Superficies: Ejercicios Tipo I

Presentación realizada por
Efrén Giraldo T.

Tipos de ejercicios que se presentan.

1. *Determinar la ecuación de una superficie cilíndrica conociendo:*

a. La ecuación de su curva directriz
b. El vector director de su recta generatriz.

Ejercicio tipo 1: Dado el vector director y la ecuación de la curva directriz. hallar la ecuación de la superficie.

Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica oblicua dada la curva directriz y el vector director de la recta generatriz

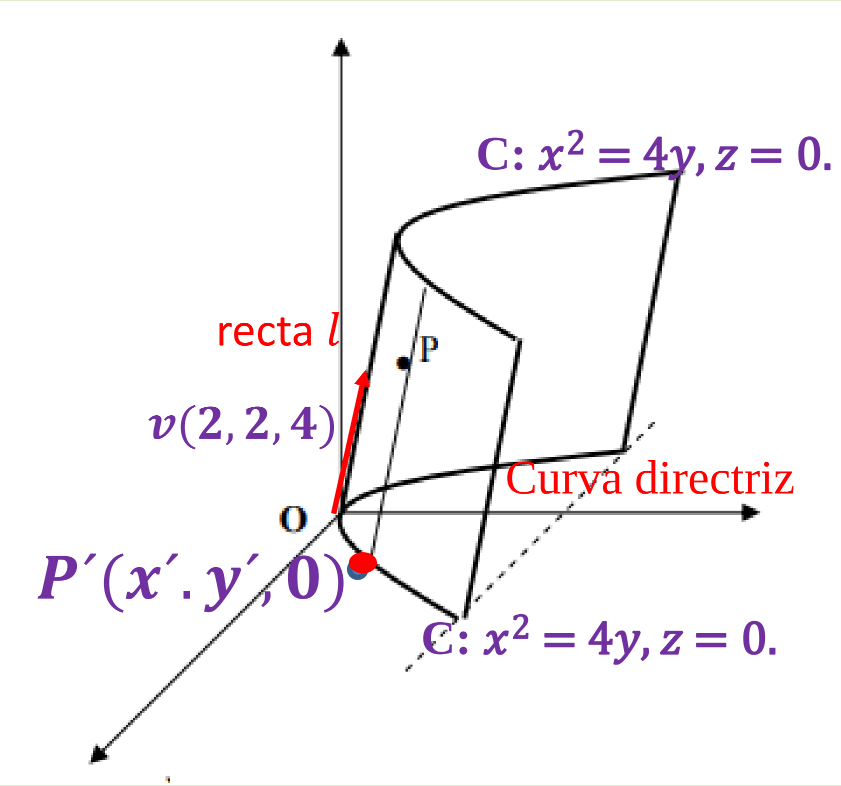
Curva directriz $\quad C\colon x^2 = 4y, \quad z = 0$

Vector director de la recta generatriz $\quad v\langle 2,2,4\rangle.$

Vamos a determinar la ecuación de un cilindro oblicuo porque el vector director de la recta generatriz tiene coordenadas en 3D.

Observamos que la *curva directriz* está *en* el *plano xy*. Y es una parábola centrada en el origen.

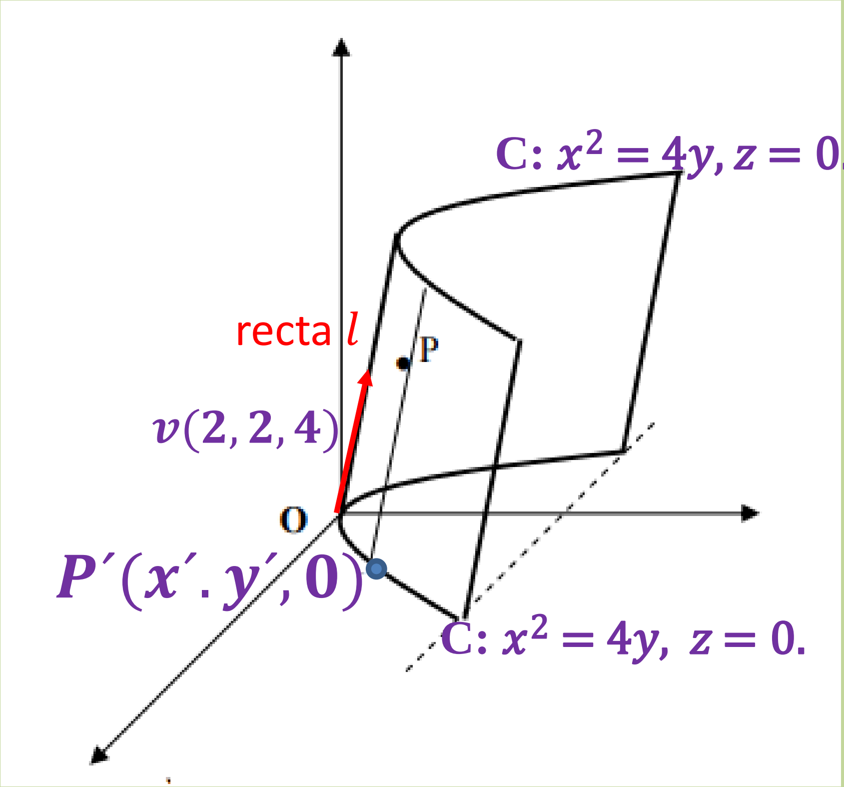
(Lehmann, 1989)



http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra

http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra/apuntes/cuadricas/02-lugares_geometricos.pdf

Datos del ejercicio



Vector director A⟨2,2,4 ⟩

Curva directriz C: $x^2 = 4y$, z=0

Se supone que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}´, \boldsymbol{y}´, \mathbf{0})$ es un punto que pertenece a la *curva* directriz y a *la recta* generatriz. La curva directriz original está en el plano xy.

Punto de la recta: $\boldsymbol{P'(x', y', 0)}$

Vector director de la recta: $\boldsymbol{v\langle 2, 2, 4\rangle}$

Ecuación de la recta generatriz:

$$\frac{x - x'}{2} = \frac{y - y'}{2} = \frac{z - 0}{4}$$

$$\boldsymbol{\frac{x - x'}{2} = \frac{y - y'}{2} = \frac{z}{4}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ahora se reemplaza el punto $\boldsymbol{P'(x', y', 0)}$ en la ecuación de la curva C: $x^2 = 4y,\ z = 0$

$$\boldsymbol{x'^2 = 4y';\ z' = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\frac{x - x´}{2} = \frac{y - y´}{2} = \frac{z}{4} \qquad (1)$$

Observamos de las tres componentes de la ecuación (1), la más sencilla es z.
Tomanos de a dos, y despejamos $x´$ e y´de las ecuaciones.

$$\frac{x - x´}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\frac{y - y´}{2} = \frac{z}{4}$$

De l primera:

$$\frac{x - x'}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} = \frac{2Z}{4}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} = \frac{z}{2}$$

$$\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{x'} \quad (3)$$

De la segunda:

$$\frac{y - y´}{2} = \frac{z}{4}$$

De la segunda:

$$y - y´ = \frac{2z}{4}$$

$$y - y´ = \frac{z}{2}$$

$$y - \frac{z}{2} = y´ \qquad (4)$$

En la la ecuación (2) de la parábola, C: $x'^2 = 4y'$, $z' = 0$ se reemplazan las ecuaciones (3) y (4)

$\boldsymbol{x - \frac{z}{2} = x'}$ $\quad$ $y - \frac{z}{2} = y'$

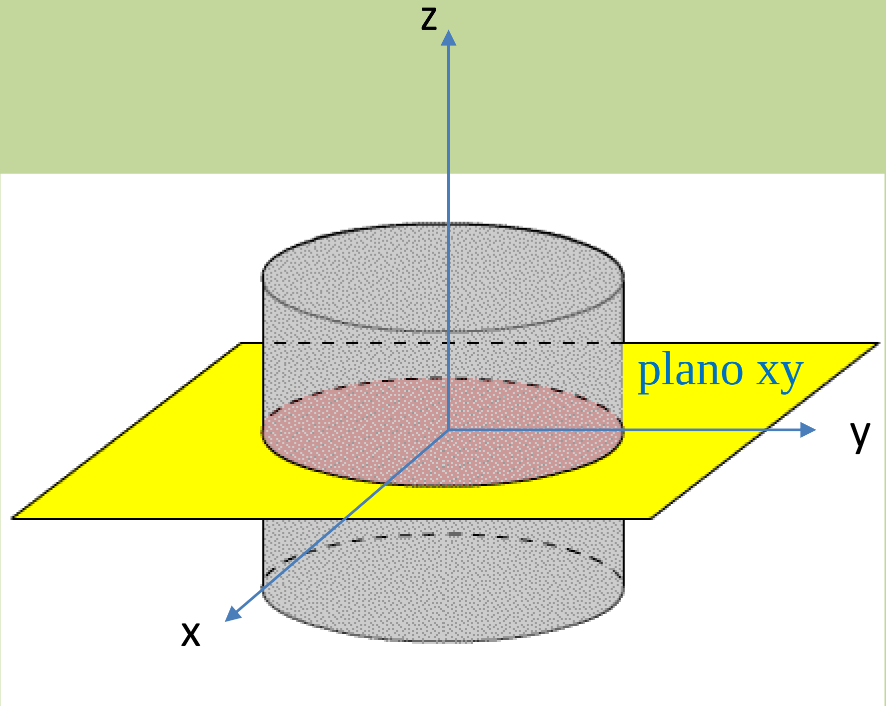
$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 = 4\left(y - \frac{z}{2}\right)$$

$$x^2 - xz + \frac{z^2}{4} = 4y - 2z$$

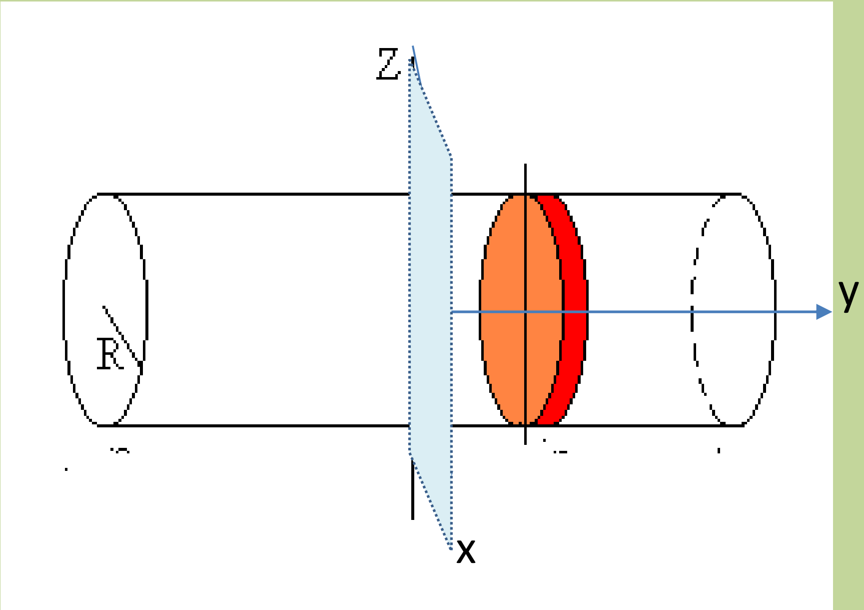
$$x^2 - xz + \frac{z^2}{4} - 4y + 2z = 0$$

Es la ecuación de la superficie pedida.

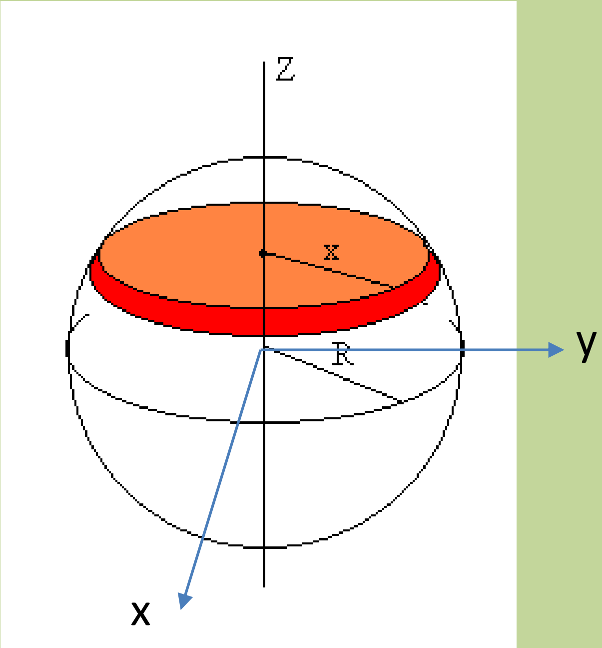
Secciones de superficies en Planos perpendiculares a los ejes coordenados (Planos paralelos a planos coordenados: ejes faltantes)



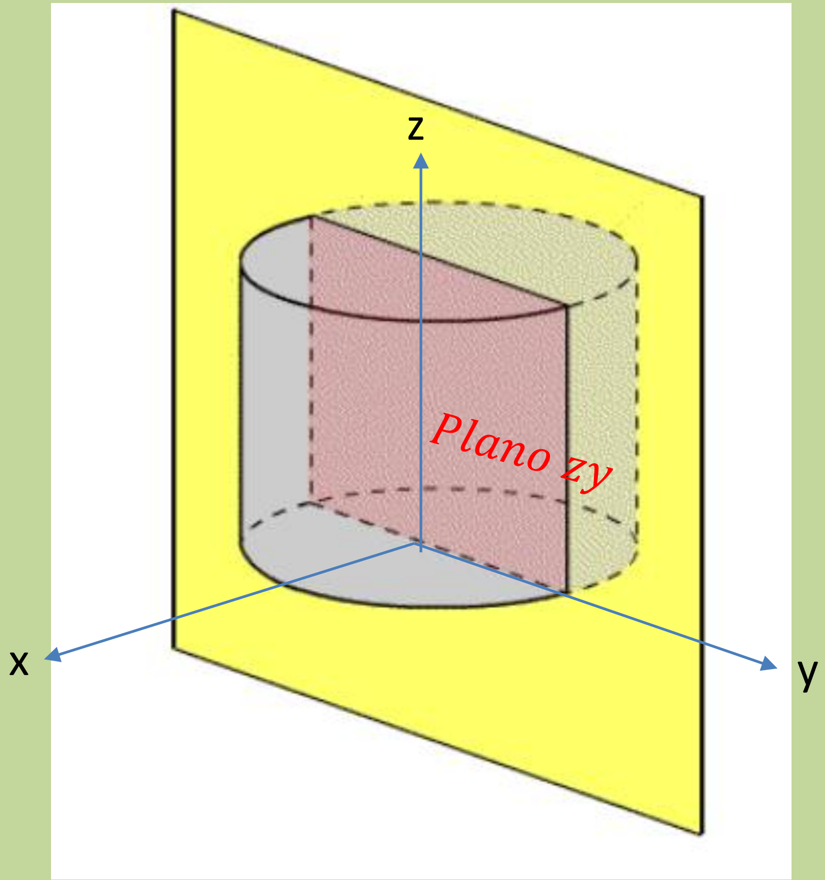
Sección ⊥ al eje z (paralela a plano xy)



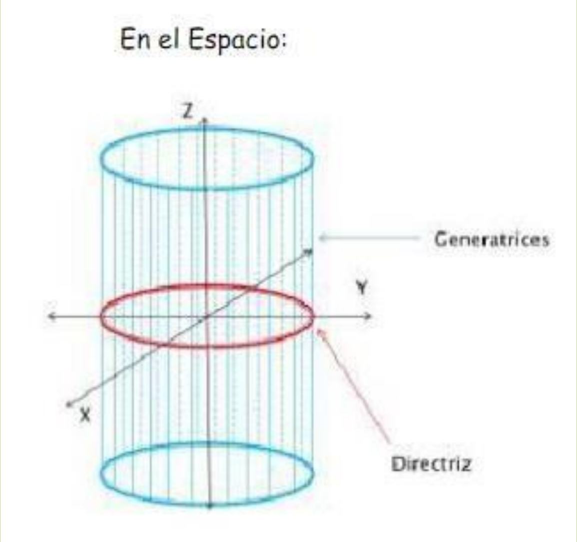
Sección ⊥ al eje y (paralela a plano zx)

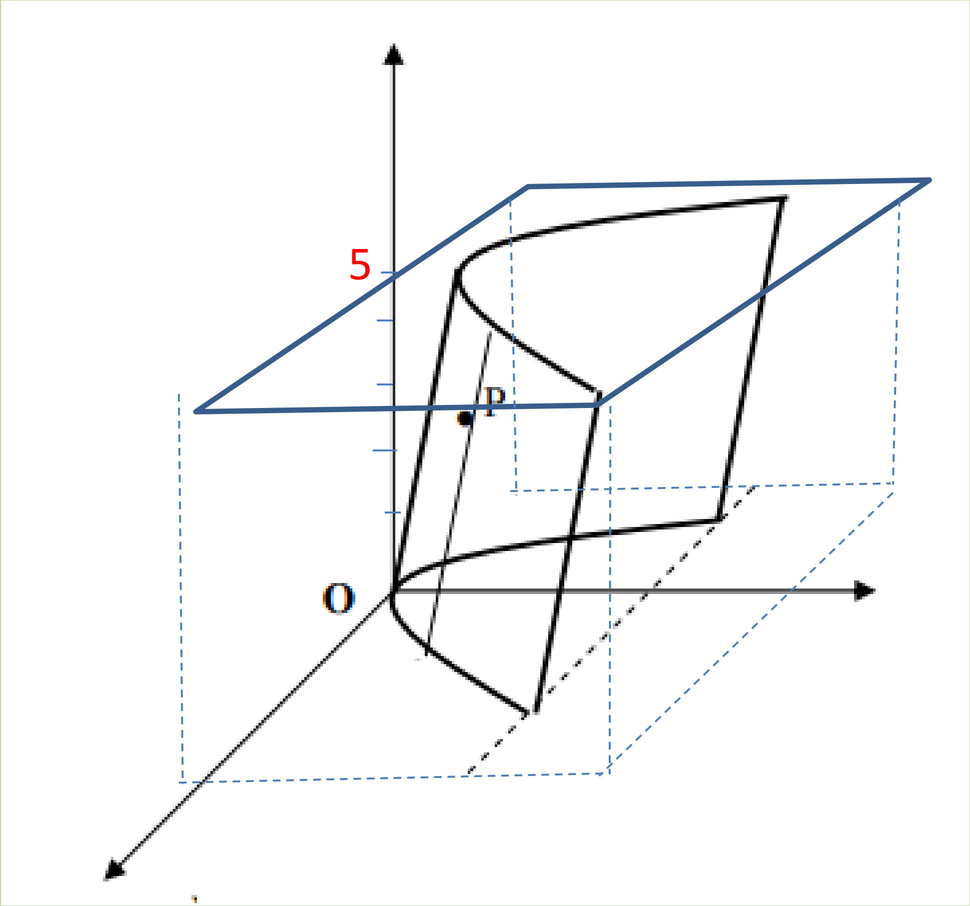


Sección ⊥ al eje
(paralela a plano xy)



Sección perpendicular al eje x (paralela a plano zy)





(Intersecciones de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados)
(O lo que es lo mismo, planos perpendiculares a los ejes coordenados)

Se puede obtener una buena idea de la forma de una superficie estudiando la naturaleza de sus secciones planas.

Tales secciones pueden determinarse convenientemente cortando la superficie por una serie de planos paralelos a los planos coordenados xy ó xz ó zy. O lo que es lo mismo, por planos perpendiculares a los ejes coordenados.

En general, las secciones de los planos paralelos a los planos coordenados se obtienen haciendo k (una constante) al eje faltante al plano en cuestión. Se hace igual a k en la ecuación a la variable faltante.

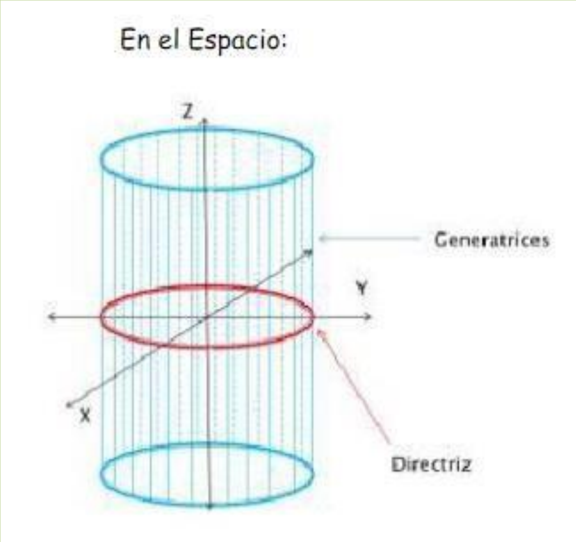
Para conocer los planos paralelos aun plano cartesiano dado, se dan valores numéricos a la variable faltante en la ecuación.

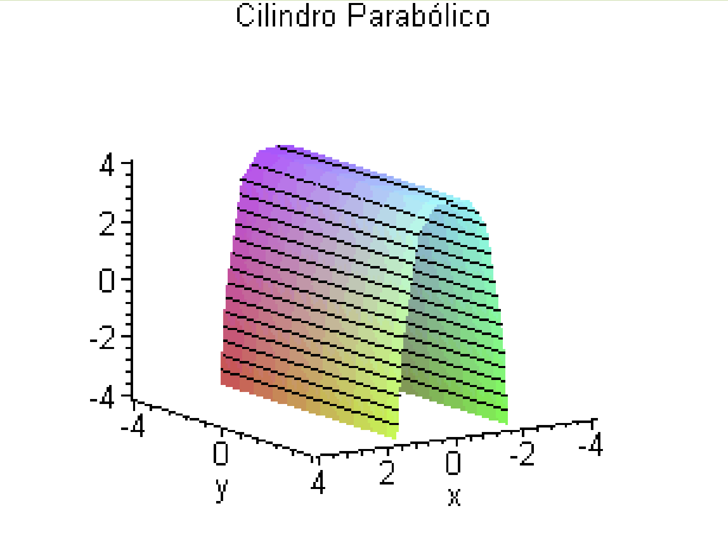
$$f(x, y, \mathrm{k}) = 0, \qquad z = k$$

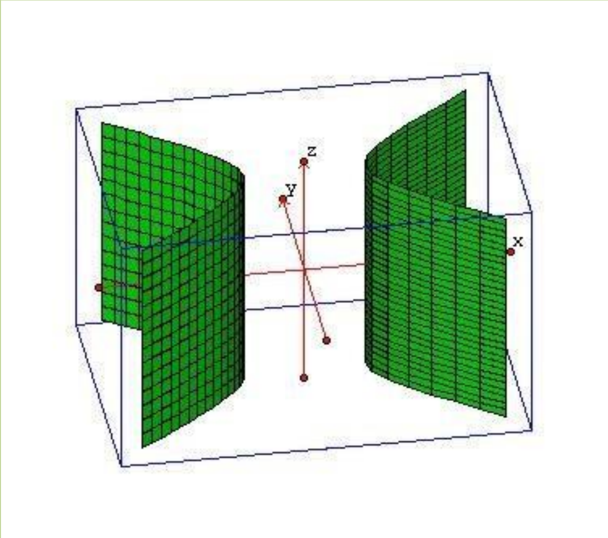
Por ejemplo, los planos paralelos al plano xy pertenecen a la familia cuya ecuación es **z** = k , en donde k es una constante que indica la distancia al plano base xy. En cada plano paralelo habrá una cierta gráfica. Y cada plano tendrá un valor diferente de k.

$$k = 0 \ \underline{+}1, \underline{+}2, \underline{+}3, \underline{+}4 \ldots.$$

Secciones planas en cilindros rectos

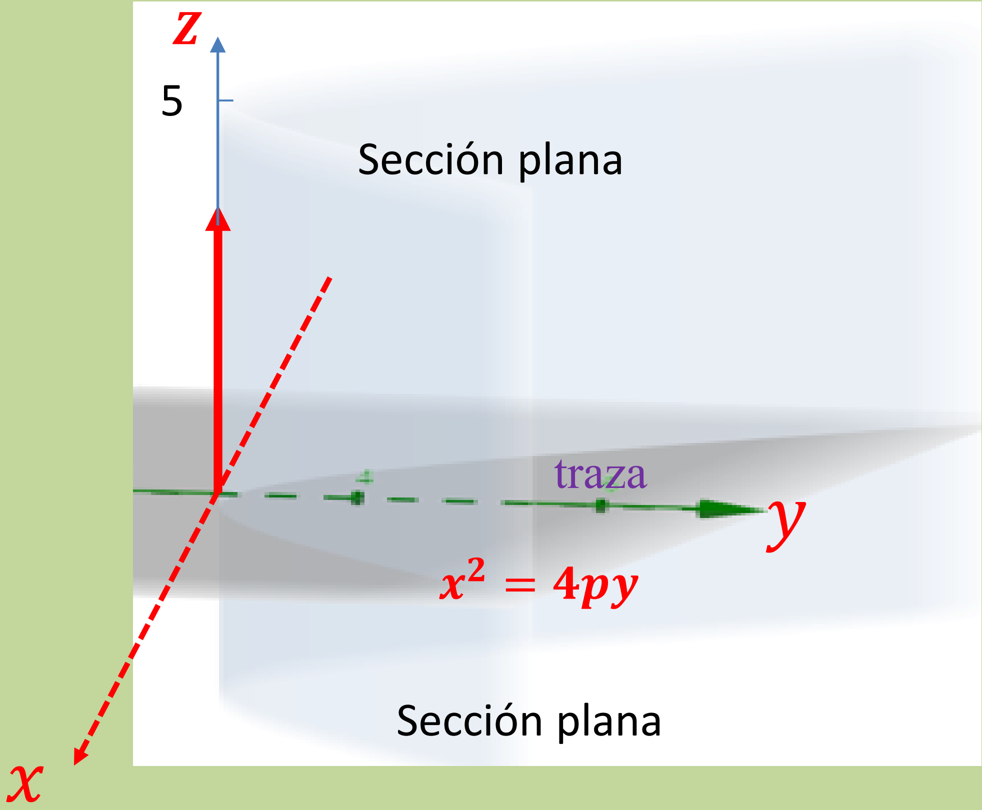




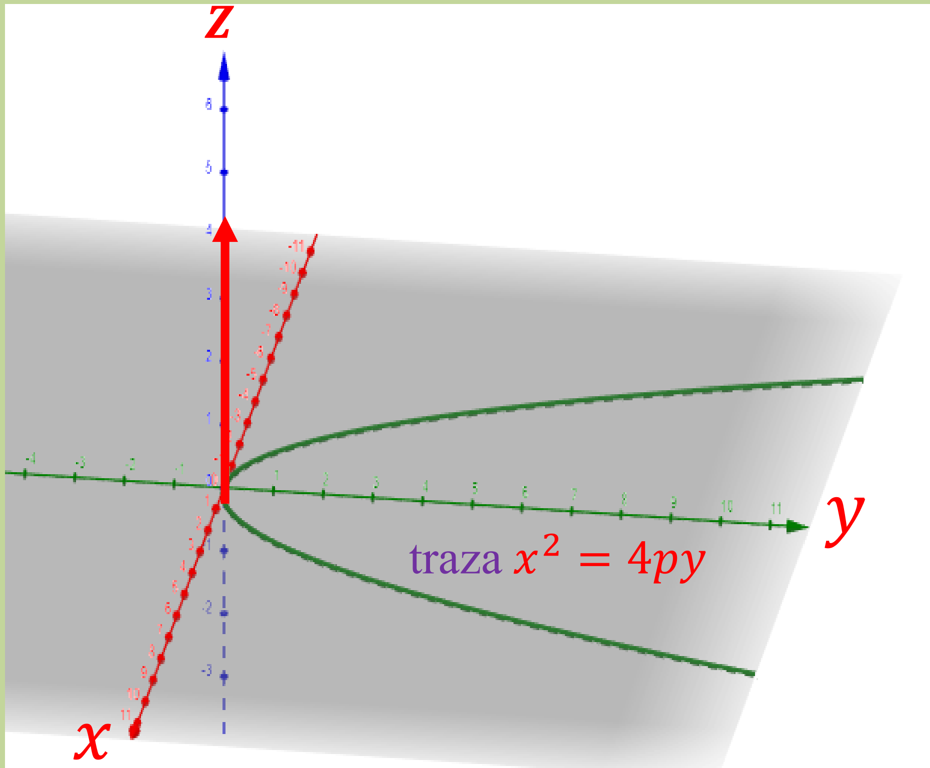


Las secciones planas en cilindros rectos son similares a la de la curva base original (directriz).

Superficie

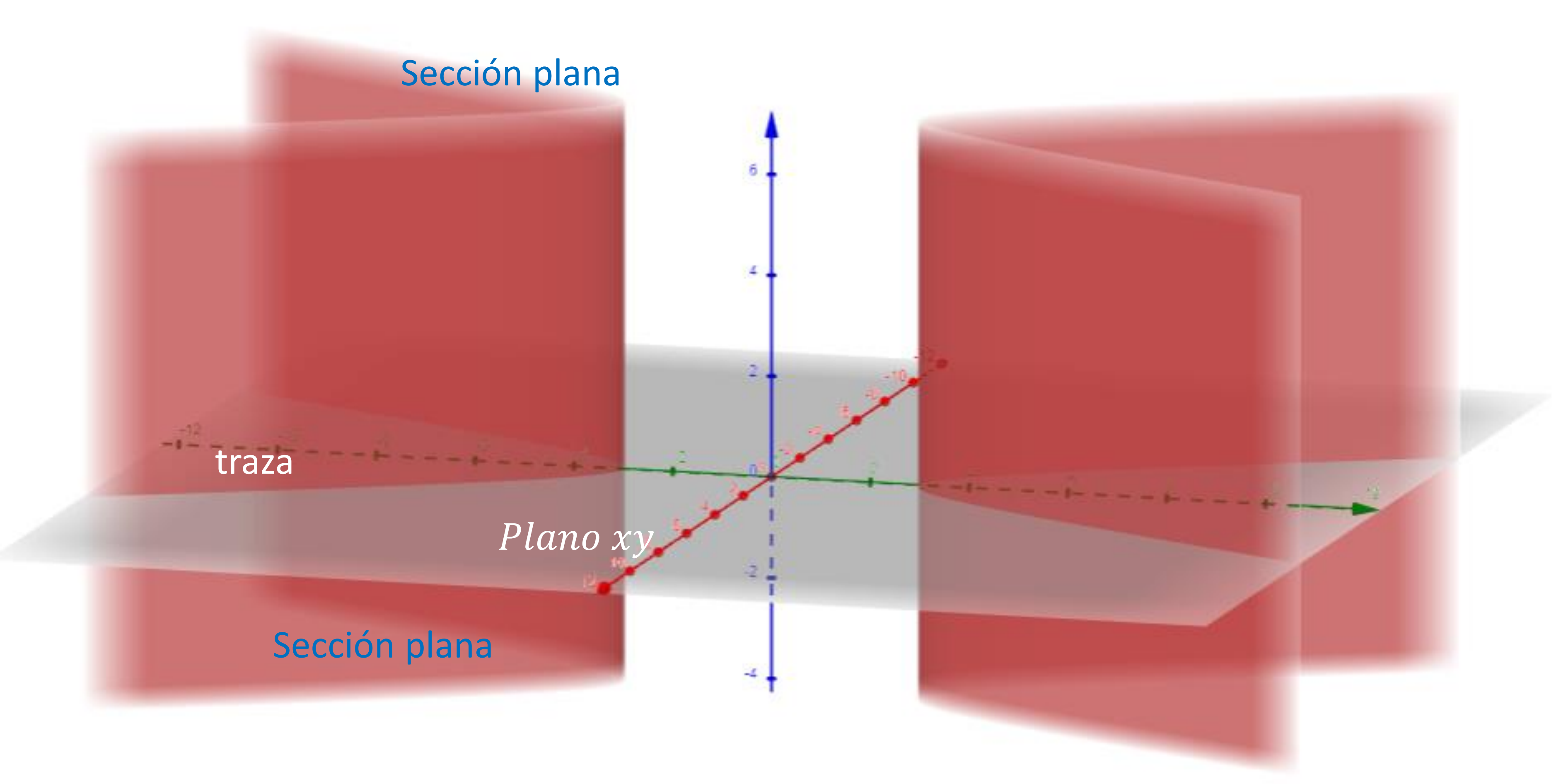


Traza $x^2 = 4py$



Traza para la superficie $\boldsymbol{x^2 = 4py}$ *Plano* xy.

La traza es una parábola cuya ecuación de la forma $x^2 = 4py$


Sección plana
traza
$Plano\ xy$
Sección plana

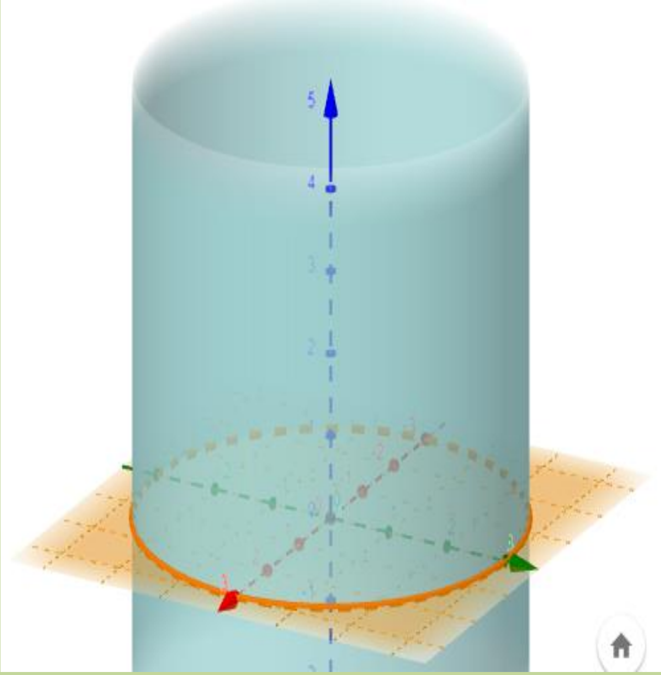
Trazas o planos paralelos a los planos xy, xz, yz.

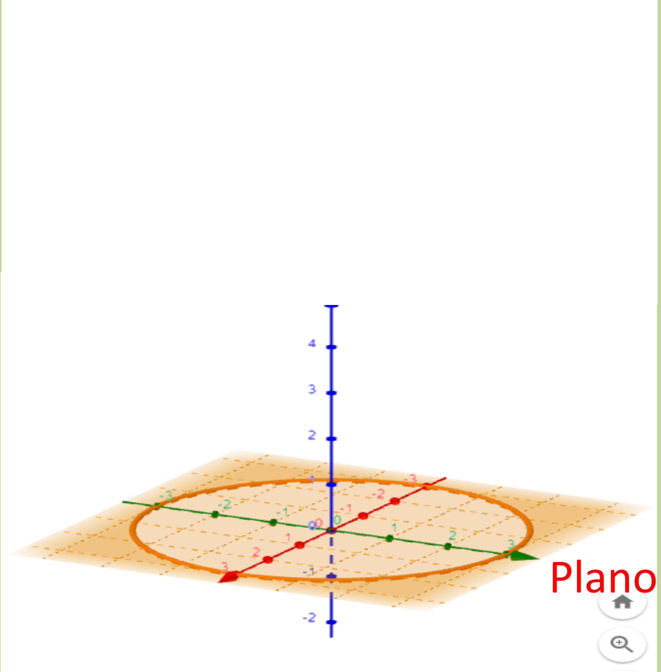
Si S es una superficie en el espacio de ecuación $f(x, y, z)=0$, se llaman trazas de la superficie a las curvas bidimensionales:

Para el plano xy se tendrá: $f(x, y, k) = 0, \quad z = \text{k}$

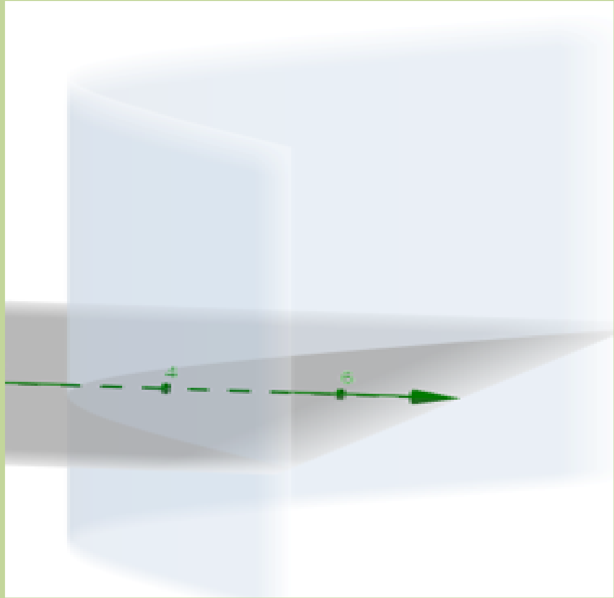
Para el plano xz se tendrá: $f(x, k, z) = 0, \quad y = \text{k}$

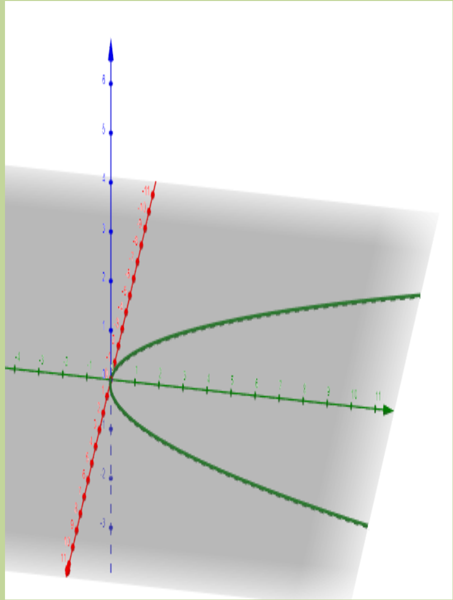
Para el plano zy se tendrá: $f(k, y, z) = 0, \quad x = \text{k}$





Traza en el plano xy $(z = 0)$ de la superficie cilíndrica





Traza en el plano xy $(z = 0)$ de la superficie cilíndrica

Ejercicios de Secciones planas de superficies

Hallar algunas secciones planas de la superficie S: $f(x, y, z) = 0$ en *planos perpendiculares al eje z (paralelos al plano* xy).

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

Sección plana en el plano z=1

$$9x^2+9y^2-z^2-9=0$$

si $z=1$

$$9x^2+9y^2-1^2-9=0$$

$$9x^2+9y^2=10$$

$$x^2+y^2=\frac{10}{9}$$

$$x^2+y^2=1.1$$

Ecuación de una circunferencia con centro (0,0) y radio igual a $\sqrt{1.1}$,
situada en el plano   z=1

Sección plana en el plano z=5 (planos paralelos xy)

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

si z=5

$$9x^2 + 9y^2 - 5^2 - 9 = 0$$

$$9x^2 + 9y^2 = 34$$

$\div\ 9$

$$x^2 + y^2 = 3.77$$

Ecuación de una circunferencia con centro (0,0) y radio igual a $\sqrt{3.77}$, situada en el plano z=5

Sección plana perpendicular al eje x (planos $\parallel a$ zy) en $x = 0.5$

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

$$si\ x = 0.5$$

$$9 * 0.5^2 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

$$2.25 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

Paso a dividir 6.75

$$9y^2 - z^2 = 6.75 * 1$$

$$\frac{9y^2}{6.75} - \frac{z^2}{6.75} = 1 \longrightarrow 1.3y^2 - 0.14z^2 = 1$$

Ecuación de una hipérbola con centro (0,0).

Para la traza perpendicular a x, en el plano zy, se remplaza x=0

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

si x= 0

$$9y^2 - z^2 - 9 = 0$$

$$9y^2 - z^2 = 9$$

$\div$ 9

$$y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$$

Ecuación de una hipérbola con centro (0,0), a=1 , b=3 situada en el plano xy.

Ejercicio tipo 1

Ecuación de una superficie cilíndrica recta dada la curva directriz y la recta generatriz

Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica recta cuya curva directriz C es:

$$9x^2 + 4z^2 + 4z = 0, \quad y = 0. \text{ (Plano } xz\text{).}$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4 * 9 * 4 = - \text{ elipse}$$

Al decirnos que es una superficie cilíndrica recta en el plano xz, nos dan el vector director de la recta generatriz. Este vector está en el eje y, por tanto, su coordenada en el eje es y= k, el vector tiene coordenadas:

$$\mathrm{A}\langle 0, k, 0\rangle$$

Vector director de la recta $A\langle 0, k, 0\rangle$

Como la curva está en el plano xz, no tendrá coordenadas en el eje y, $\longrightarrow$ y=0
El punto $\boldsymbol{P}'(x', 0, z')$ pertenece tanto a la curva como a la recta.
Partimos de ese punto común $\boldsymbol{P}'(x', 0, z')$

Por tanto, la ecuación de la generatriz es:

$\boldsymbol{P}'(x', 0, z')$
$A\langle 0, b, 0\rangle$

$$\frac{x - x'}{0} = \frac{y - 0}{k} = \frac{z - z'}{0}$$

$$\frac{x-x'}{0}=\frac{y-0}{k} \longrightarrow x-x'=0\left(\frac{y-0}{k}\right) \longrightarrow x-x'=0 \longrightarrow x=x'$$

$$\frac{y-0}{k}=\frac{z-z'}{0} \longrightarrow z-z'=0(y-0) \longrightarrow z-z'=0 \longrightarrow z=z'$$

$$9x^2 + 4z^2 + 4z = 0, \quad \mathrm{y} = 0 \quad (1)$$

$$x = x' \qquad (2)$$

$$z = z' \qquad (3)$$

La coordenada en y es

$$(2), (3) \ \ en \ (1)$$

$$9x'^2 + 4z'^2 + 4z' = 0, \; y' = 0$$

$x' = x$

$y' = y$

$$9x^2 + 4z^2 + 4z = 0, \quad y = K$$

La ecuación de la superficie cilíndrica recta es la misma, pero con $y = k$, para que represente a toda la familia de curvas paralelas a $9x^2 + 4z^2 + 4z = 0$.