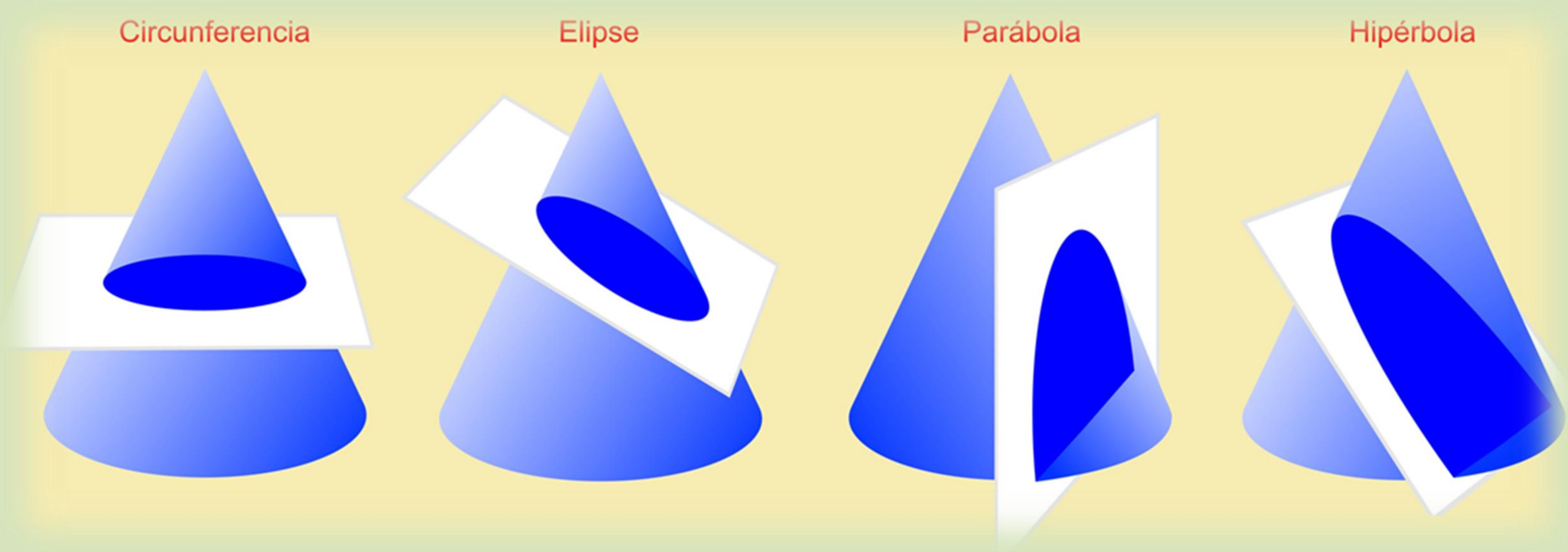
CÓNICAS



❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

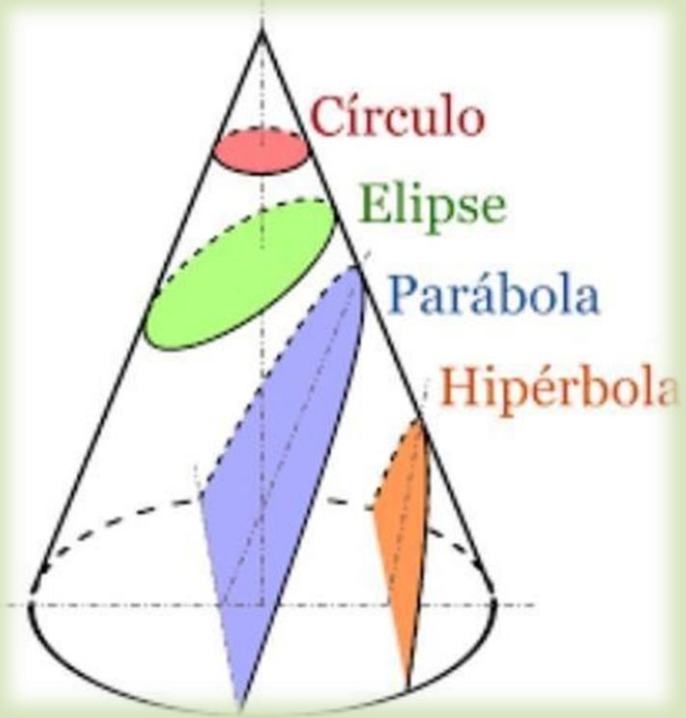
Objetivos

Definir que tipo de cónica es a partir de la ecuación general.

Identificar la ecuación específica de cada cónica.

Graficar y comprender cada una de las 4 cónicas con todos sus elementos en 0(0,0).

Estudiar el traslado de cada cónica desde el origen (0,0) hasta un punto $P(h,k)$.



Se denomina sección **cónica** o curva **cónica** (o simplemente **cónica**) a todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las **cónicas** propiamente dichas.

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta ecuación puede representar una elipse, una hipérbola o una parábola.

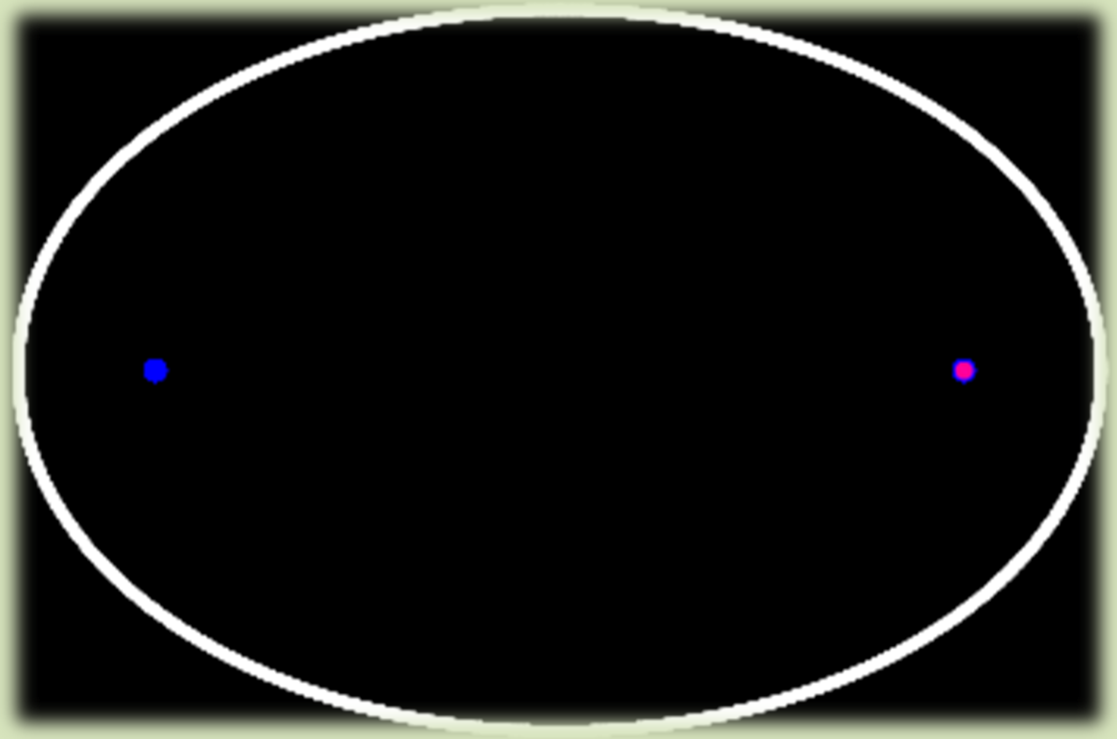
$$\boldsymbol{Ax^2+Bxy+Cx^2+Dx+Ey+F=0}$$

$B^2-4AC<0$ *Eplipse*

$B^2-4AC=0$ *Parábola*

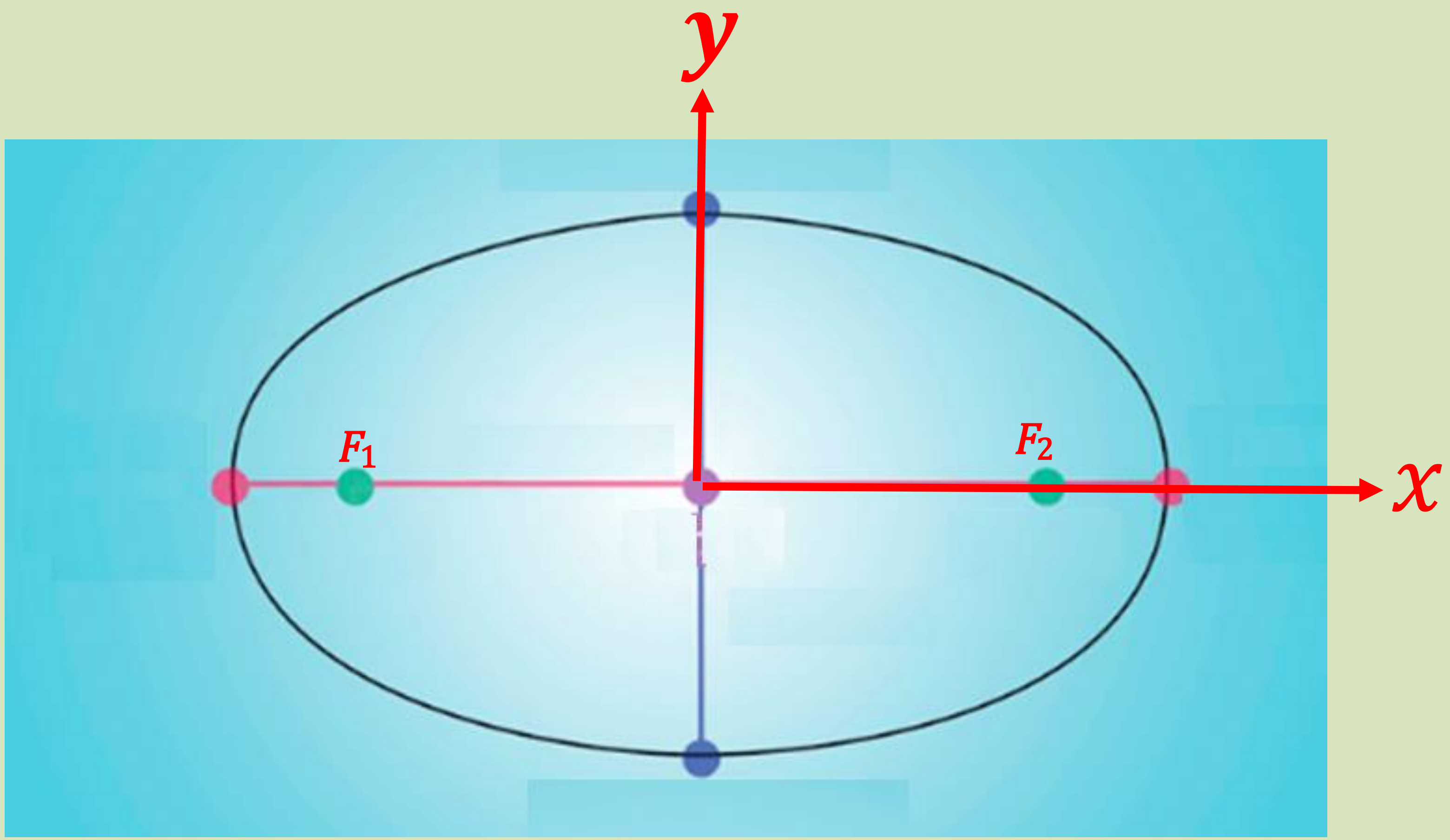
$B^2-4AC>0$ *Hiperbola*

Elipse



https://www.taringa.net/+imagenes/30-gifs-que-te-ensenan-matematicas-mejor-que-tu-maestro_ghego

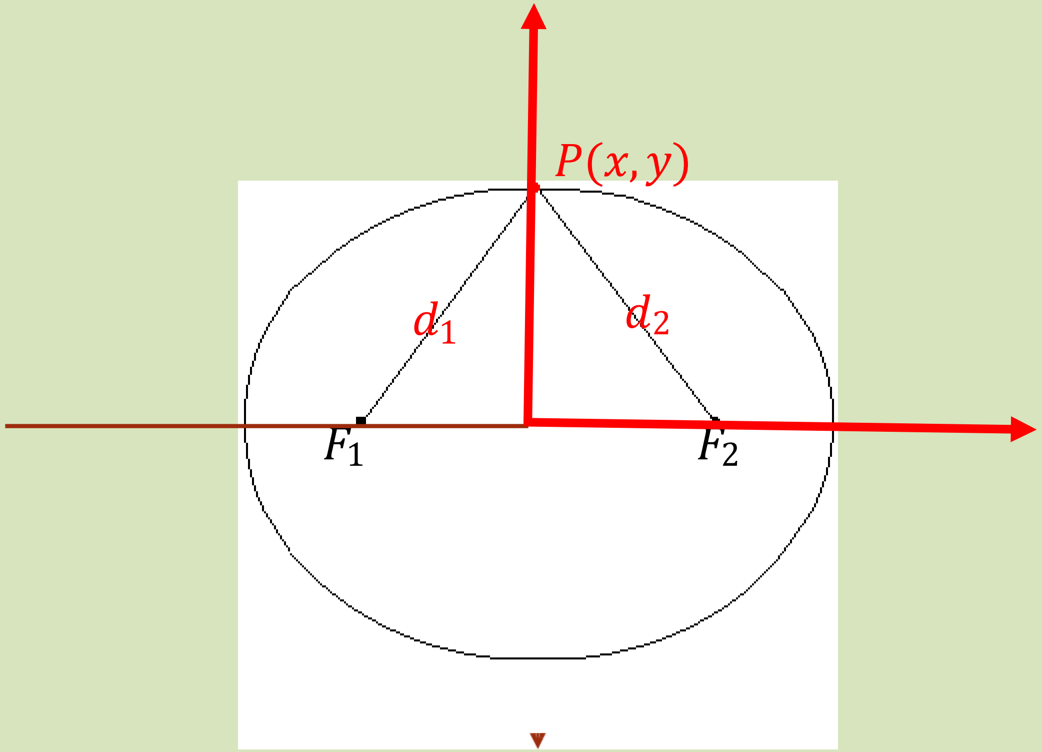
Elipse



https://www.taringa.net/posts/imagenes/18262660/30-Gifs-que-te-ensenan-matematicas-mejor-que-tu-maestro.html

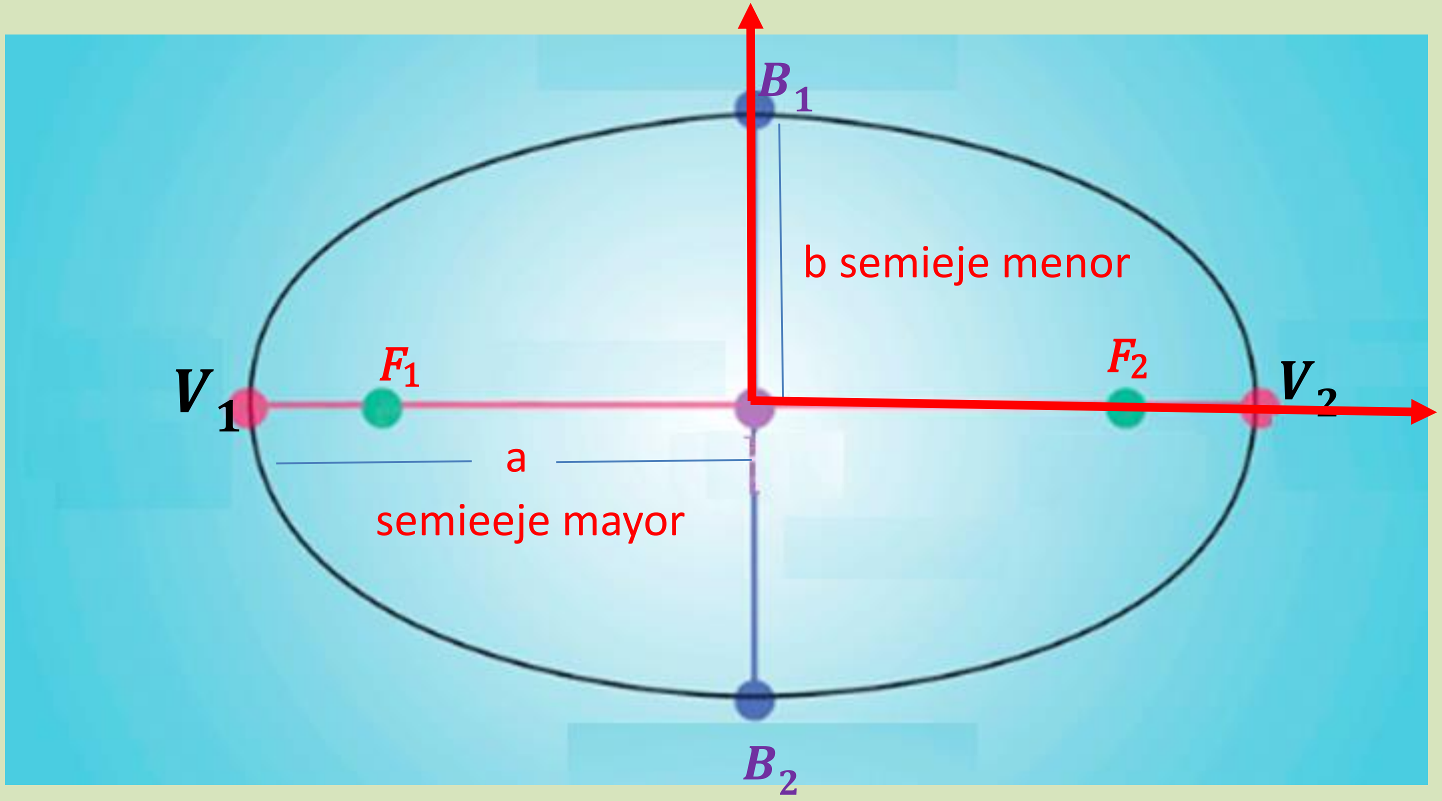
https://www.geogebra.org/m/gH5dp4q6

$$d_1 + d_2 = 2a = \ constante$$



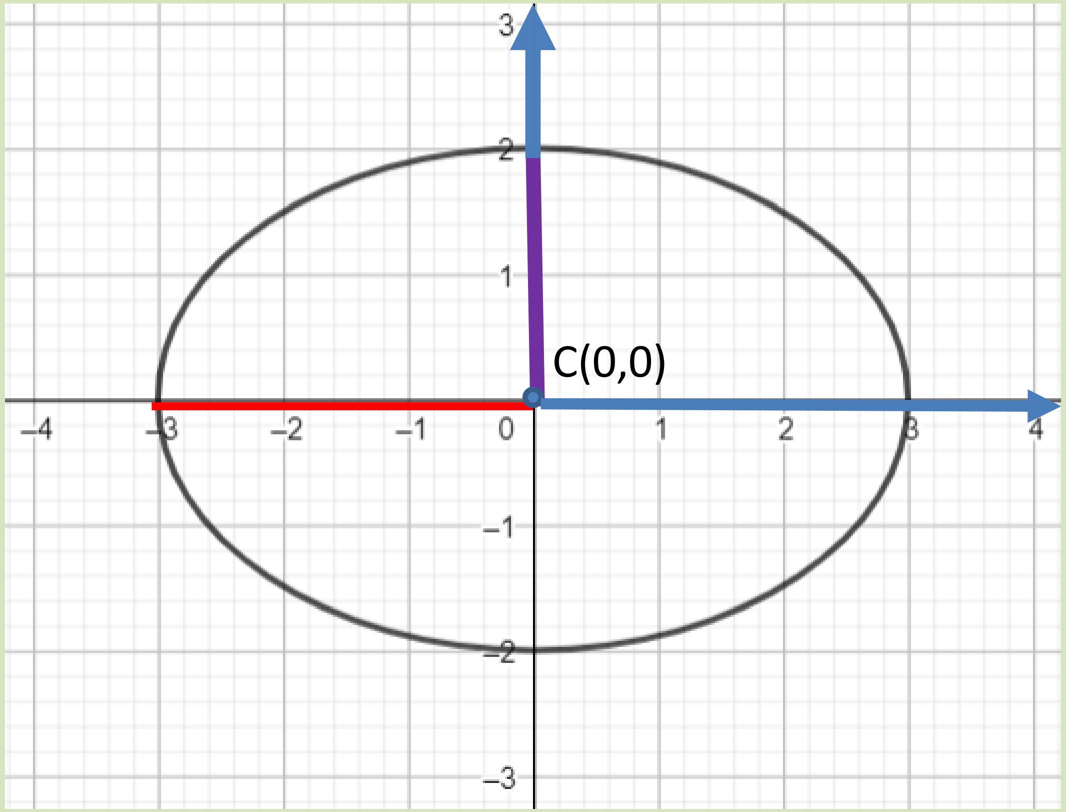
Se denomina elipse a la curva (segundo grado) que cumple que la suma de las distancias $d_1 + d_2$ desde dos puntos F_1 y F_2 (focos) del plano, hasta un punto cualquiera $P(x, y)$ (de la elipse) sea siempre igual y constante.

Ecuación canónica o reducida de la elipse: O(0,0)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas

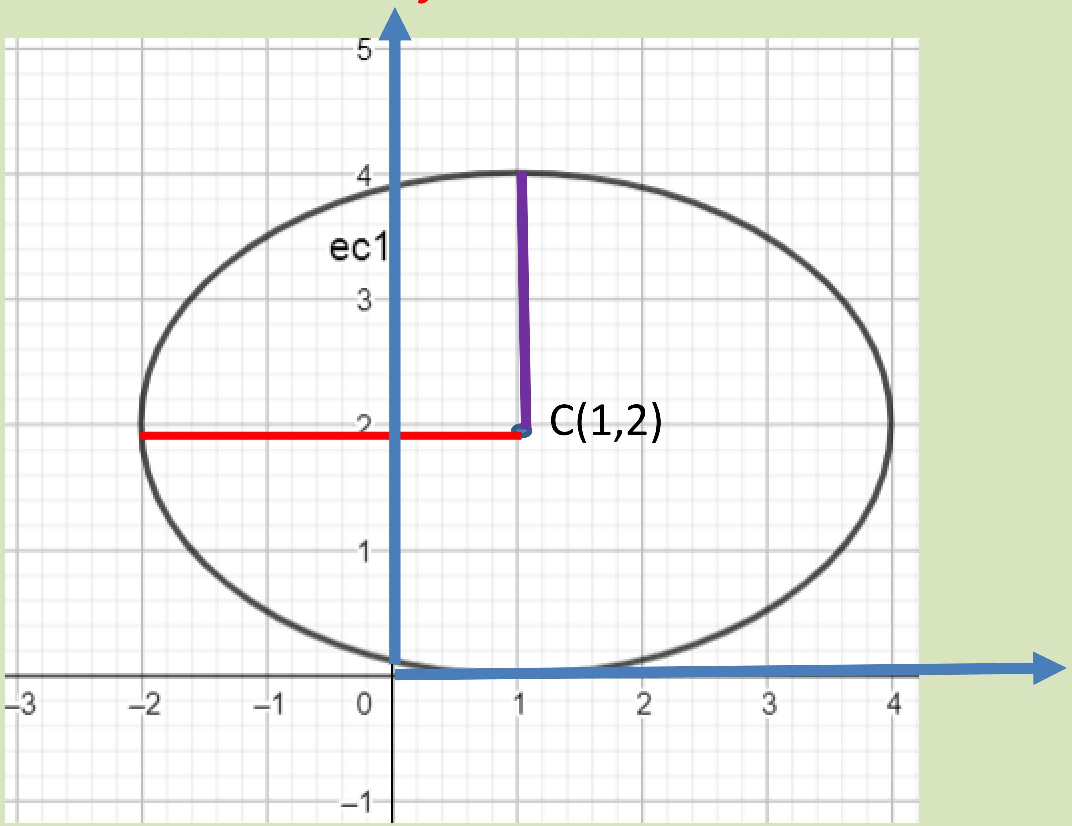


$a > b$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Elipse no trasladada

$Ax^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$



$a > b$

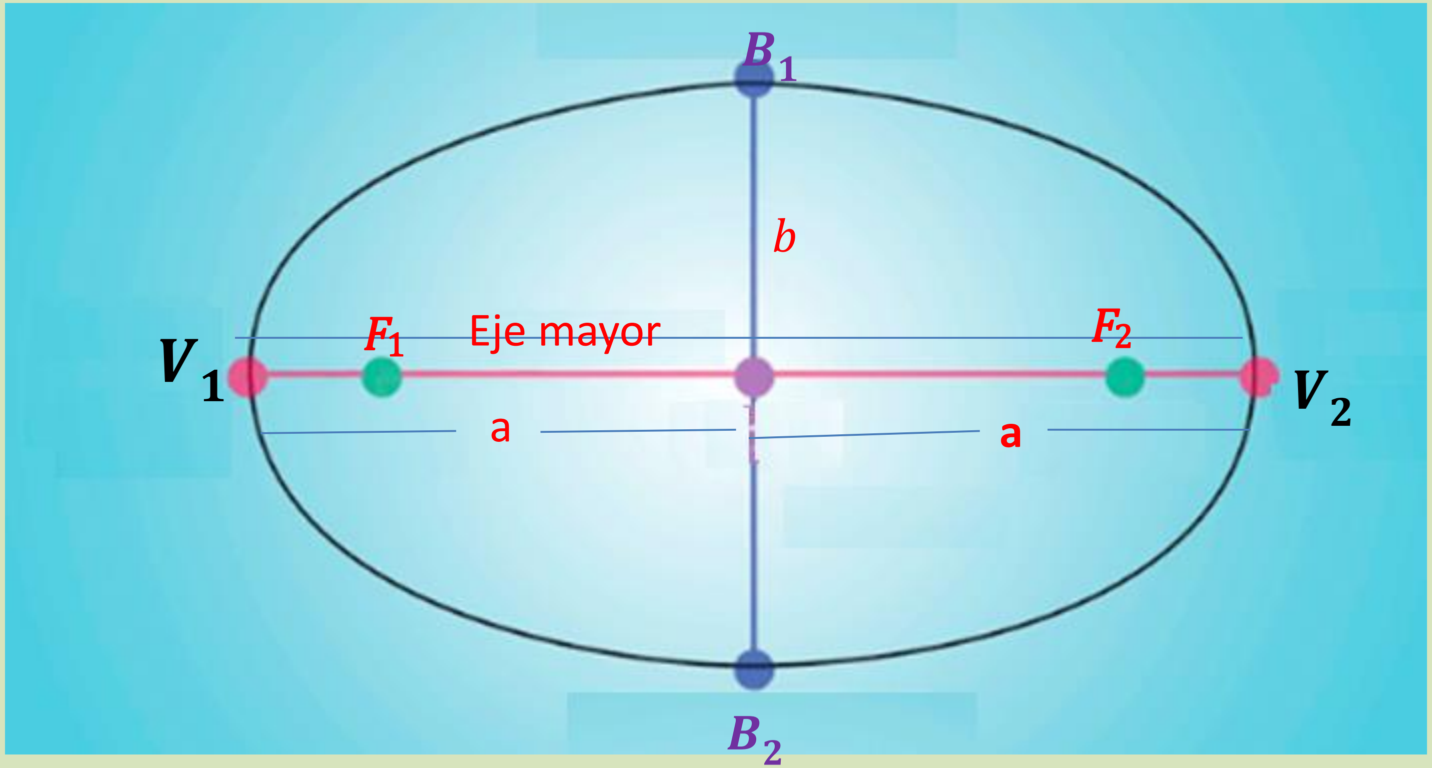
$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$$

Elipse trasladada

Elementos de la elipse

a> b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



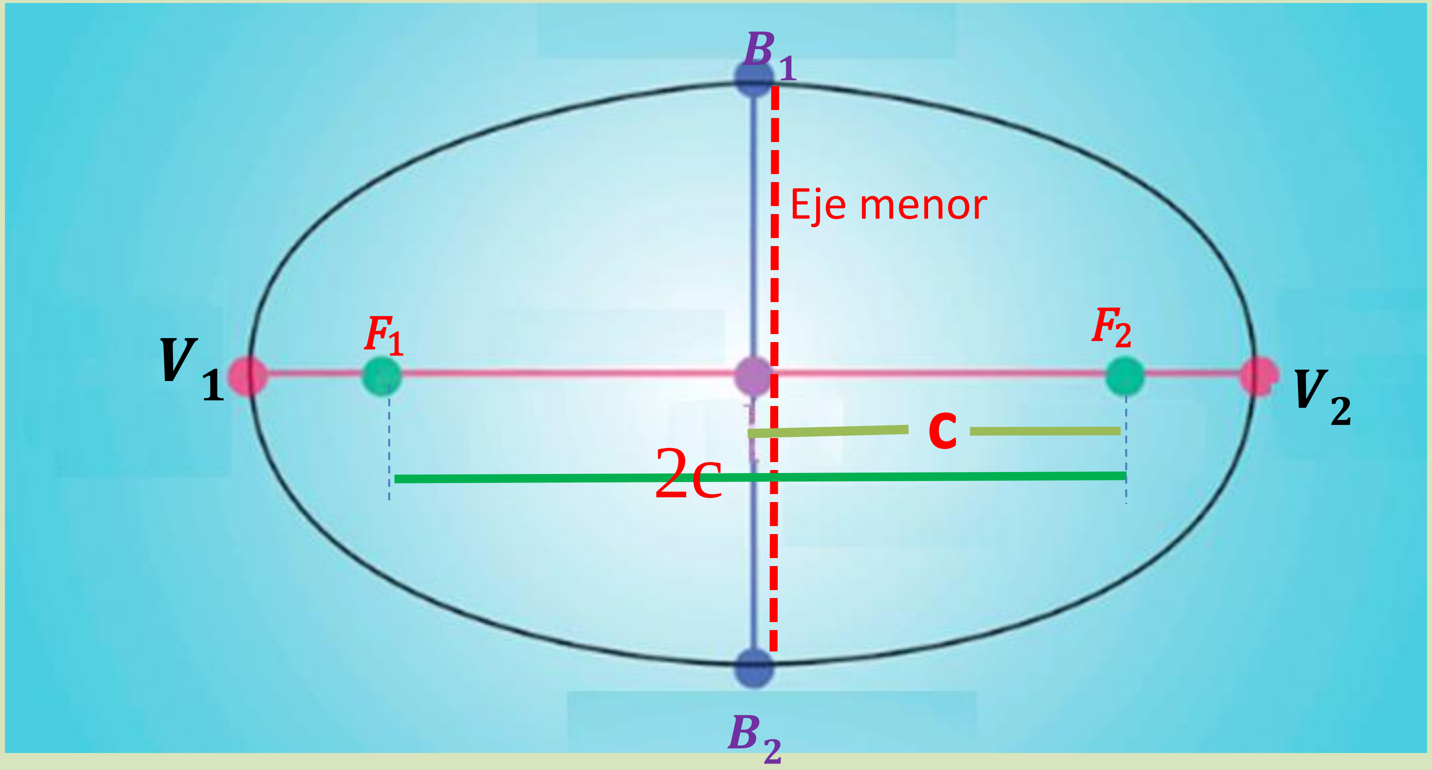
Focos: son los puntos fijos F_1 y F_2.

Eje focal: es la recta que contiene los focos.

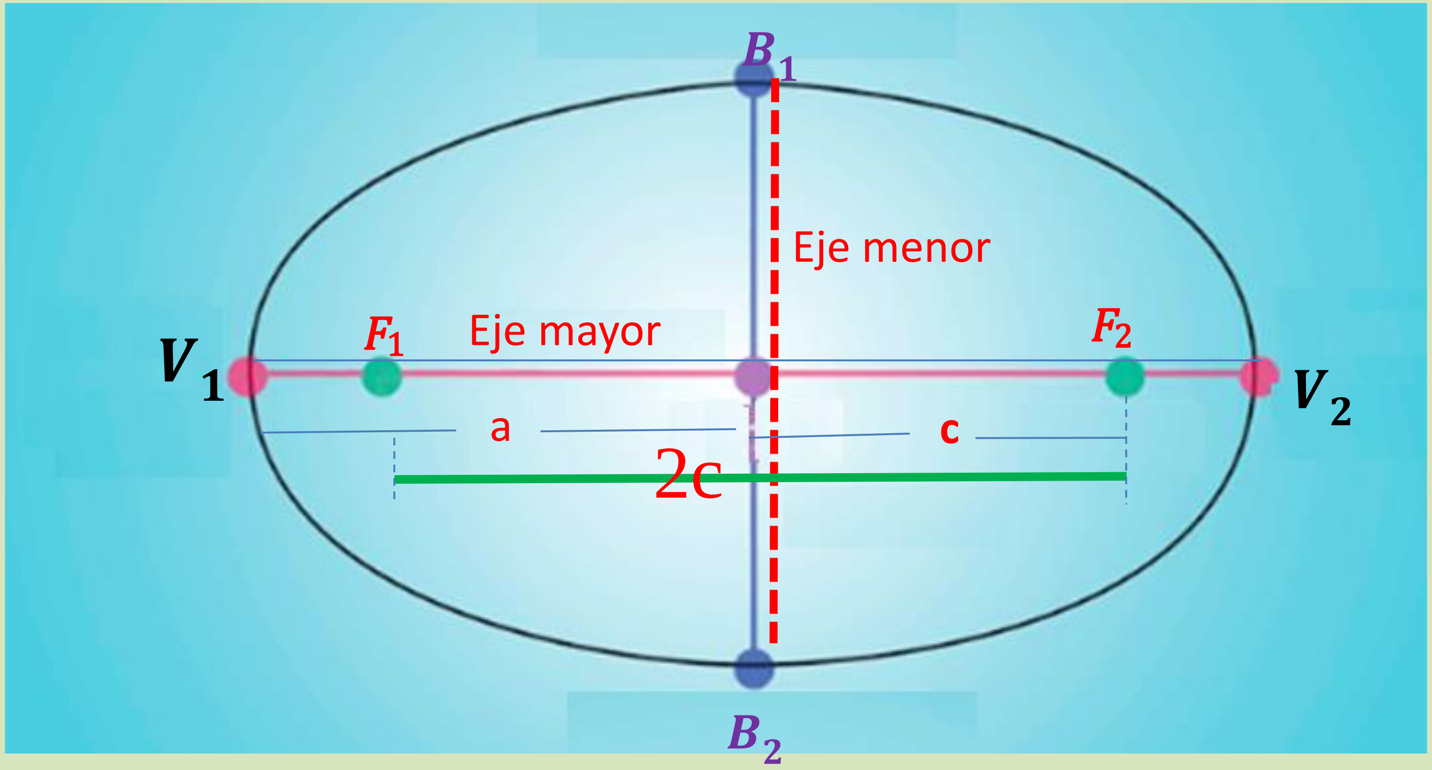
Eje mayor: es el segmento V_1V_2, mide 2a.

Eje menor: es el segmento B_1B, mide 2b.

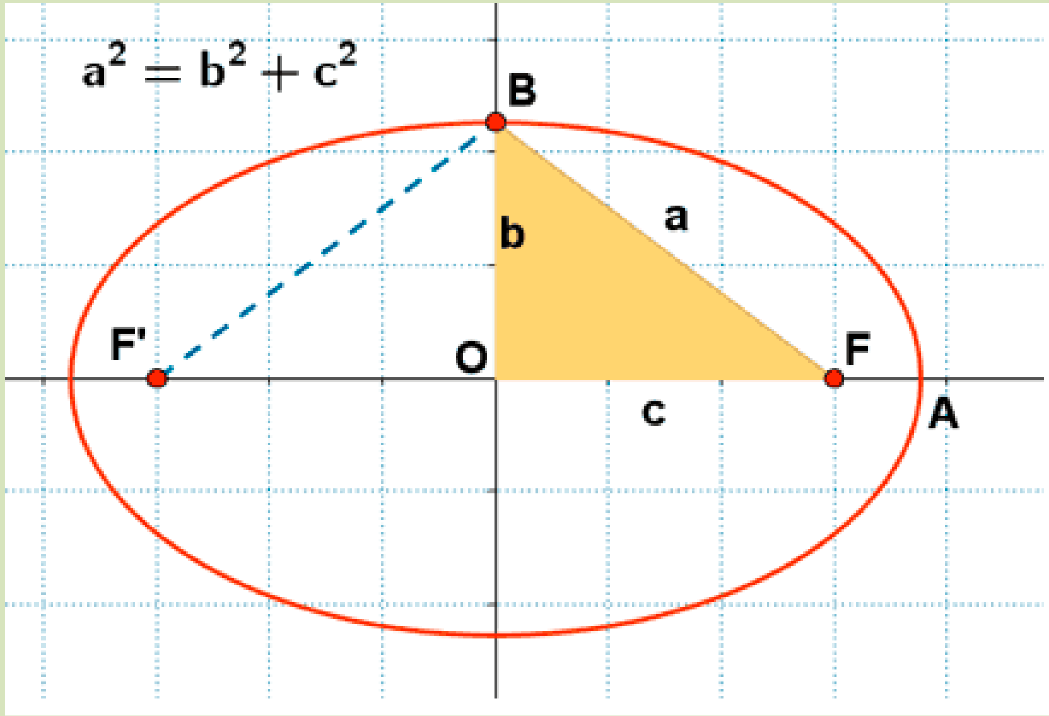
Vértices: son los puntos V_1, V_2, B_1 y B_2.



Eje menor: es el segmento B_1B_2 mide 2b.
Centro: es el punto medio del segmento V_1V_2.
Distancia Focal: Es la distancia entre los focos, mide 2c.



B_1
Eje menor
V_1
F_1
Eje mayor
F_2
V_2
a
c
2c
B_2



$$\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$$

$$\overline{BF} = \overline{BF'} \quad \Rightarrow \quad \overline{BF} = a$$

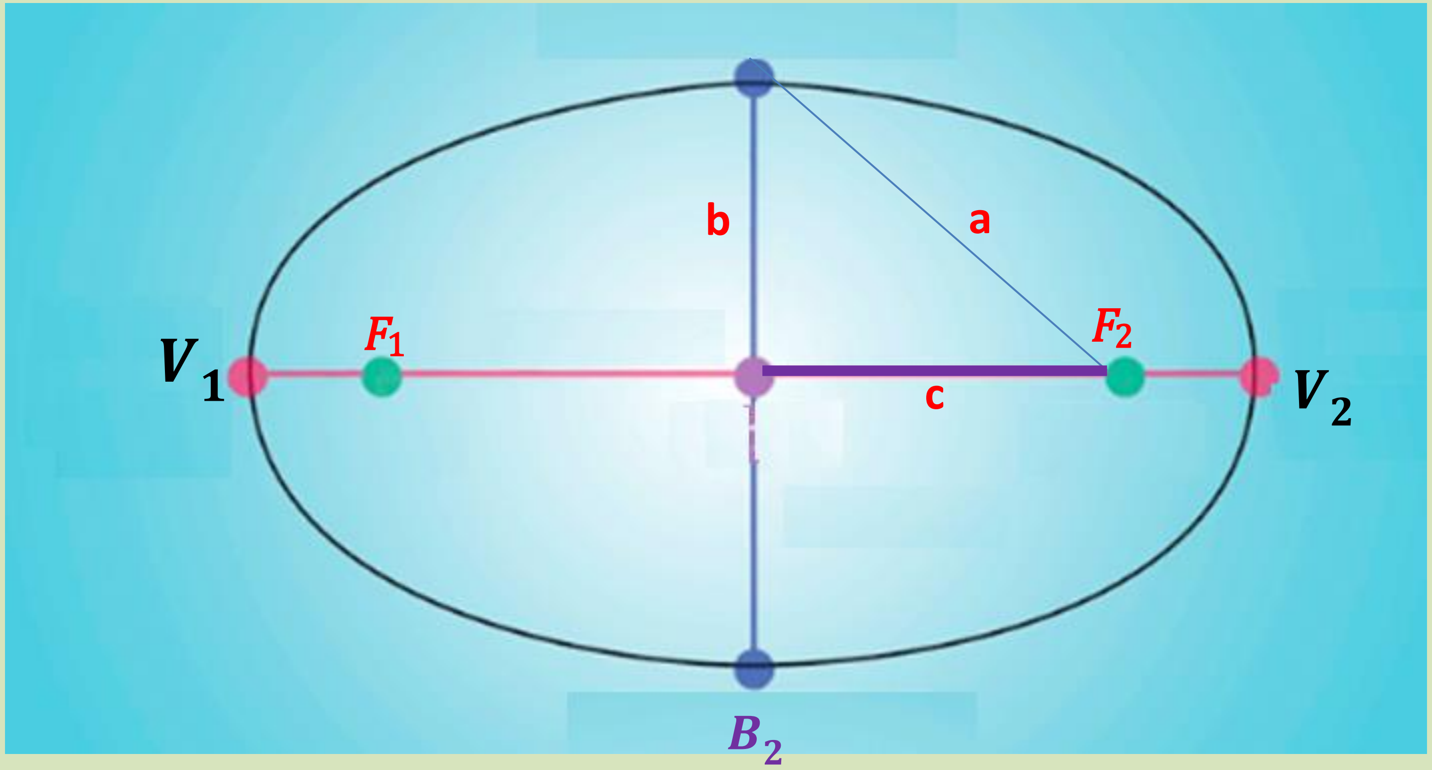
Por Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/lg_conica/teoria/elipse.html

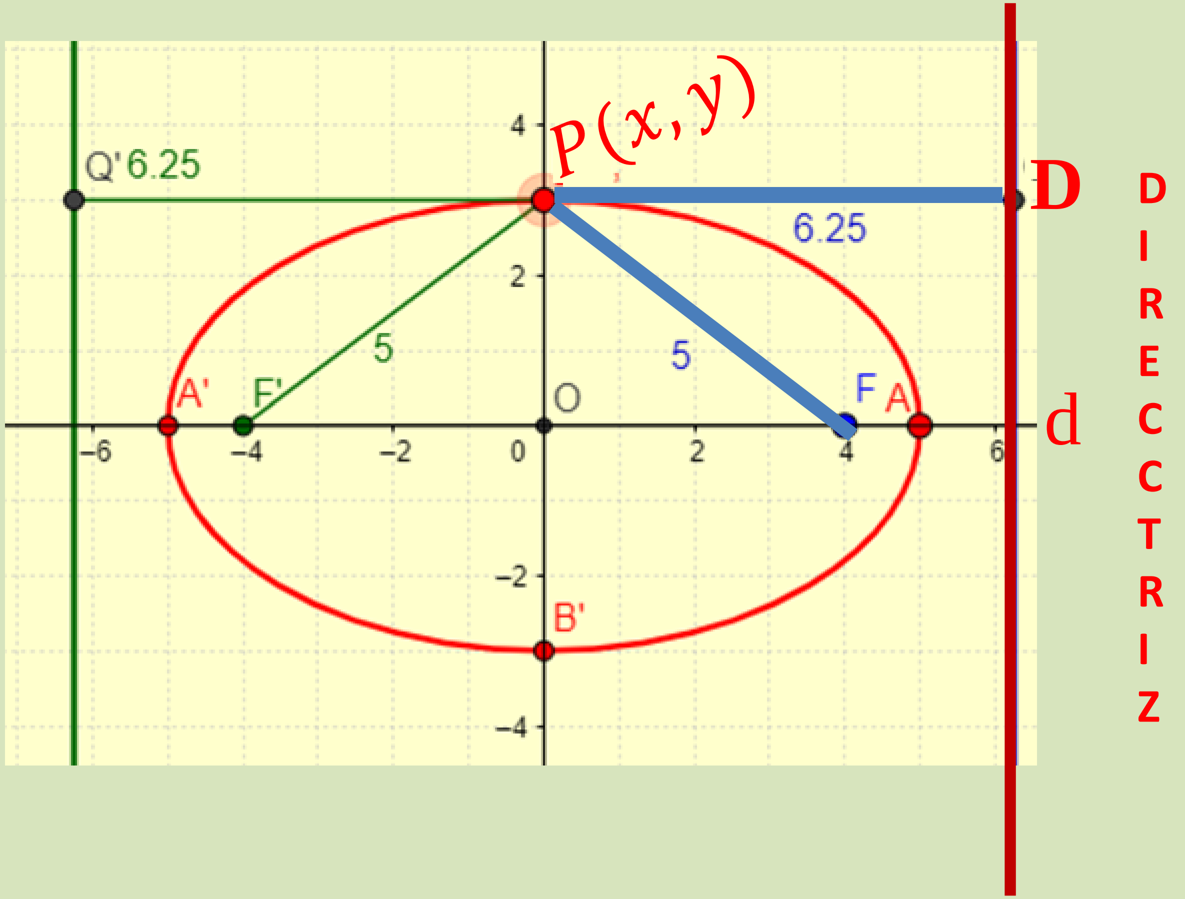


Relación entre a, b, c

$$a^2 = a^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

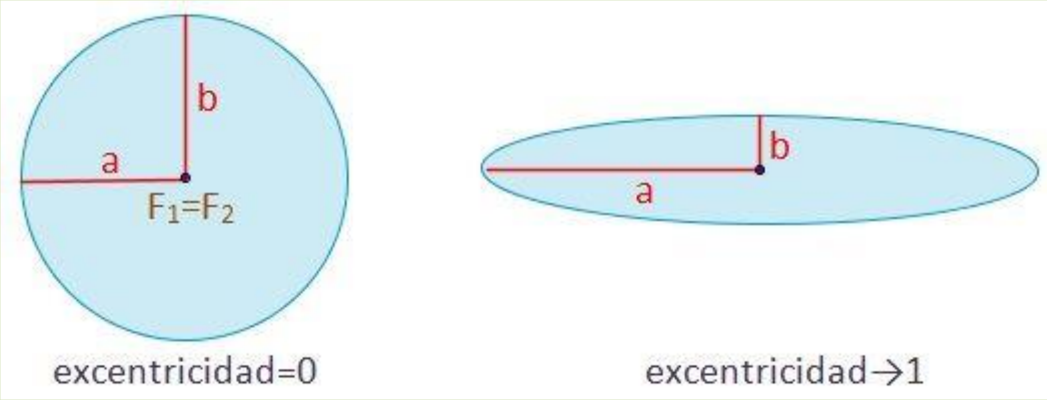


$$e = \frac{PF}{PD}$$

La recta dD es una de las 2 directrices de la elipse. Cada foco F de la elipse está asociado con una recta dD paralela al eje menor llamada directriz. La distancia de cualquier punto P de la elipse hasta el foco F es una fracción constante de la distancia PD.:

La excentricidad de una elipse también es el cociente entre la distancia focal c y el semieje mayor a:

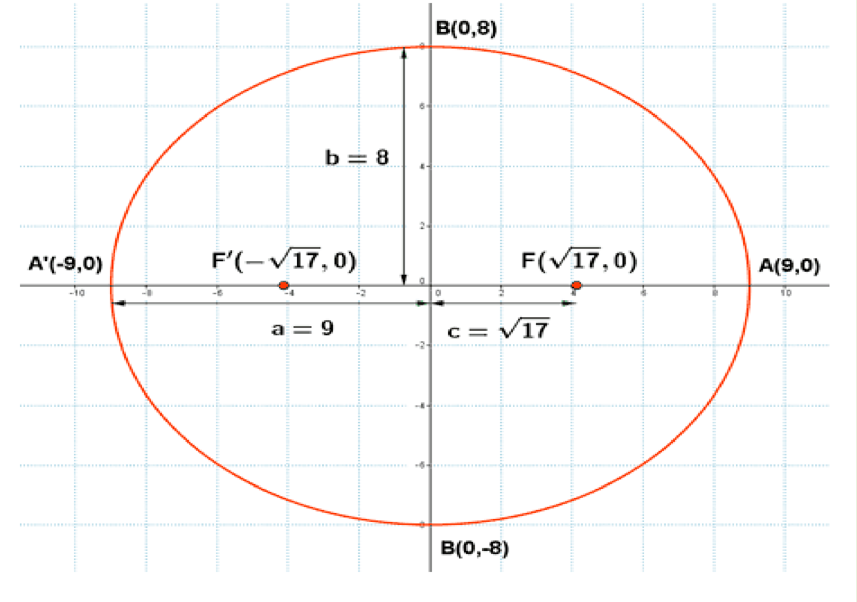
$$e = \frac{c}{a}$$



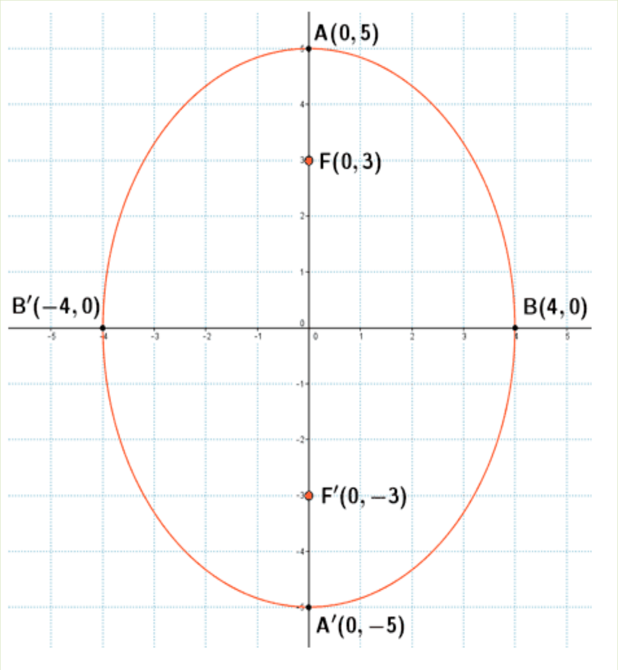
La excentricidad determina el grado de desviación de una cónica con respecto a una circunferencia. Determina la forma de la **elipse**, en el sentido de si se parece más a la circunferencia (más redondeada) o más alargada (si se aproxima a un segmento). Si la excentricidad se aproxima a cero se parece más a la circunferencia. Cuando la excentricidad crece y tiende a 1, la elipse se aproxima o se parece más a un segmento.

La excentricidad de una elipse es mayor que cero y menor que 1 (una fracción).

https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/excentricidad-elipse/



a> b



Elipse con los focos en el **eje x**:
Elipse en dirección x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a> b

$$\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$$

Elipse con los focos en el **eje y.**
Elipse en dirección y:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

a> b

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

a> b

Ejercicio #1

Dada la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$

Verificar si es una elipse y hallar todos sus elementos, graficarla.

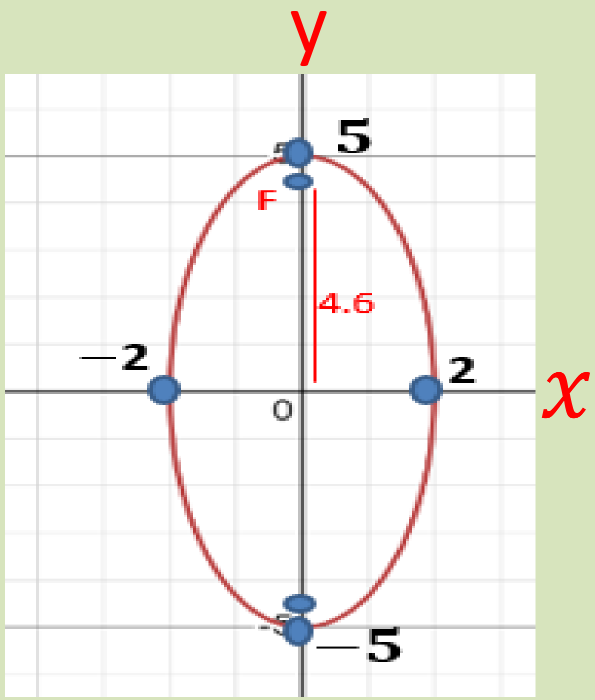
$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

$$25x^2 + 4y^2 = 1*100$$

$$\frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$a = 5$$
$$b = 2$$

Eje focal: es el eje y o lo que es lo mismo la recta $x = 0$.

Vértices: son los puntos V1 = (0,−5), V2(0, 5), B1 = (−3, 0) y B2 = (3, 0)

Eje mayor: es el segmento V1V2, mide 2a = 10

Eje menor: es el segmento B1B2, mide 2b = 4

Centro: es el punto C = (0, 0)

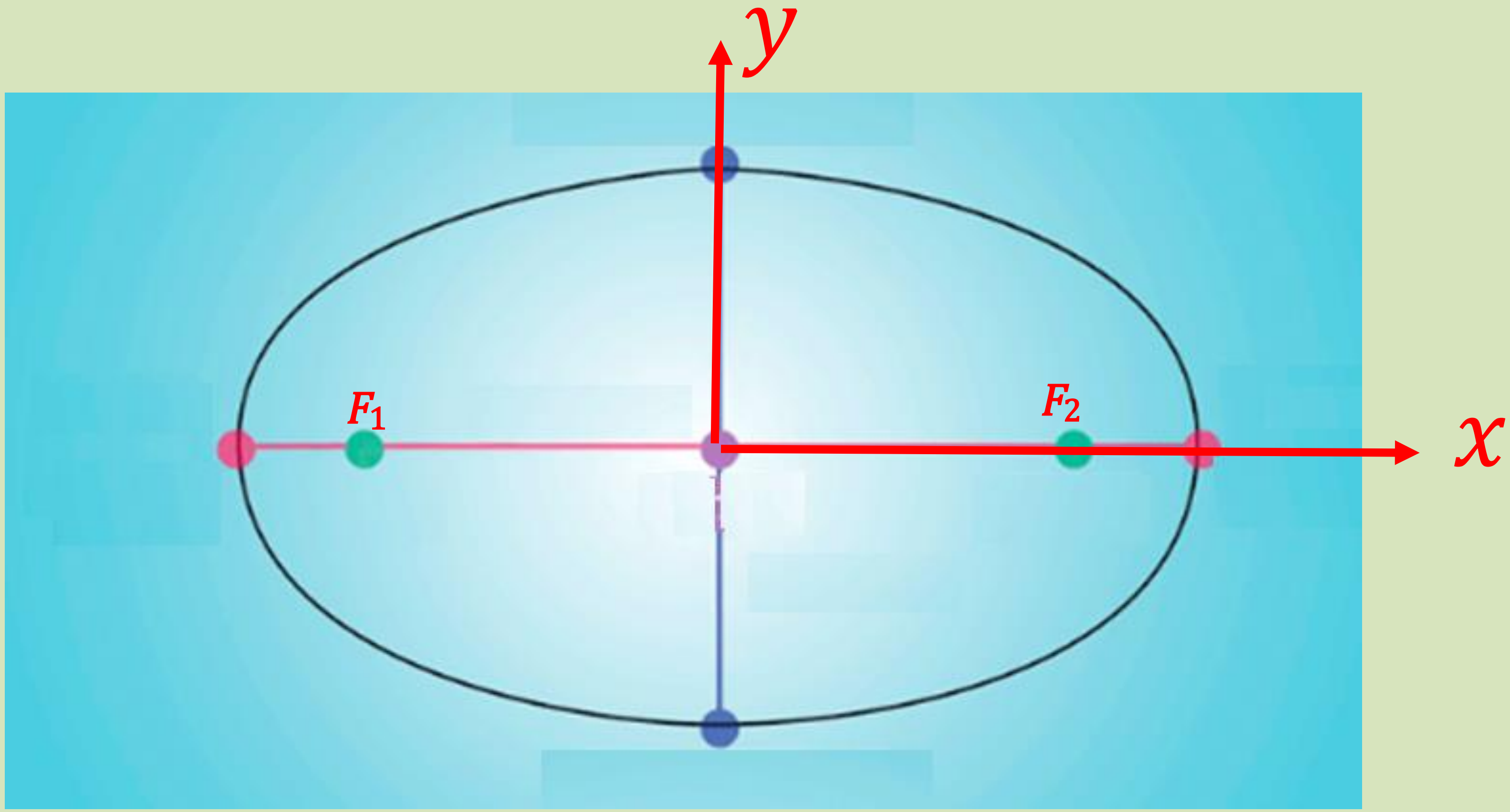
Distancia focal $c = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} = 4.6$

Traslado de curvas centradas en el origen hasta un punto cualquiera.

Hasta ahora hemos visto las curvas referenciadas al origen antiguo O(0,0) o a un nuevo origen Ó(0,0). Generalmente coincidiendo el centro de la elipse con el origen de coordenadas.

También estudiamos la traslación de los ejes coordenados viejos x, y, z a a unos nuevos, x', y', z'.

Ahora veremos el traslado de curvas desde el origen hasta un punto cualquiera $P(h, k)$, pero conservando la referencia del mismo origen. No cambio de ejes ni de sistema coordenado.



La curva y la ecuación de una elipse con centro O(0,0) se puede trasladar a un punto P(h, k) diferente del origen mediante la siguiente forma:

Translación de una elipse desde el origen O(0,0) ***a un punto*** $\mathrm{P}(h, k)$,
(conservando la referenciada al sistema viejo O(0,0).

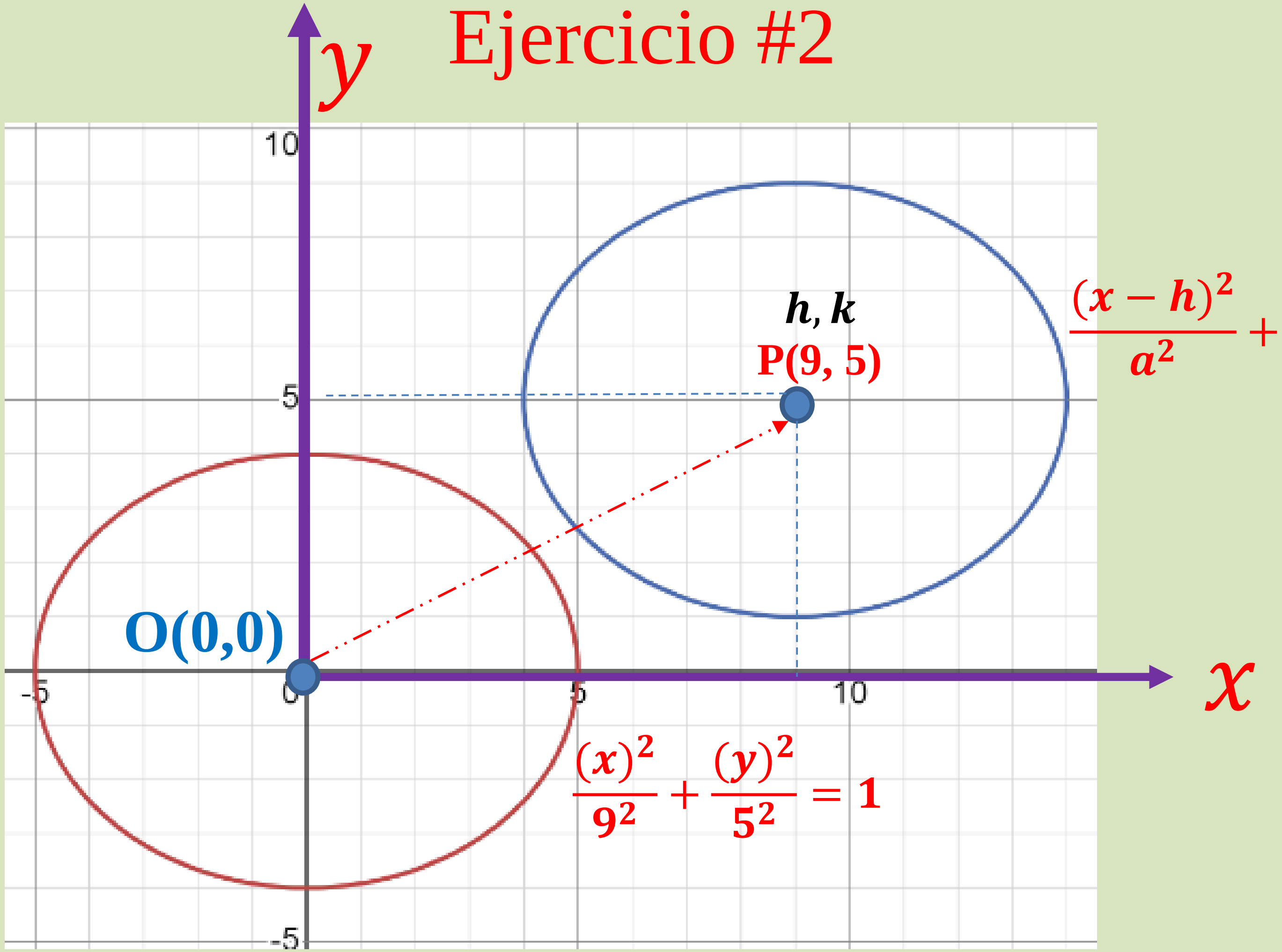
Si el centro de la elipse se pasa al punto $\mathrm{P}(h, k)$, la ecuación de la elipse con referencia al origen viejo es:

es de la fórmula

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Traslado de la elipse desde el origen hasta un punto $\boldsymbol{P(h, k)}$

Ejercicio #2



$h = 9$

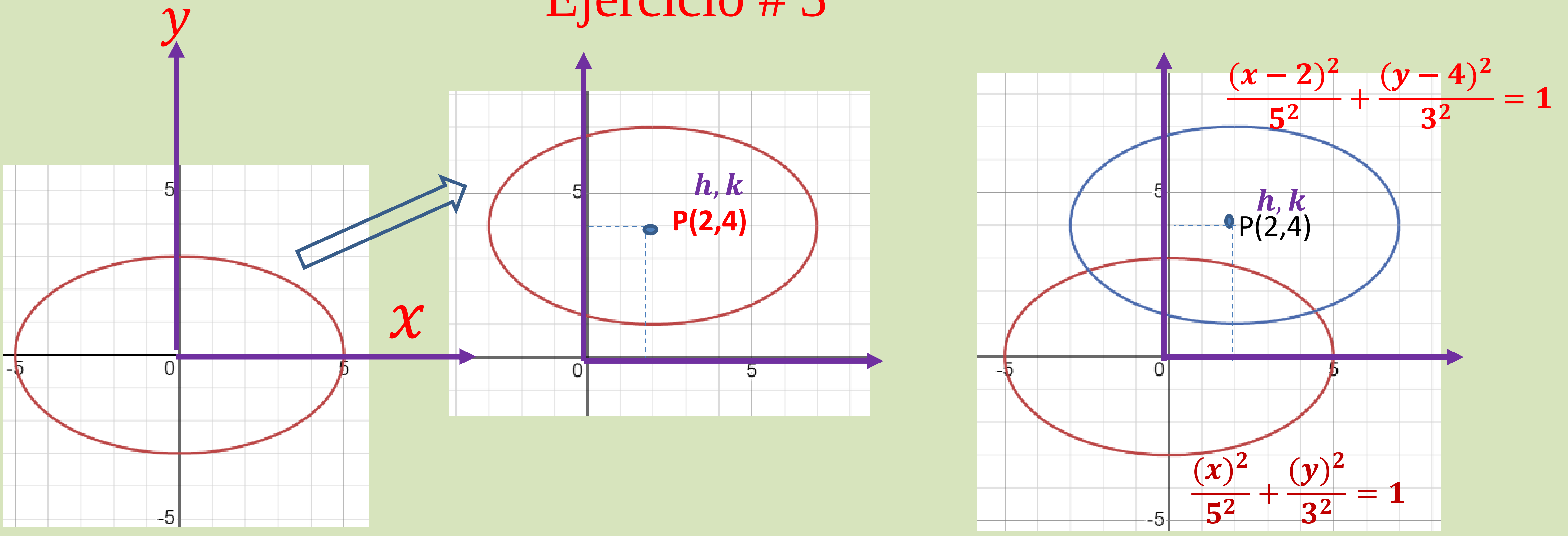
$k = 5$

$$\frac{(x)^2}{9^2}+\frac{(y)^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-9)^2}{9^2}+\frac{(y-5)^2}{5^2}=1$$

Traslado de la elipse de (0,0) al punto P(9,5)

https://www.mathway.com/es/Graph

Ejercicio # 3

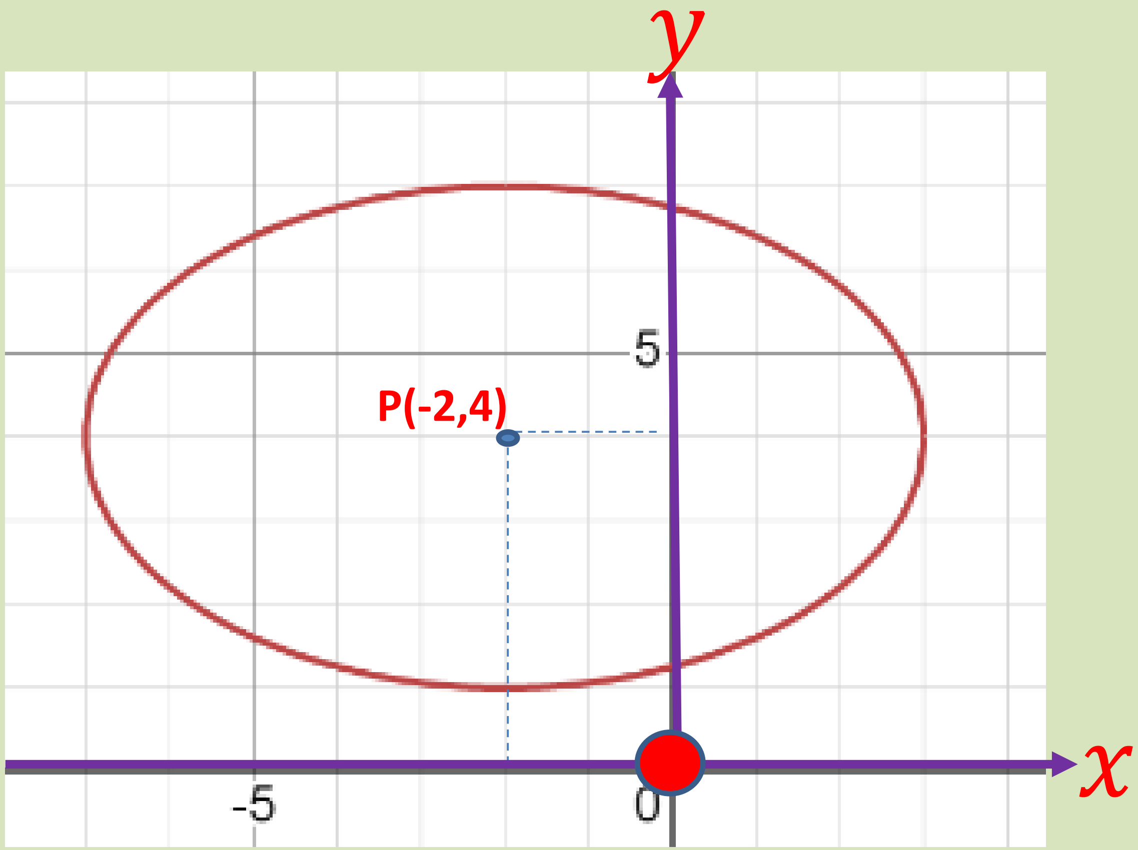


$$\frac{(x)^2}{5^2}+\frac{(y)^2}{3^2}=1 \Longrightarrow \frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-4)^2}{3^2}=1$$

Traslado de la elipse de (0,0) al punto P(2,4)

https://www.mathway.com/es/Graph

Ejercicio #4

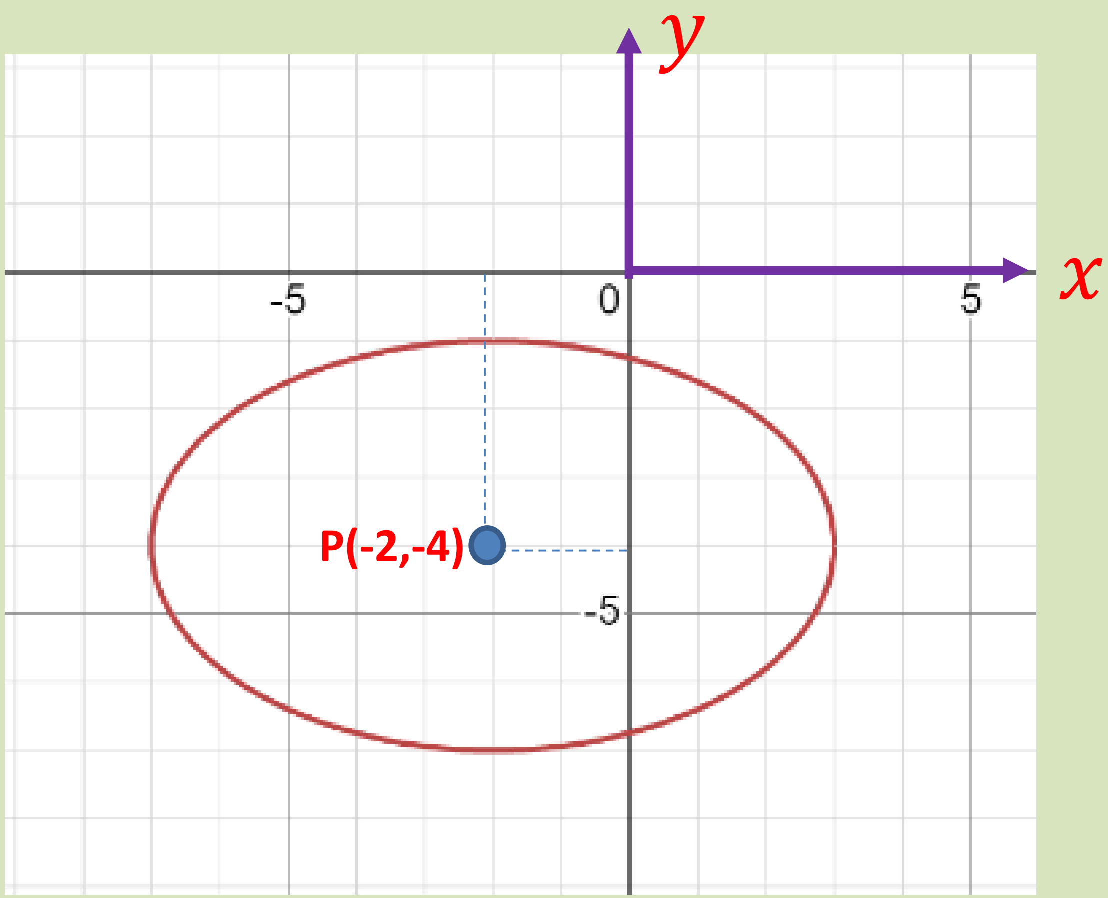


$$\frac{(x-(-2))^2}{5^2}+\frac{(y-4)^2}{3^2}=1$$

Traslado de la elipse de (0,0) al punto P(-2,4)

https://www.mathway.com/es/Graph

Ejercicio # 5

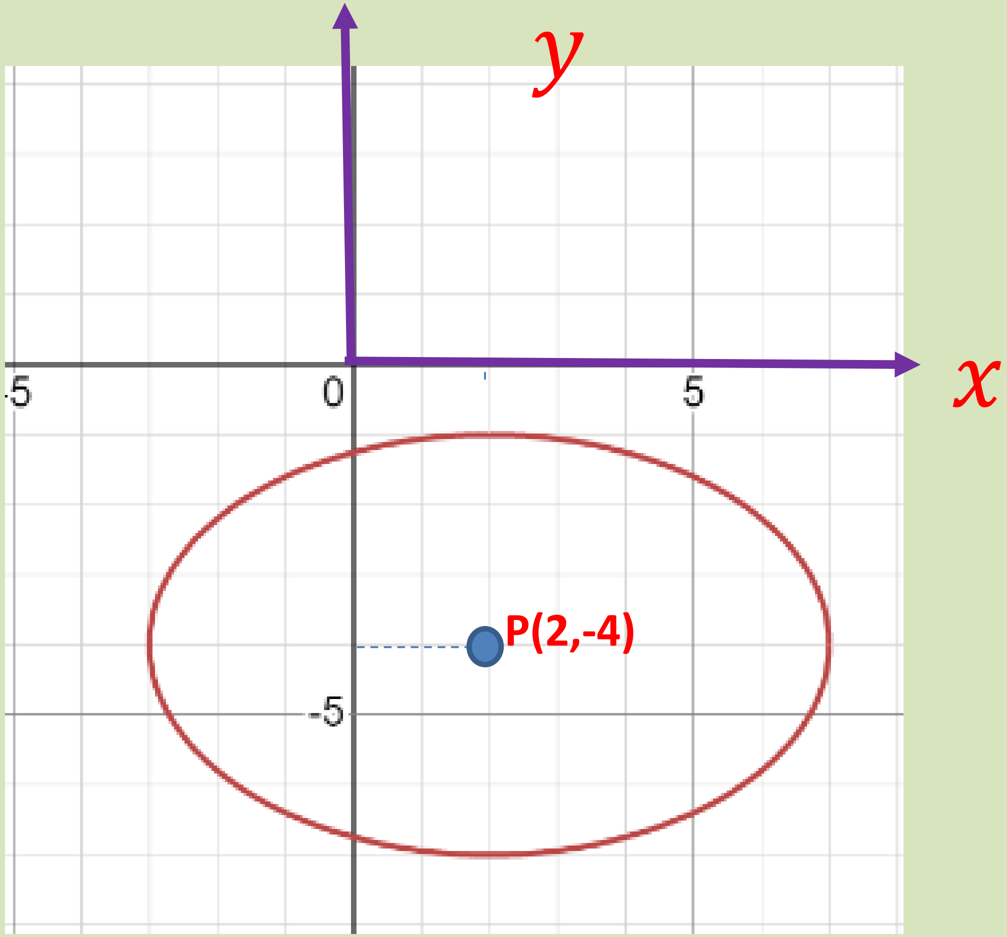


$$\frac{(x-(-2))^2}{5^2}+\frac{(y-(-4))^2}{3^2}=1$$

Traslado de la elipse de (0,0) al punto P(-2,-4)

https://www.mathway.com/es/Graph

Ejercicio # 6



$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-(-4))^2}{3^2}=1$$

Traslado de la elipse de (0,0) al punto P(2,-4)

https://www.mathway.com/es/Graph

Ejercicio # 7

$$\mathbf{25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0}$$

Determinar si es una elipse, hipérbola o parábola. Hallar todos sus elementos. Graficarla

$$25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$$

Agrupo términos en x
Agrupo términos en y

$$\underline{25x^2 - 50x} + \underline{9y^2 + 36y} - 164 = 0$$

Factorizo con corchetes

$$25\{x^2 - 2x\} + 9\{y^2 + 4y\} - 164 = 0$$

Sumo +1 y resto -1

$$25\{\, x^2 - 2x + 1 - 1\} + 9\,\{y^2 + 4y + 4 - 4\} - 164 = 0$$

$$25\{(\underline{x^2 - 2x + 1}) - 1\} + 9\,\{(\underline{y^2 + 4y + 4}) - 4\} - 164 = 0$$

$\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

Trinomio cuadrado perfecto

Trinomio cuadrado perfecto

$$25\{(x-1)^2\ -1\}\ +\ 9\,\{(y+2)^2-4\}\ -164=0$$

Destruyo corchetes

$$25\,(x-1)^2\ -25\ +\ 9\,(y+2)^2-36\ -164=0$$

Agrupo números

$$25\,(x-1)^2\ +\ 9\,(y+2)^2-225=0$$

$$25\,(x-1)^2 + 9\,(y+2)^2 - 225 = 0$$

$$25\,(x-1)^2 + 9\,(y+2)^2 = 225$$

$$25\,(x-1)^2 + 9\,(y+2)^2 = 225*1$$

225 pasa a dividir cada término

$$\frac{25\,(x-1)^2}{25*9}+\frac{9\,(y+2)^2}{25+9}=1$$

Simplifico

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-(-2))^2}{5^2}=1$$

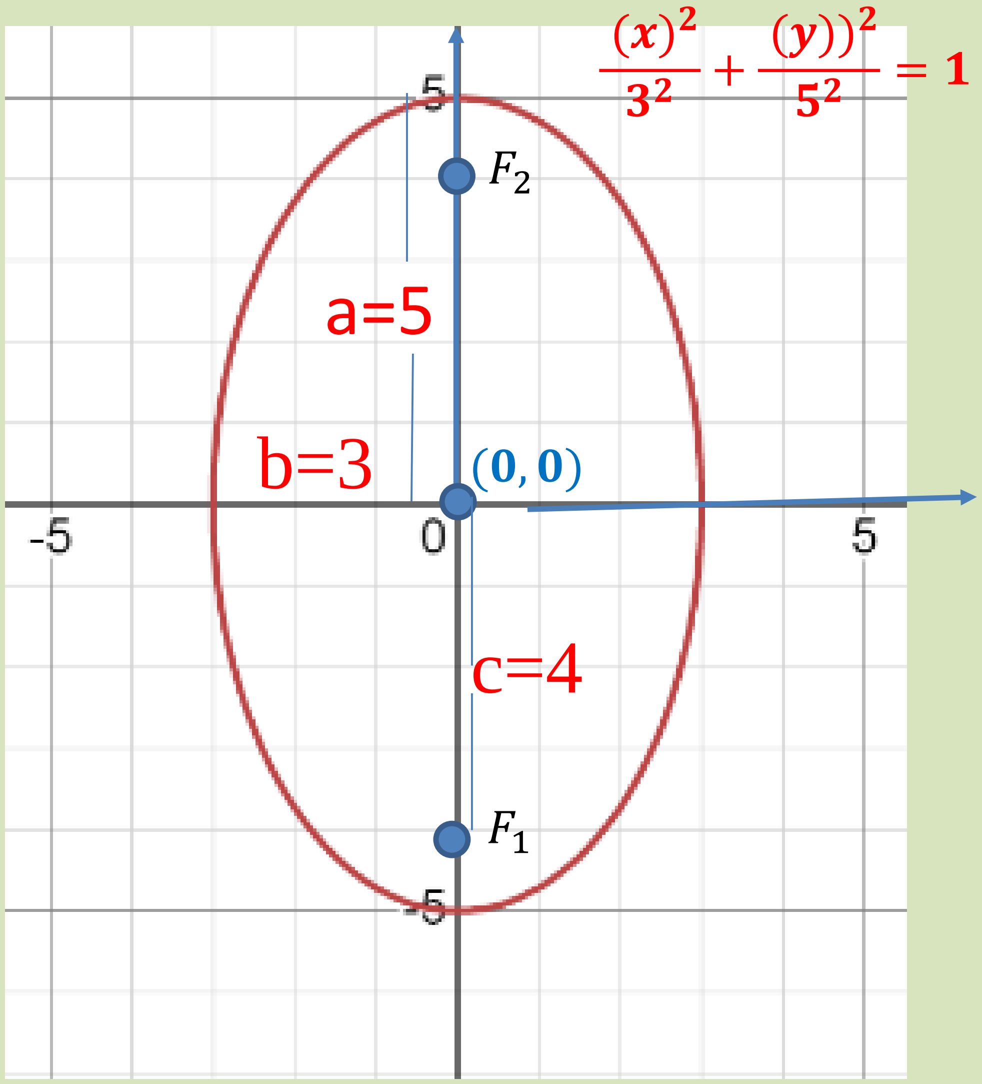
b=3 a=5

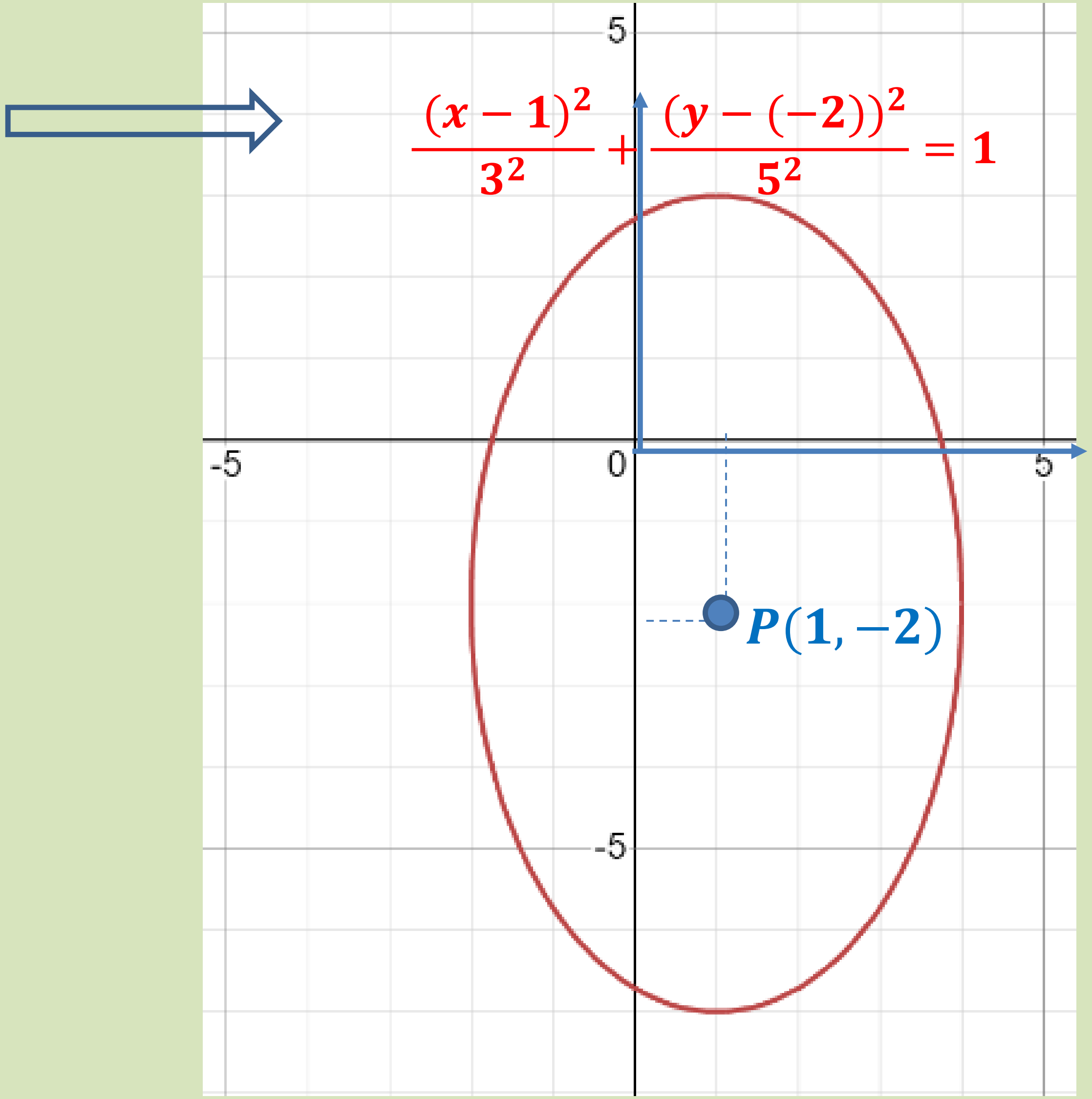
Ecuación de una elipse vertical con centro en P(1-2).

a=5 Semieje mayor

b=3 Semieje menor

c=$\sqrt{25-9}$ =4





Elipse vertical con centro en P(0,0).

Elipse vertical con centro en P(1-2).

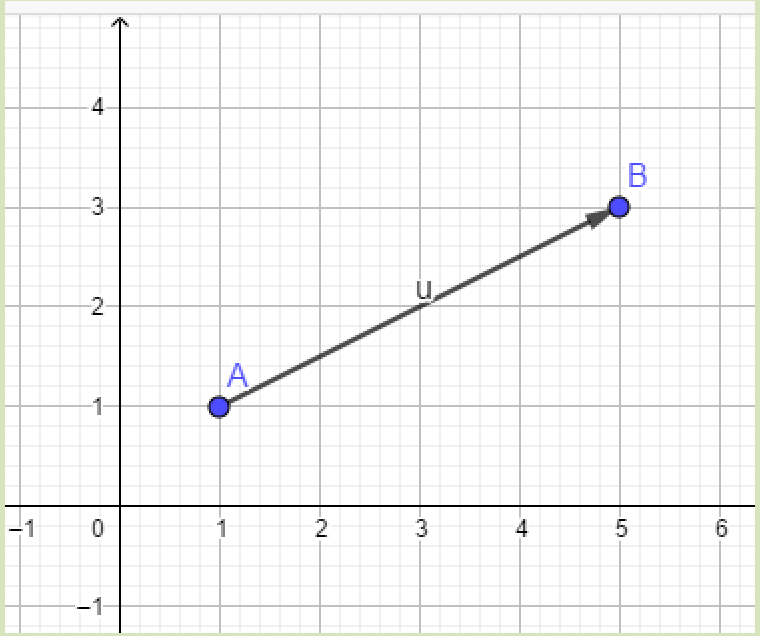
La elipse tiene eje mayor vertical con longitud $2a = 10$ y eje menor horizontal con longitud $2b = 6$, la distancia focal es $2c = 8$.

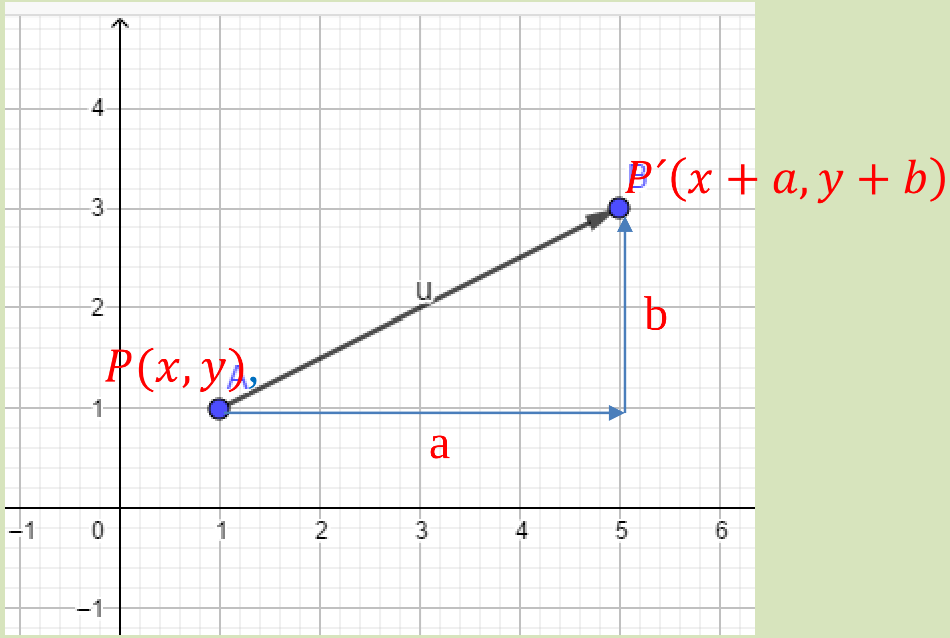
$V1 = (h, k - a) = (1,-7)$, $V2 = (h, k + a) = (1, 3)$,

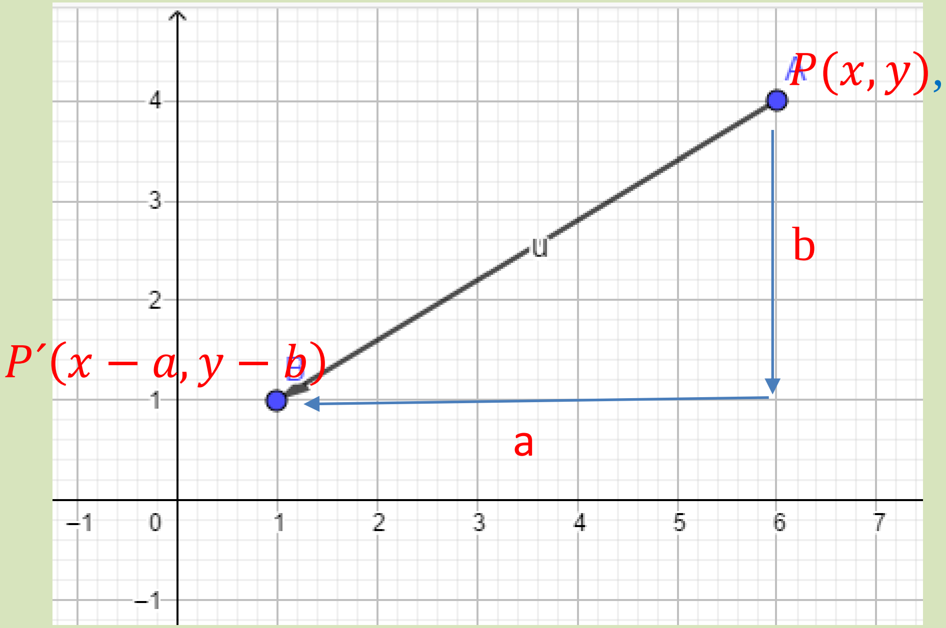
$B1 = (h - b, k) = (-2,-2)$ y $B2 = (h + b, k) = (4,-2)$.

Los focos: $F1 = (h, k - c) = (1,-6)$ y $F2 = (h, k + c) = (1, 2)$

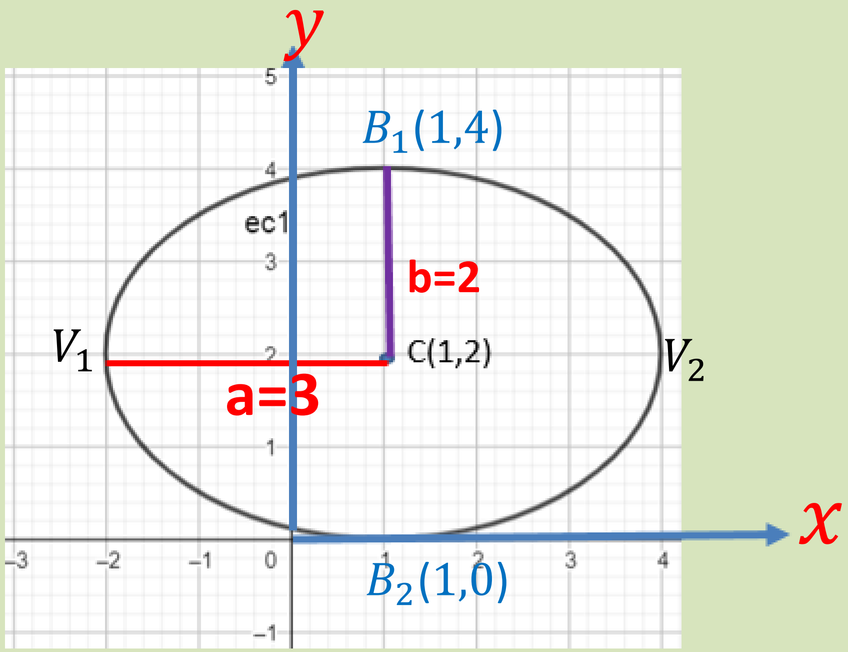
Traslación de un punto $P(x, y)$







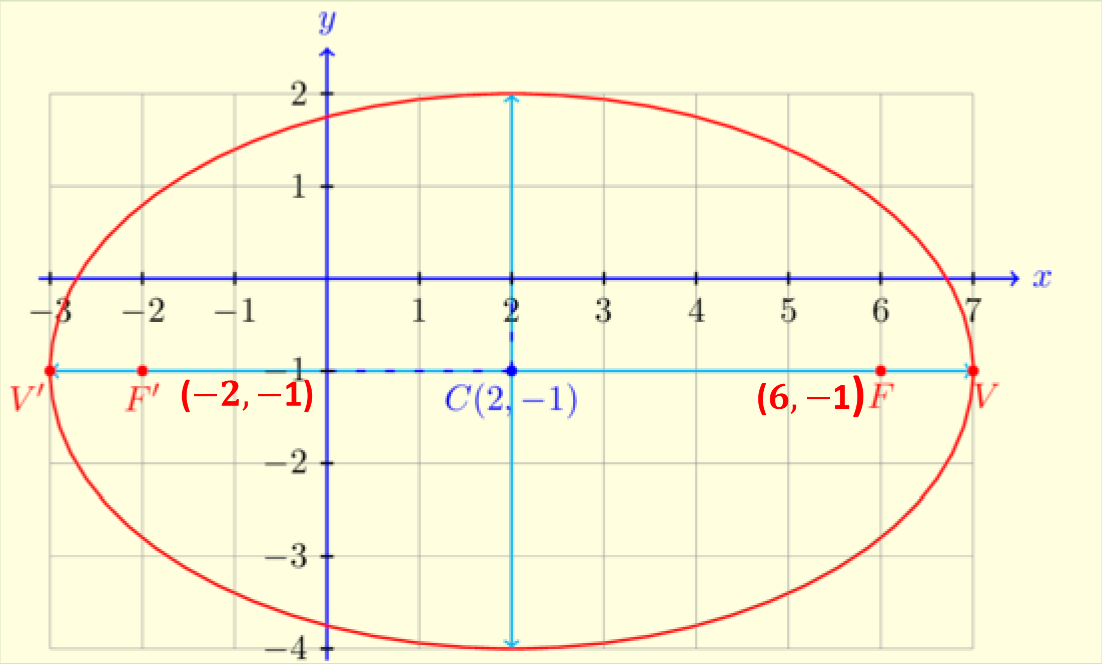
Para trasladar un punto $P(x, y)$, una distancia a hacia la derecha, y una distancia b hacia la arriba use $P(x + a, y + b)$. Si es hacia la izquierda y hacia abajo, use: $P(x − a, y − b)$



a$>b$

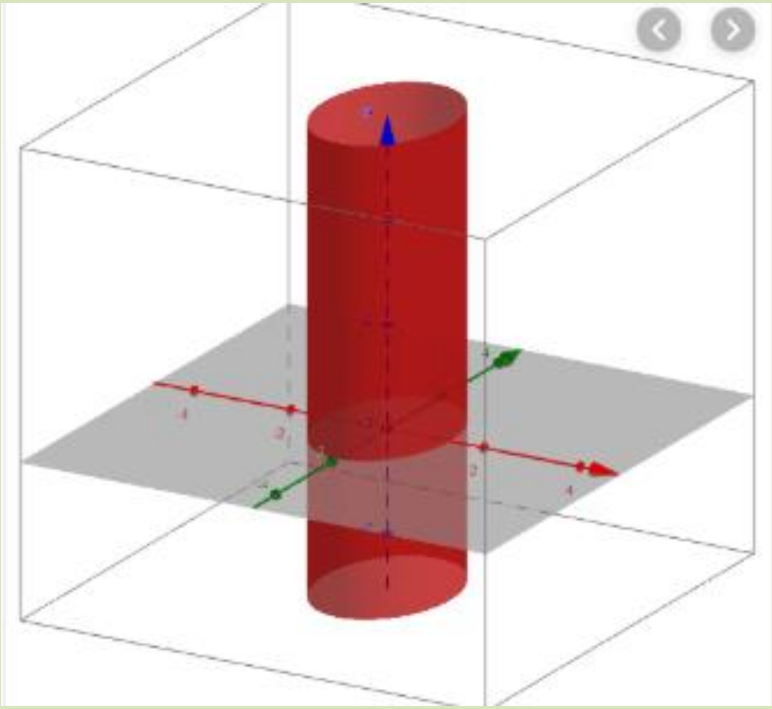
$V_1(1-a,k)$= $V_1(1-3,2)$= $V_1(-2,2)$ $V_2(1+a,k)$= $V_2(1+3,2)$= $V_2(4,2)$

$B_1(1,\ 2+2,)$= $B_1(1,4)$ $B_2(1,\ 2-2,)$= $B_2(1,0)$

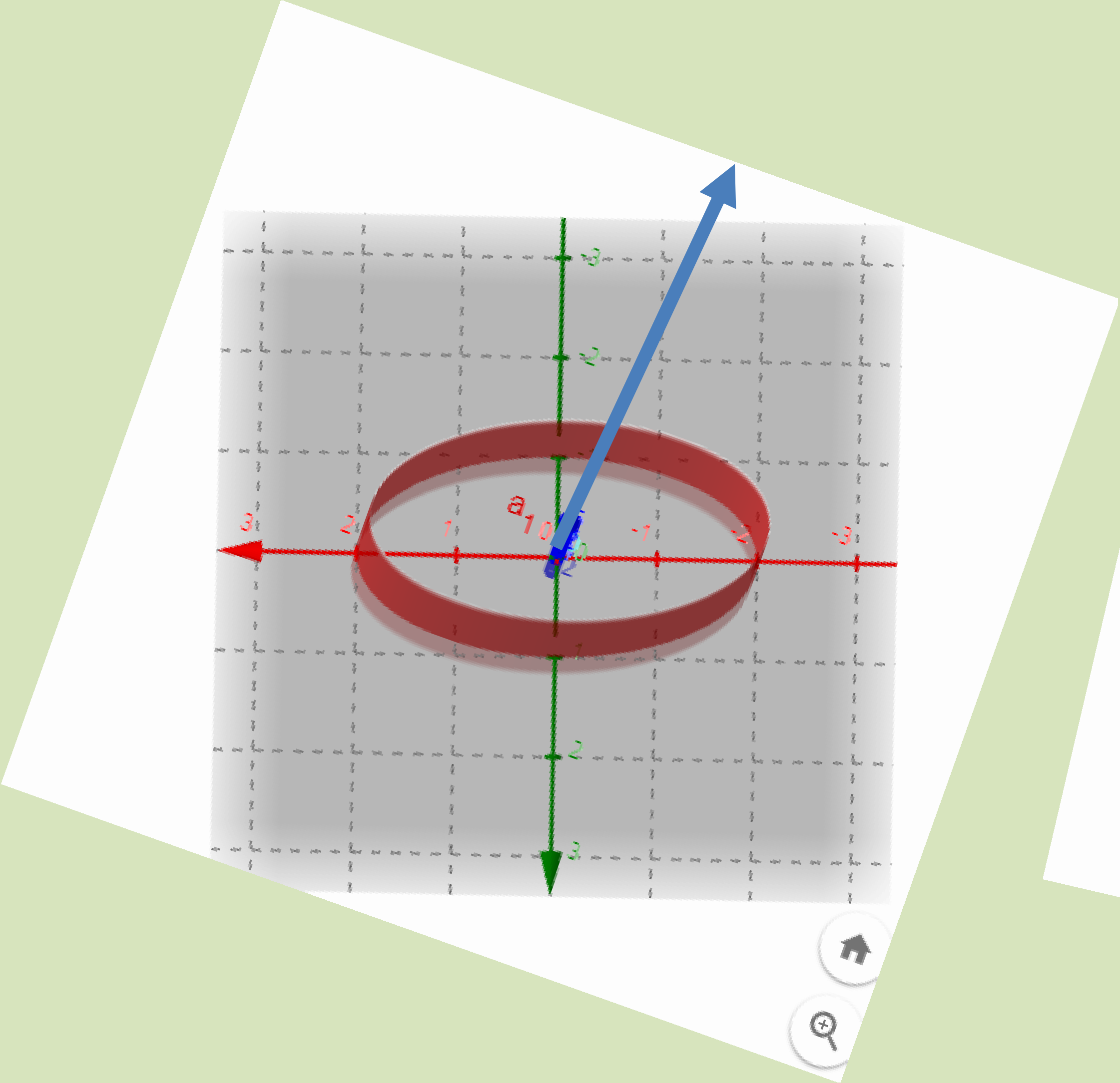


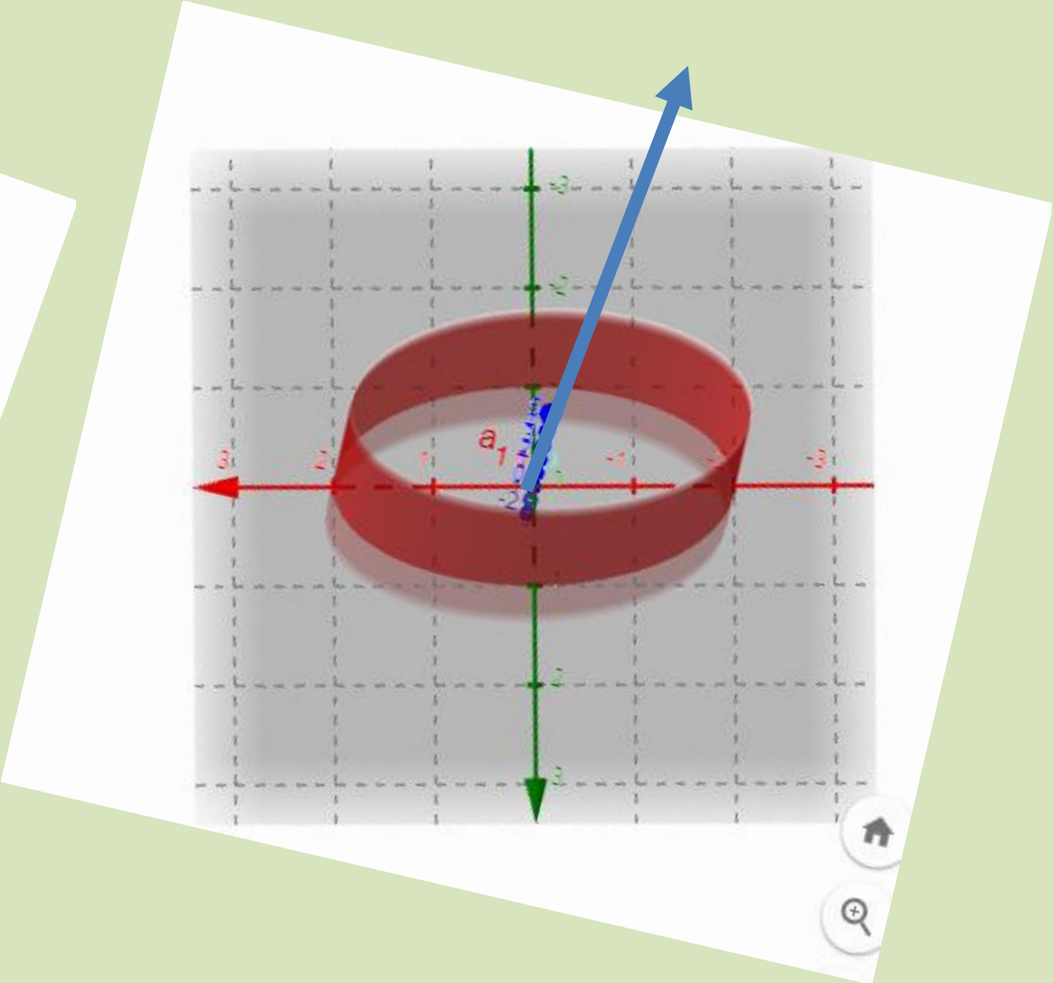
$F'(2-4,-1)=$ **$F'(-2,-1)$**

$F(2+4,-1)=$ **$F(6,-1)$**

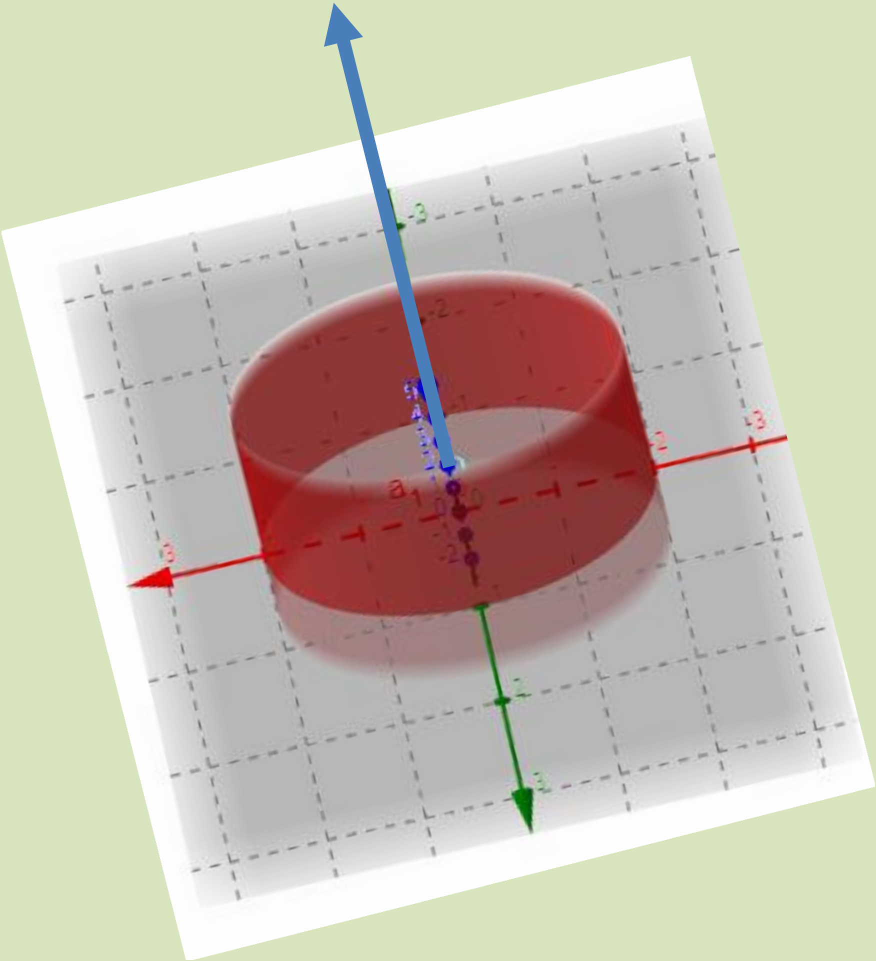


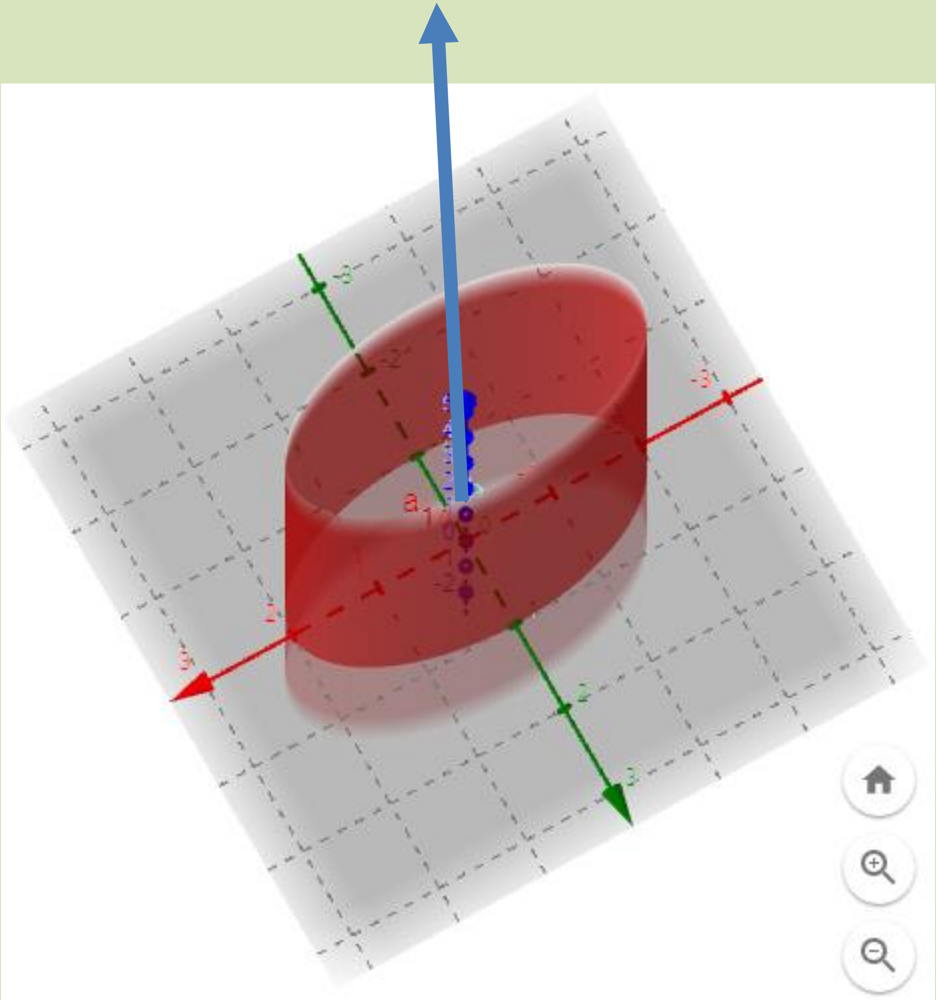
Superficie Elíptica: cilíndros elípticos



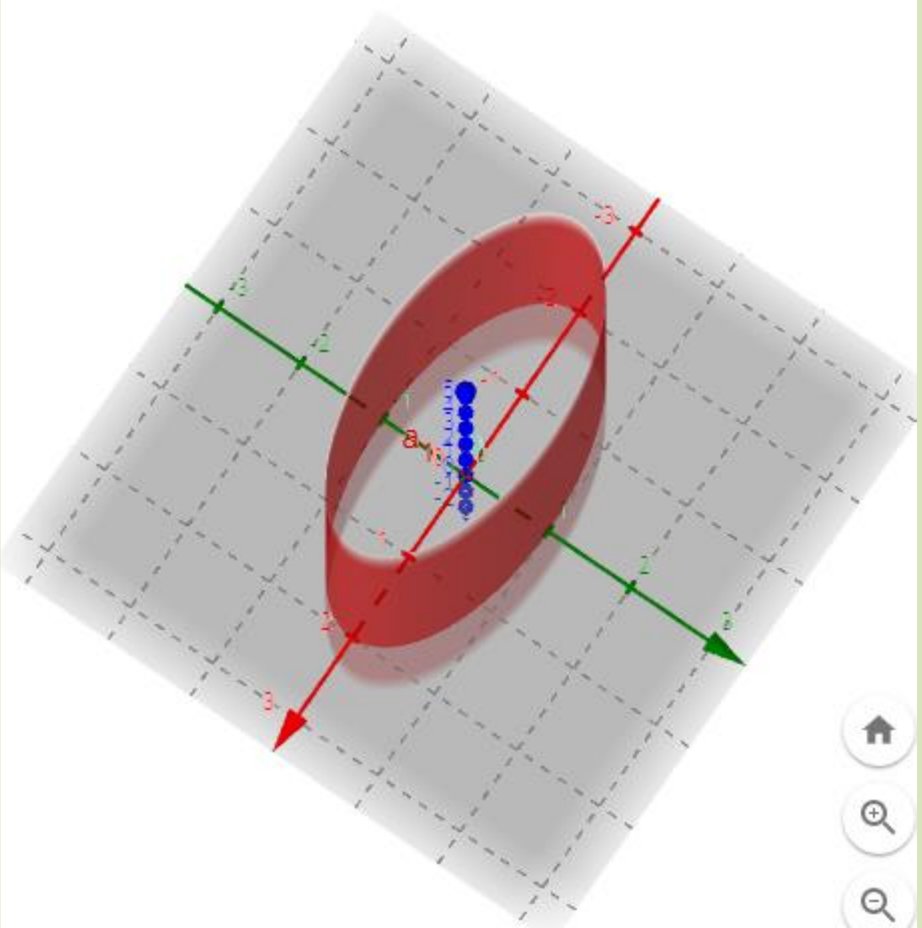


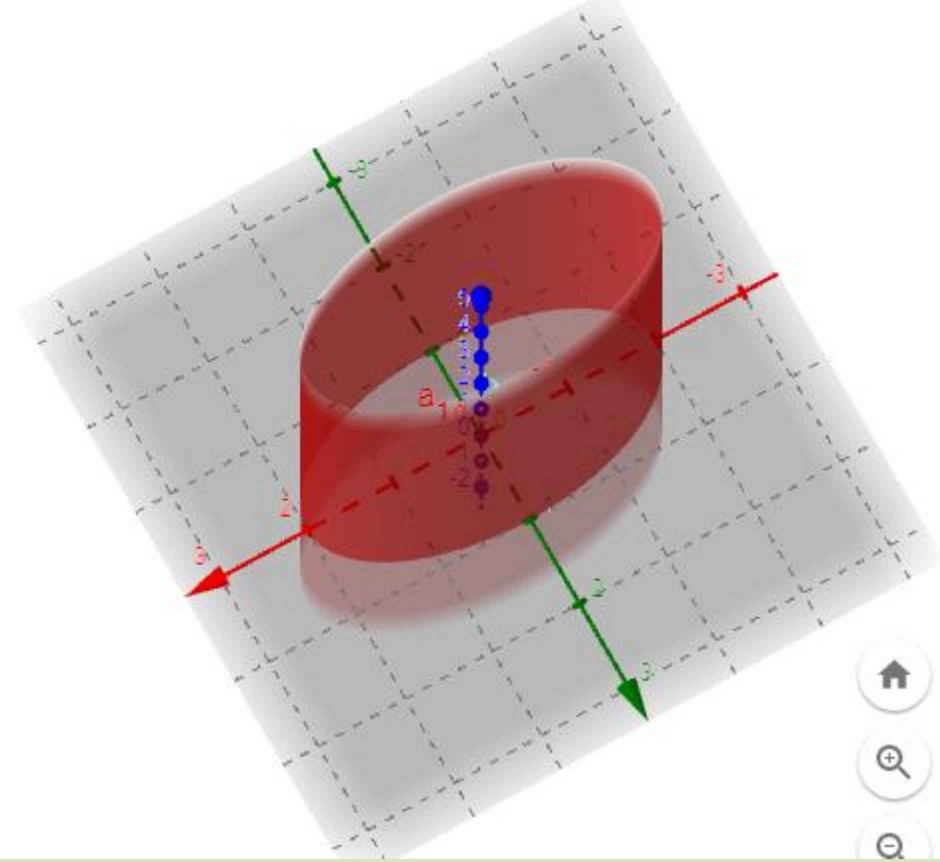
Superficie Elíptica: cilíndros elípticos





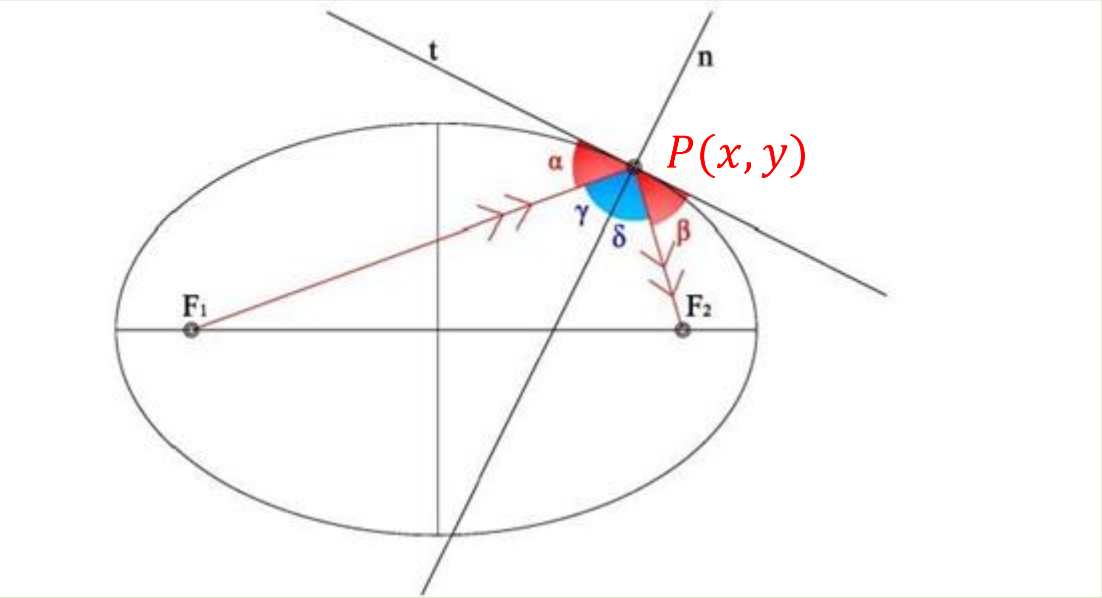
Superficie Elíptica: cilíndros elípticos





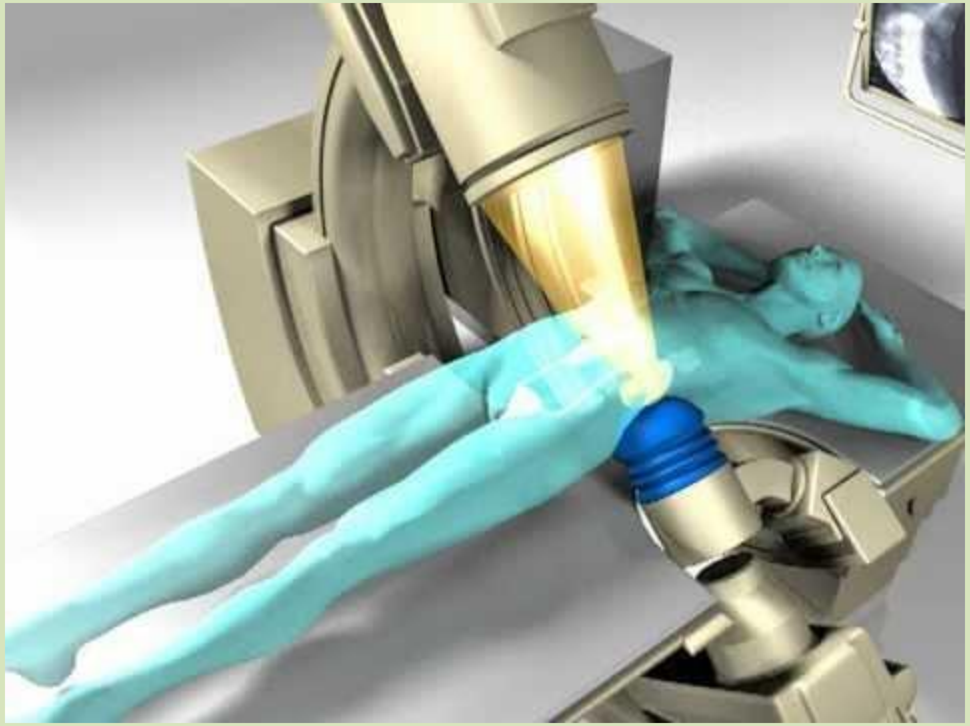
Superficie Elíptica: cilíndros elípticos

Propiedades especiales de la Elipse



La elipse tiene una propiedad muy interesante: cualquier rayo que salga de un foco, pega en la elipse y se refleja exactamente en el otro foco. Si por ejemplo, usted quisiera iluminar cierta parte de un piso a partir de un foco F_1, bastaría enviar el rayo a la parte superior y se reflejaría exactamente en el otro foco. Lo mismo para una señal sonora.

http://matematicasenelmundo.cicainte.com.mx/2017/11/23/las-conicas-en-la-salud-elipse-como-alternativa-medica-radical/



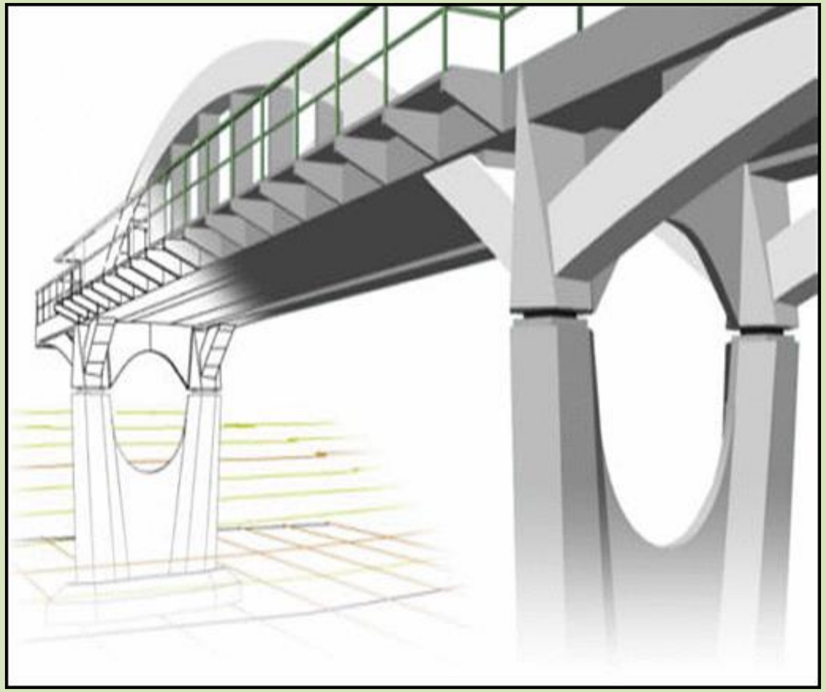
https://www.youtube.com/watch?v=GczJ9lxuH8w

Esta propiedad reflexiva tiene implicaciones médicas, por ejemplo en el tratamiento de los cálculos renales utilizando ultrasonido o rayos laser, para disolver las piedras renales y transformarlas en arena o en cálculos pequeños para que puedan ser eliminadas por el paciente, a ésta técnica se le conoce como litotricia.

Estadio en la ciudad de Ciudad: Saint-Denis en Francia.

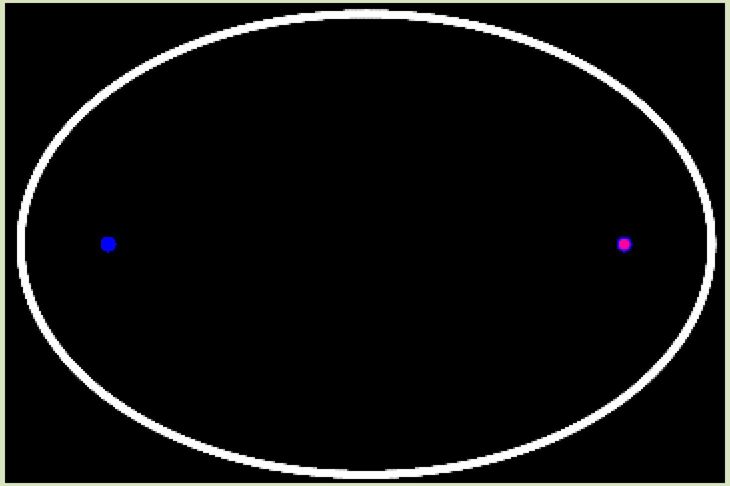
También se emplea en la arquitectura. Para el diseño de edificios especiales, estadios, etc.

https://monkeysdigital.com.mx/noticias/estadios-la-eurocopa-francia-2016/



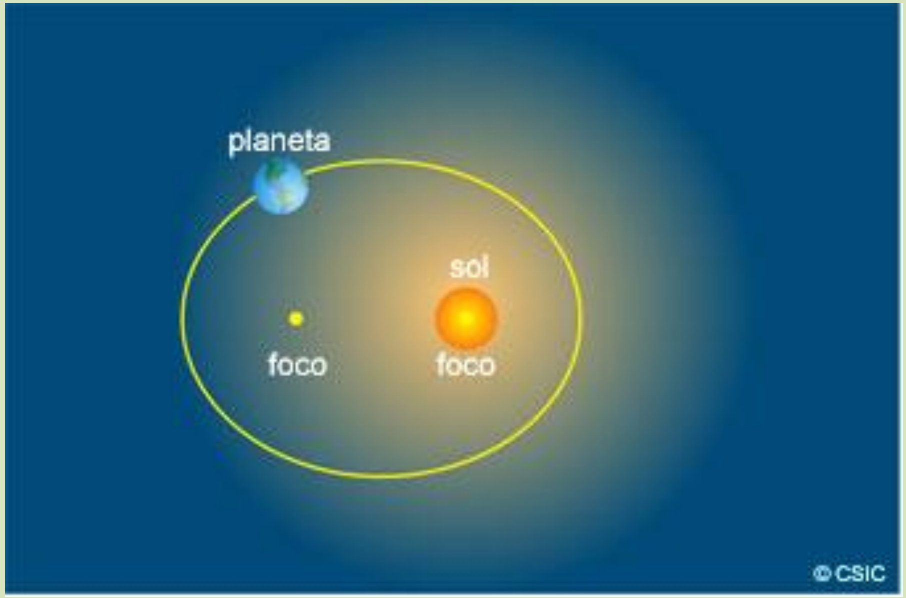
Para diseño de Puentes, ya que se puede distribuir el peso de una forma adecuada.

https://co.pinterest.com/pin/389842911476763899/?lp=true



https://www.taringa.net/posts/imagenes/18262660/30-Gifs-que-te-ensenan-matematicas-mejor-que-tu-maestro.html

Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos de luz y sonido, pues la emisión, de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.



Las órbitas de planetas como la Tierra son elípticas donde un foco corresponde al Sol. Además este razonamiento se aplicó e pun principio a las órbitas de los átomos.

http://museovirtual.csic.es/salas/universo/universo10.htm

Debido a la resistencia del viento, las trayectorias que realizan los aviones cuando hacen viajes circulares se vuelven elípticas.

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/DirectricesElipseHiperbola.html

http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/lg_conica/teoria/elipse.html

Traslación y giro de la elipse

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/TraslacionGiroElipse.html

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/index_conicas.html