Rotaciones de ejes coordenados

Presentación realizada por Efrén Giraldo

- **MISVALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

- **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

- **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
  Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Rotación de ejes, no de puntos ni de figura

Un **ángulo** que determina la amplitud de la rotación.
Un eje de rotación**.**
Un **sentido** de la rotación que puede ser del mismo sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.

Problema Tipo 1: se trata de hallar las nuevas coordenadas de un punto al rotar los ejes un ángulo α

Problema Tipo 2: dada una ecuación referenciada al sistema O(0,0) hallar el ángulo α.

Problema Tipo 3: Dada una ecuación referenciada al sistema (0,0) hallar la nueva ecuación al rotar un ángulo α

Cuando en la ecuación general de segundo grado de una cónica el coeficiente “B” es diferente de cero, existe el término xy.

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 5y + 1 = 0$$

Este término mixto (o cruzado) xy, indica que existe una rotación de la figura. Los ejes de la cónica están rotados respecto a los ejes xy.

Cuando en la ecuación general de segundo grado de una cónica el coeficiente "B" es cero, no existe el término xy. No hay rotación. El centro de la cónica está en el el origen O(0,0).

$$\mathrm{A}x^2 + 0xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

$$5x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 1 = 0$$

Al hacer una rotación de los ejes de una ecuación de una curva de segundo grado con término en xy, la ecuación se reduce a otra sin término en xy, o sea, B=0

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

$$\mathrm{A}'x'^2 + 0xy + \mathrm{C}'y'^2 + \mathrm{D}'x' + \mathrm{E}'y' + \mathrm{F}' = 0$$

$$5x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 5y + 1 = 0$$

$$(\ )x'^2 + (\ )y'^2 + (\ )x' + (9) + (\ ) = 0$$

$$Ax^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

La idea es hallar el ángulo de rotación de la cónica con respecto a al eje original x, ese ángulo se calcula mediante la siguiente expresión:

$$tan\ 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

Note que los coeficientes que importan para el ángulo son A,B,C y son los $de\ x, xy, y$

http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CapsulasAntecedentes/ROTACION_EJES.pdf

$$tan\ 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

Si A=C

Ax+ Bxy + Ay+ Dx + Ey+ F = 0

$$tan\ 2\alpha = \frac{B}{A-A} = \frac{B}{0} = \infty$$ es indeterminado

$tan\ 2\alpha = \infty$ es indeterminada y corresponde a un ángulo de 90°.
O sea, a un ángulo total de 90°= 2α, lo que da:

$$2\ \alpha = 90° \longrightarrow \alpha = \frac{90}{2} = 45°$$

En la calculadora si usted coloca tan 90° da error. Lo que quiere decir que cuando la tangente se acerca a 90° la pendiente de una recta que es igual a la tangente, se vuelve muy grande, se vuelve indeterminada, tiende a infinito ∞.

Entonces se puede decir que la tangente de 90° es ∞ infinito.

$$tan\ 2\alpha = \infty$$

$$\tan 90° = \infty$$

$$2\ \alpha = 90°$$

$$\alpha = 45°$$

La principal razón para rotar los ejes cierto ángulo es que una ecuación dada es mucho más simple en el nuevo sistema de coordenadas que en el sistema original.

Similar a la translación, en la rotación los puntos quedan en la misma posición; los puntos como tales son fijos.

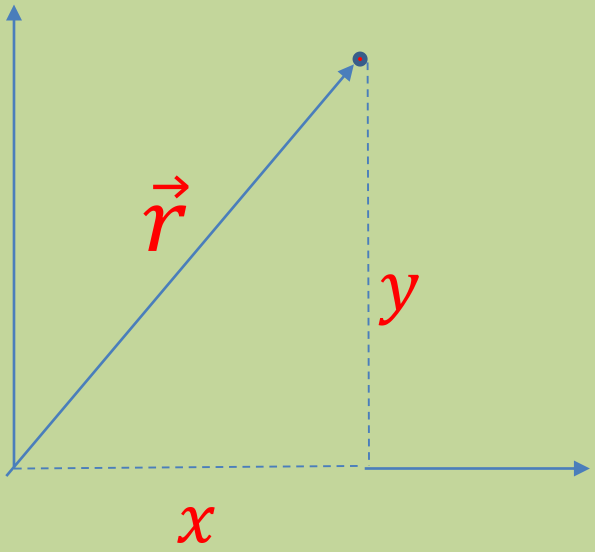
Las coordenadas al igual que en la translación cambian.

Solamente el origen de coordenadas no cambia sus coordenadas.

Podemos rotar con respecto a cualquier eje. En este caso rotaremos con respecto al eje x.

Al tener que emplear ángulos, la rotación en un plano cartesiano, se lleva a cabo utilizando las funciones trigonométricas.

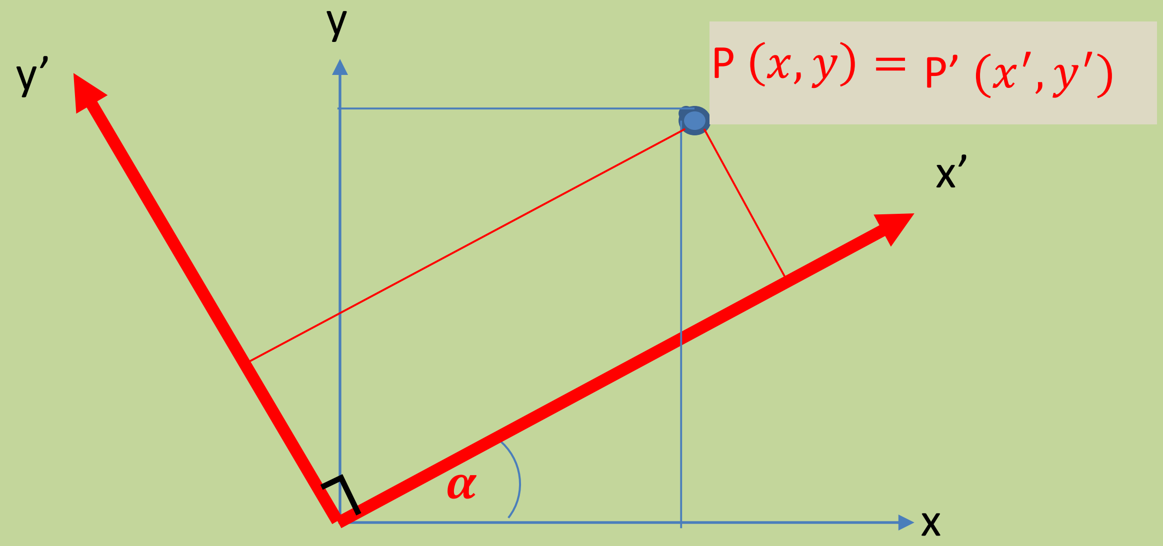
La trigonometría tiene fórmulas relativamente sencillas que son de gran ayuda.



Los ejes coordenados en un plano son dos líneas rectas perpendiculares entre sí.
Un punto de coordenadas $\mathrm{P}(x, y)$ se representa en la figura y su vector posición por $r\langle x, y\rangle$.

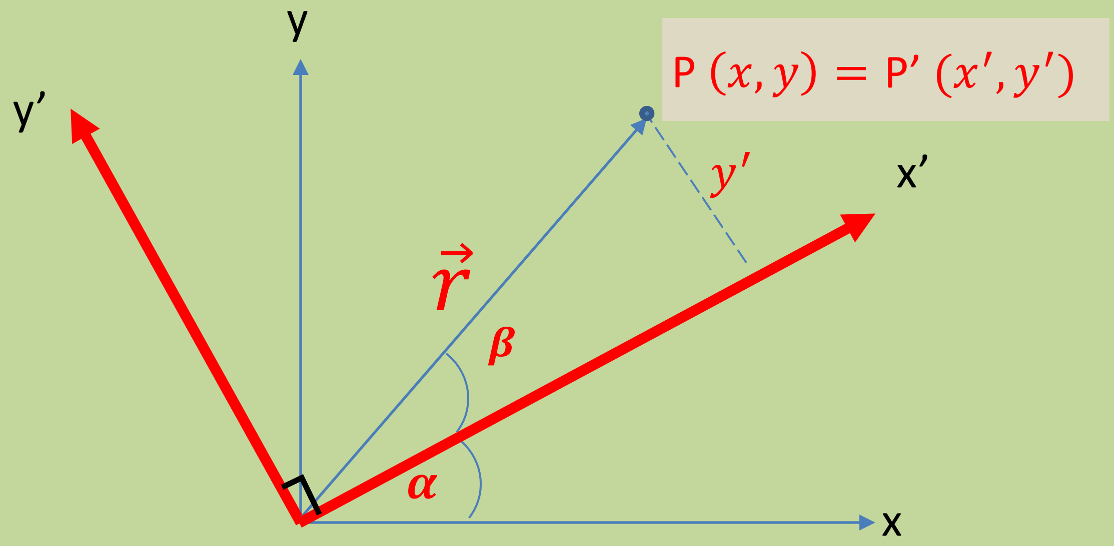
Al hablar de rotación, se habla de movimiento de giro. Y entra un elemento base: el ángulo de giro y de ahí la idea de que existe tal "movimiento".

Existe un ángulo α y es el que forma el eje **nuevo x' con el eje x antiguo.**



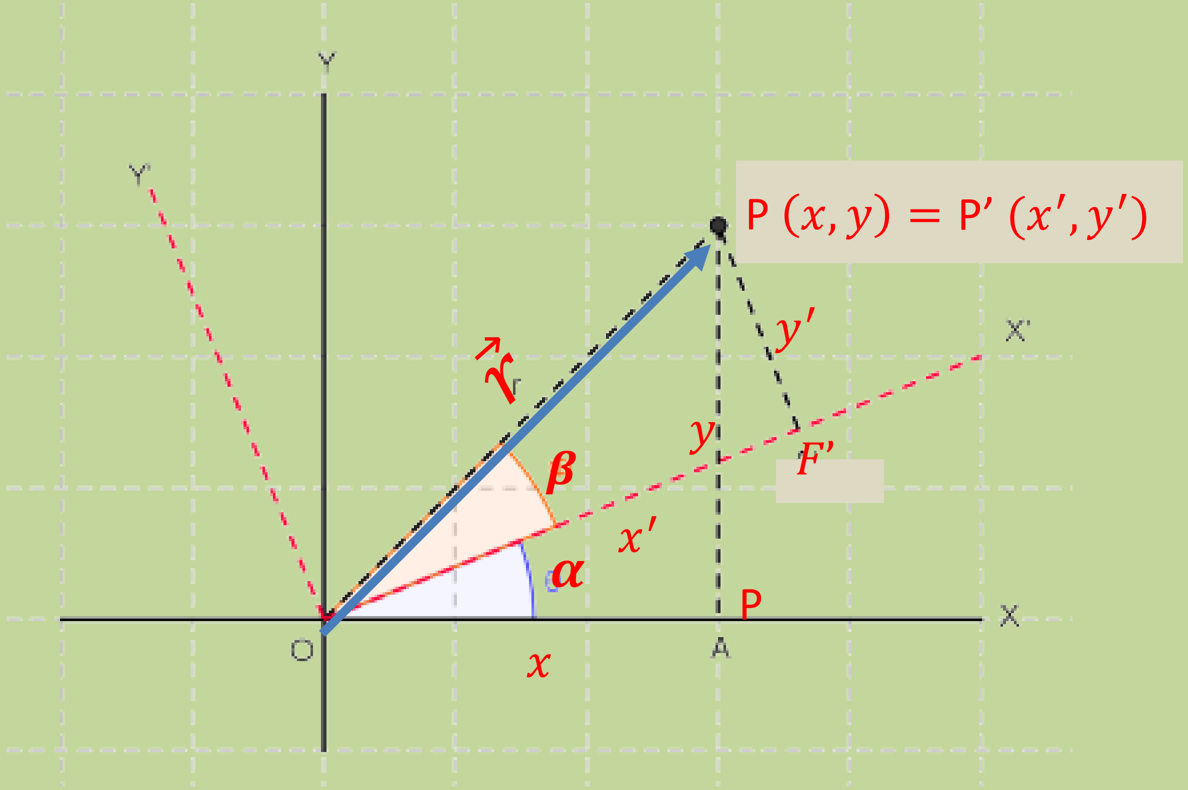
Es importante que se entienda este concepto, para que de ninguna manera se llegue a la falsa conclusión de que una curva cónica u otra gira.

Los que giran son los ejes coordenados , más no la curva en si.
También podría girar las curvas, pero no consideramos este caso.



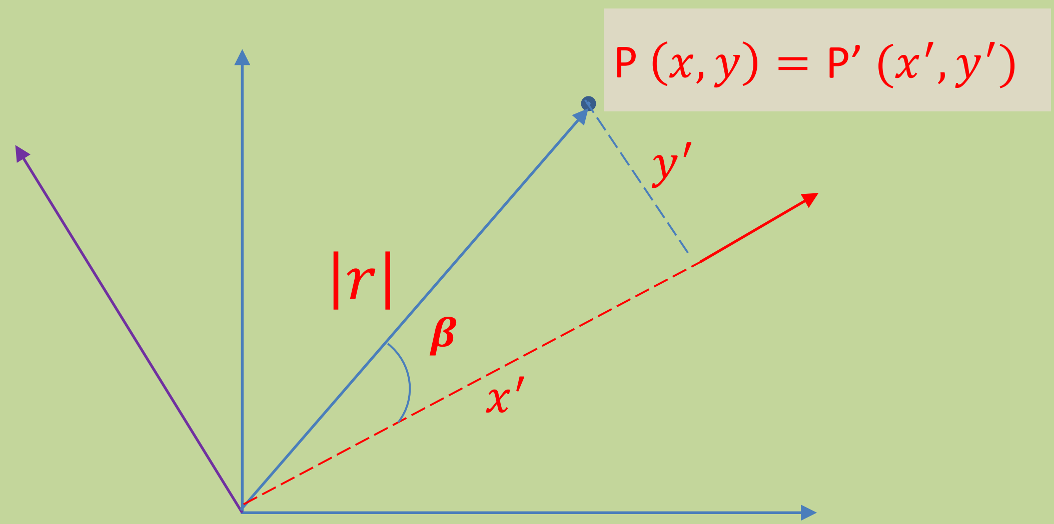
Los ejes coordenados giran conjuntamente un ángulo α. Al hacerlo quedarán de nuevo perpendiculares. Las coordenadas viejas de un punto $P(x, y)$ pasan a ser $P´(x’, y’)$. El único punto que no cambia de coordenadas es el origen. El punto no cambia de posición: P y P’ coinciden. El vector r correspondiente al punto P, forma un ángulo β con el nuevo eje $x´$.

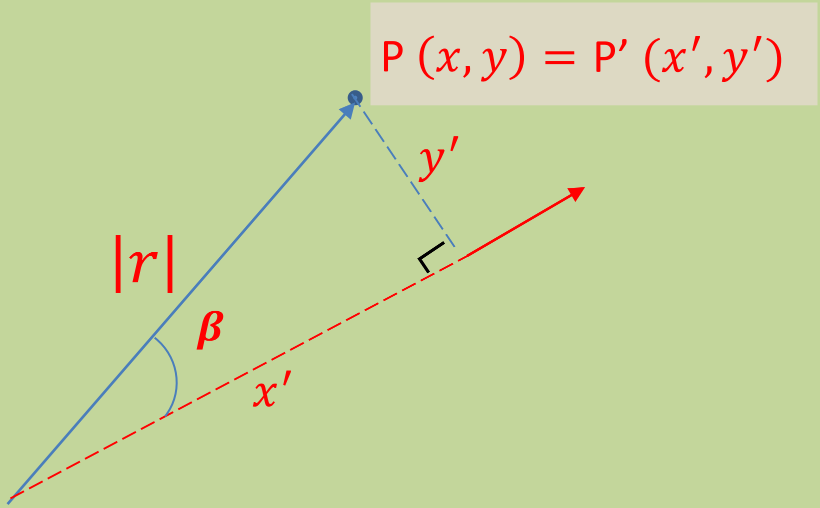
Las coordenadas antiguas de un punto P(x, y) están referidas a O(0,0). Las coordenadas del mismo punto P´ referidas al nuevo sistema de ejes coordenados son (x', y').



El punto P no cambia de posición: P y P' coinciden Cambia de coordenadas.

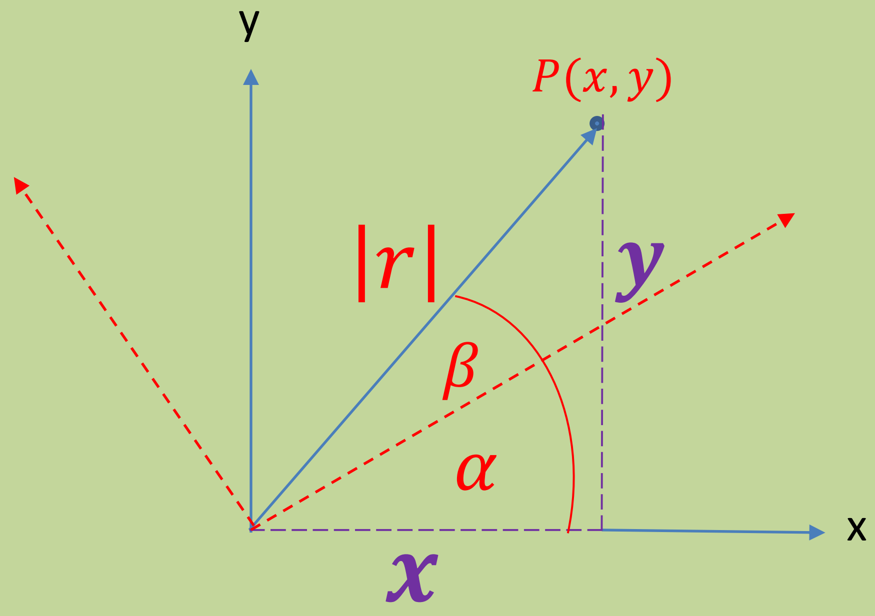
Al girar los ejes coordenados un ángulo α, un punto P que tenía como referencia al par de ejes coordenados antiguo x, y, ahora tiene otro par de coordenadas nuevo referenciado al nuevo par de ejes coordenados x', y' relacionadas con el ángulo β, y estarán relacionados por las ecuaciones de transformación trigonométricas.





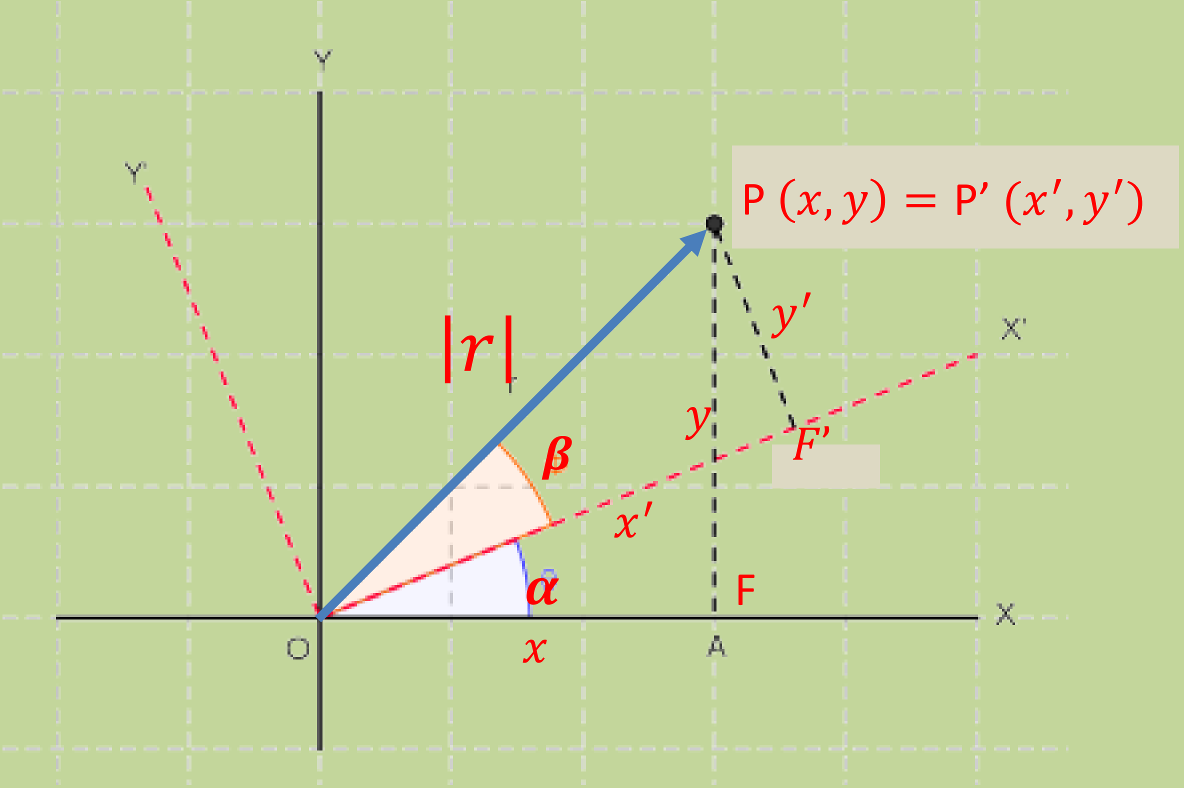
$$\cos\beta = \frac{x'}{|r|} \longrightarrow x' = |r|\cos\beta \longrightarrow |r| = \frac{x'}{\cos\beta}$$

$$sen\,\beta = \frac{y'}{|r|} \longrightarrow y' = |r|\,sen\,\beta \longrightarrow |r| = \frac{y'}{sen\,\beta}$$



$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{x}{|r|} \longrightarrow x=|r|\cos(\alpha+\beta)$$

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\frac{y}{|r|} \longrightarrow y=|r|\text{sen}(\alpha+\beta)$$



El punto P no cambia de posición: P y P' coinciden
Cambia de coordenadas.

$$x = |r|\cos(\alpha + \beta)$$
$$y = |r|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$x' = |r|\ cos\ \beta$$

$$y' = |r| sen\ \beta$$

$$x = |r|\cos(\alpha + \beta) = |r|\, cos\ \alpha \, . \cos\beta - |r|\, sen\ \alpha \, . \operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

$$y = |r|\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = |r|\, sen\ \alpha \, . \cos\beta + |r|\, cos\ \alpha \, . \operatorname{sen}\beta \qquad (2)$$

$$|r| = \frac{x'}{\cos\beta} \qquad (3)$$

(3) y (4) en (1) y (2)

$$|r| = \frac{y'}{sen\ \beta} \qquad (4)$$

$$x = |r| \cos\alpha \, . \cos\beta - |\boldsymbol{r}| \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

$$|r| = \frac{x'}{\cos\beta} \quad \text{en } (1) \qquad\qquad |r| = \frac{y'}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{en } (1)$$

$$x = \frac{x'}{\cos\cancel{\beta}} \cos\alpha \, . \cancel{\cos\beta} - \frac{y'}{\operatorname{sen}\cancel{\beta}} \operatorname{sen}\alpha \, . \cancel{\operatorname{sen}\beta}$$

$$|r| = \frac{x'}{\cos\beta} \qquad\qquad |r| = \frac{y'}{sen\ \beta}$$

$$y = |r|\, sen\ \alpha \,.\, \cos\beta + |r|\, cos\ \alpha \,.\, \mathrm{sen}\ \beta$$

$$y = \frac{x'}{\cancel{\cos\beta}}\, sen\ \alpha \,.\, \cancel{\cos\beta} + \frac{y'}{\cancel{sen\ \beta}}\, cos\ \alpha \,.\, \cancel{\mathrm{sen}\ \beta}$$

$$x = x' \cos\alpha - y' sen\alpha$$
$$y = x' \mathrm{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

$$x' = x\cos\alpha + y\ sen\ \alpha$$
$$y' = -x sen\ \alpha + y\ cos\ \alpha$$

Para obtener una nueva ecuación en términos de los nuevos ejes, se requiere sustituir en la ecuación de segundo grado a x e y por sus expresiones equivalentes en función de x’ y de y’ anteriores.

Problema Tipo 1: se trata de hallar las <u>nuevas coordenadas</u> de un punto al rotar los ejes un ángulo α

Hallar las **<u>nuevas coordenadas</u>** P´(x’, y’) del punto P(3, 4) , cuando los ejes coordenados giran un ángulo de **45º** entorno a su origen.

$$x' = \; x\cos\alpha + y\; sen\;\alpha$$
$$y' = -x sen\;\alpha + y\cos\alpha$$

$$x' = \ \ x\cos\alpha + y\ sen\ \alpha$$
$$y' = -x sen\ \alpha + y\cos\alpha$$

$x \quad y$

$$\mathrm{P}(4{,}6)$$
$$\alpha = 45°$$

$$x' = 4\cos 45° + 6\ sen\ 45°$$

$$x' = 4 * 0.707 + 6\ * 0.707 = 7.07$$

$$y' = -xsen\ \alpha + y\ cos\ \alpha$$

$$y' = -4\ sen\ 45° + 6 \cos 45°$$

$$y' = -4\ * 0.707 + 6*0.707 = 1.41$$

P´(7.07,1.41)

Ejercicio

Se tiene un punto en un sistema que **ha sido rotado previamente** 30°. En este sistema las coordenadas del punto son P(2,3). Se quiere conocer las coordenadas del punto antes de la rotación (sistema x, y sin rotar).

$$(x', y')$$

$$P(2,3),$$

$$\alpha = 30°$$

$$x = x' \cos\alpha - y' sen\alpha$$

$$y = x' sen\alpha + y' \cos\alpha$$

$$x = x' \cos \alpha - y' sen\alpha$$

$$x = 2 \cos 30 - 3sen30$$

$$x = 2 * 0.86 - 3 * 0.5$$

$$x = 0.22$$

$$y = x' \mathrm{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

$$y = 2 * 0.5 + 3 * 0.86$$

$$y = 3.58$$

P(0.22, 3,58)

Problema Tipo 2: dada una ecuación referenciada al sistema O(0,0) hallar el ángulo α.

Se tiene la ecuación $5x^2 + 5xy - 1 = 0$

Identifique si ha sido rotada algún ángulo específico y calcúlelo.

Lo primero es comparla con la ecuaión general

$$5x^2 + 5xy - 1 = 0$$

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0 \quad (1)$$

$$5x^2 + 5xy + 0y^2 + 0x + 0y - 1 = 0$$

Para obtener el ángulo de rotación basándose en la ecuación (1) se usa la siguiente ecuación:

$$Tan\ 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

$$tan\ 2\alpha = \frac{5}{5-0} = 1$$

Se conoce que la tan de 45° es = 1

$$\tan 45° = 1$$

$$\tan 2 * 22.5\,° = 1$$

El ángulo que rotaron los ejes fue de $\alpha = 22.5°$

Problema Tipo 2:

Para la siguiente ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$, hallar el ángulo de rotación.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$$

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

$$A = 1,\ B = -2\ ,\quad C = 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2}{1-1} = \frac{-2}{0} = \infty \; indetermiando$$

$$2\alpha = 90°$$

$$\alpha = 45°$$

Problema Tipo 3:
Dada una ecuación referenciada al sistema (0,0) hallar la nueva ecuación al rotar un ángulo α

Se tiene la ecuación $xy = 4.$ Realice una rotación de $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{180}{4}=45°$$

$$x = x' \cos\alpha - y' sen\alpha$$
$$\mathrm{y} = x' \mathrm{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

Lo primero que se hace es remplazar el ángulo en las ecuaciones para simplificar

$$\boldsymbol{x = x' \cos\alpha - y' sen\alpha}$$

$x = x'\cos 45 - y'\,sen\,45 = x'0.71 - y'0.71 \;=\; 0.71(x'-y')$

$$\boldsymbol{y = x' sen\alpha + y' \cos\alpha}$$

$y = x'0.71 + y'0.71 = 0.71(x' + y') = \; 0.71(x' + y')$

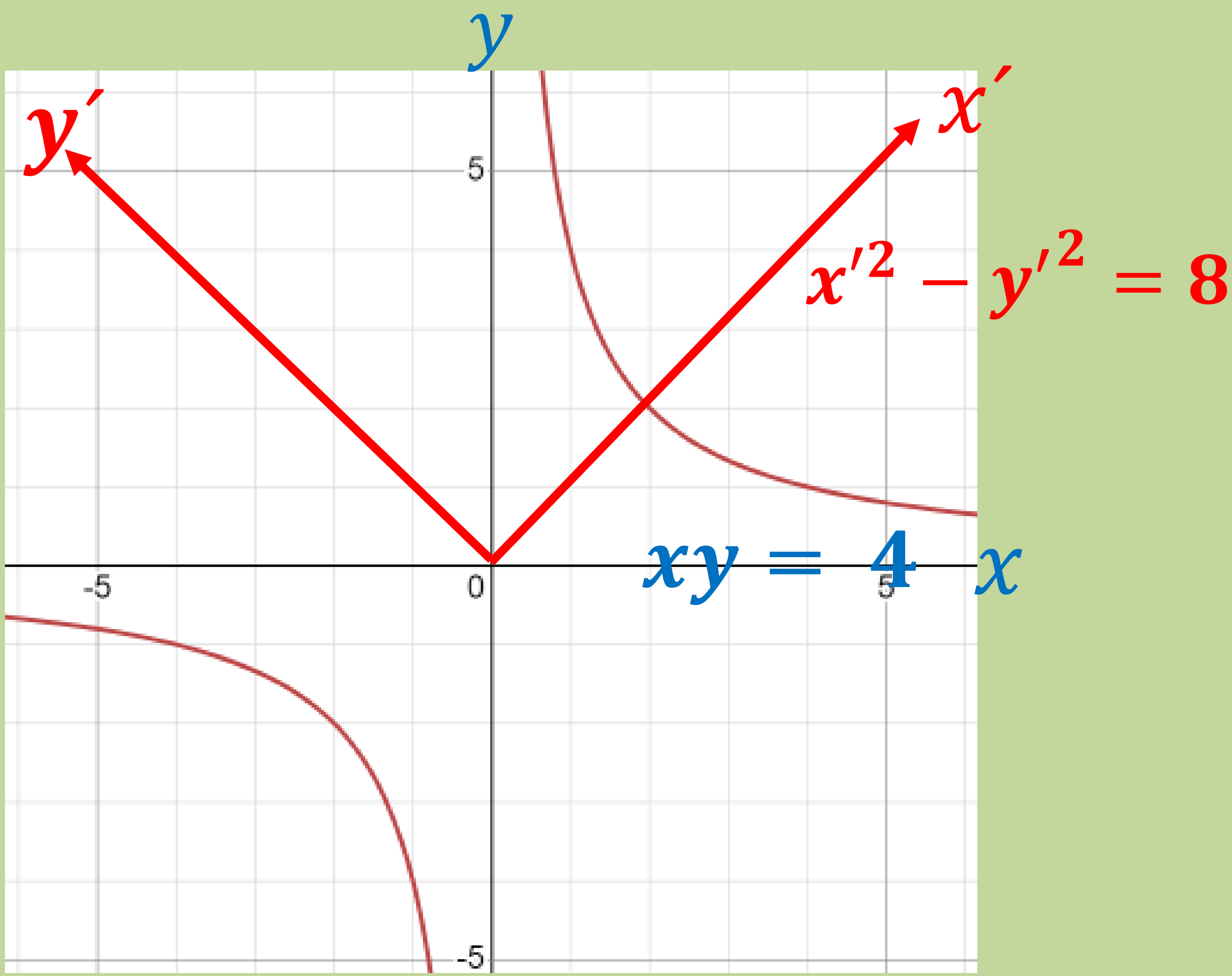
$x =$ 0.71(x’-y’)
y= 0.71(x’+ y’)

Remplazando los valores $de\ x,$ y en $xy = 4$

0.71(x’-y’) 0.71(x’+ y’)=4
0.5(x’-y’) (x’+y’)=4

$$(x'^2 - y'^2) = 8$$

Hipérbola



y
y'
x'
5
$x'^2 - y'^2 = 8$
$xy = 4$
x
-5
0
5
-5

Problema Tipo 3: dada una ecuación referenciada al sistema (0,0) hallar las nueva ecuación al rotar un ángulo α

Dada la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ hallar la nueva ecuación si se realiza un giro de 45°

$$x = x' \cos\alpha - y' sen\alpha$$
$$y = x' \mathrm{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

Bibliografía

Pérez, A., Paniagua, J. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Fondo editorial **ITM.** Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016. ISBN 978-958-8743-97-4.

http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CapsulasAntecedentes/ROTACION_EJES.pdf

https://trigonometriapdf.blogspot.com/2018/11/rotacion-traslacion-ejes-transformacion.html

Pixar y Khan Academy ofrecen curso online gratuito sobre animación digital

http://noticias.universia.net.co/cultura/noticia/2016/06/21/1140998/pixar-khan-academy-ofrecen-curso-online-gratuito-animacion-digital.html

https://es.khanacademy.org/partner-content/pixar