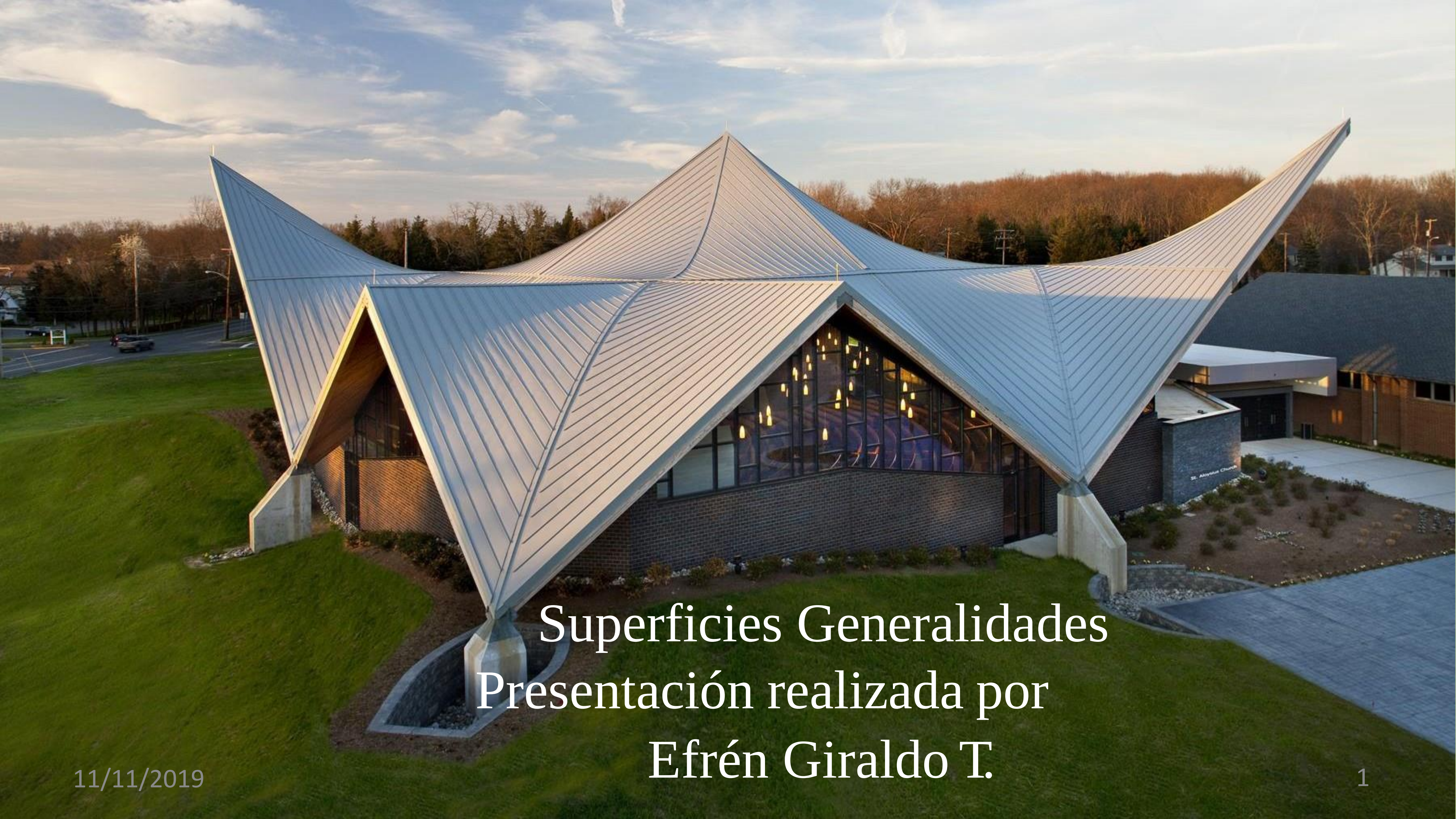


Superficies Generalidades

Presentación realizada por

Efrén Giraldo T.

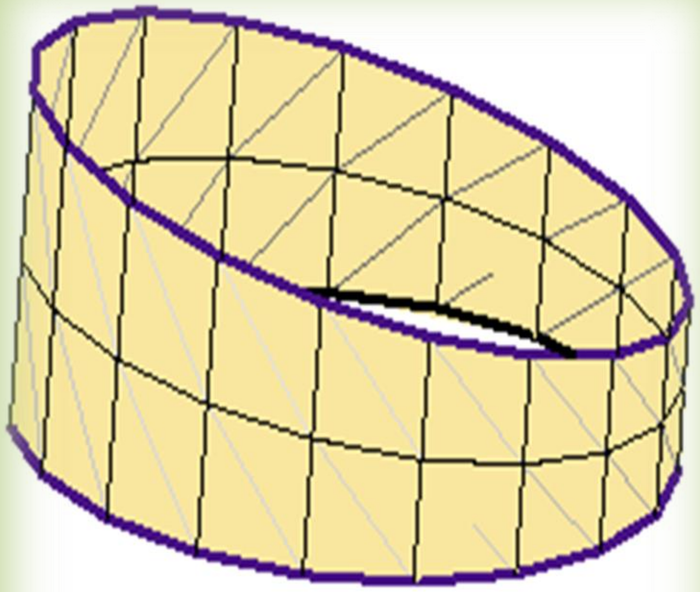
❖MISVALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

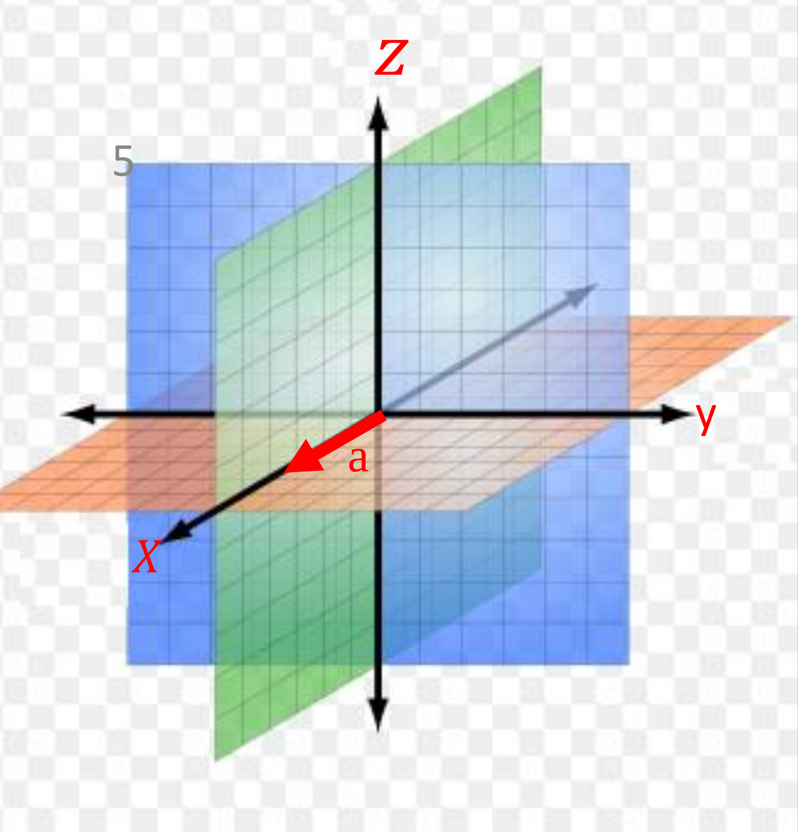
Enail: hegiraldo2@Gmail.com

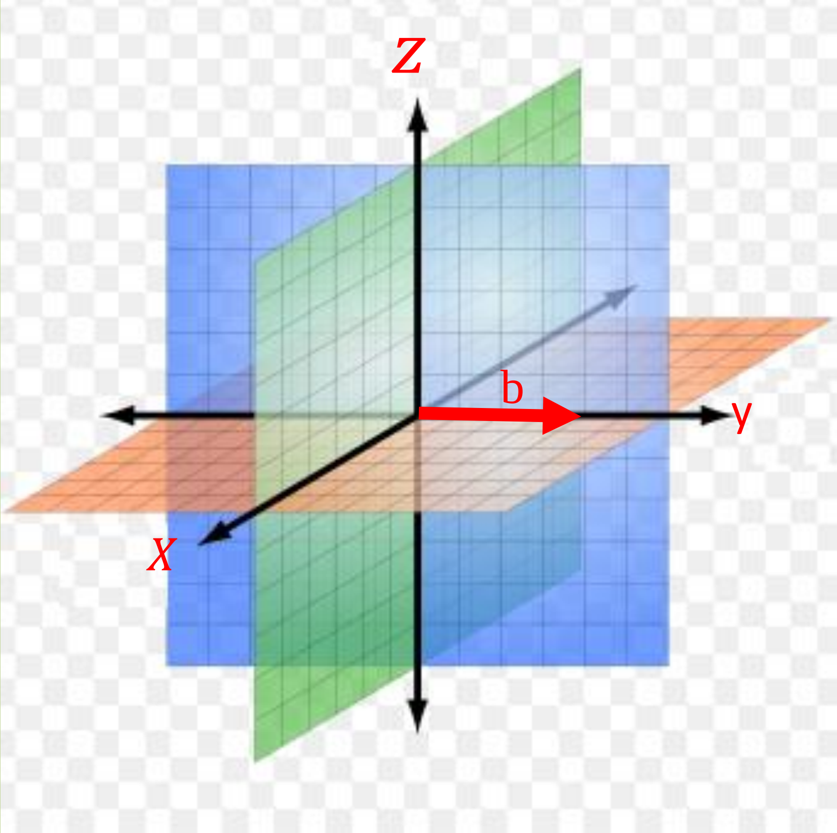


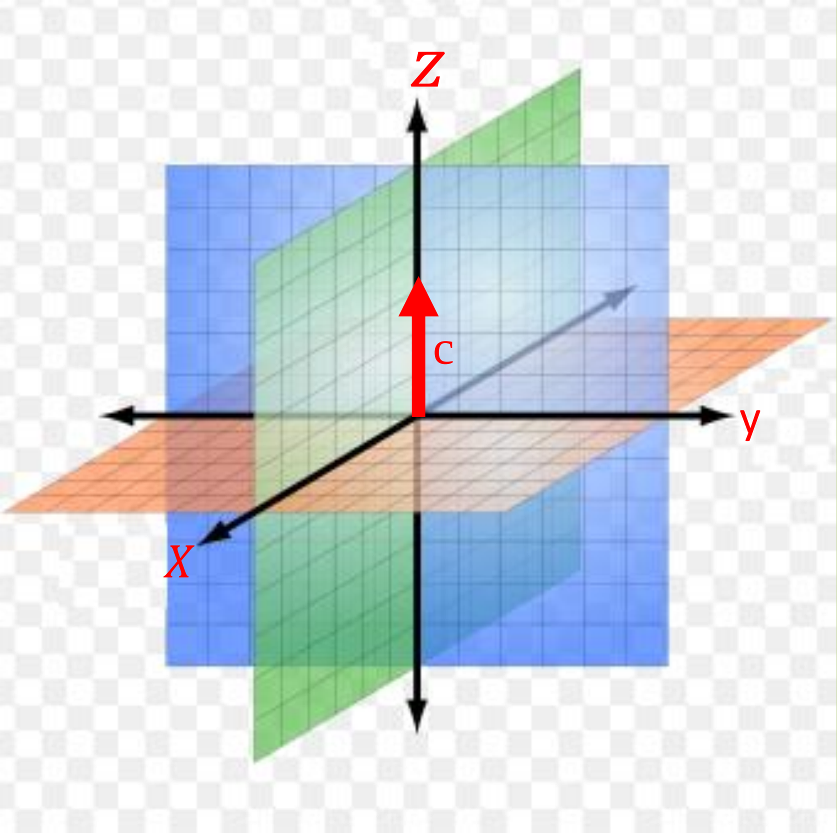
Superficies.
Superficies cilíndricas.
Generalidades y Ecuaciones.

Repaso de vectores que están solo en el eje x, solo en el eje y, o solo en z, o son paralelos a estos ejes.

Hallar las coordenadas de un vector en el eje x, y ó z, o paralelo al eje x, y o z.







El vector en el eje x, no tiene componentes en los ejes y e z. Lo mismo para los otros ejes. Por tanto, su representación es:

$v_x = \langle a, 0,0 \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_x = a}$ $\quad$ $v_y = \langle 0, b, 0 \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_y = b}$ $\quad$ $v_z = \langle 0,0, c \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_z = c}$

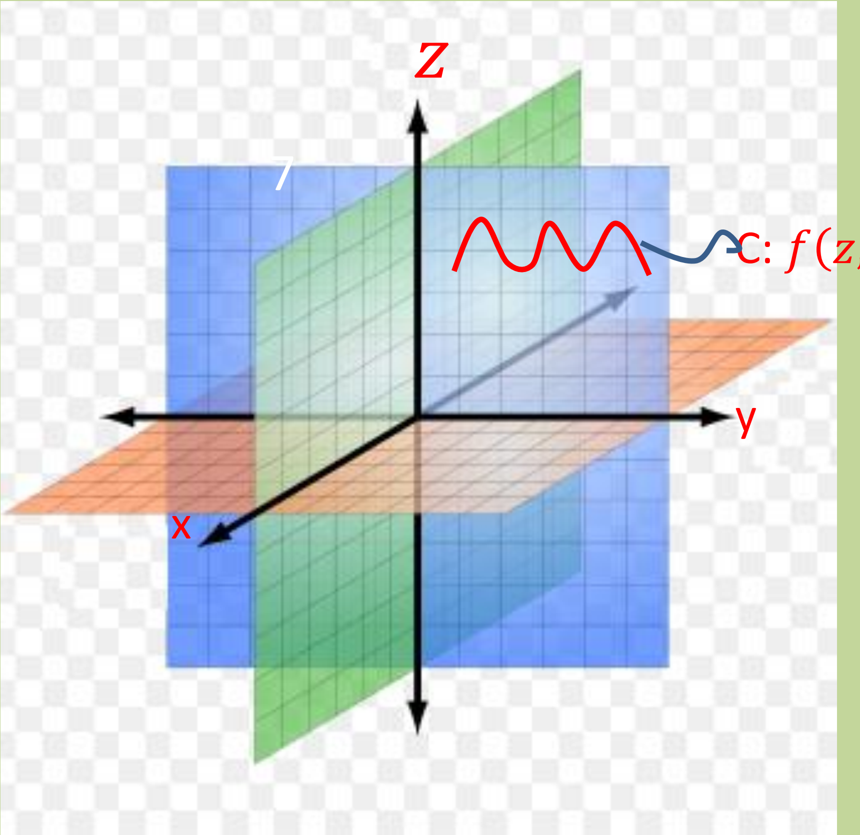
$v_x = \langle 1,0,0 \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_x = 1}$ $\quad$ $v_y = \langle 0,1,0 \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_y = 1}$ $\quad$ $v_z = \langle 0,0,1 \rangle$ $\quad$ $\boldsymbol{v_z = 1}$

También es importante entender que si una curva dada se encuentra **solo en uno** de los planos zy, xy, zx, **no tendrá coordenadas** en el eje faltante.

Así por ejemplo:

Si la curva se encuentra en el plano zy no tendrá coordenada en x:
Su ecuación no será función de x. Solo será función de z e y se escribe así:

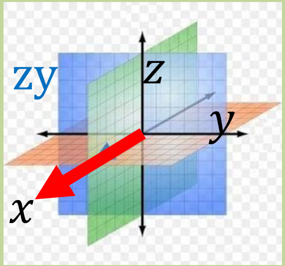
Plano zy $\longrightarrow$ $f(y,z) = 0, \quad x = 0$
Plano yx $\longrightarrow$ $f(y,x) = 0 \quad z = 0$
Plano zx $\longrightarrow$ $f(x,z) = 0 \quad y = 0$



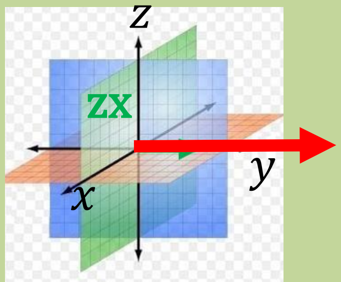
C: $f(z, y) = 0 \quad x = 0$

Todo vector paralelo a uno de los ejes coordenados es perpendicular al plano formado por los ejes faltantes

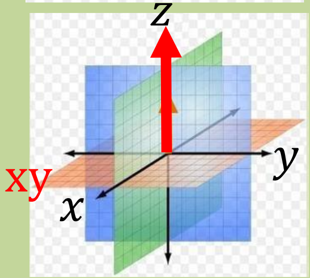
El **eje** x o un vector paralelo, *es* $\perp$ al plano zy azul $\longrightarrow$ vector $\langle 1, 0,0 \rangle$

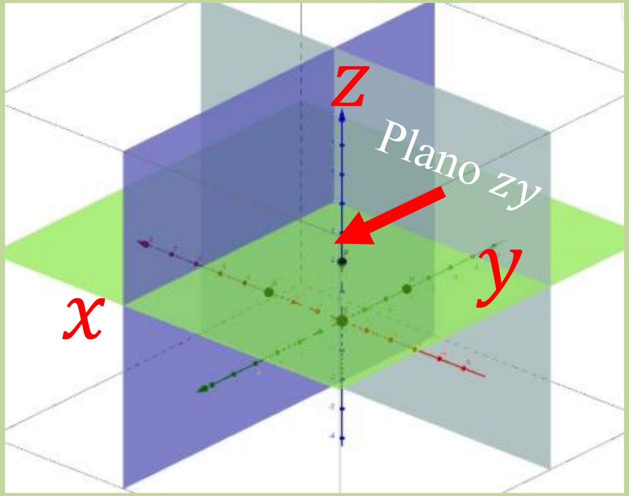


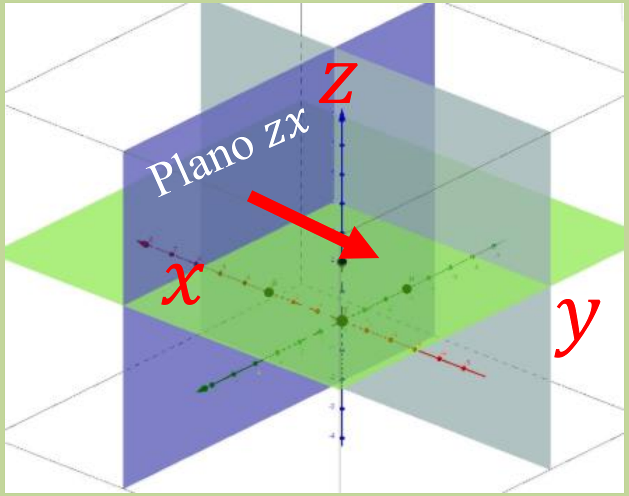
El **eje y** *o un vector paralelo,* **es** $\perp$ **al plano** zx verde $\longrightarrow$ vector $\langle 0, 1,0 \rangle$

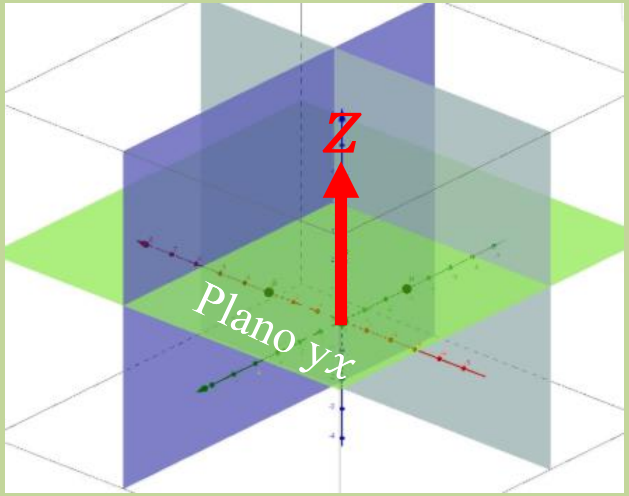


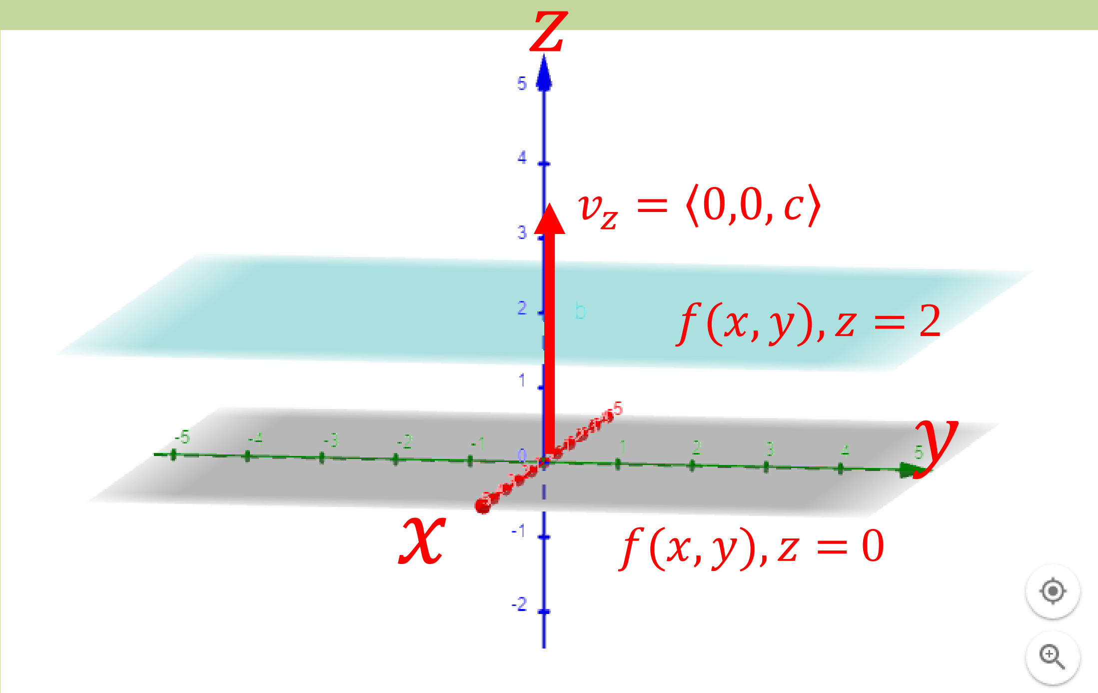
El **eje z** *o un vector paralelo,* **es** $\perp$ **al plano** xy rosado $\longrightarrow$ vector $\langle 0,0, 1 \rangle$




z
Plano zy
y
x


z
Plano zx
x
y


z
Plano yx



Por tano, un vector en el eje z $v_z = \langle 0,0,c \rangle$, **es perpendicular al plano xy, y a cualquier plano paralelo a xy. Este vector normal N al plano xy** sirve para determinar su ecuación y la de cualquier plano paralelo a xy. La ecuación de un plano paralelo al plano "xy" será, por tanto:

$$v_z = \langle 0,0,c\rangle$$

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

$$\boldsymbol{0x + 0y + cz + d = 0}$$

De donde $$cz + d = 0$$

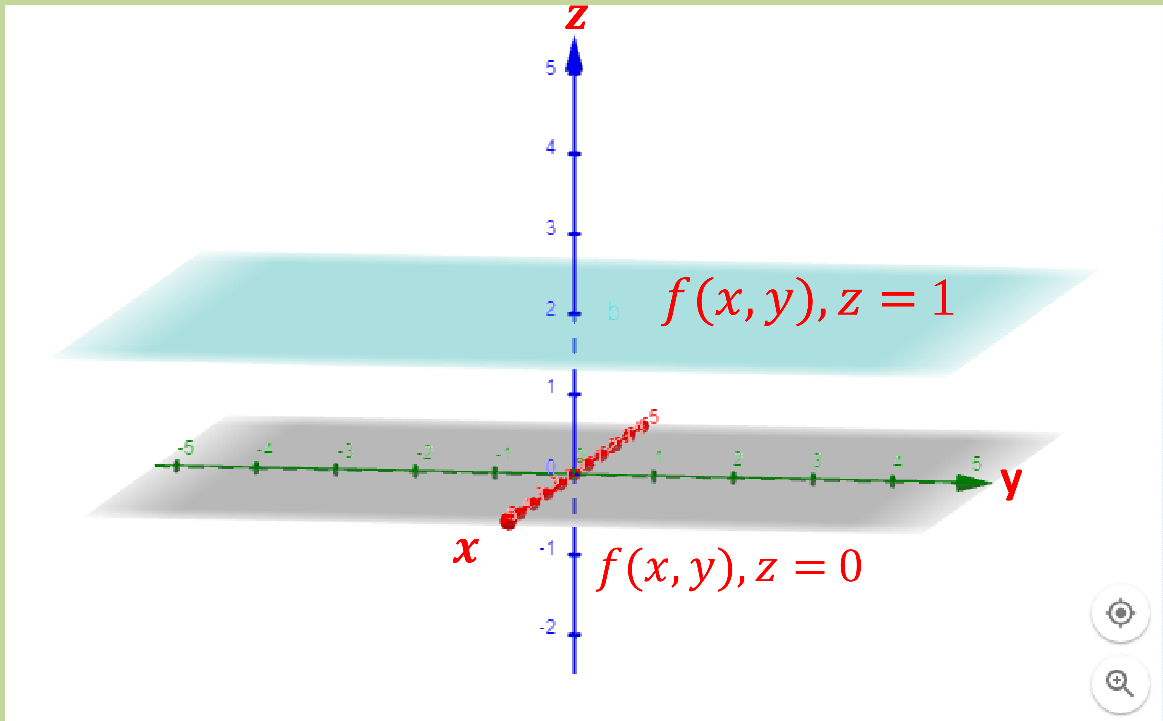
Despejando z $cz = -d$ $\quad$ z$= -\frac{d}{c}$ $\quad$ $-\frac{d}{c}$= constante

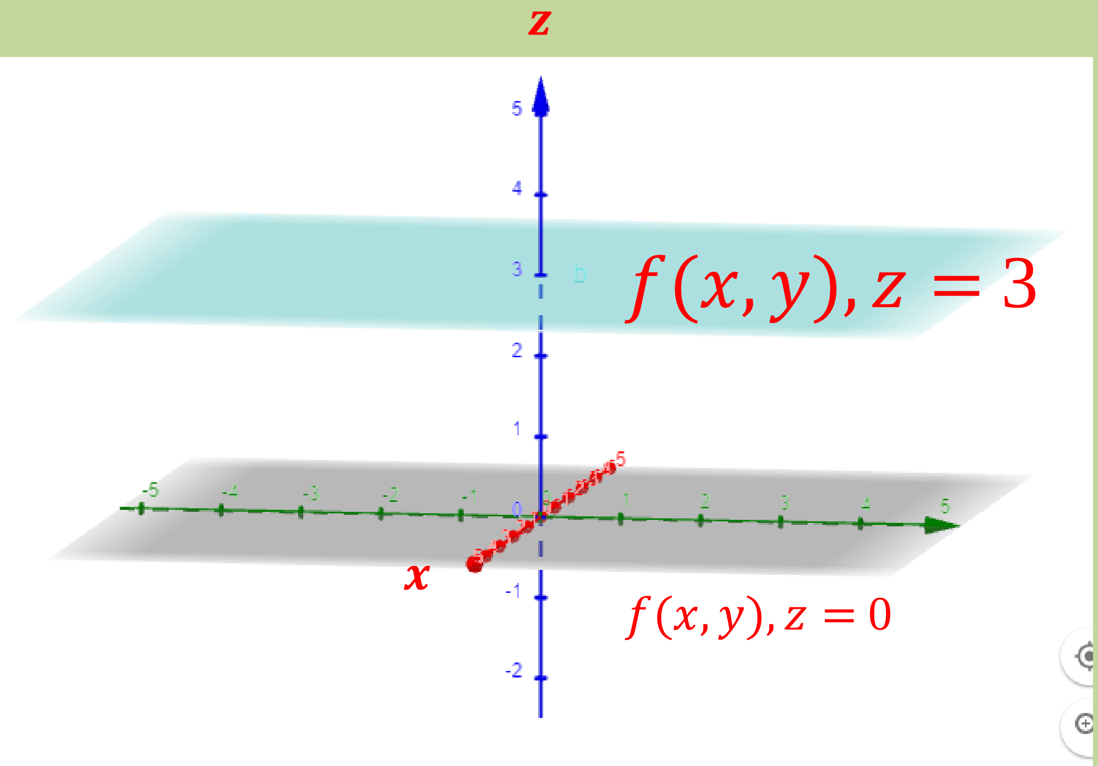
$$z = k \quad z = \ \#\ (\text{constante})$$

$$z = k$$

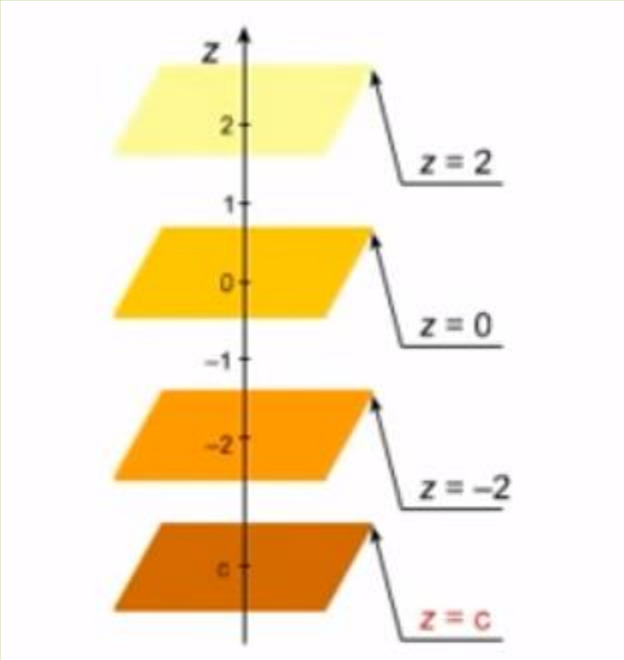
Es la ecuación de los planos paralelos al plano xy y del mismo plano xy.

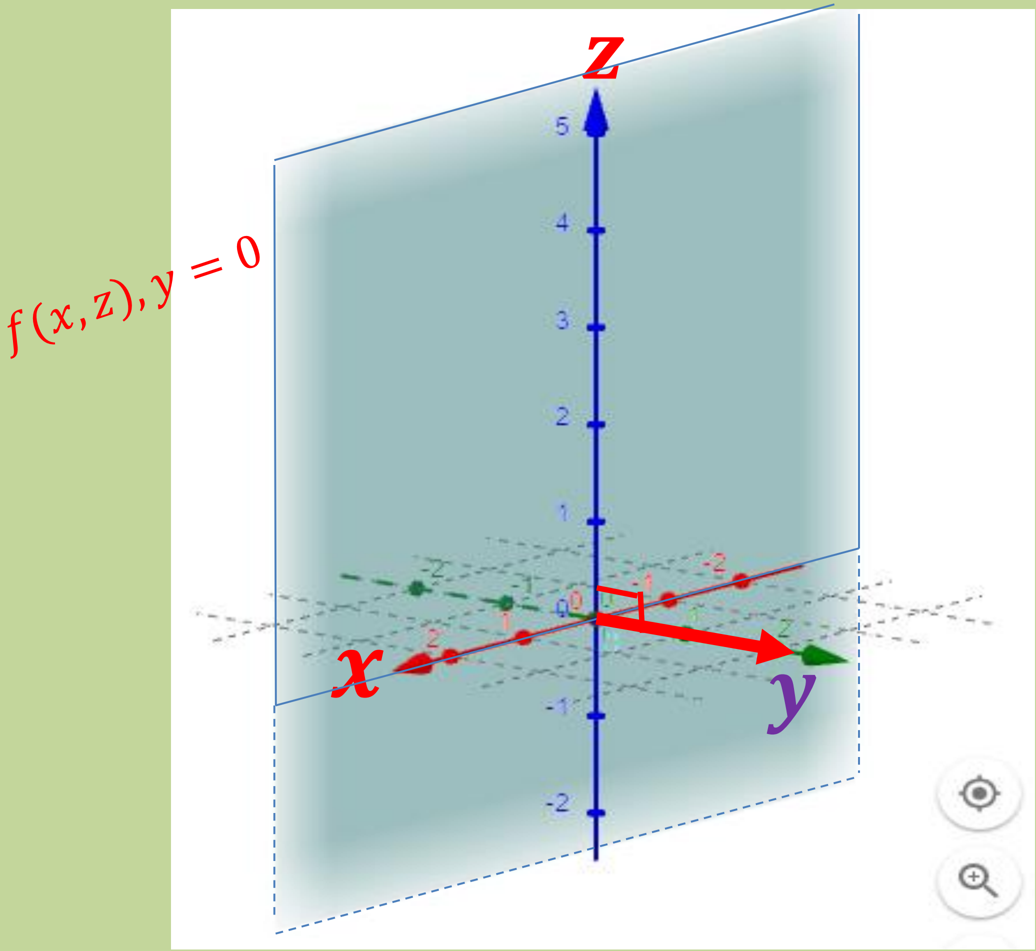
Sus coordenada son en z = k





Planos xy, $z = k$

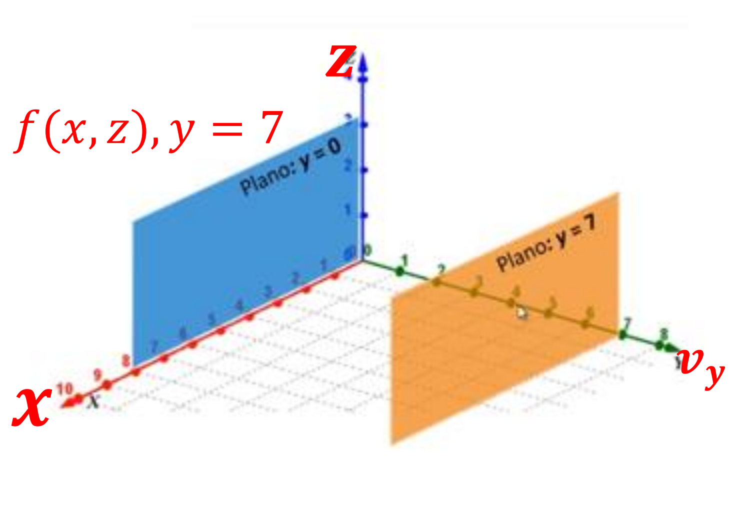

z
2
1
0
−1
−2
c
z = 2
z = 0
z = −2
z = c



$$f(x,z), y = 0$$

El vector en y $v_y = \langle 0, b, 0 \rangle$, **es perpendicular al plano** $\boldsymbol{zx}$, **y a cualquier plano paralelo a** $\boldsymbol{zx}$.
y= $\boldsymbol{k}$ es la ecuación de los **planos paralelos al plano** $\boldsymbol{zx}$, y del mismo plano zx**.** Su coordenada y= k

Planos paralelos a zx



$\boldsymbol{v_y} = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{0} \rangle$

El vector normal es

$$v_y = \langle 0, b, 0 \rangle$$

$$0x + by + 0z + d = 0 \qquad by + d = 0$$

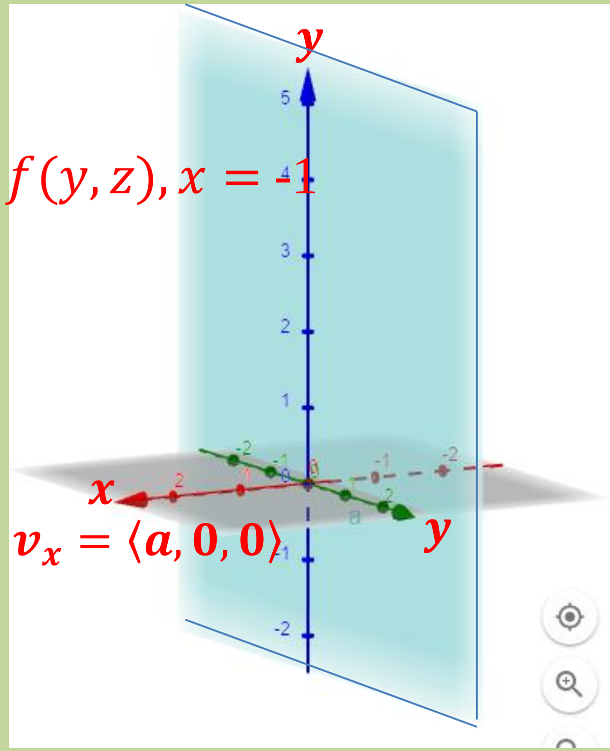
Despejando y

$$by = -d \qquad \mathrm{y} = -\frac{d}{b}$$

La ecuación del plano se reduce a

$$y = k \qquad y = \# \text{ (constante)}$$

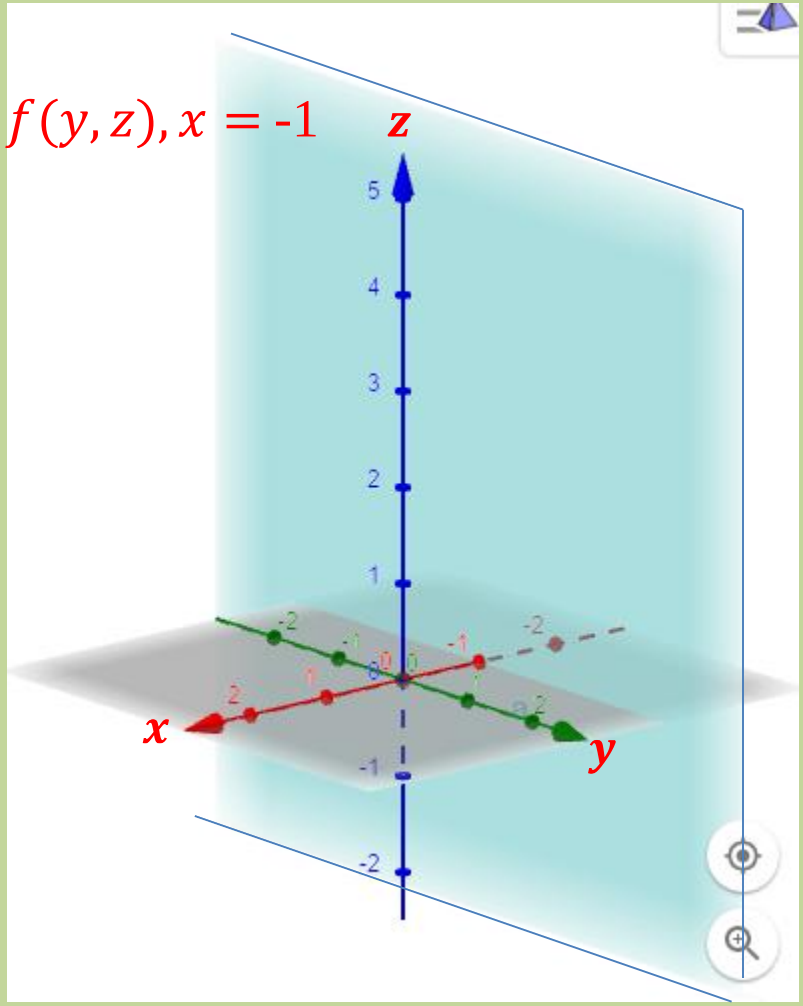
Planos paralelos al plano zy

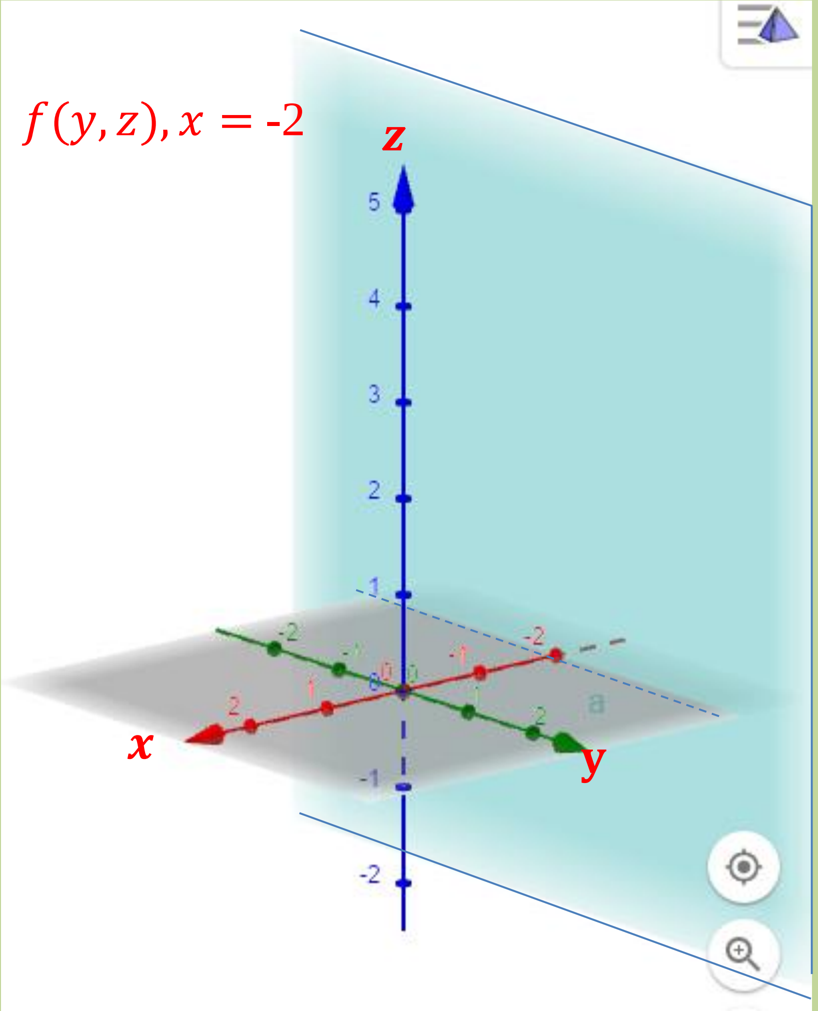


$$ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow ax + 0y + 0z + d = 0 \longrightarrow \boldsymbol{ax + d = 0}$$

Despejando x $\qquad ax = -d \qquad x = -\frac{d}{a}$

$$x = k \qquad x = \# \text{ (constante)}$$





Planos zy, $x = k$

Ecuación de los planos paralelos a cualquier plano dado

Si se tiene la ecuación de cualquier plano,por ejemplo :

$$2x + 3y + 4z + d = 0$$

y se deja d como un parámetro (o sea, que d puede tomar el valor de cualquier real)

$$2x + 3y + 4z + d = 0 \qquad (d = \underline{+}1, \underline{+}2, \underline{+}3\ldots..)$$

la ecuación representa los planos paralelos al plano en cuestión.

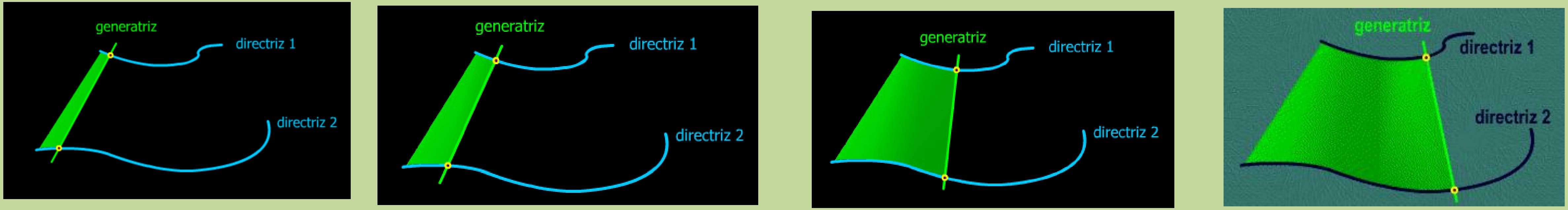
Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos (curva o superficie) que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas. Generalmente son curvas sujetas a ciertas condiciones restrictivas.

Curva directriz. Puede ser una línea recta, curva o figura que combinada con las rectas generatrices, originan, dan forma o generan una figura o cuerpo planar o espacial.

Las **rectas generatrices** parten de la curva directriz y conjuntamente con esta forman una figura plana o espacial.

Una superficie es el lugar geométrico de puntos que satisfacen una ecuación del tipo $F(x, y, z) = 0$.

Superficie reglada o lineada



[SUPERIFICIE REGLADA O LINEADA]

Superficie generada por el movimiento de una recta, denominada generatriz, manteniéndose en contacto con otra u rectas o curvas, denominadas directrices, cumpliendo en su desplazamiento ciertas condiciones particulares.

http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/cap_01a-imagenes/superficie_reglada.html

Clasificación general de las superficies

Plano: superficie más simple

Superficie cilíndricas

{Cilíndricas rectas
{Cilíndricas oblicuas

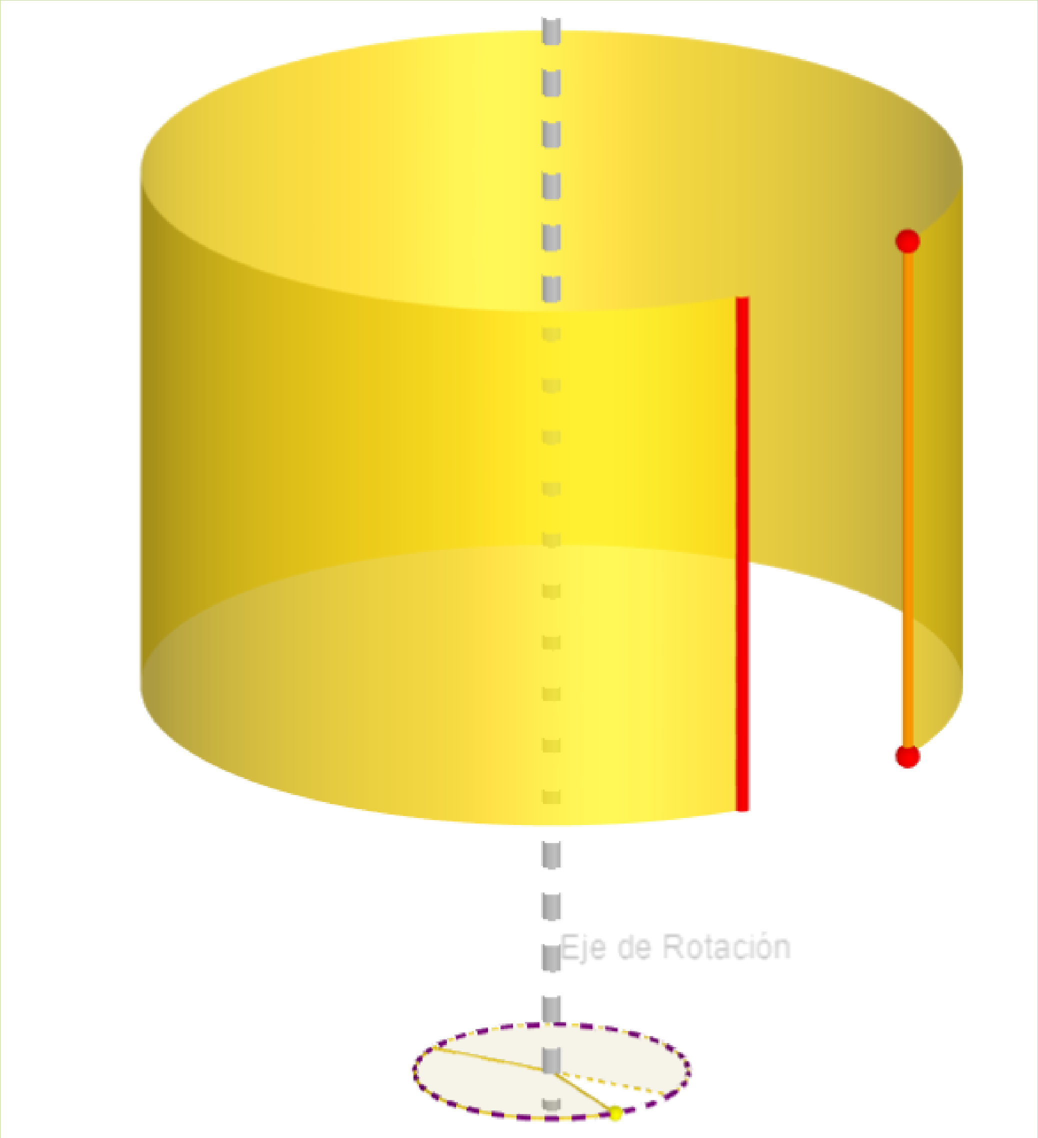
{Cilíndrica de revolución
{Cilíndrica de no revolución

Superficies cónicas

{Superficie cónica de revolución
{Superficie cónica de no revolución

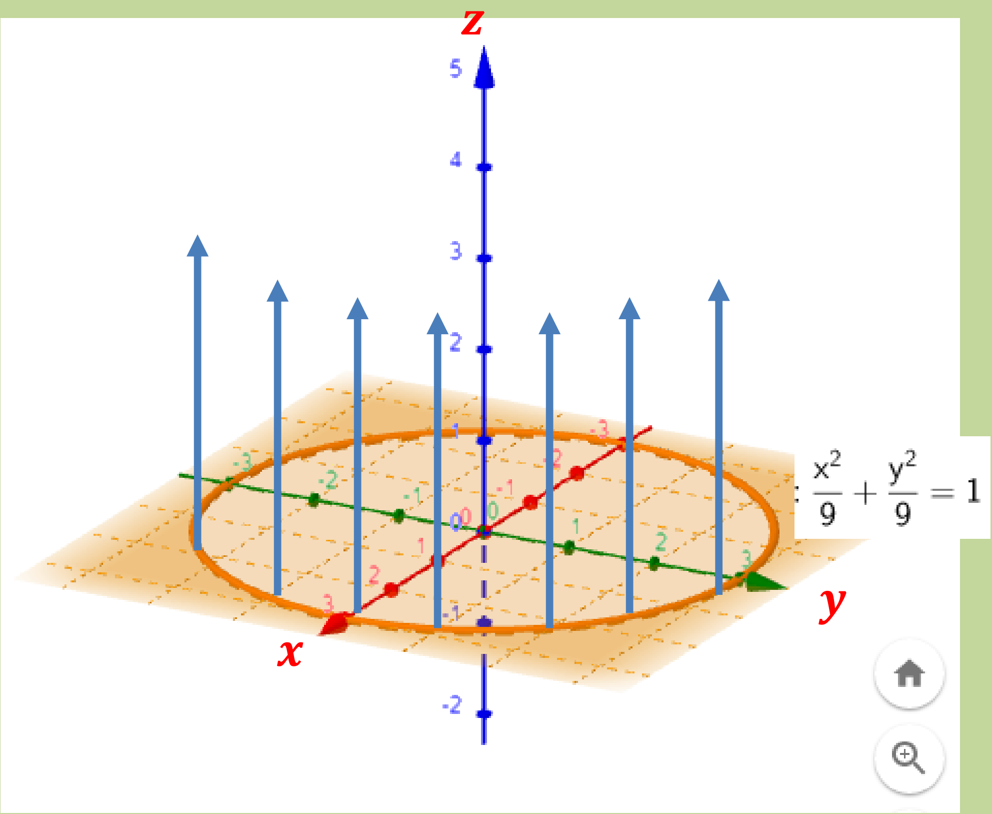
Superficies alabeadas

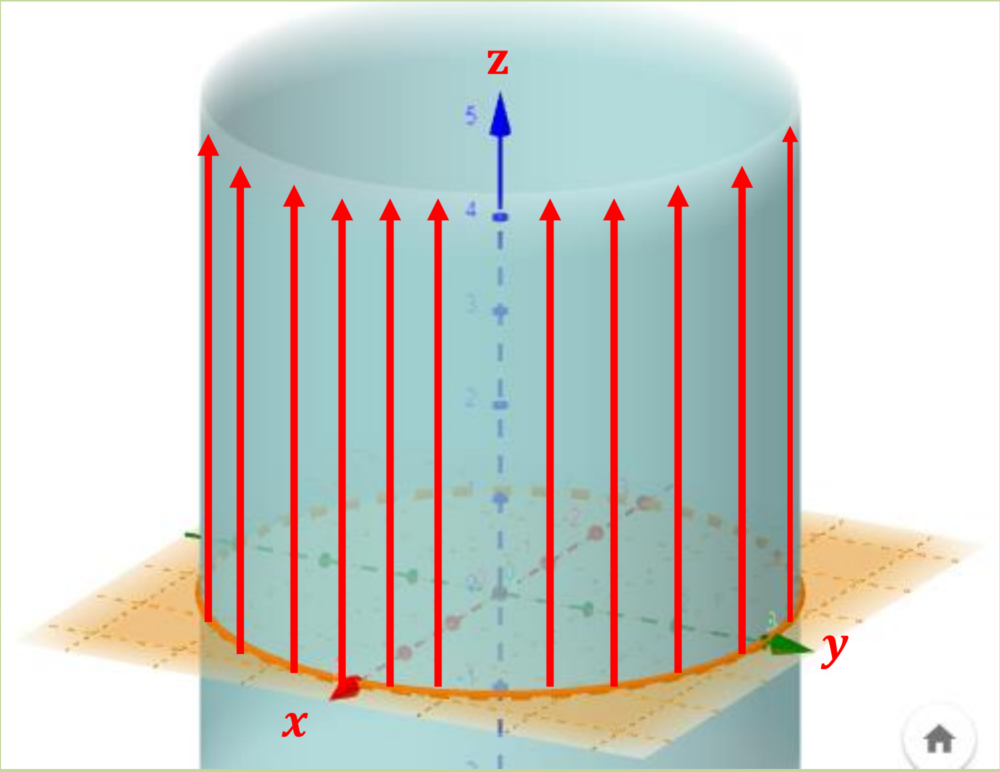
Superficies más complejas



https://www.geogebra.org/m/PARYTHhR

Superficie cilíndrica recta: recta perpendicular

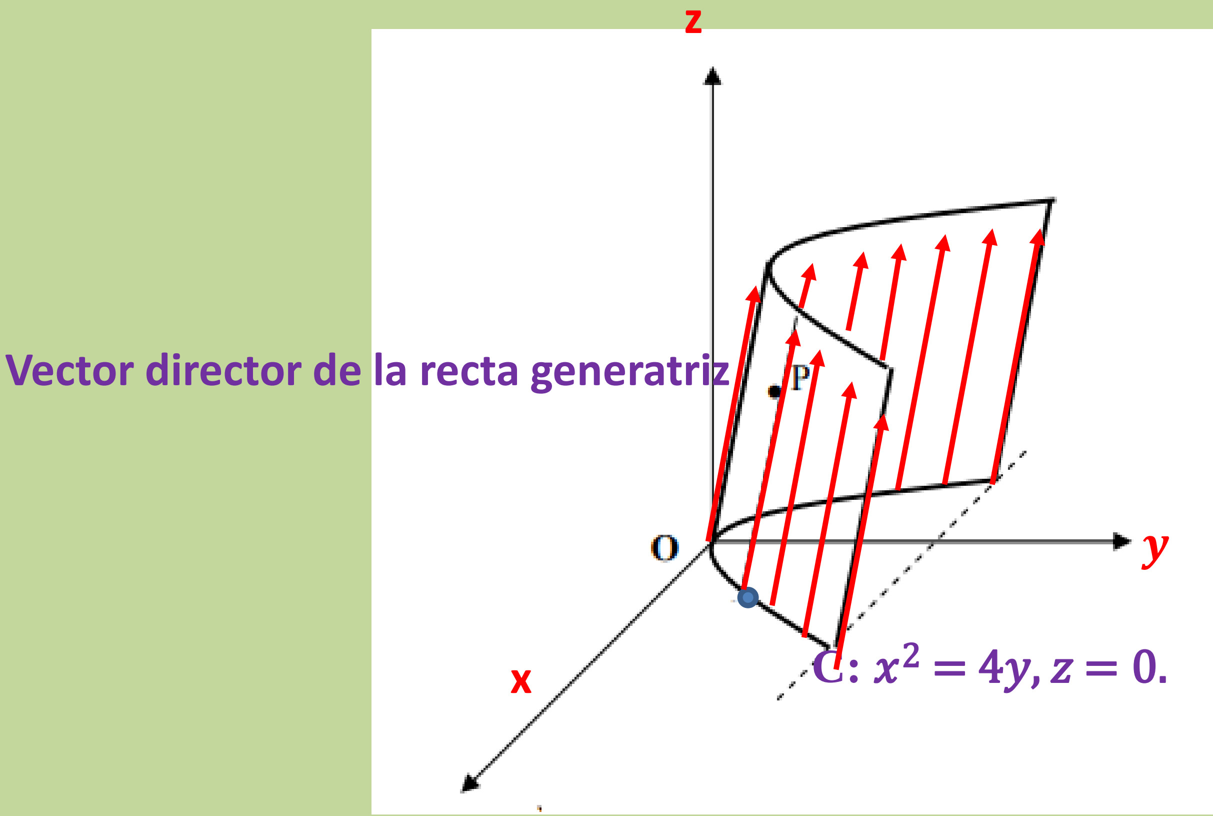




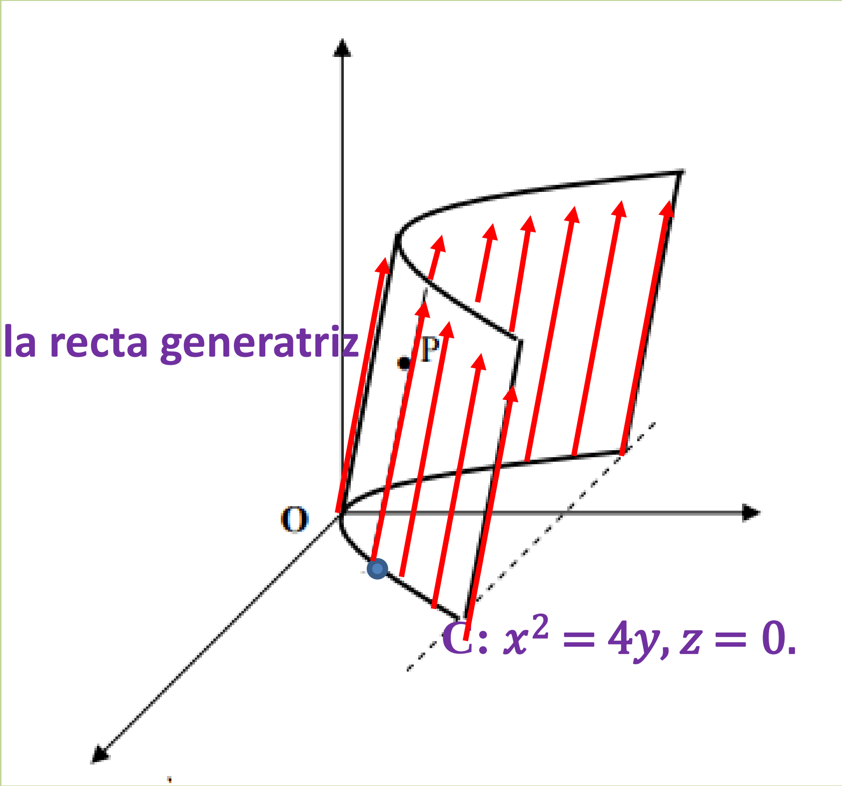
Toda ***superficie cilíndrica (recta u oblicua) se*** origina por una recta generatriz (o su vector director) que se mueve paralelamente a si misma teniendo cono trayectoria o dirección a la C curva llamada directriz.

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Superficie cilíndrica oblicua: recta no perpendicular

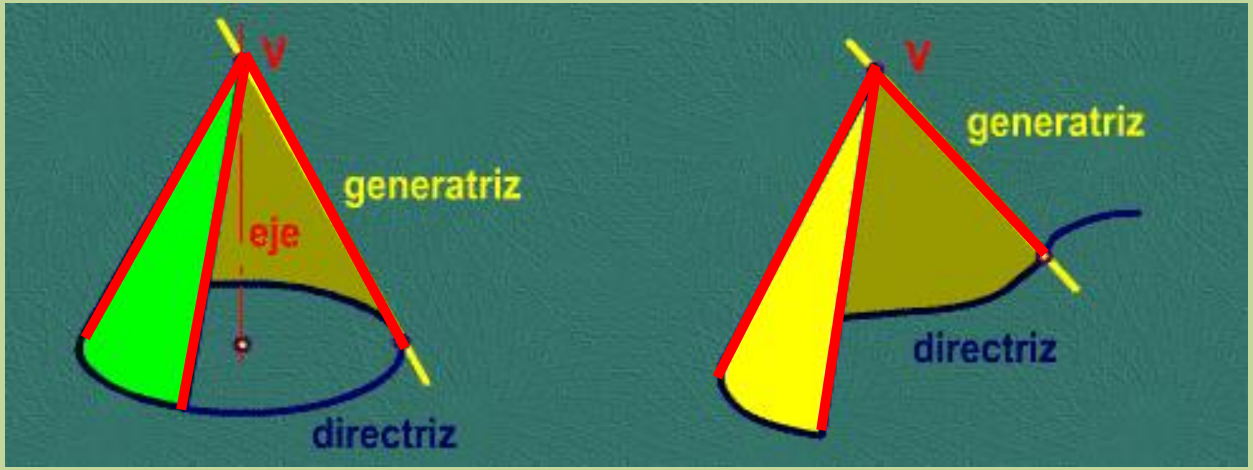


Generación de una superfice cilíndrica oblicua a partir de una parábola y un vector no perpendicular al plano xy.



Los cilindros oblicuos se originan cuando la recta generatriz (o su vector director) no es perpendicular al plano de la curva directriz. El vector director de la recta generatriz generalmente no se conoce de por si, a no ser que lo den.

https://www.youtube.com/watch?v=f66tDrXgF2o

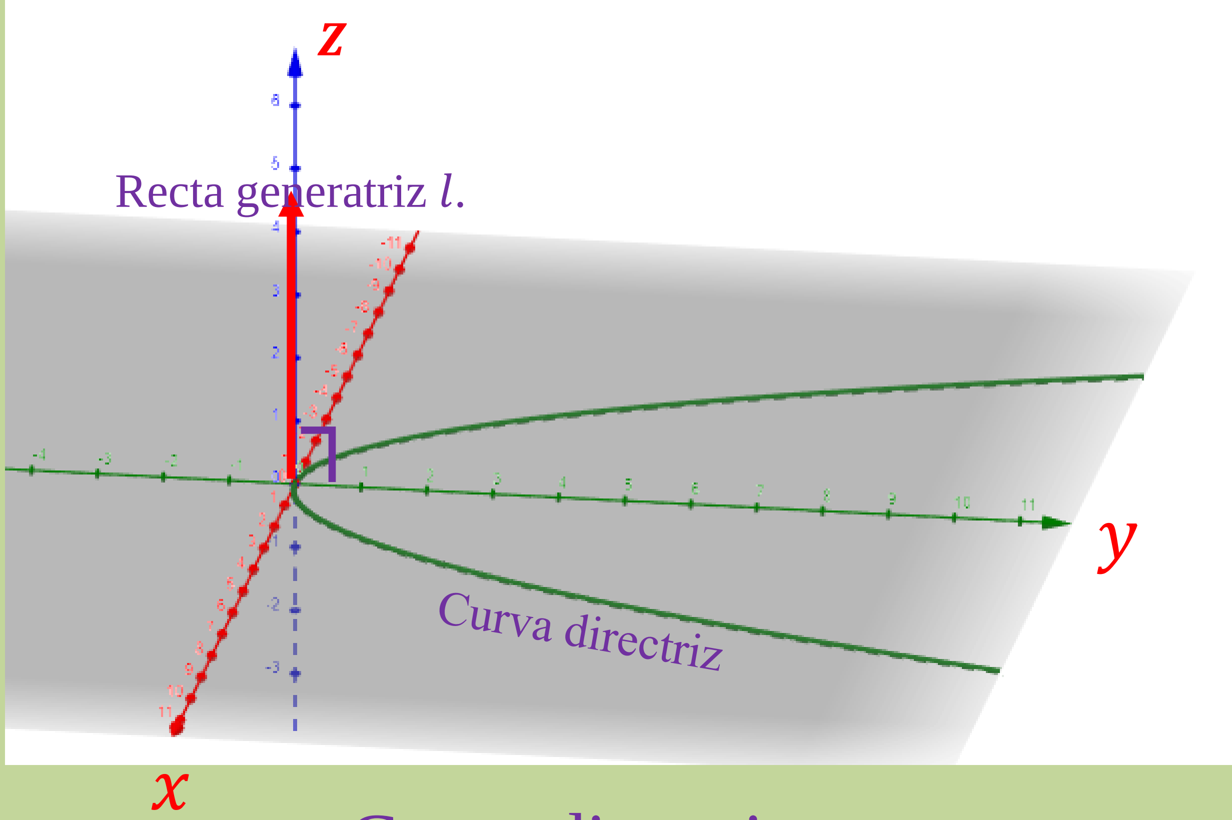


Sup. cónica de revolución Sup. cónica de no revolución

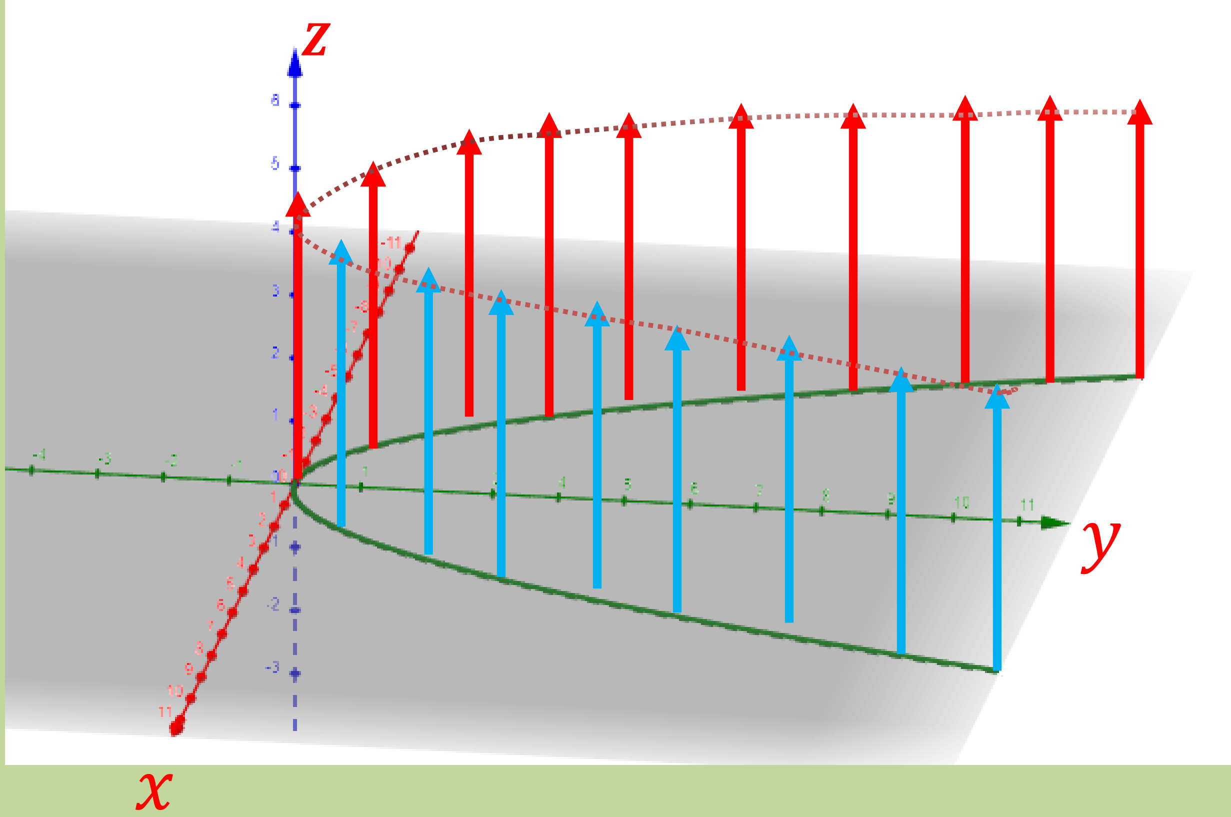
Superficie cónica: superficie lineada generada por el movimiento de una recta generatriz partiendo de una curva directriz, teniendo todas las posiciones de la generatriz, un punto común (V), denominado vértice.

http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/05-superficie.htm

Superficie cilíndrica recta



Curva directriz



Superficie cilíndrica recta

Los cilindros rectos se originan cuando la recta generatriz es perpendicular al plano de la curva directriz. En este caso se conoce el vector director de la recta generatriz.

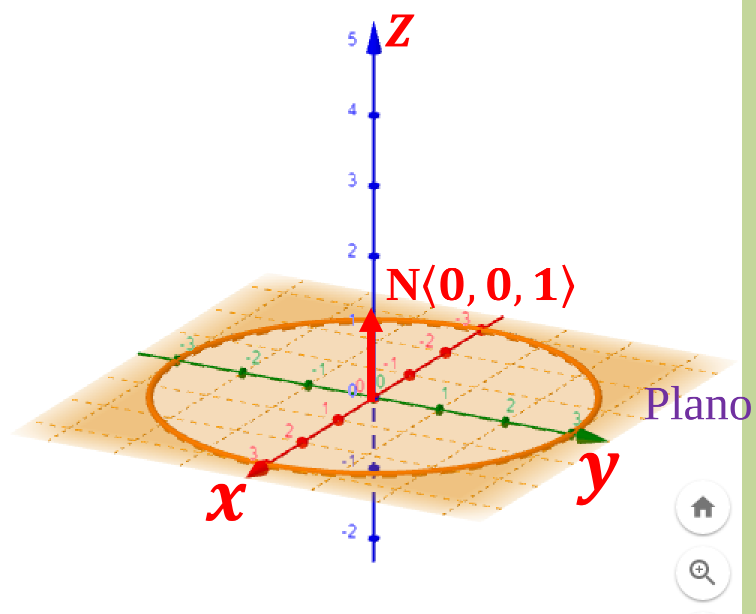
https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Cilindros rectos

Identificación en una superficie cilíndrica de *la recta generatriz*, *la curva directriz y del plano* donde se encuentra.

El vector director de la recta generatriz es conocido de por si, aunque no lo den, porque es paralelo a uno de los ejes coordenados. Y el vector director será por tanto, el vector unitario correspondiente al eje en cuestión.

Curva directriz en planos cartesianos zx o zy, o xy, vector normal al plano.



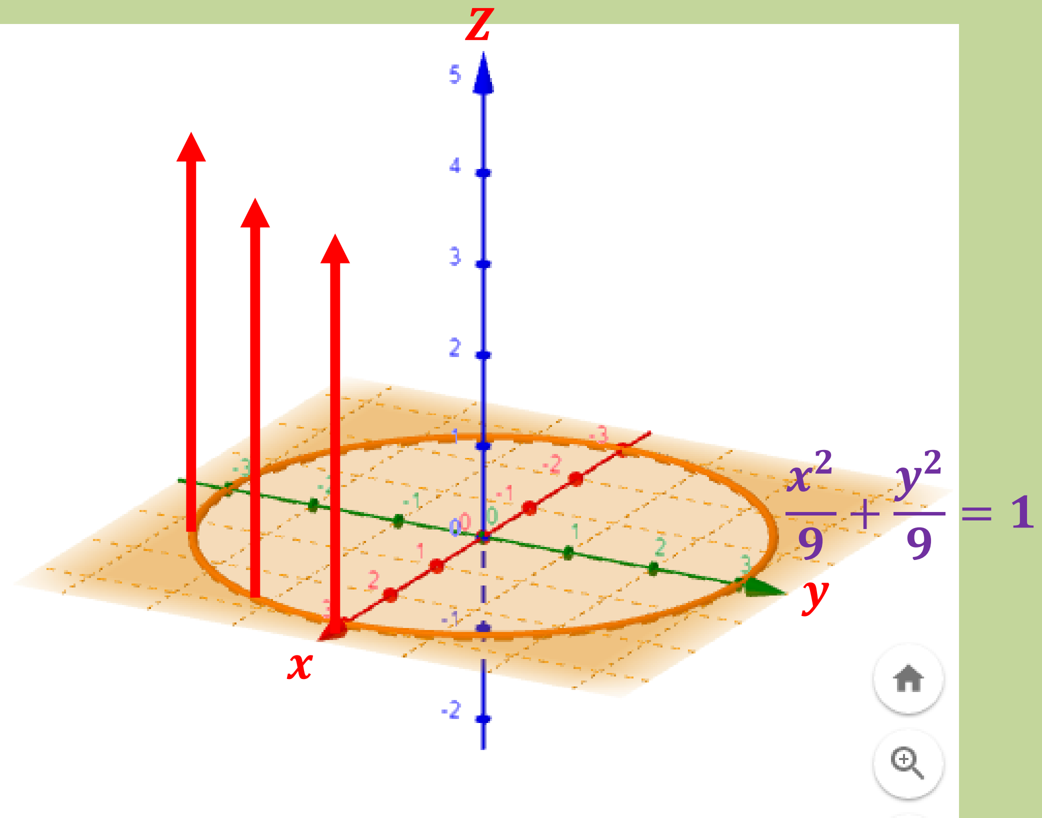
Plano xy, en z estará el vector nornal **N⟨0, 0, 1⟩**

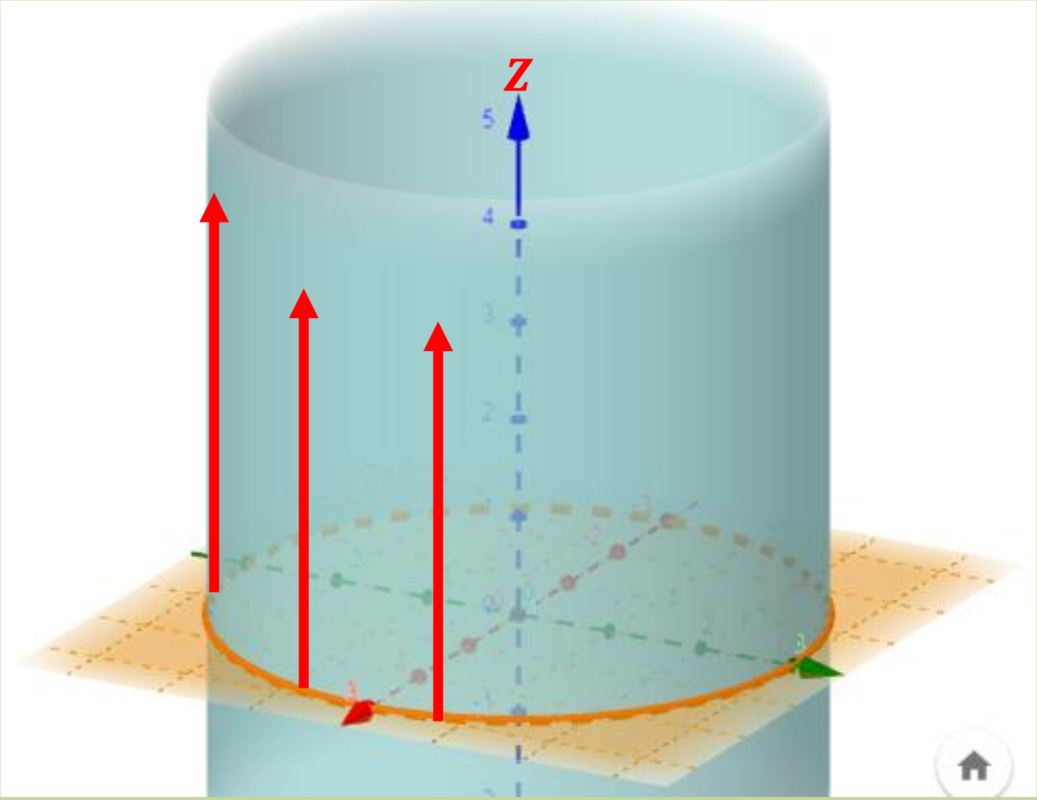
Por facilidad, se asume que la curva directriz se encuentra en uno de los planos cartesianos: zy, zx, xy. Por lo tanto, no presenta coordenadas en el otro eje.

Y en ese eje estará el vector perpendicular al plano, si se requiere.

Dicho vector es conocido

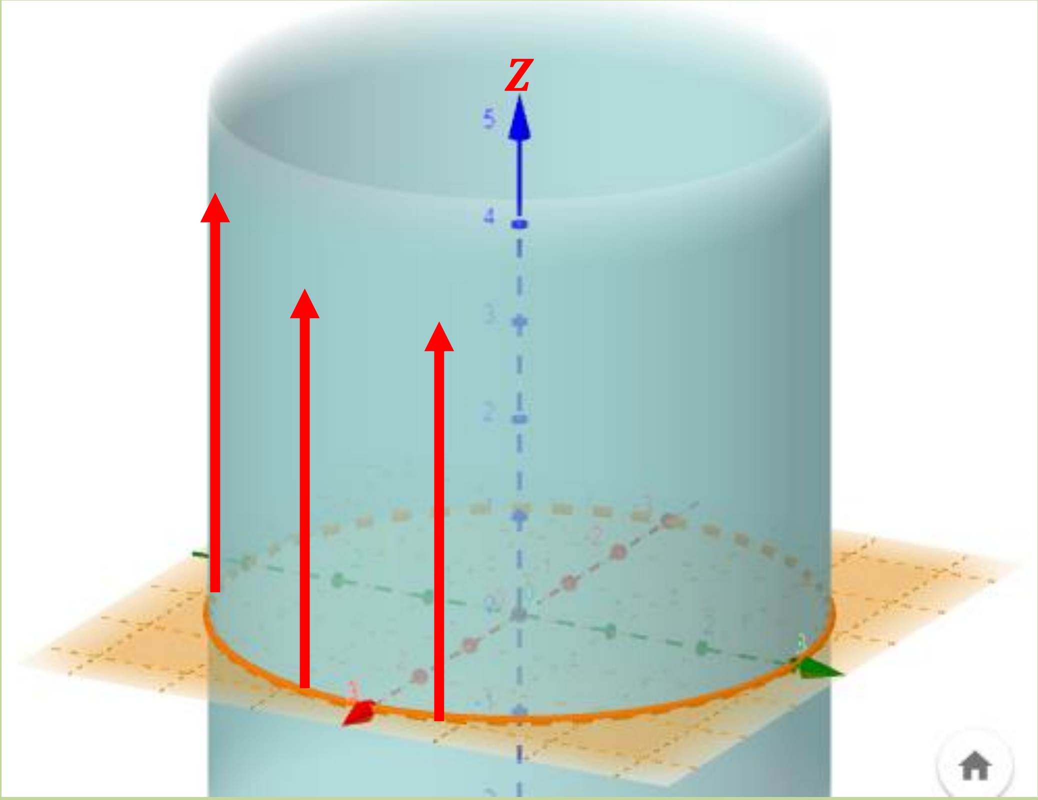
Cilindros rectos circunferenciales o elípticos





La recta generatriz es paralela al eje z: vector director N⟨0,0,1⟩.

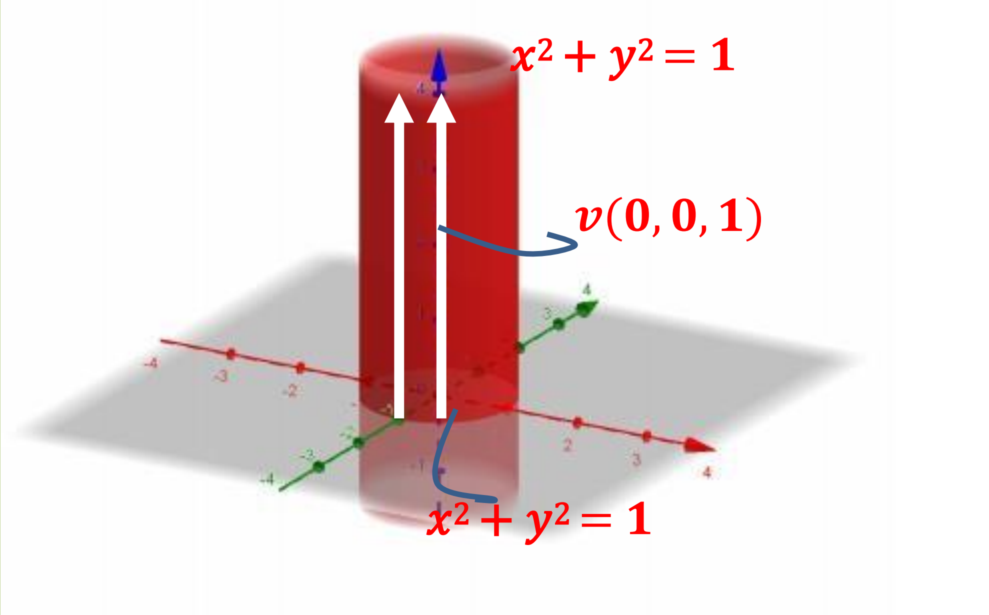
Curva directriz en el plano xy.



Cilindros rectos

Identificar la recta generatriz y en qué plano se encuentra la curva directriz

Cilindro recto

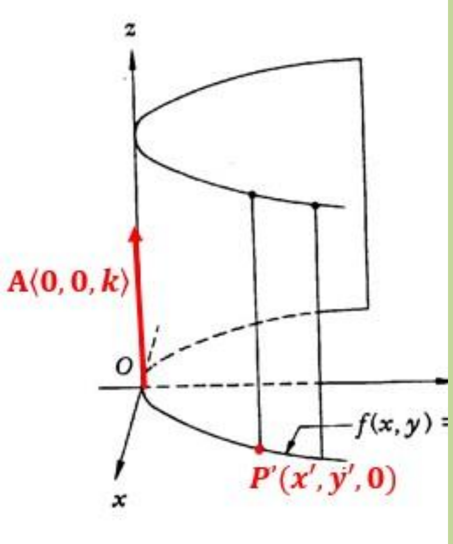


http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/gabl/cap7.pd f

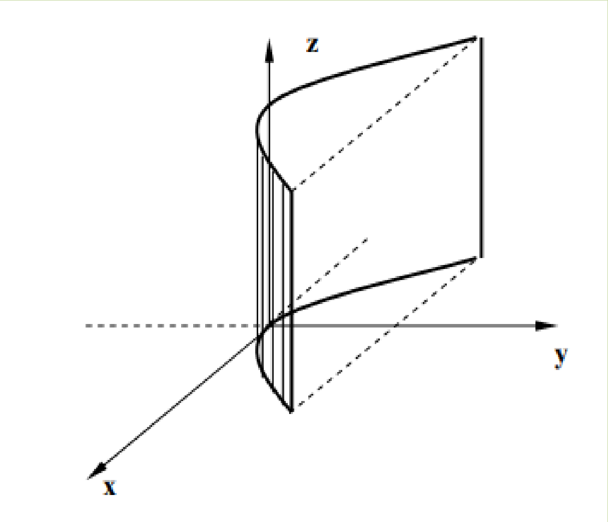
La recta directriz es paralela al **eje z. Curva en plano xy.**

Cilindro recto generado por la curva $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ $(C: f(x, y) = 0)$ situada en el plano xy. El vector director de la recta generatriz es de la forma $\boldsymbol{v(0, 0, 1)}$

Cilindros rectos parabólicos



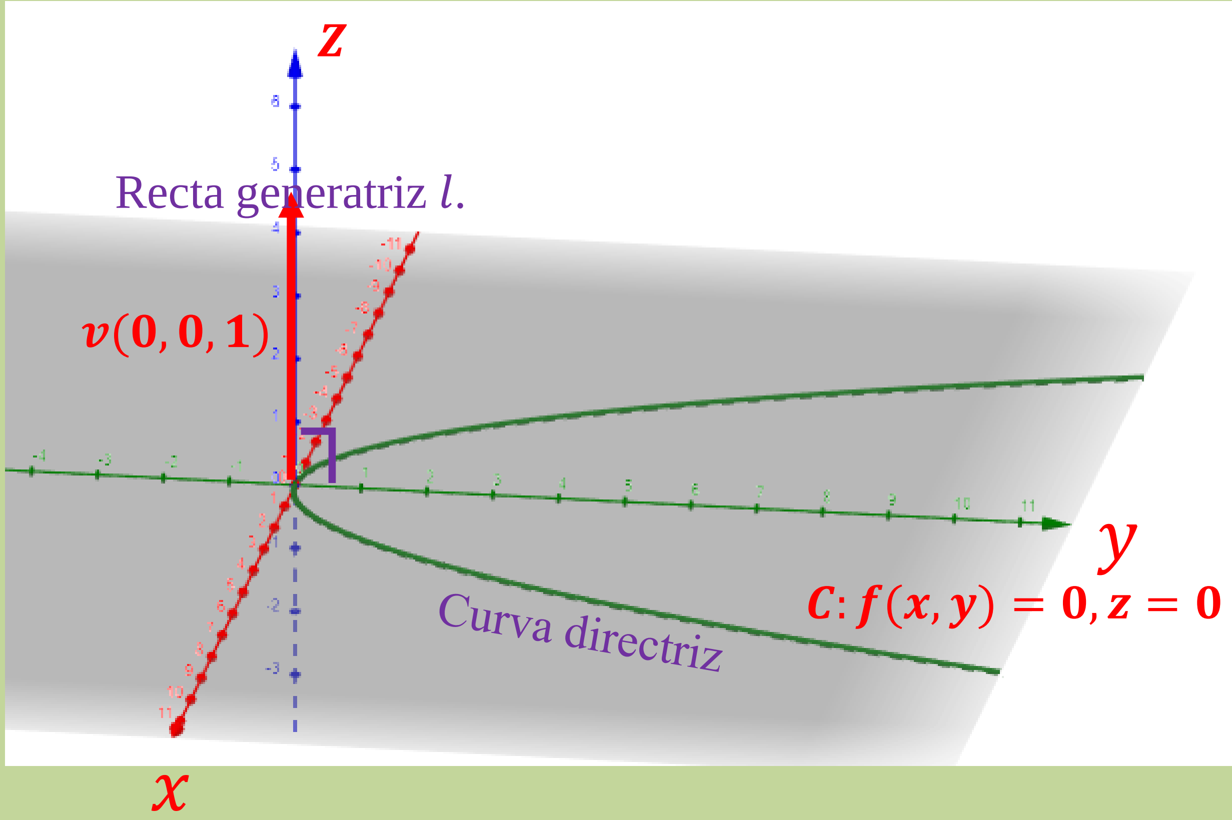
Cilindro parabólico $x^2 = 4py$

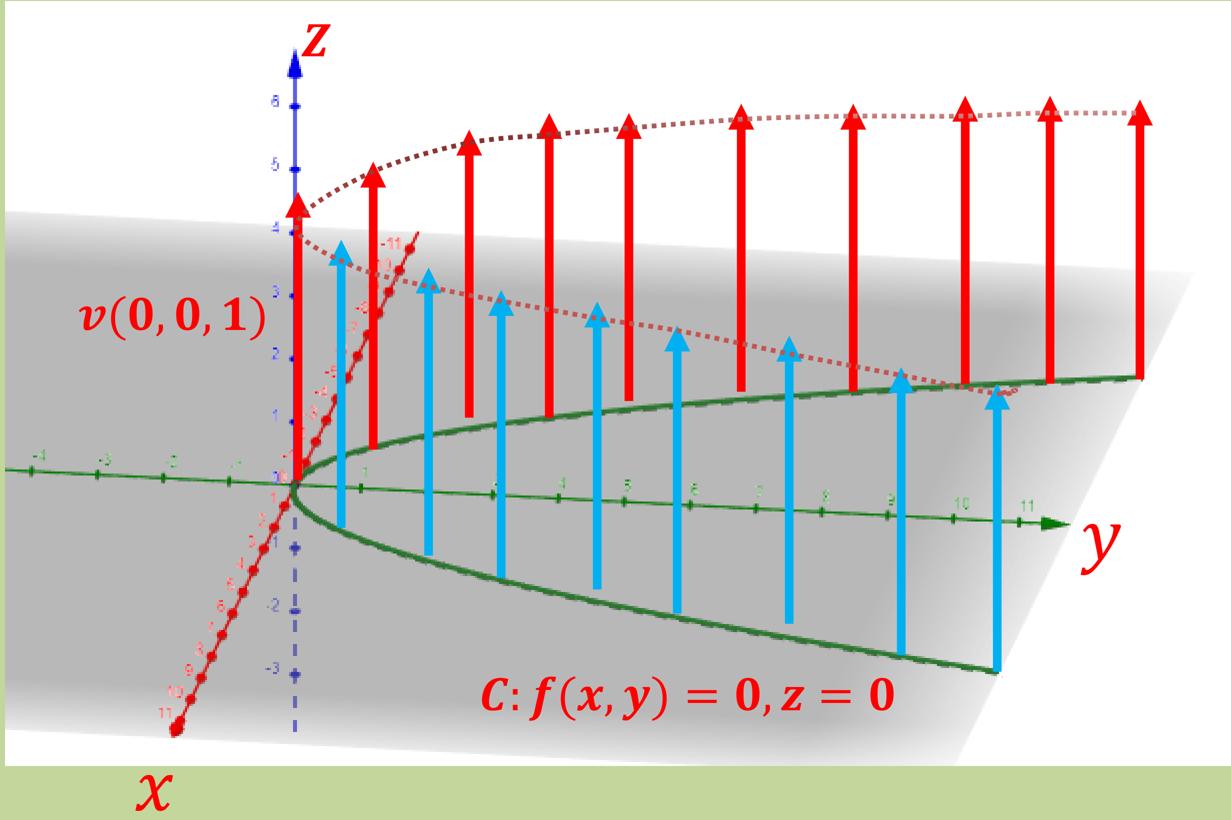


Cilindro parabólico $x^2 = 4py$

Generatriz en z, curva en xy

Cilindros rectos, recta generatriz paralela al eje z, curva en plano xy.



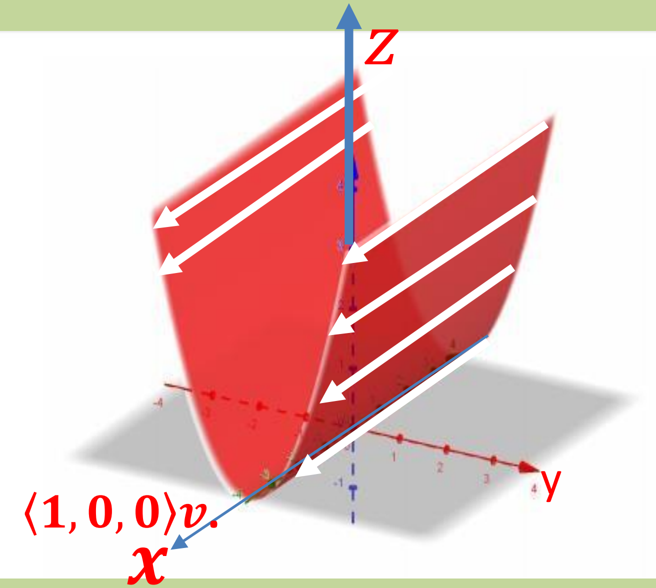


Curva directriz

Superficie cilíndrica recta

Los cilindros rectos se originan cuando la recta generatriz es perpendicular al plano de la curva directriz. El vector director de la recta generatriz es conocido de por si, aunque no lo den, porque es paralelo al eje z; en este caso, el vector director es $v\langle 0,0,1\rangle$.

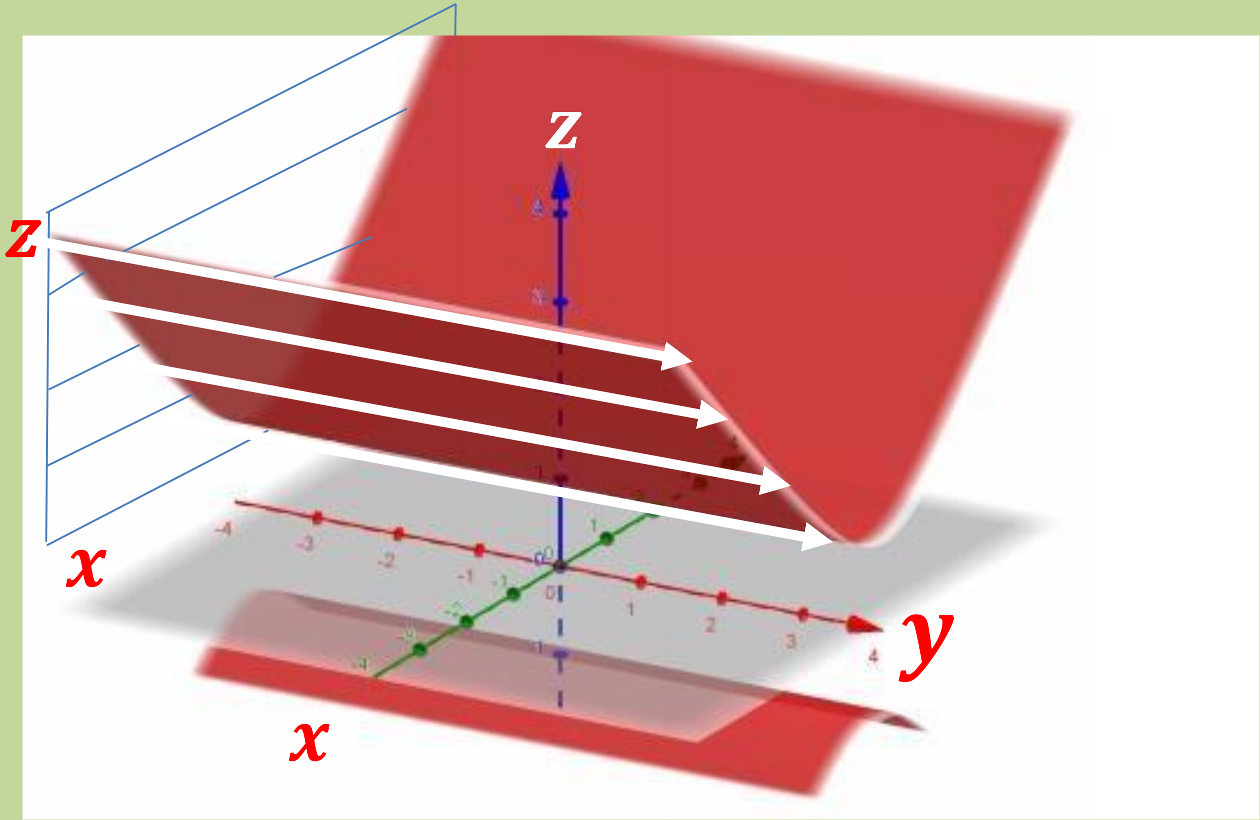
Cilindros rectos parabólicos, recta generatriz paralela al eje x, curva directriz en plano zy.



La recta directriz es paralela al **eje $\boldsymbol{x}$.** La curva generatriz está ubicada en el plano $\boldsymbol{zy}$**.**

Ubique primero la recta generatriz y su vector director, luego por defecto sale la curva directriz. El vector director de la recta generatriz es de la forma $\boldsymbol{v}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Cilindro recto hiperbólico

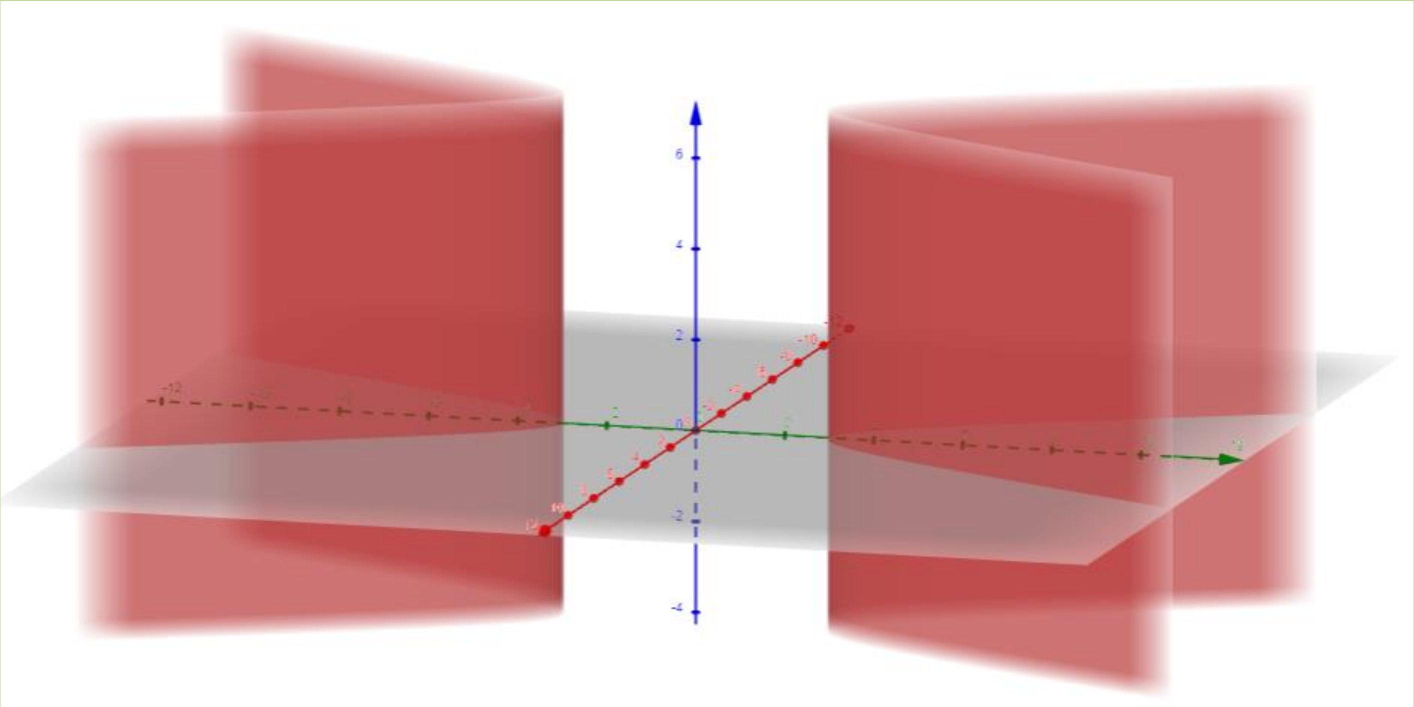


Gráfica correspondiente al cilindro recto hiperbólico $z^2 - x^2 = 1,\ C\colon\ f(z,x) = 0$

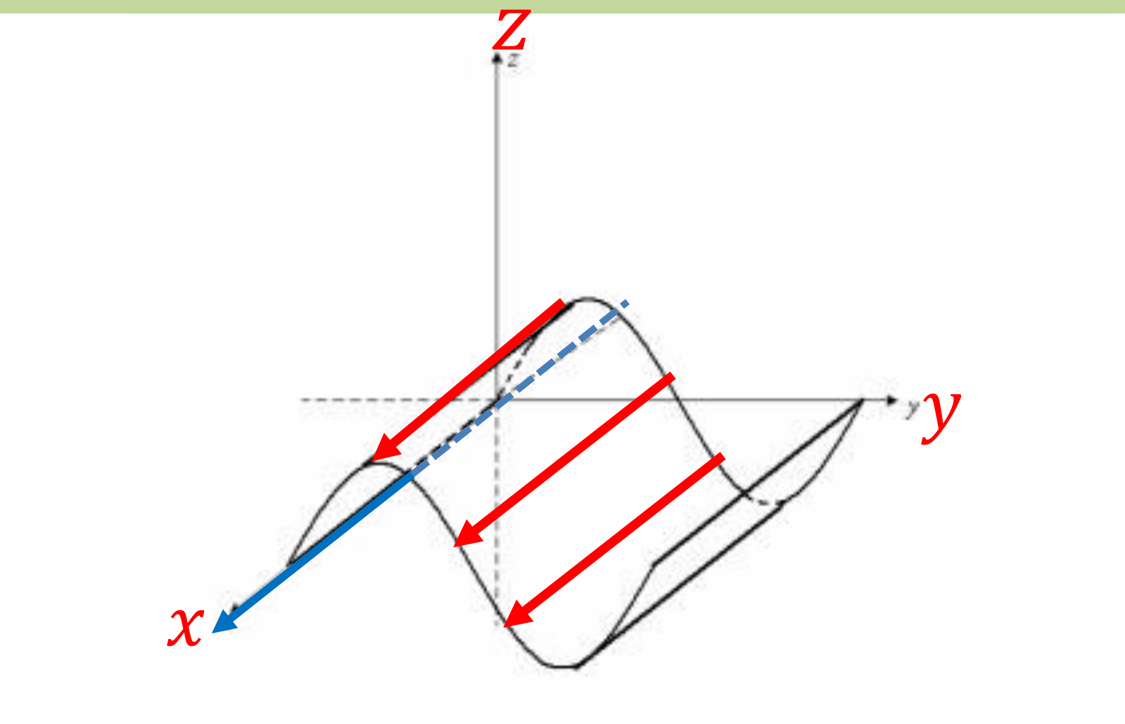
Recta generatriz paralela al eje z. El vector director de la recta generatriz es paralelo al eje y, es $\boldsymbol{v(0,1,0)}$.

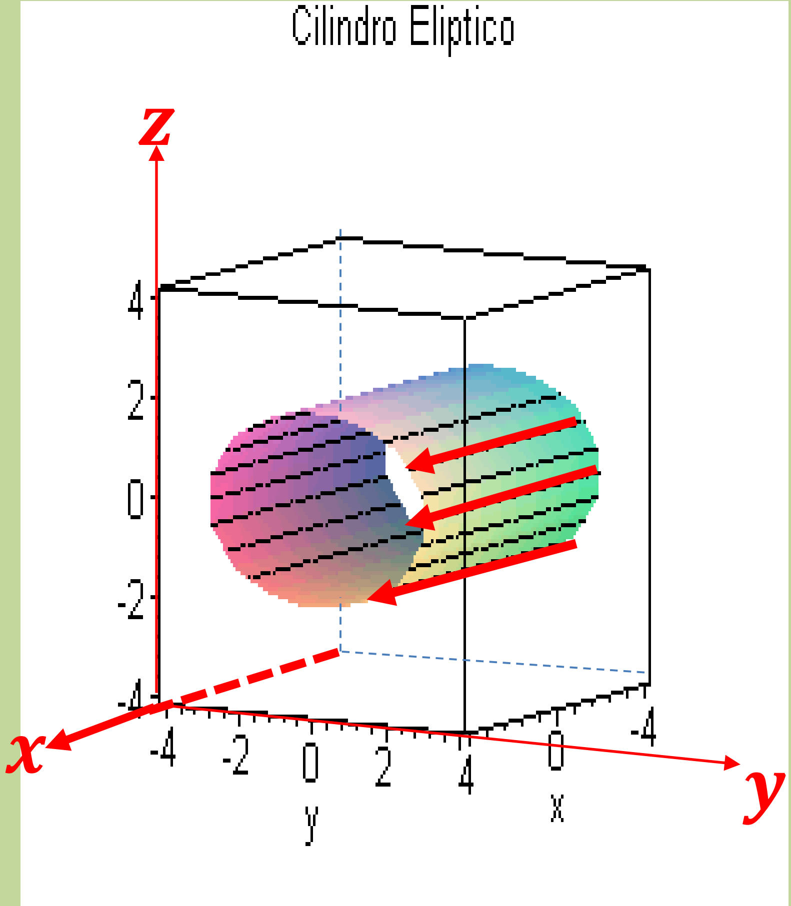
Por tanto, el plano de la curva directriz es zx.

Hallar el vector director de la recta generatriz y y el plano de la curva directriz en las siguientes gráficas:

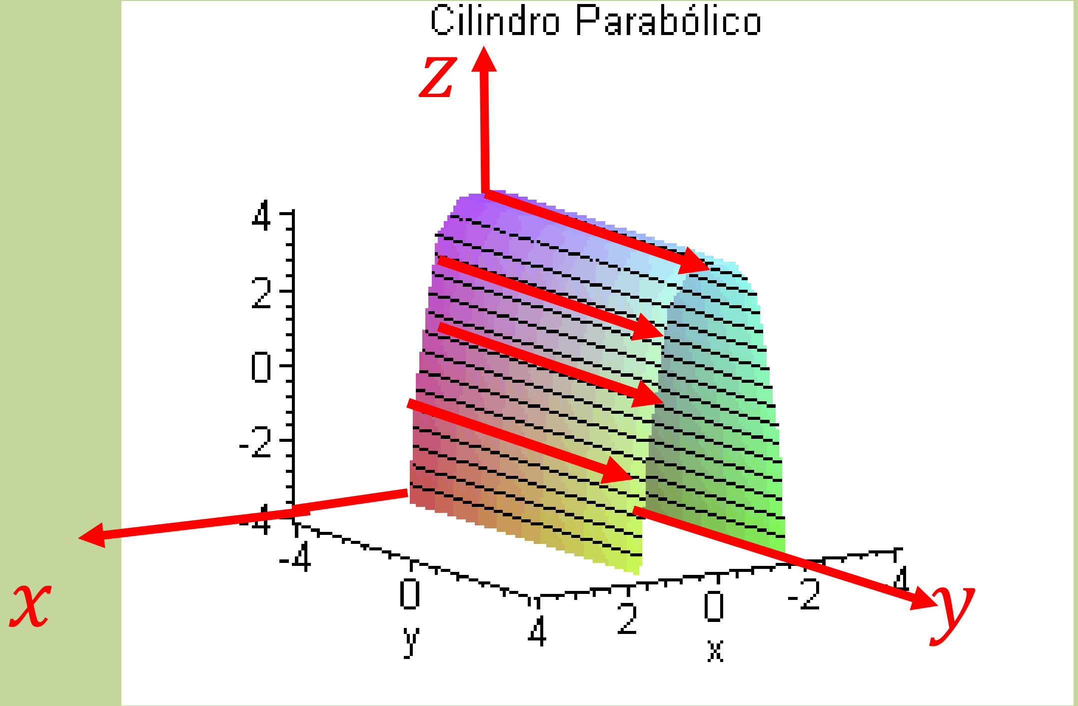


Cilindro recto

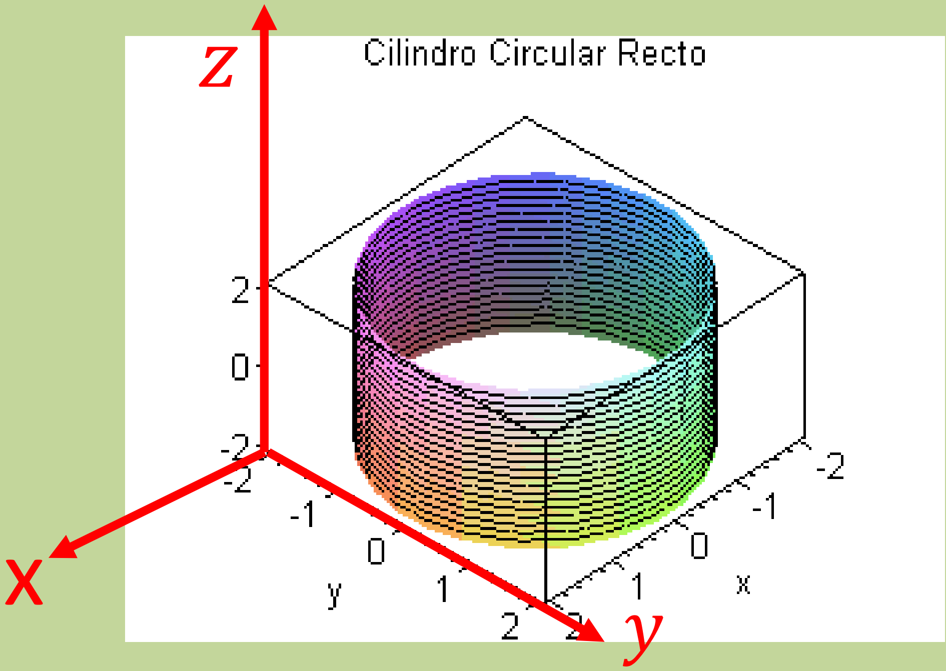




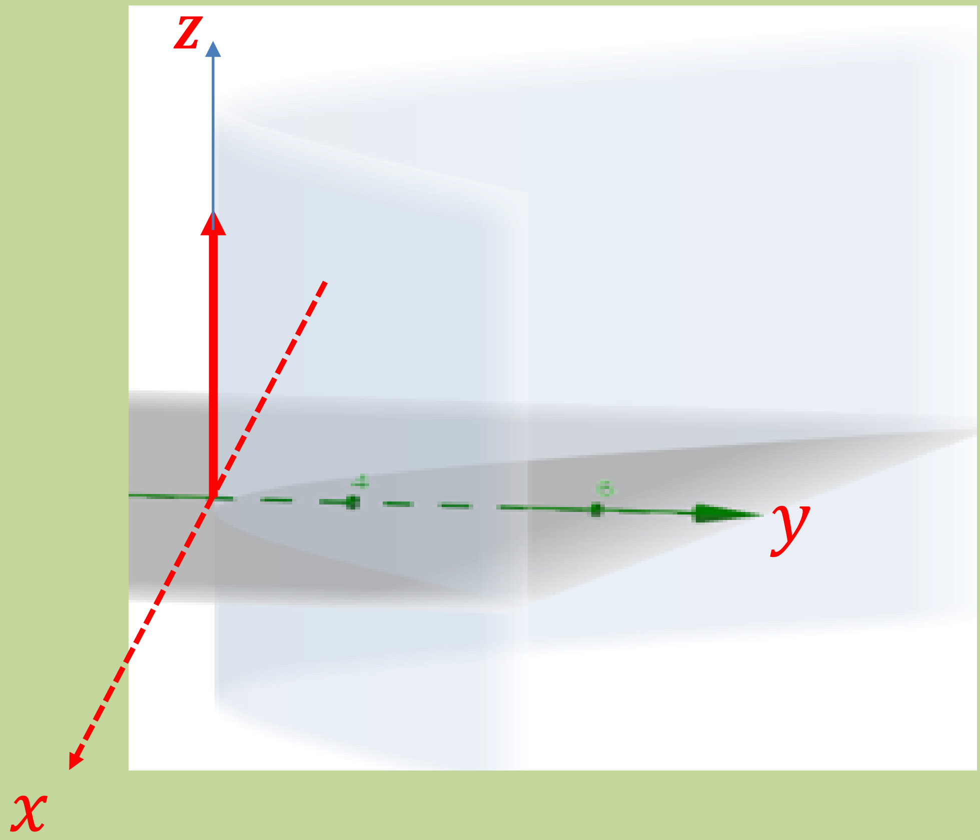
https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?sid=4151&view=html#mapleautobookmark5



https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?sid=4151&view=html#mapleautobookmark5



https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?sid=4151&view=html#mapleautobookmark5


z
y
x

Ecuación de Superficies Cilíndricas

La superficie más simple "el plano", y ya lo hemos estudiado. Su ecuación referida a un sistema de coordenadas cartesiano, es lineal en las variables *x*, *y*, *z*:

$$\mathbf{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{1})$$

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

Un punto $P(x, y, z)$ cumple la ecuación $ax + by + cz + d = 0$, siempre y cuando el vector $N\langle a, b, c\rangle$ sea normal al plano y los puntos $P(x, y, z)$ sean del plano.

.

Si hacemos más general o abstracta la ecuación, tenemos:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

Lo que quiere decir que la ecuación del plano es función o depende de x, y, z.

Por lo tanto, un punto específico del plano $P_o(x_0, y_o, z_0)$ debe cumplir tanto la ecuación (1) como la ecuación (2), o sea que se cumplirá:

$$\mathrm{a}x_0+\mathrm{b}y_0+\mathrm{c}z_0+\mathrm{d}=0$$

o lo que es lo mismo

$$\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0)=0$$

Para obtener la ecuación o la gráfica de una superficie cilíndrica se parte de:

- Una curva directriz C ,
- Una recta generatriz l o su vector director
- *Un punto P´ común a la recta y a la curva..*

Cilindros oblicuos

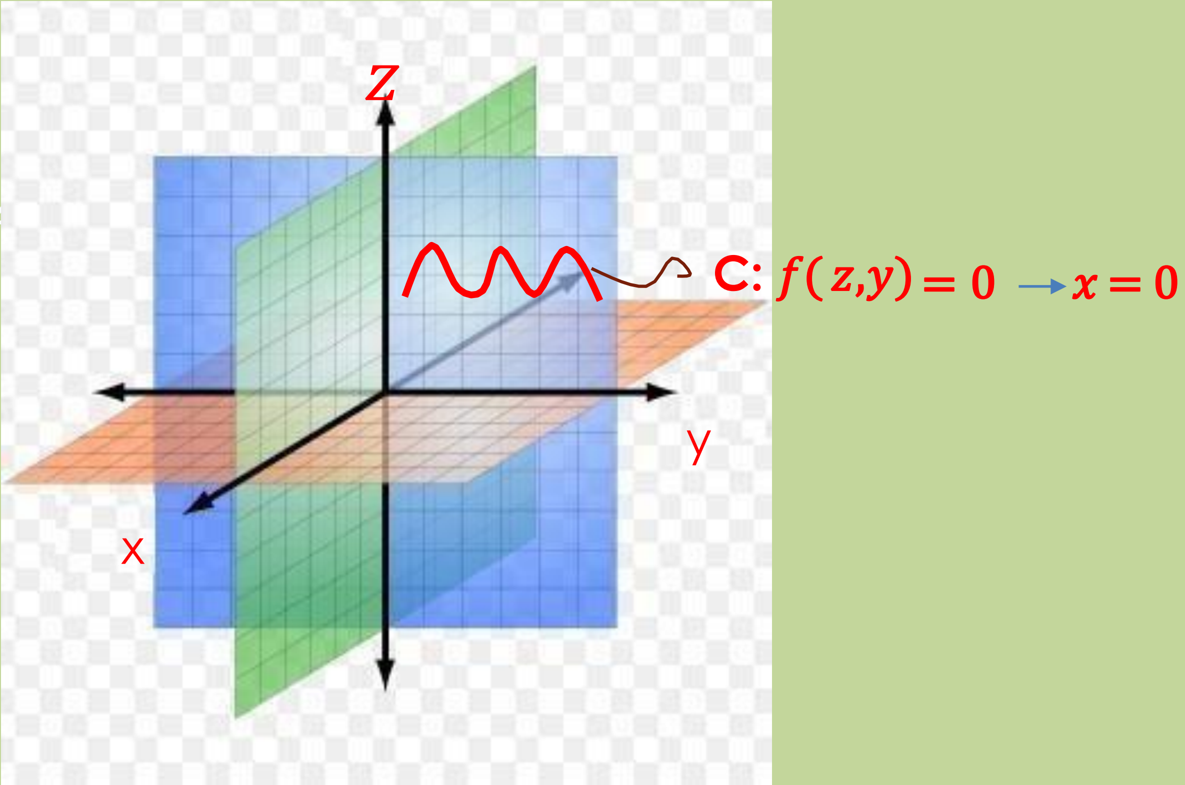
A continuación descubriremos la forma de hallar la ecuación de una superficie cilíndrica oblicua basándonos en lo que sabemos del plano.

Del análisis anterior de la superficie del plano, generalizamos:

La ecuación de una superficie debe involucrar las coordenadas de un punto específico de la misma y cumplir ambas ecuaciones (1) y (2)..

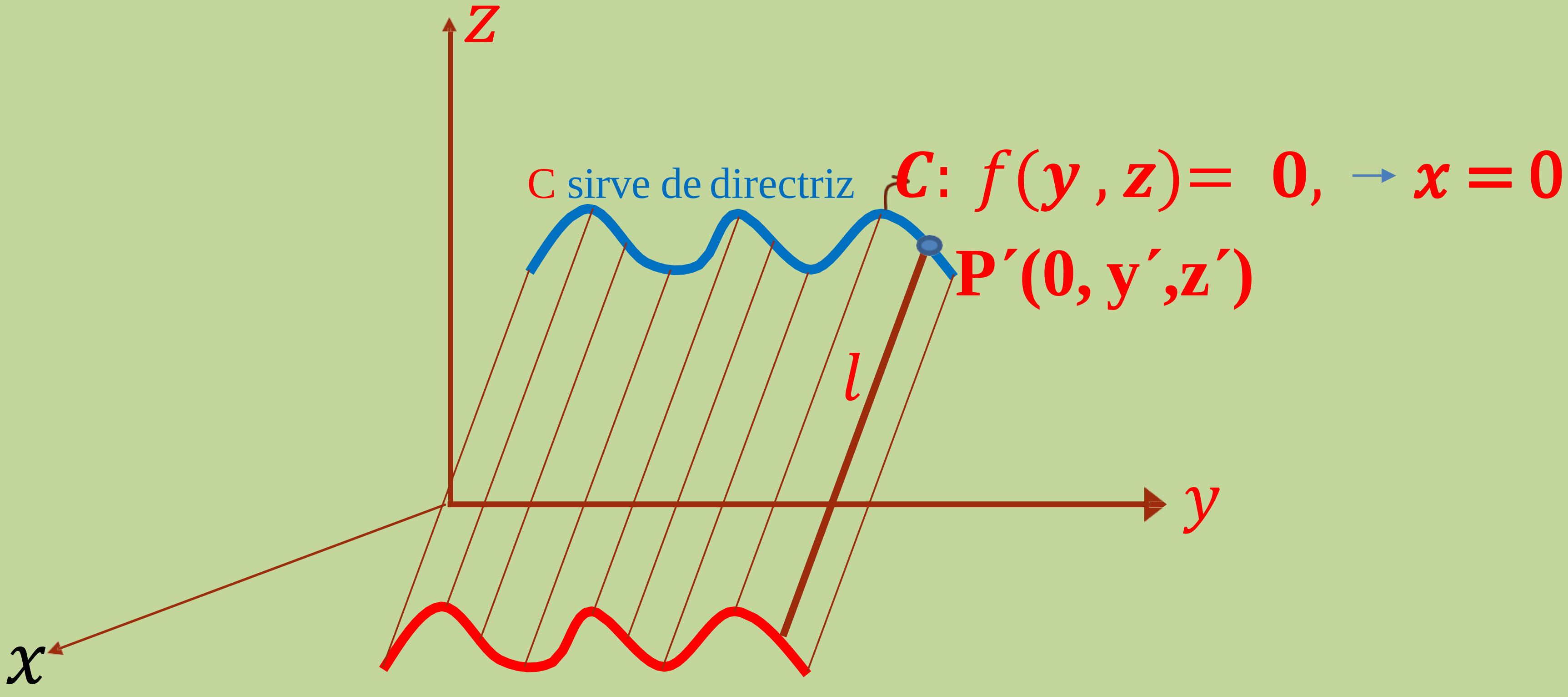
La ecuación de la superficie tiene que ver o está relacionada con el Punto P´ y con la Ecuación $f(x, y, z)$=0. Por lo tanto:

$$S= \left\{ \underbrace{P(x,y,z)}_{\text{punto}} ; \underbrace{f(x,y,z)=0}_{\text{ecuación}} \right\}$$



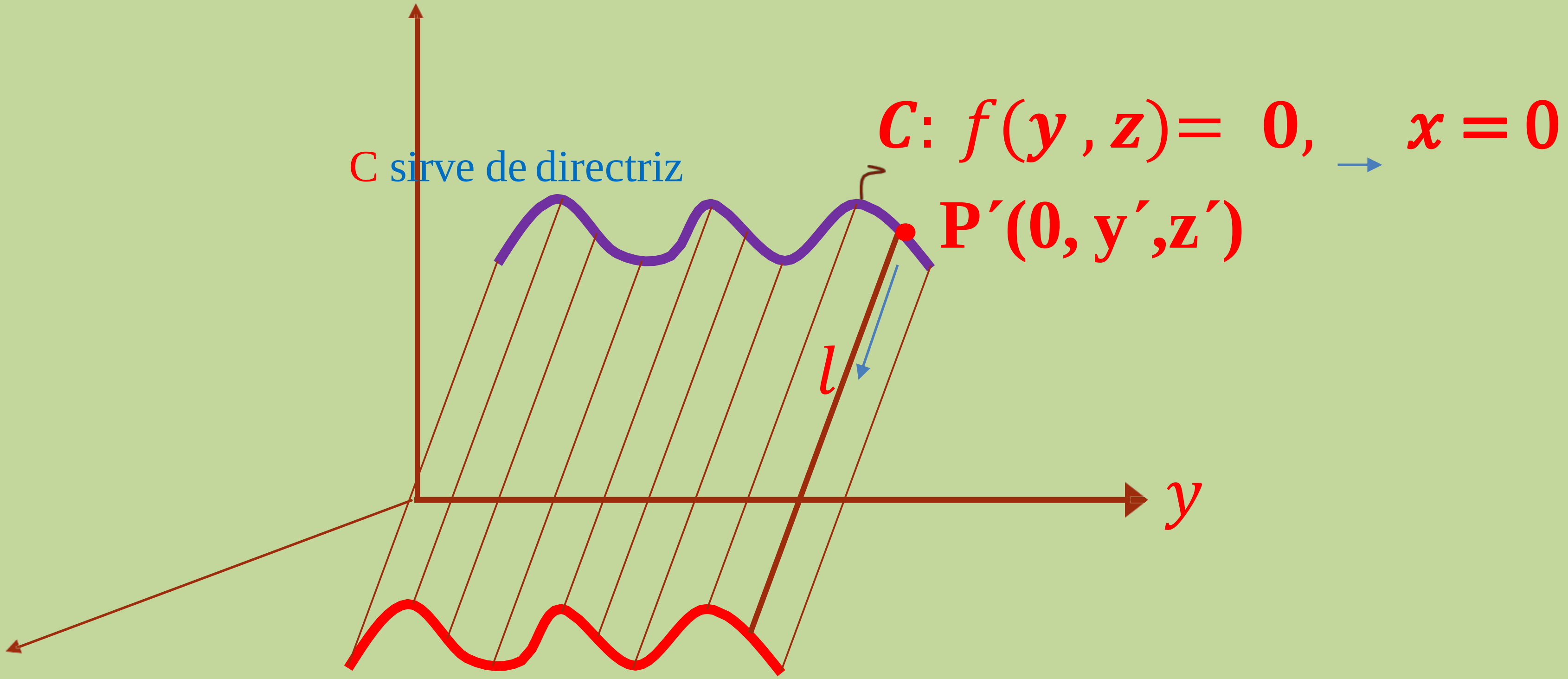
Si por ejemplo, C:$\boldsymbol{f(z, y)}$ es una curva en el plano zy, no tendrá coordenadas en el eje x. Su ecuación se acostumbra expresarla así:

$$\boxed{C{:}f(z,y) = 0, \longrightarrow x = 0}$$

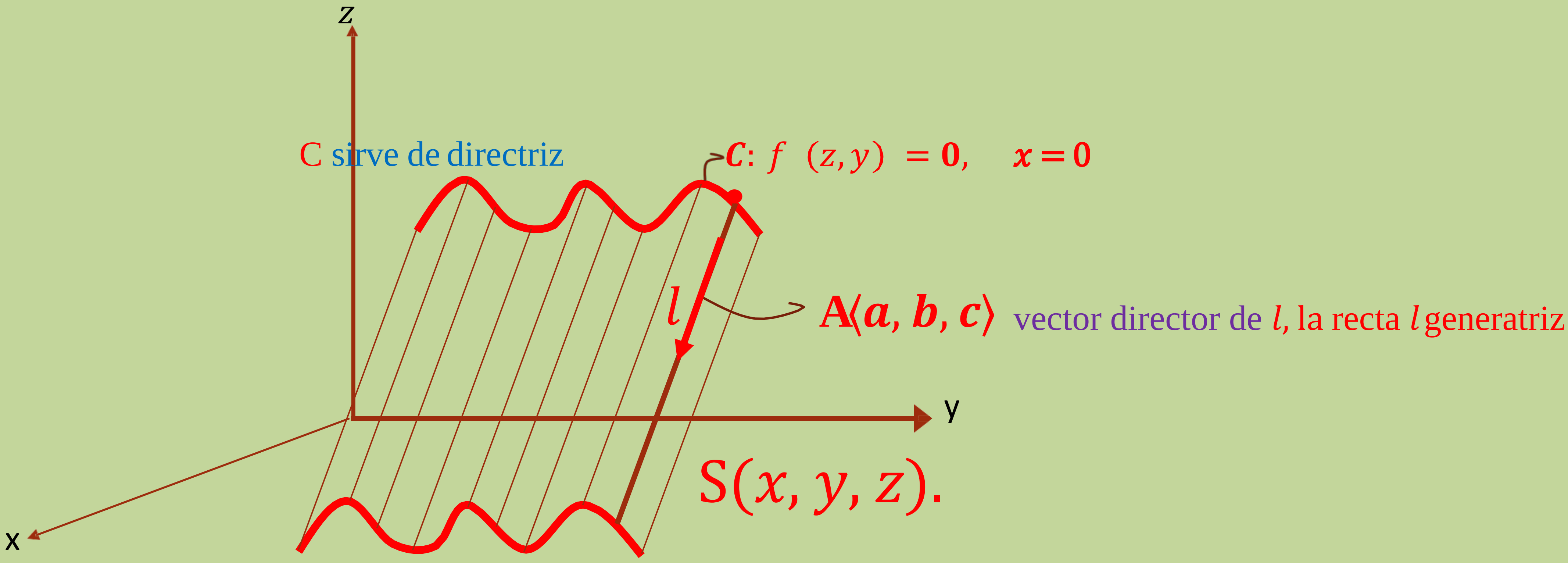


Para obtener la ecuación de una superficie cilíndrica oblicua se parte de una curva directriz C, de la recta generatriz l no perpendicular al plano zy y del punto P´.

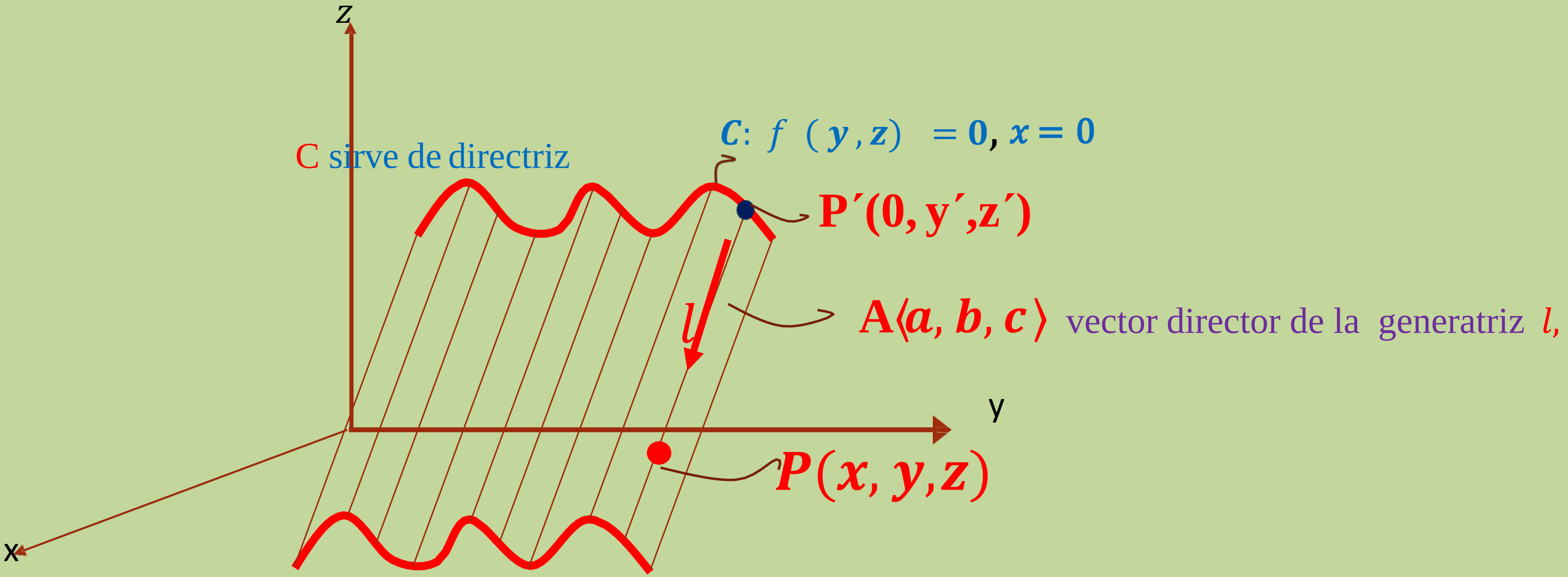
Se supone por ejemplo, que la curva directriz está en el plano zy y la recta generatriz no es perpendicular a este plano.



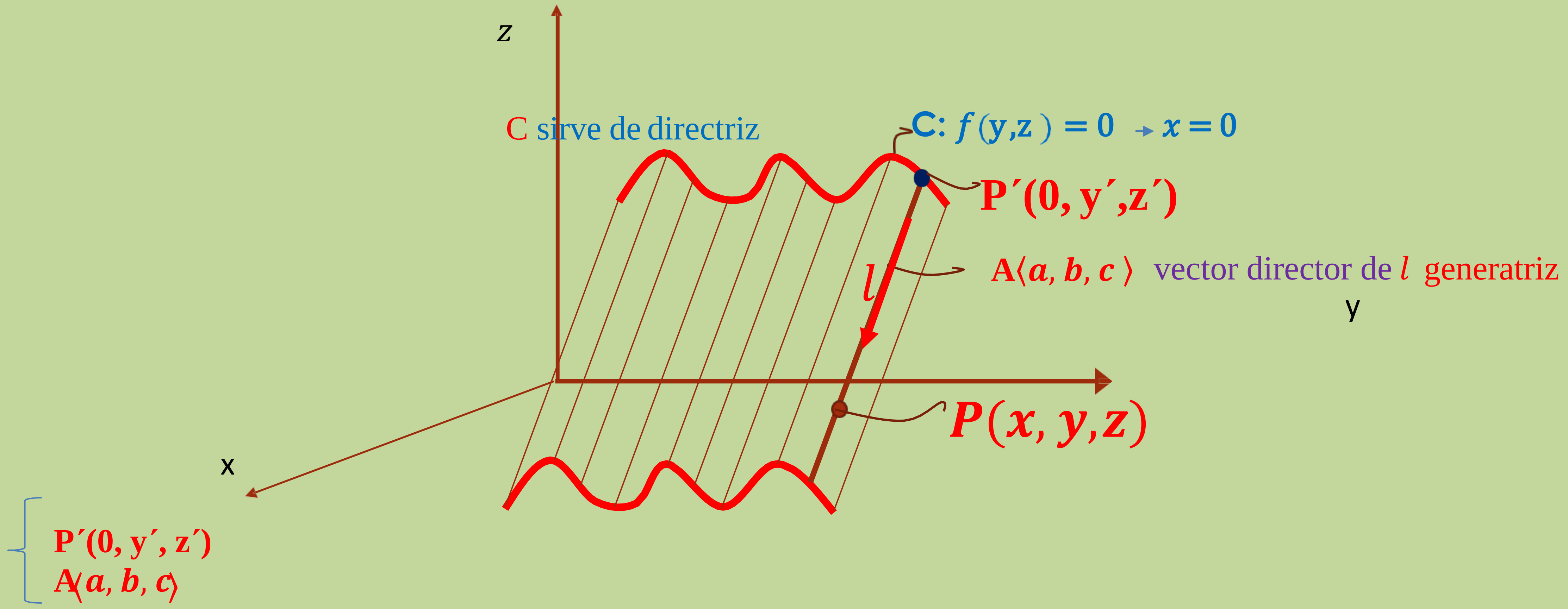
Se considera un punto P’(x', y', z’) que pertenece tanto a la curva como a la recta. Como P’ pertenece a la curva zy, no tiene coordenada en x: P’(0, y', z'). Y como pertenece también a la recta, se puede emplear para obtener su ecuación. La recta tiene su vector director.



La curva plana C:$f(z,\ y)$ sirve de trayectoria para obtener la superficie espacial $S(x, y, z)$. Esta superficie es generada por la recta generatriz l que se desplaza paralelamente a sí misma, teniendo como guía o trayectoria a la curva C: $f(\ y, z) = 0, x=0$. El vector director de l es $\mathbf{A}\ \langle a, b, c\rangle$.



Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera sobre la superficie por el que pasa la recta generatriz l. Y **P´(0, y´, z´)** un punto conocido situado en la curva C donde la recta generatriz l, corta a la curva C.



De la recta l, conocemos el punto **P´(0, y´, z´)** y su vector director **A⟨*a*, *b*, *c*⟩**.
por tanto, se puede obtener su ecuación:

$$\frac{x-0}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c} \qquad (1)$$

El punto $\boldsymbol{P'(0, y', z')}$ **pertenece a la recta y a la curva**, por tanto, cumple también la ecuación de la curva C: f (y, z), x=0 :

$$C: f(y, z) = 0,\ x = 0 \longrightarrow \boldsymbol{C:\ f(y', z') = 0,\ x' = 0 \quad (2)}$$

$$\frac{x-0}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}$$

Se despeja y´

$$\frac{x-0}{a}=\frac{y-y'}{b}$$

Se despeja z’

$$\frac{x-0}{a}=\frac{z-z'}{c}$$

y’ y z’ se remplazan en la ecuación (2) C: $f(y',z')=0,\ x'=0$

Y luego de ejecutar las operaciones se obtiene la ecuación de la superficie.

De forma similar se haría para obtener la ecuación o la gráfica de cualquier otra superficie cilíndrica oblicua o recta a partir de los planos xy o zx. Incluso la deducción de la ecuación de un cilindro recto es más sencilla pues de hecho se conoce el vector director de la recta generatriz.