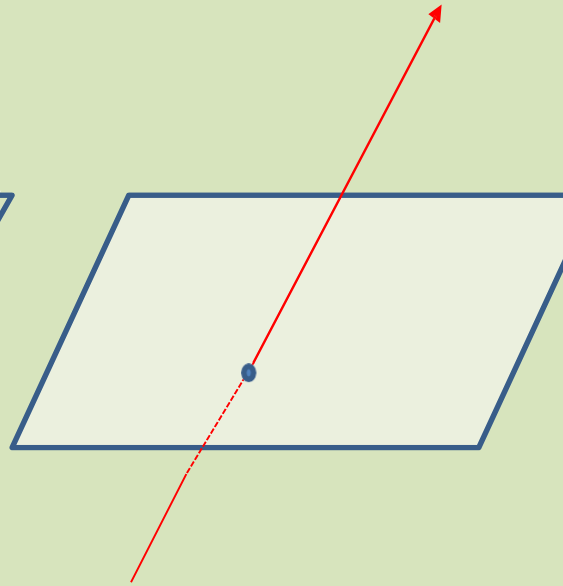
Recta y plano son paralelos. Ningún punto común



Recta contenida en el plano. Todos los puntos de la recta son comunes al plano



La recta intercepta al plano cuando no es paralela: tienen un punto común.



1. Conceptos básicos

Para estudiar la posición relativa entre una recta y un plano, se compara el **vector director** de la recta con el **vector normal del plano**.

En este caso, es al **contrario de como se vio entre rectas y como es entre planos**:

Si los respectivos vectores son paralelos, **la recta y el plano son perpendiculares.**

Si los vectores son perpendiculares, la ***recta y el plano son paralelos.***

Norma importante

Se debe distinguir muy bien la posición de los vectores entre si de la posición entre "la recta y el plano".

Se comparan vectores entre si y luego se toma la decisión para la poción entre la recta y el plano.

Si no tiene clara esta diferencia, se termina en una gran confusión.
Es indispensable ayudarse con los dibujos respectivos.

Se comienza analizando la posición entre los vectores, y se termina con la posición entre la recta y el plano (contrarios).

Posición entre los vectores

⇩

Posición entre la recta y el plano (Contrarios)

Las preguntas para identificar la posición entre una recta y un plano. Vamos hacer un análisis de un ejercicio

Ejercicio 1

Dados el plano π: $-x + 2y - 4z = 2$

Y la recta l: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$

Determinar la posición entre la recta y el plano

9

π: $-x + 2y - 4z = 2$ $\longrightarrow$ $N\langle -1, 2, -4 \rangle$

En la ecuación de la recta se estandariza el término en y mulitiplacando por $-$ el numerador y denominador:

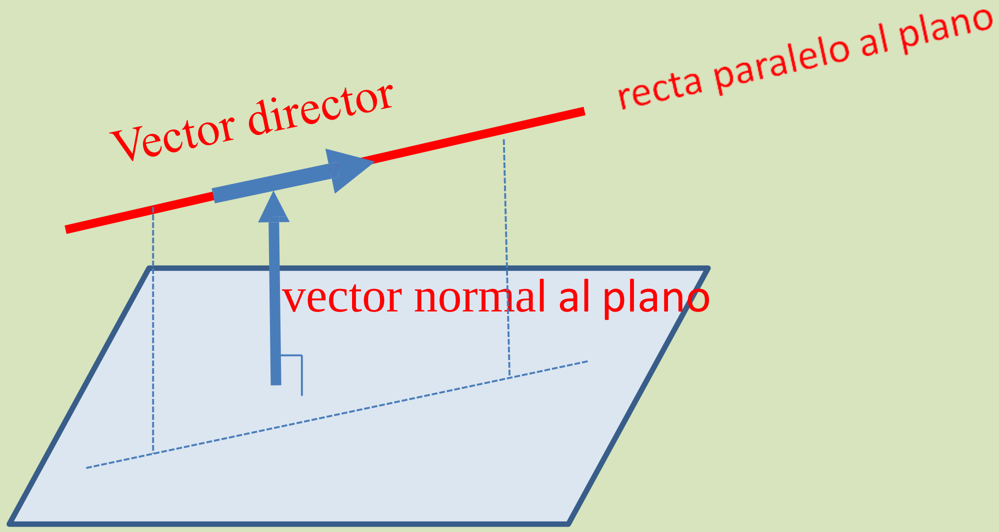
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1}$$

Vetor director de la recta l $v\langle 2, -3, -1 \rangle$

$$N\langle -1,2 \;\; , -4 \rangle$$

1. ¿Serán perpendiculares los vectores

$v\langle\ 2, -3, -1\ \rangle$
$N\langle -1,\ 2,\ -4\ \rangle$



Dibujo

¿Serán perpendiculares los vectores? **¿Cuál es la condición?** **¿Se cumple?** **No se cumple** **¿Qué implica entre la recta y el plano?**

$v_1 . N_1 = -2 - 6 + 4 = -4 \neq 0$

(contrarios)

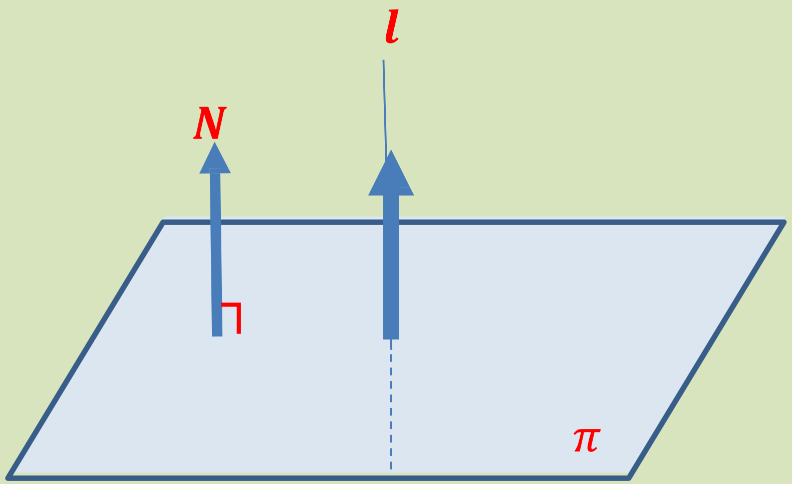
$v_1 \perp N_1$?

$v_1 . N_1 = 0$

$v_1 \not\perp N_1 \longrightarrow l \not\parallel$ a π.

2. ¿Serán paralelos los vectores?

$v \langle 2, -3, -1 \rangle$
$N \langle -1, 2, -4 \rangle$



¿Serán paralelos los vectores?

$$v_1 \parallel N_1 ?$$

¿Cuál es la condición?

$$v_1 \times N_1 = 0$$

$$\frac{2}{-1} \stackrel{?}{=} \frac{-3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{-1}{-4}$$

¿Se cumple?
No se cumple

$$v_1 \times N_1 \# 0$$

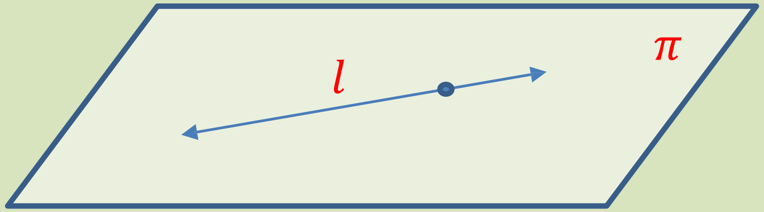
$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{-1}{-4}$$

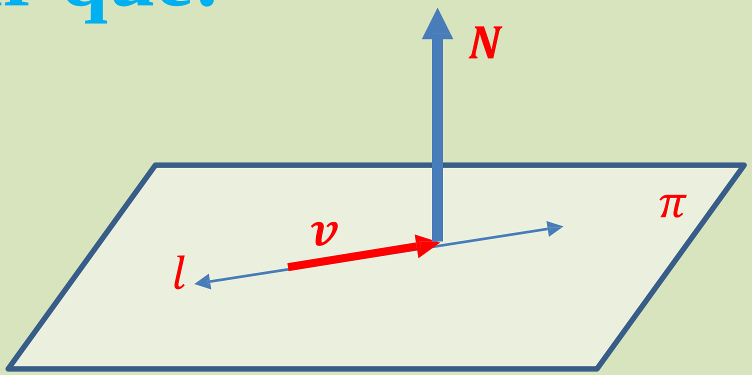
¿Qué implica entre la recta y el plano?
Contrarios

$$l \not\perp a\, \pi$$

$$v_1 \not\parallel N_1$$

3. Recta coincidente o que pertenece a un plano, debe cumplir que:





1. La recta es paralela al plano: $\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$

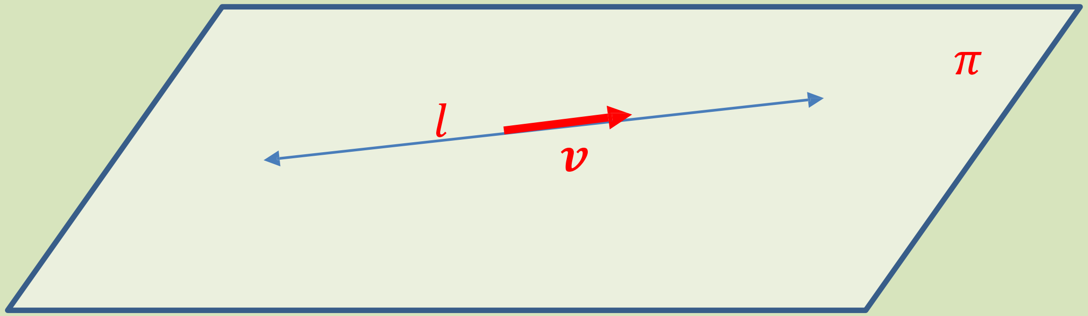
2. Las coordenadas de un punto de la recta se llevan a la ecuación del plano, si da una igualdad, el punto pertenece al plano y a la recta, y por tanto la recta y el plano son coincidentes.

Ejercicio 2

Probar que el plano y la recta son paralelos y también coincidentes.

Dado el plano $\pi: \ 2x - y - 2z = 0$

Y la recta l : $\begin{aligned} x &= 1 + 4\propto \\ y &= 0 + 4\propto \\ x &= 1 + 2\propto \end{aligned}$



Probar que la recta es coincidente o que pertenece al plano

Primero: debe ser paralela.

Segundo: cualquier punto de la recta debe satisfacer la ecuación del plano

Obtenemos los respectivos vectores:

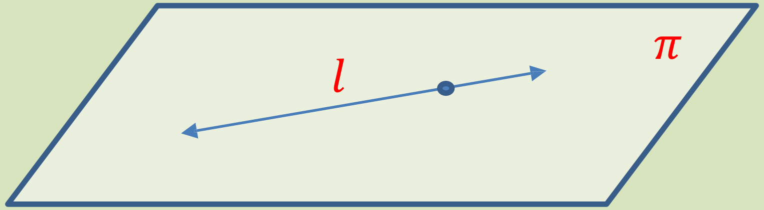
Vector normal al plano

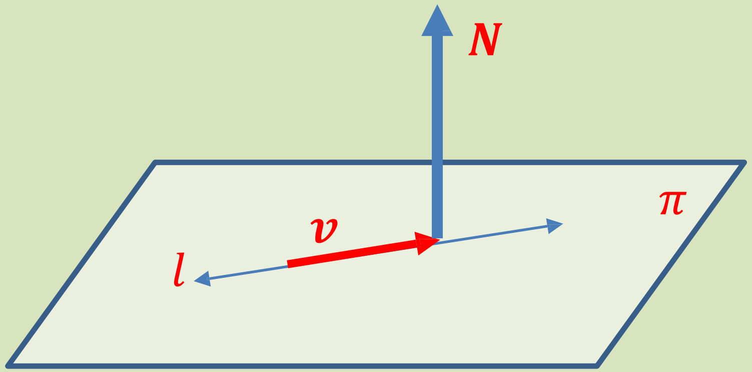
$$2x - y - 2z = 0 \longrightarrow N \langle 2, -1, -2 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 4 \propto \\ y = 0 + 4 \propto \\ x = 1 + 2 \propto \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Punto de la recta} \\ P_0(1,0,1) \\ v\langle 4, 4,2\rangle \\ \text{Vector director de la recta} \end{array}\right.$$

15

$\mathbf{N}\langle 2, -1, -2\rangle$
$v\,\langle 4,\ \ 4,\ \ 2\rangle$





$\mathbf{N}\langle 2, -1, -2\rangle$
$v\,\langle 4,\ \ 4,\ \ 2\rangle$

¿Serán perpendiculares los vectores?

$$v_1 \perp N_1 \ \ ?$$

¿Cuál es la condición?

$$v_1 \,.\, N_1 = 0$$

Se cumple?

Se cumple

¿Qué implica entre la recta y el plano?

La recta es paralela al plano

$$v_1 \,.\, N_1 = 0 = 8 - 4 - 4 = 0$$

Segundo, cualquier punto de la recta debe satisfacer la ecuación del plano: si da una igualdad al reemplazar las coordenadas del punto en la ecuación del plano.

En la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 4\propto \\ y = 0 + 4\propto \\ x = 1 + 2\propto \end{cases}$$

Un punto de la recta es

$$P_0\,(1,0,1)$$

Y se reemplaza en la ecuación del plano:

$$2x - y - 2z = 0$$

Debe dar una igualdad

$$2(1) - 0 - 2(1) = 2 - 2 = 0$$

0=0

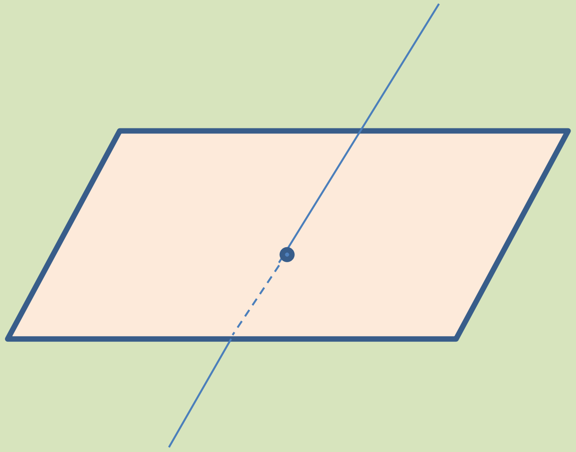
Como dio una igualdad, el punto de la recta pertenece también al plano; la recta es **coincidente o pertenece al plano**

Recta secante o que intercepta a un Plano:

La recta no es paralela al plano:

por tanto debe cumplir que los vectores no sean perpendiculares:

$$v_1 . N_1 . \neq 0$$



Deben tener un punto en común.

Ejercicio 3

¿Es la recta secante al plano ? $\longrightarrow$ $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{N}\ \#\ \mathbf{0}$

π: $-x + 2y - 4z = 2$ $\longrightarrow$ vector normal: $N\langle -1,\ 2,\ -4\ \rangle$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1} \longrightarrow v\ \langle 2, -3, -1\ \rangle$$

Llevo la ecuación simétrica a paramétrica

$$x = 3 + 2\propto$$
$$y = 2 - 3\propto$$
$$z = 4 - \propto$$

$N\langle -1,\ \ 2, -4\ \rangle$
$v\langle\ 2,\ -3, -1\ \rangle$

¿ Serán perpendiculares los vectores?

$N\langle -1,\ 2, -4 \rangle$

$v\langle\ 2,\ -3, -1 \rangle$

¿Cuál es la condición?

$$v_1 . N_1 = 0$$

$$N . v = -2 - 6 + 4 = -4 \ \# \ 0$$

Se cumple?

No se cumple

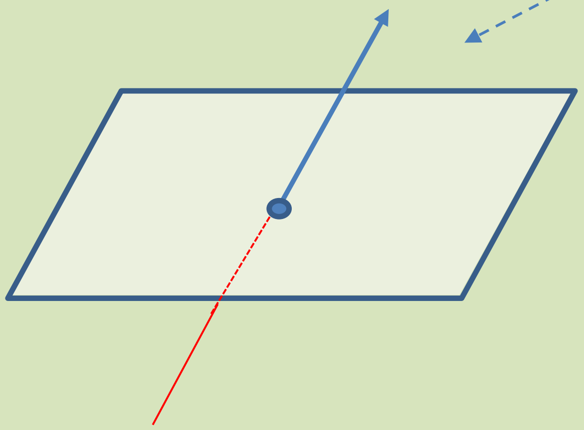
$N \not\perp v$

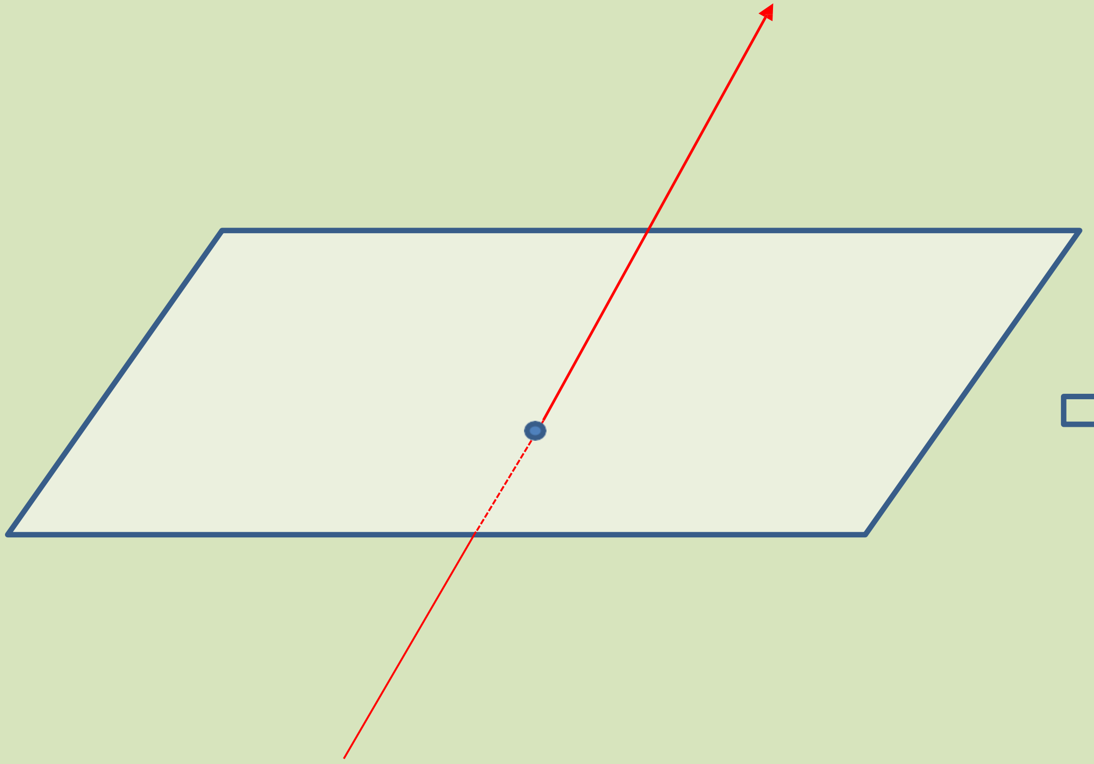
$N . v \ \# \ 0$

¿Qué implica entre la recta y el plano?

la recta l $\not\parallel$ π.

la recta l intercepta al plano π.





$$N_1 . v_1 \neq o$$

Si la recta intercepta el plano tienen un punto en común.

Ejercicio 4

Hallar el Punto de intersección entre la recta y el plano

$$\pi: \quad -x + 2y - 4z = 2$$

Paramétricas de la recta

$$x = 3 + 2\alpha$$
$$y = 2 - 3\alpha$$
$$z = 4 - \alpha$$

Implícita del plano

$$\pi: -x + 2y - 4z = 2$$

$$\pi: \quad -x + 2y - 4z = 2$$

$$-\underbrace{(3 + 2\alpha)}_{x} + 2\underbrace{(2 - 3\alpha)}_{y} - 4\underbrace{(4 - \alpha)}_{z} = 2$$

$$-3 - 2\alpha + 4 - 6\alpha - 16 + 4\alpha = 2$$

$$-4\alpha - 15 = 2$$

$$-4\alpha = 17$$

$$\alpha = -4.25$$

Se reemplaza α en la paramétrica

$$P_0(-5.5,\ 14.75,\ 8.25)$$

Elaboró MSc. Efrén Giraldo T

Más explicado

Se reemplaza $\propto = -4.25$
en las paramétricas

$$x = 3 + 2(-4.25) = 3 - 8.5 = \longrightarrow -5.5$$
$$y = 2 - 3(-4.25) = 2 + 12.75 = \longrightarrow 14.75$$
$$z = 4 - (-4.25) = 4 + 4.25) = \longrightarrow 8.25$$

P_0(-5.5, 14.75, 8.25)

P_0(-5.5, 14.75, 8.25) es el punto de intersección de la recta y el plano

5. Hallar las coordenadas del punto de intersección $P_0(x_0, y_0, y_0)$ de la recta con un plano.

1. ***La recta debe estar en forma paramétrica*** **y el plano en forma implícita:** $ax + by + cz = d$

2. **Se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación implícita del plano. Resultan una ecuación** solo con el parámetro α.

3. **Despejar el valor del parámetro α. Reemplazo el valor de α, en las ecuaciones paramétricas originales de la recta y hallo** (x_0, y_0, y_0) **las coordenadas del punto**.

Ejercicio 5

6. A partir de la ecuación implícita del plano hallar la ecuación paramétrica.

$$\pi: \qquad x - 2y + 3z - 2 = 0$$

$$\pi: \ x - 2y + 3z - 2 = 0$$

Se despeja la x $\qquad x = 2y - 3z + 2 \qquad (1)$

Se hace la y igual a α $\qquad y = \alpha \qquad (2)$

Se hace la z igual a β $\qquad z = \beta \qquad (3)$

Se reemplazan los valores de y, y de x en (1)

$$x = 2\alpha - \beta + 2$$

.

Estandarizo

$$x = 2 + 2\alpha - \beta \qquad (4)$$

Entonces se tienen las ecuaciones (4), (2), (3) como ecuaciones paramétricas del plano:
:

$$\begin{cases} (4) \quad x = 2 + 2\alpha - \beta \\ (2) \quad y = \alpha \\ (3) \quad z = \beta \end{cases}$$

Estandarizo

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2\,\alpha - \beta \\ y &= 0 + \alpha + 0\,\beta \\ z &= 0 + 0\,\alpha + \beta \end{aligned}$$

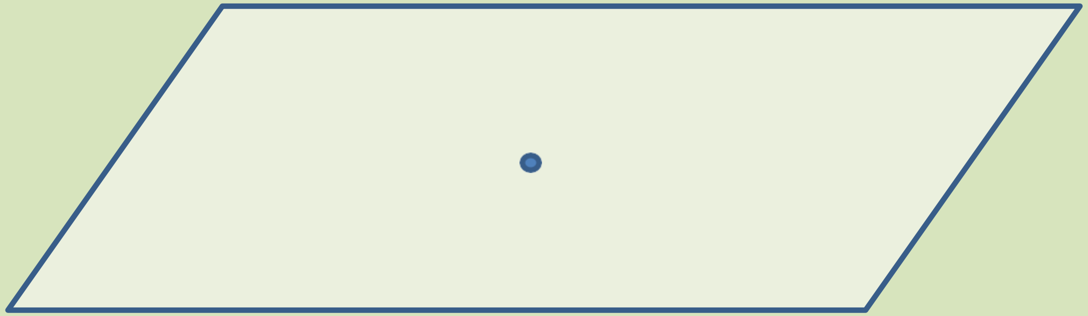
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= \boxed{2} + \boxed{2}\,\alpha - \boxed{1}\,\beta \\ y &= \boxed{0} + \boxed{1}\,\alpha + \boxed{0}\,\beta \\ z &= \boxed{0} + \boxed{0}\,\alpha + \boxed{1}\,\beta \end{aligned}$$

De donde:

$P_0(2,0,0)$
$v_1\langle 2,1,0 \rangle$
$v_2\langle -1,0,1 \rangle$

7. Comprobar que un Punto pertenece o no a un plano



Un punto pertenece a un plano cuando cumple su ecuación: **las coordenadas del punto se remplazan en la ecuación del plano.**

Si da una **igualdad** el punto pertenece al plano.

Si da una **desigualdad**, el punto no pertenece al plano.

Ejercicio # 6

$$\pi \qquad 3x + 5y - 3z - 5 = 0$$

¿El punto (1,1,1) pertenecerá al plano?

$$3(1) + 5(1) - 3(1) - 5$$

$3 + 5 - 3 - 5 = 0$

$$0 = 0$$

El punto (1,1,1) pertenecerá al plano π

Ejercicio # 7

$$\pi \qquad 3x - 4y - 3z - 5 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

¿El punto $(1,2,3)$ pertenecerá al plano?

$$3(1) - 4(2) - 3(3) - 5 = 0$$

$3 - 8 - 9 - 5 = -19$

$$-19 \# 0$$

El punto $(1,2,3)$ no pertenece al plano

8. Hallar un punto de un plano a partir de la ecuación implícita

Ejercicio # 8

$$3x - 4y - 3z - 5 = 0$$

Hay tres incógnitas: (x, y, z), se requiere **suponer dos y despejar la incógnita restante**

Se dan valores arbitrarios a x e y $\longrightarrow$ $x = 1 \quad y = 2$

$$3(1) - 4(2) - 3z - 5 = 0$$

$$3 - 8 - 5 - 3z = 0$$

$$-10 - 3z = 0$$

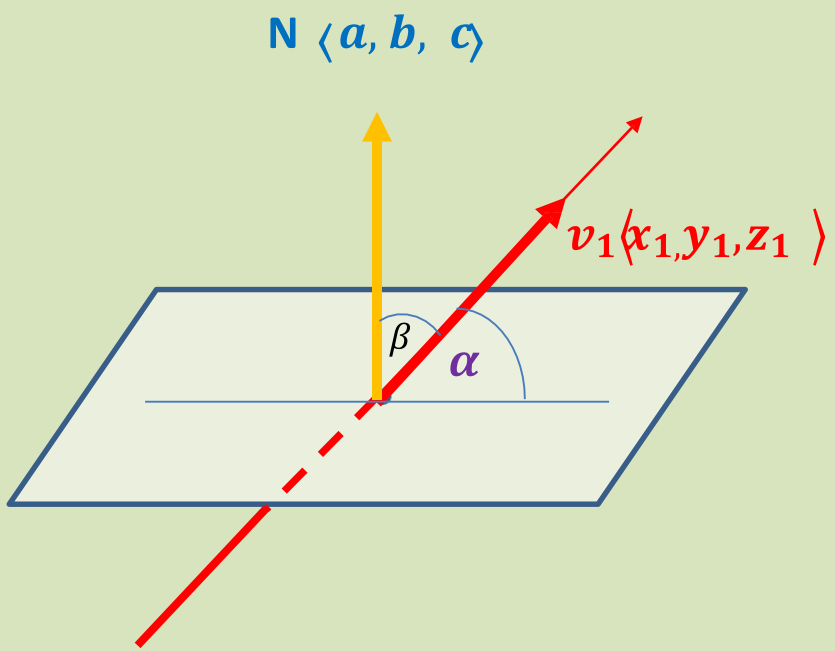
$$-10 = 3z$$

$$-\frac{10}{3} = z = -3.3$$

P(1, 2,-3.3)

9. Ángulo entre recta y plano

El ángulo entre una recta y un plano es el ángulo complementario menor (lo que le falta para llegar a 90°) que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.



$$\alpha = sen^{-1}\frac{|v_1.N|}{|v_1||N|}$$

Ejercicio 9: punto y plano

El punto Q(1, 4, –2) no pertenece a ese plano plano π $\boldsymbol{x+4y+2z=7}$, ya que

$$1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)$$

$$13 \neq 7$$

Ejercicio 10: punto y plano

Si se tiene el escalar d general (sin un valor concreto) en la ecuación del plano π :

$$\pi \qquad x - y + 2z + d = 0$$

Para que el punto P(–1, 3, 4) pertenezca al plano π $\quad x - y + 2z + d = 0$ es necesario que se cumpla:

$$-1 - 3 + 2 \cdot 4 + d = 0$$

$$-4 + 8 + d = 0$$

$$d = -4.$$

Ejercicio 11. Ejercicio completo

Dados el plano π: $-x + 2y - 4z = 2$ $N\langle -1,2,-4 \rangle$

Y la recta l: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ $\boldsymbol{v\langle 2,-3,-1\rangle}$

Determinar si:

1. *La recta es perpendicular al plano*
2. *La recta es paralela al plano*
3. *La recta es coincidente (está contenida en el plano).*
4. *La recta intercepta al plano.*
5. *Si lo intercepta, hallar el punto de intersección.*

$\pi: \quad -x + 2y - 4z = 2 \quad \longrightarrow$ vector normal: $\mathrm{N}\langle -1, 2, -4 \rangle$

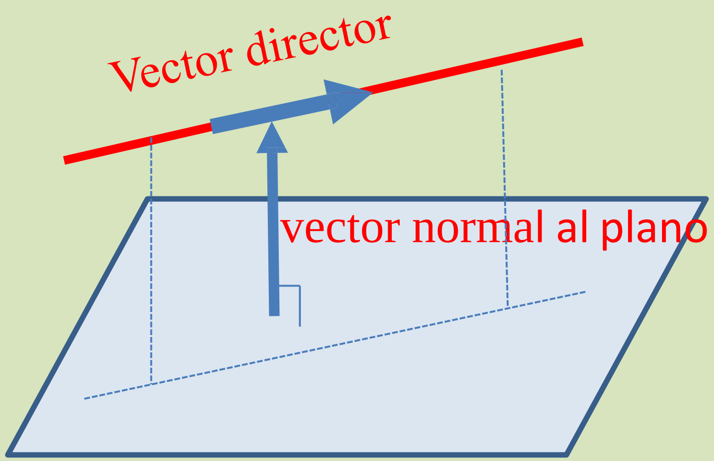
En la ecuación de la recta se estandariza el término en y mulitiplacando por − el numerador y denominador:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1}$$

Vetor director de la recta l

$$v\langle 2, -3, -1 \rangle$$
$$\mathrm{N}\langle -1,2, -4 \rangle$$

1. ¿Serán perpendiculares los vectores? $v\ \langle 2, -3, -1\rangle$ $N\ \langle -1, 2, -4\rangle$



Dibujo

¿Serán perpendiculares los vectores?

$v_1 \perp N_1$?

¿Cuál es la condición?

$N_1 \cdot v_1 = 0$

¿Se cumple?

No se cumple

$N_1 \cdot v_1 \neq 0$

$N_1 \cdot v_1 = -2 - 6 + 4 = -4 \neq 0$

¿Qué implica entre la recta y el plano? (contrarios)

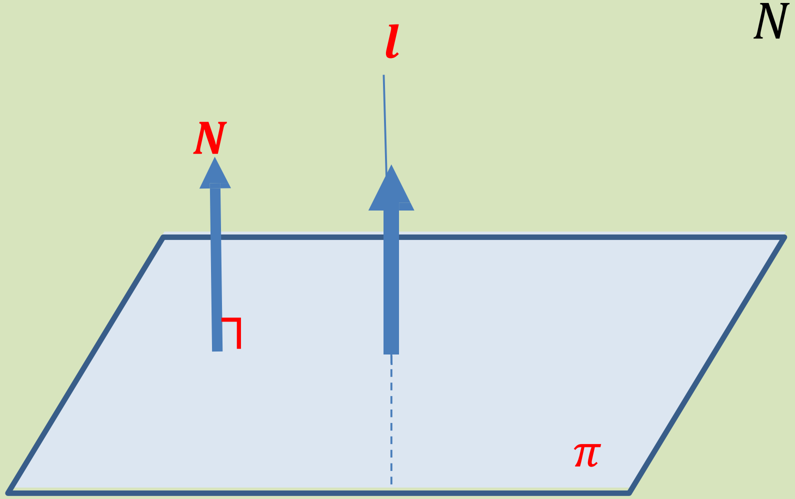
La recta $\boldsymbol{l}$ no es $\parallel$ a π.

lo intersecta en un punto

2. ¿Serán paralelos los vectores?

$v\,\langle 2, -3, -1\,\rangle$

$N\,\langle -1,\ 2,\ \ -4\,\rangle$



¿Serán paralelos los vectores?

$$v_1 \parallel N_1\ ?$$

¿Cuál es la condición?

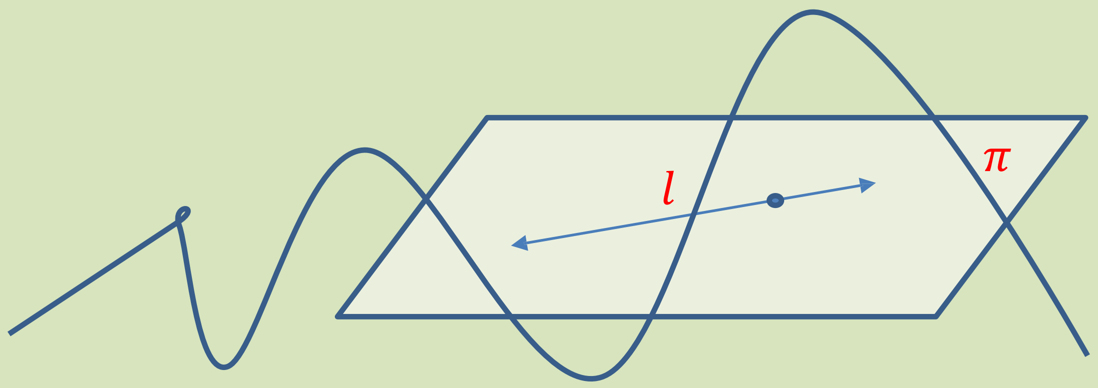
$$\frac{2}{-1} \stackrel{?}{=} \frac{-3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{-1}{-4}$$

¿Se cumple?
No se cumple

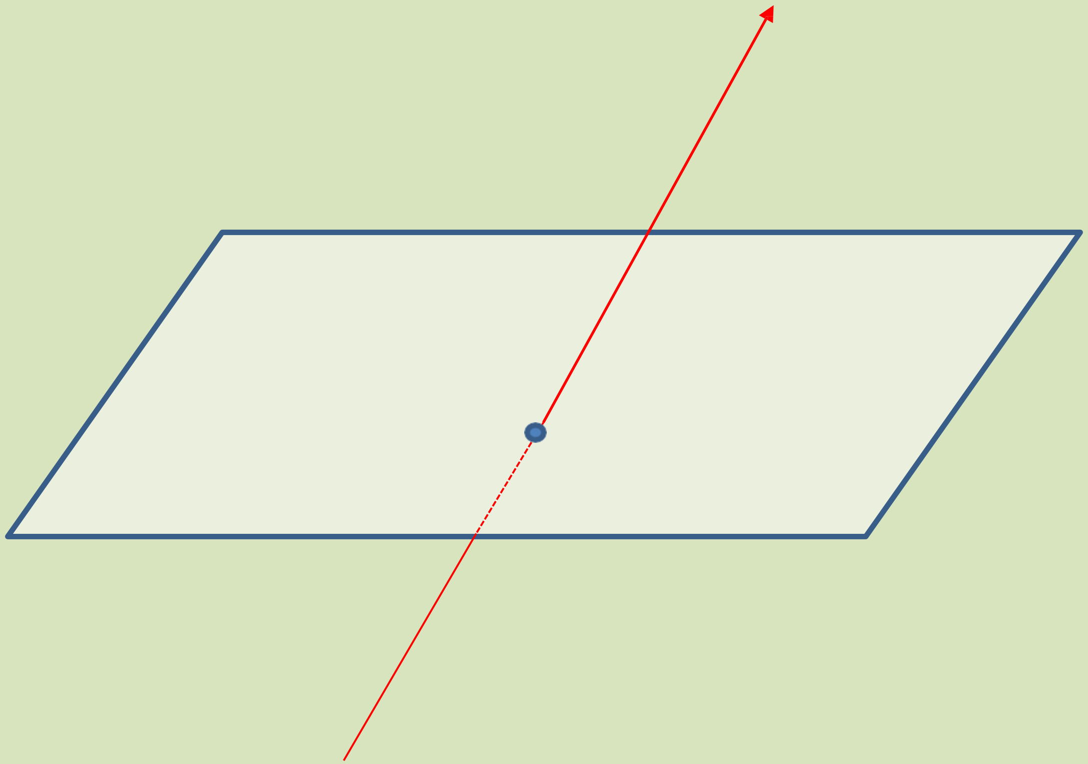
¿Qué implica entre la recta y el plano?
Contrarios

l no es perpendicular a π

3. Como la recta no es paralela al plano, tampoco es coincidente



4. ¿La recta intercepta el plano?



Como la recta no es paralela al plano, entonces, **lo intersecta en un punto.**
Para hallar el punto donde la recta corta el plano necesitamos pasar de ecuación simétrica a paramétrica, esto es:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-1}$$

Ecuación paramétrica recta

Ecuación implícita del plano

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \propto \\ y &= y_0 + y_1 \propto \\ z &= z_0 + z_1 \propto \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 3 + 2 \propto \\ y &= 2 - 3 \propto \\ z &= 4 - \propto \end{aligned}$$

$$\pi: -x + 2y - 4z = 2$$

Se reemplaza la *x* de las paramétricas en la *x* de la ecuación del plano, lo mismo con la y, y con la z:

$$-\overbrace{(3+2\propto)}^{x} + 2\overbrace{(2\text{-}3\propto)}^{y} - 4\overbrace{(4-\propto)}^{z} = 2$$

$$-3-2\propto+4-6\propto-16+4\propto=2$$

$$-3+4-16-2\propto-6\propto+4\propto=2$$

$$-15-4\propto=2$$

$$-4\propto\ =17$$

$$\propto=-\frac{17}{4}=-4.25$$

Al reemplazar el valor de α *en las ecuaciones paramétricas, se obtienen las coordenadas del punto de intersección.*

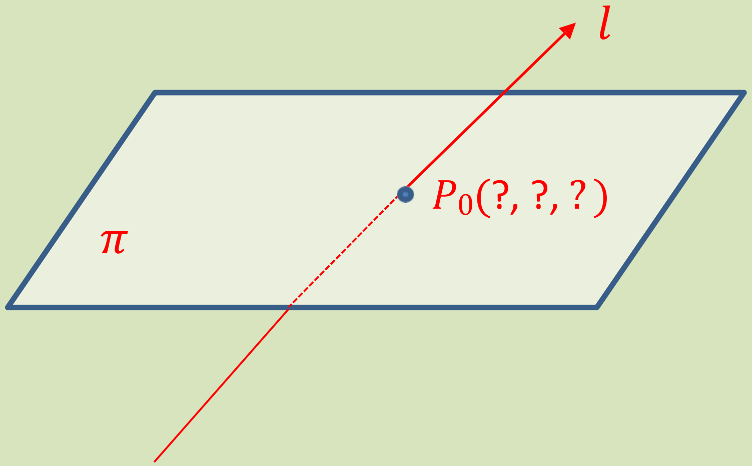
$$x = 3 + 2\propto$$
$$y = 2 - 3\propto$$
$$z = 4 - \propto$$

$$x = 3 + 2(-4.25) = 3 - 8.5 = \rightarrow -5.5$$
$$y = 2 - 3(-4.25) = 2 + 12.75 = \rightarrow 14.75$$
$$z = 4 - (-4.25) = 4 + 4.25) = \rightarrow 8.25$$

$$P_0(x_0, y_0, y_0) = P_0(-5.5, 14.75, 8.25)$$

P_0 es el punto de intersección de la recta y el plano

Ejercicio 12



Dados el plano

$$\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

y la ecuación de la recta l en la forma:

$$l \quad (x, y, z) = (0,1,3) + \alpha(1,0,1)$$

Hallar el punto de intersección conociendo que la recta y el plano no son paralelos (demuestre inicialmente esto).

$$l:\ (x, y, z) = \underbrace{(0,1,3)}_{P_0(x_0,\, y_0,\, z_0)} + \alpha \underbrace{(1,0,1)}_{\alpha(x_1,\, y_1,\, z_1)}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \ + \ \alpha(x_1, y_1, z_1)$

(0,1,3) son las coordenadas de un punto de la recta.

$\langle 1,0,1 \rangle$ son las coordenadas del vector director de la recta.

Por tanto, podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la recta

Paramétrica recta

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \propto \\ y &= y_0 + y_1 \propto \\ z &= z_0 + z_1 \propto \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 0 + 1 \propto \\ y &= 1 + 0 \propto \\ z &= 3 + 1 \propto \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= \propto \\ y &= 1 \\ z &= 3 + \propto \end{aligned}$$

:

Se reemplazan las ecuaciones paramétricas

$$x = \propto$$
$$y = 1$$
$$z = 3 + \propto$$

en la ecuación del plano

$$\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0$$

$$2\propto - 3(1) + (3 + \propto) + 1 = 0$$

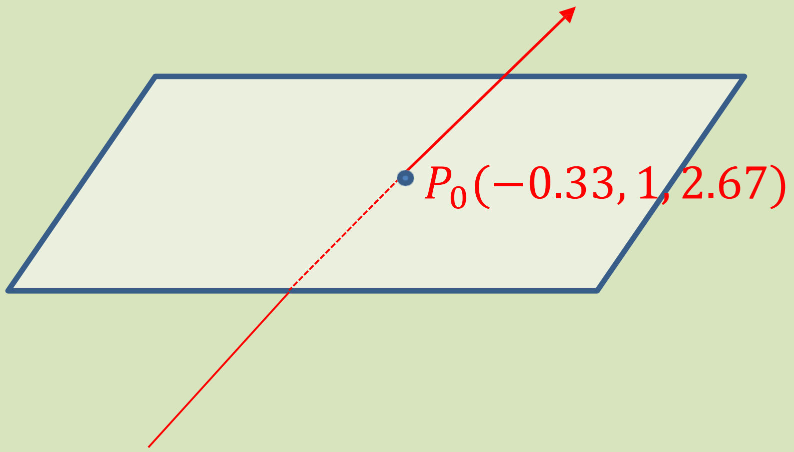
$$2\propto - 3 + 3 + \propto + 1 = 0$$

$$3\propto + 1 = 0$$

$$\propto = -\frac{1}{3} = -0.33$$

.

El valor de $\propto = -0.33$ se reemplaza en las ecuaciones paramétricas:



$$x = \propto$$
$$y = 1$$
$$z = 3 + \propto$$

$$x = -0.33$$
$$y = 1$$
$$z = 3 + 1(-0.33)$$
$$z = 3 - 0.33$$
$$z = 2.67$$

$P_0(-0.33, 1, 2.67)$

Que son las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano.

.

Ejercicio 13

Dados el plano $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$

y la recta $l: (x, y, z) = (1,2,-1) + \alpha(3,2,1)$

$P_0(x_0, y_0, z_{0)} + v_1(x_1, y_1, z_{1)}$

Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano

$$\mathrm{N}\langle 2, \quad -3, \quad 1\rangle$$

$$\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

$$l: (x, y, z) = (0,1,\text{-}1) + \alpha(3,2,1)$$

$$P_0(x_0, y_0, z_{0)} \qquad \alpha v_1(3,2,0)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \propto \\ y &= y_0 + y_1 \propto \\ z &= z_0 + z_1 \propto \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 0 + 3\propto \\ y &= 1 + 2\propto \\ z &= -1 + 1\propto \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 3\propto \\ y &= 1 + 2\propto \\ z &= -1 + \propto \end{aligned}$$

Los valores de x, y, z

$$x = 3\propto$$
$$y = 1 + 2\propto$$
$$z = -1 + \propto$$

se llevan a la ecuación del plano $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$

$$2\,(3\propto) - 3(1 + 2\propto) + (-1 + \propto) + 1 = 0$$

$$6\propto - 3 - 6\propto - 1 + \propto + 1 = 0$$

$$-3 + \propto = 0$$

$$\propto = 3$$

El valor de $\propto = 3$

se lleva a las paramétricas

$$x = 3\propto$$
$$y = 1 + 2\propto$$
$$z = -1$$

$$x = 3(3) = 9$$
$$y = 1 + 2(3) = 7$$
$$z = -1$$

$$P_0(9, 7, -1)$$

Las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano

Ejercicio 14

Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$ $N\langle 2, -3,1\rangle$

y la recta: $l: (x, y, z) = (5,0,0) + \alpha(0,1,3)$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $v_1(x_1, y_1, z_1)$

Probar que la recta l no intercepta al plano π.

Ejercicio 15

A partir de la ecuación implícita del plano hallar la ecuación paramétrica

$$\pi: \qquad x - 2y + z - 1 = 0$$

$$\pi\colon\ x - 2y + z - 1 = 0$$

Se despeja la x

$$x = 2y - z + 1 \quad (1)$$

Se hace la y igual a α

$$y = \alpha \quad (2)$$

Se hace la z igual a β

$$z = \beta \quad (3)$$

Se reemplazan los valores de y, y de x en (1)

$$x = 2\alpha - \beta + 1 \quad (4)$$

Entonces se tienen las ecuaciones (4), (2), (3) como ecuaciones paramétricas del plano:
:

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta + 1 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}\,\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{z} &= \mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

De donde:

$$P_0(1,0,0)$$
$$v_1\langle 2,1,0\rangle$$
$$v_2\langle -1,0,1\rangle$$

Ejercicio 16

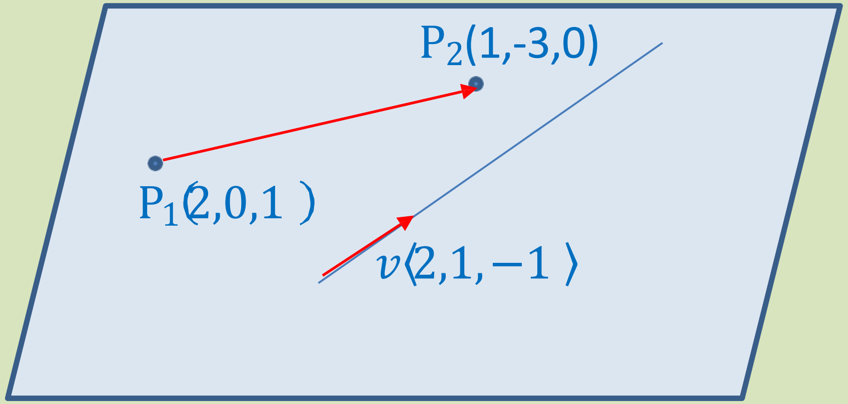
Hallar la ecuación analítica del plano que pasa por el punto $P_1\ (2,0,1)$ y contiene la recta cuya ecuación es:

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Como la recta está en el plano, cualquier punto de la recta es del plano. y el vector director de la recta también es del plano.

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1} \longrightarrow v\langle 2,1,-1\rangle \text{ es vector director de } l$$

Tenemos dos puntos del plano: P_1 (2,0,1) y P_2(1,-3,0), con ellos obtenemos el vector P_1P_2: $P_1P_2\langle -1,-3,-1\rangle$



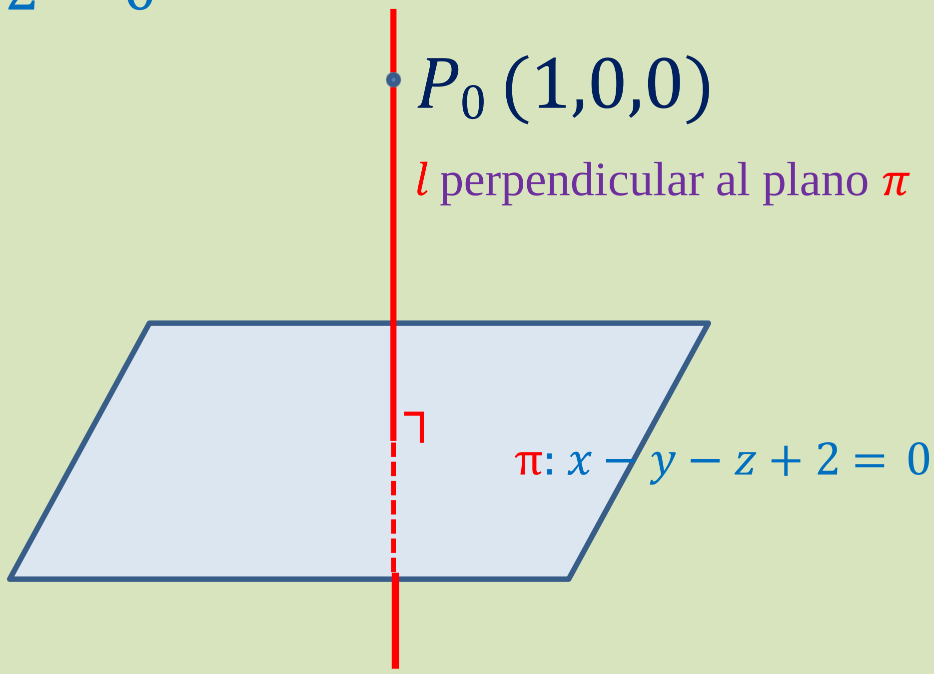
Como la recta está en el plano, el vector director de la recta $v\langle 2,1,-1\rangle$ también está en el plano. Con los dos vectores, se halla el producto cruz y se obtiene el vector N normal al plano:

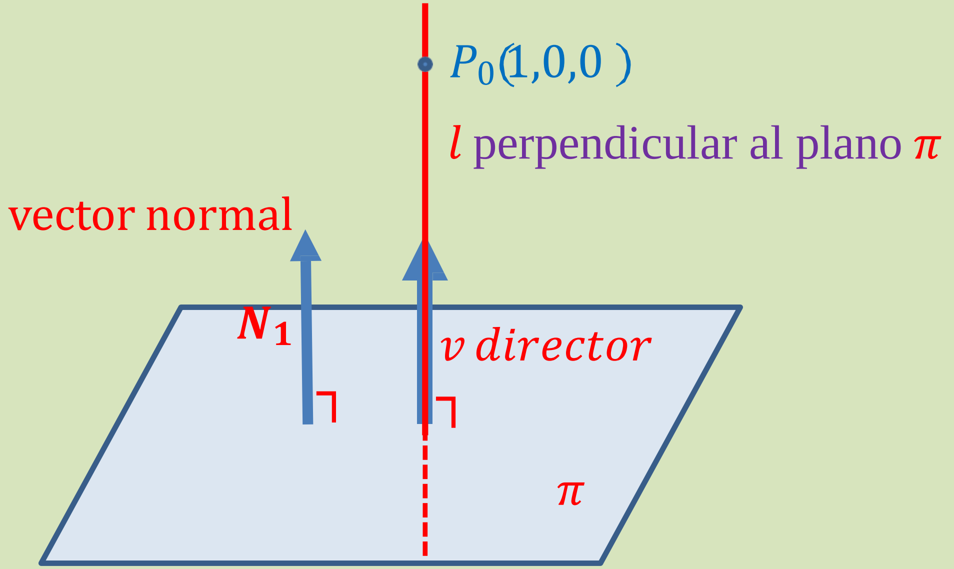
$$P_1P_2\langle -1,-3,-1\rangle \times v\langle 2,1,-1\rangle = 4i - 3j + 5k = N\langle 4,-3,5\rangle$$

Con el punto $P_1(2,0,1)$ y el vector $N\langle 4,-3,5\rangle$ se halla la ecuación analítica: $4(x-2) - 3(y-0) + 5(z-1) = 0$

Ejercicio 17

Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el punto P_0 $(1,0,0)$ y es perpendicular al plano π: $x - y - z + 2 = 0$





$$\pi: x - y - z + 2 = 0 \;\Rightarrow\; N\langle 1, -1, -1\rangle$$

De la gráfica se observa que el vector normal N, y el vector director son paralelos. Por tanto el vector normal N, sirve de vector director de la recta, y como se conoce un punto de la recta, se tienen todos los elementos para la ecuación de la recta.

$P_0(1,0,0\ )$

$N\langle 1,-1,-1\rangle$

$$l: \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-0}{-1}$$

$$l: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$$

Bibliografía

Perez, J. A. y Paniagua j. G. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Instituto Tecnológico Metropolitano **-ITM-**Medellín**.**

Gonzalez, F. J. (2004). Rectas y Planos. Proyecto MATEX.
http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/libros/geometria_vectorial_analitica/pdf/gva_cap04.pdf

http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/libros/geometria_vectorial_analitica/#pestana7

http://www.luiszegarra.cl/moodle/pluginfile.php/156/mod_resource/content/1/Teoria_Geo_Vectorial_Cap_1_LZA.pdf

Bibliografía Planos

- http://www.vadenumeros.es/segundo/ecuaciones-de-un-plano.htm
- https://aga.frba.utn.edu.ar/ecuaciones-del-plano/
- http://matematicasblecua.ftp.catedu.es/bacmat/temario/bac2/mat2_06rectasyplanos_t2.htm