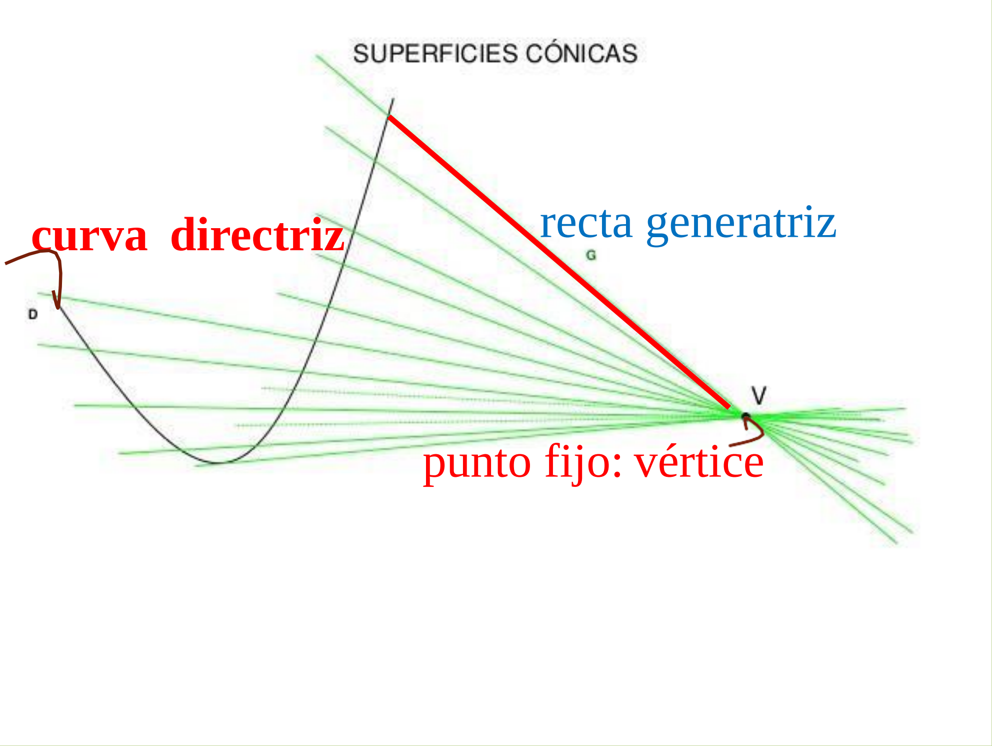
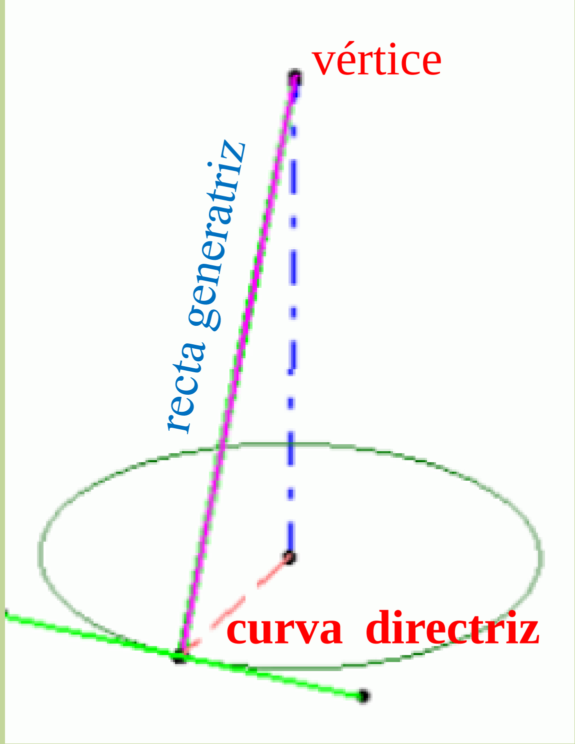
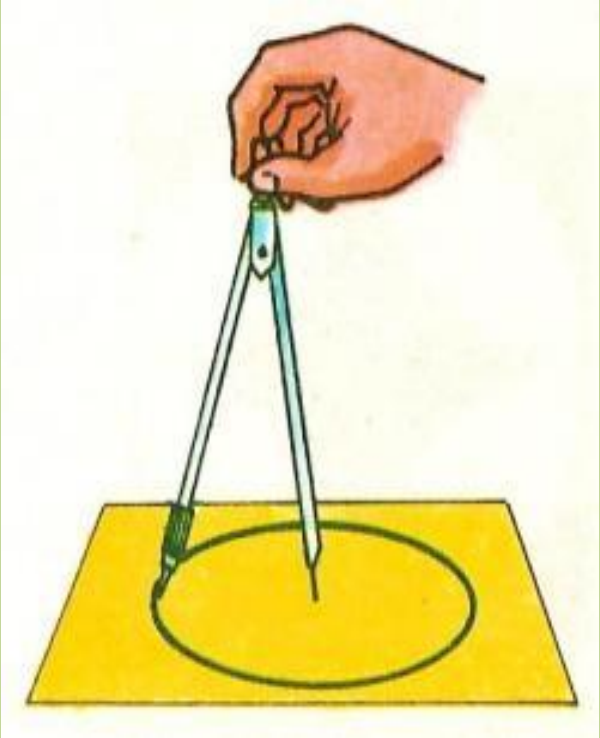
http://ctapia1.blogspot.com.co/2014/10/aplicacion-de-las-secciones-conicas-y.html

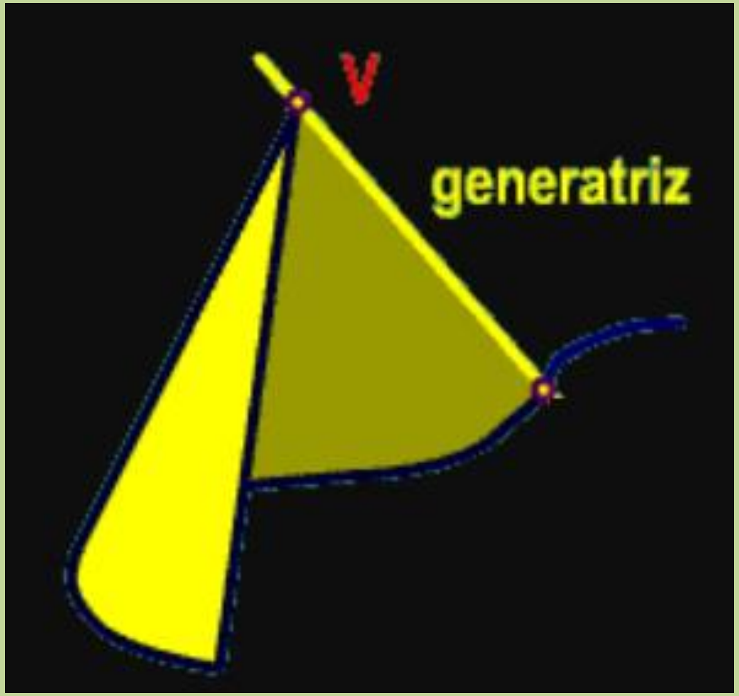
SUPERFICIES CÓNICAS

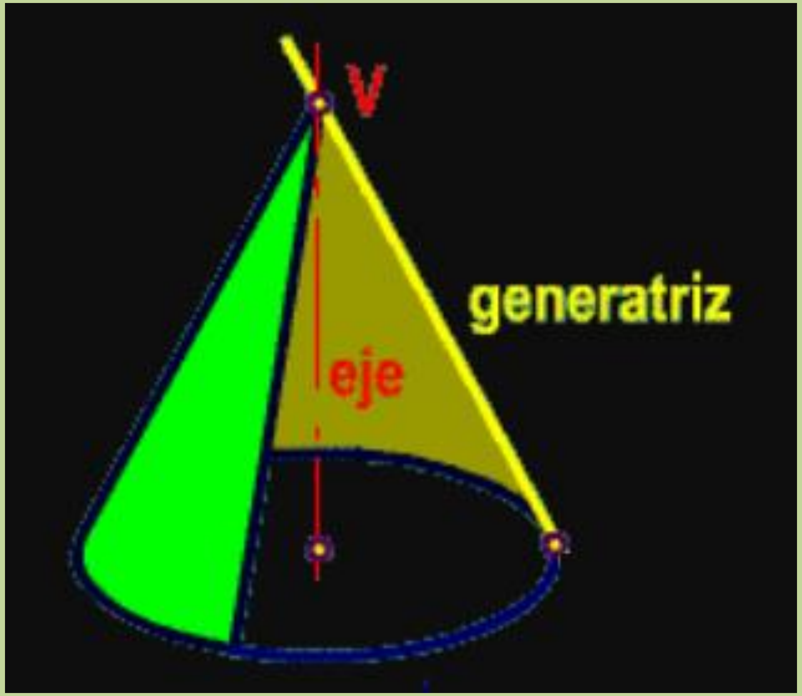




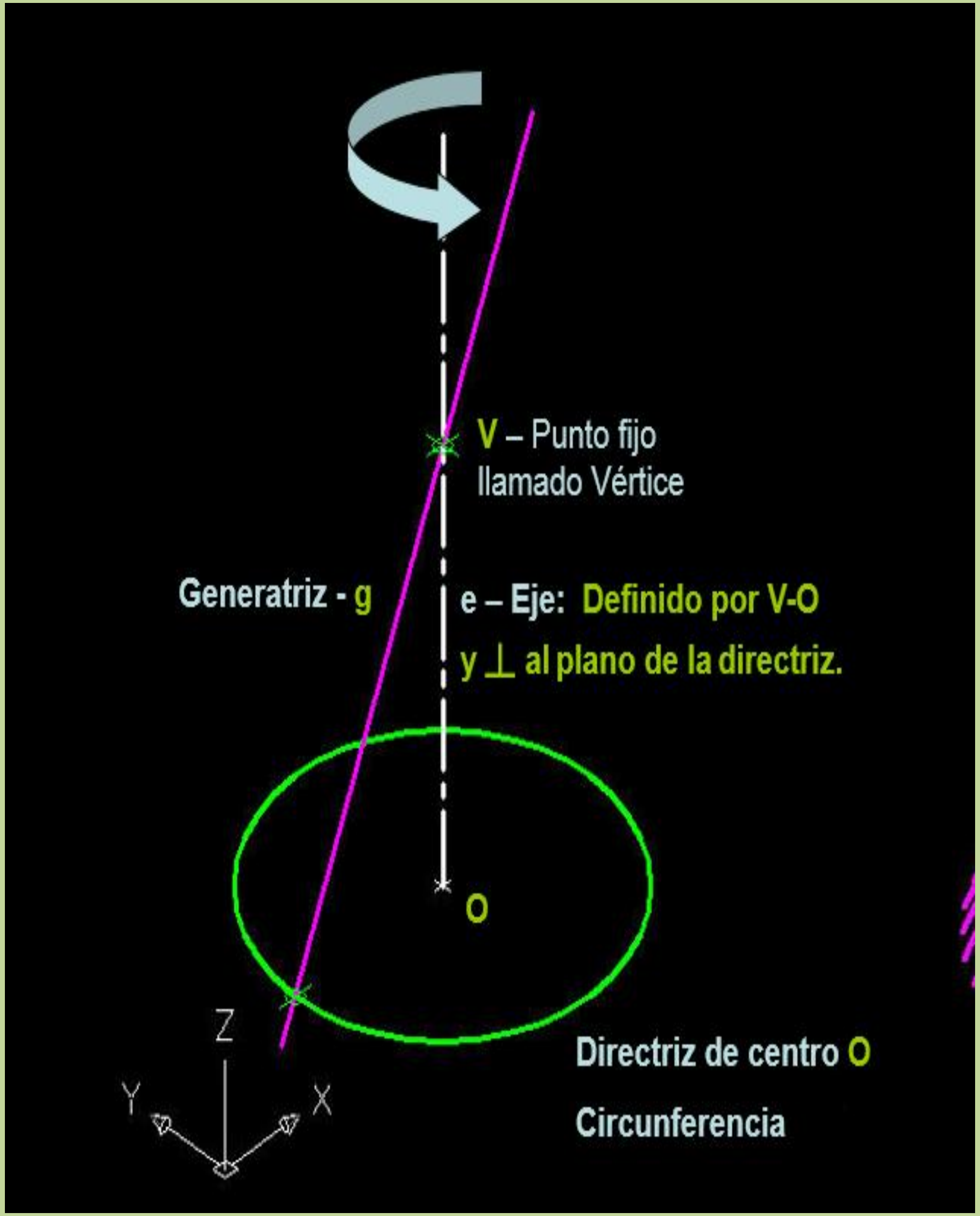


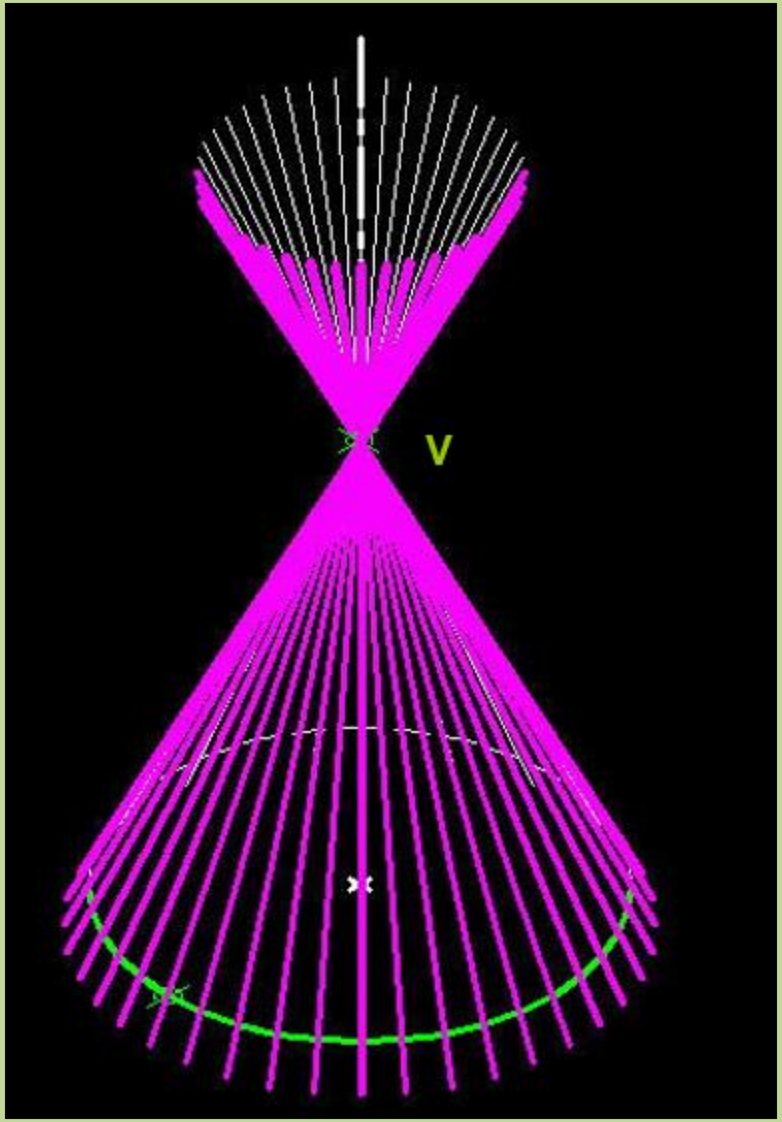
Una superficie cónica es la originada por una recta generatriz que pasa por un punto fijo (vértice) y sigue la trayectoria de una curva llamada directriz . El vértice está fuera del plano de la curva directriz.La recta generatriz ya no se desplaza paralelamente a si misma



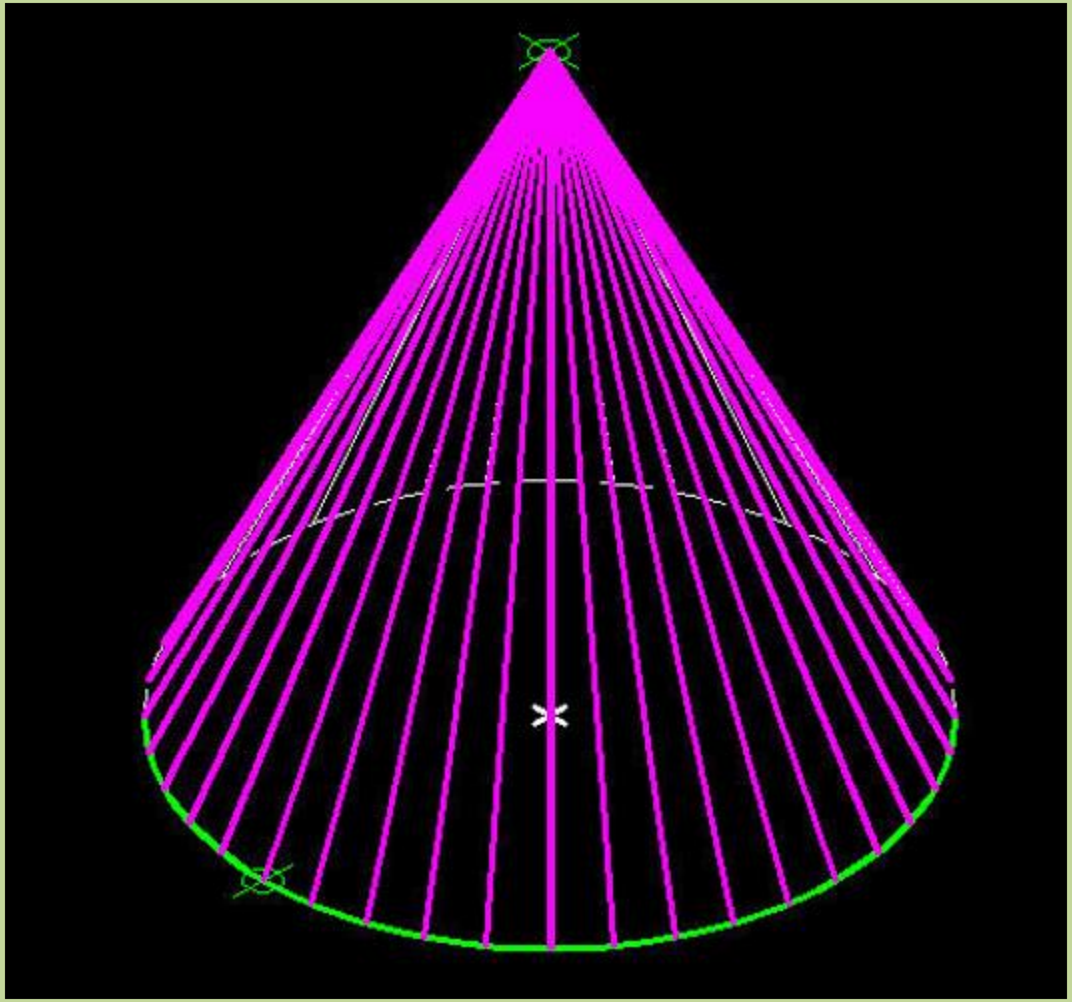


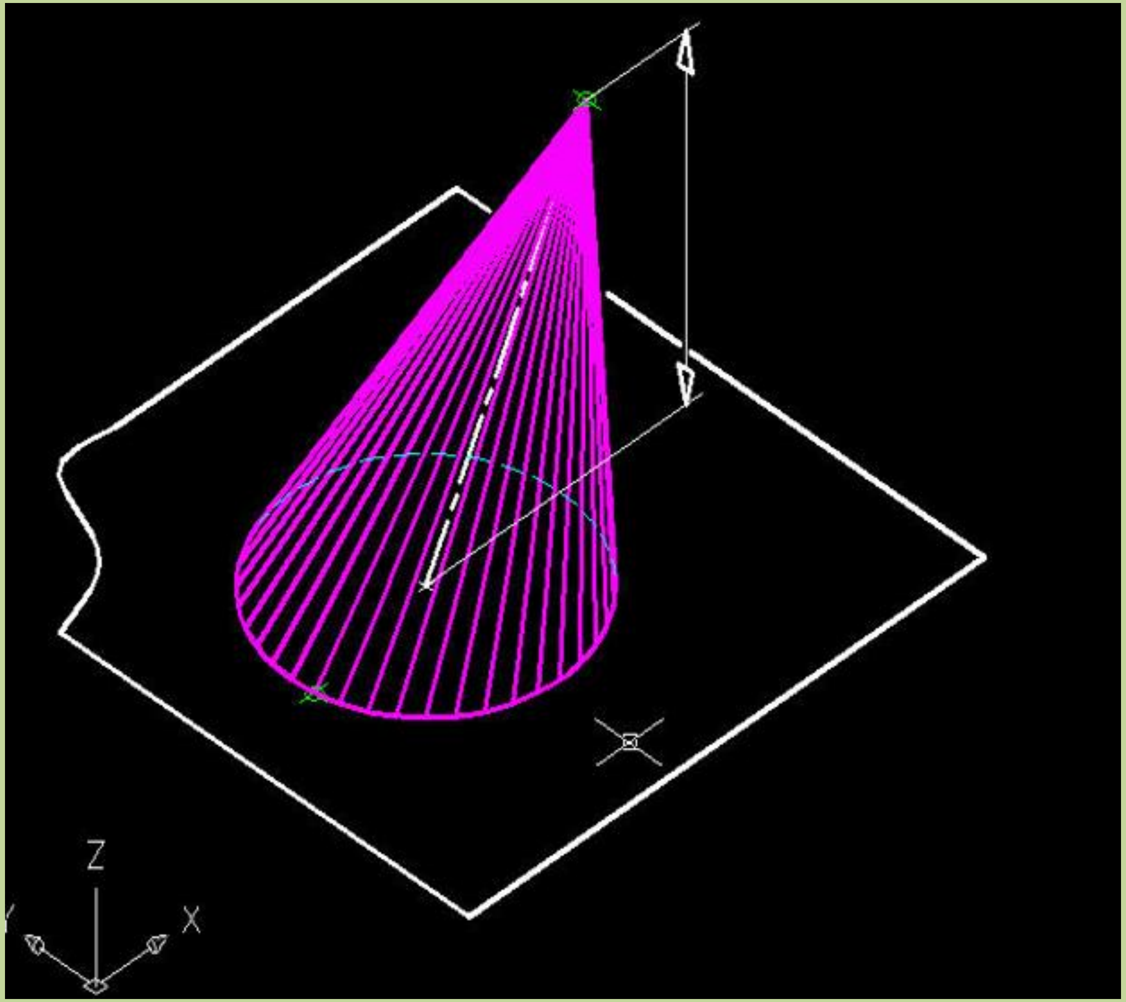
http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/cap_01a-imagenes/superficie_curvatura_simple.gif





https://www.fceia.unr.edu.ar/dibujo/cilindro-cono-esfera.pps

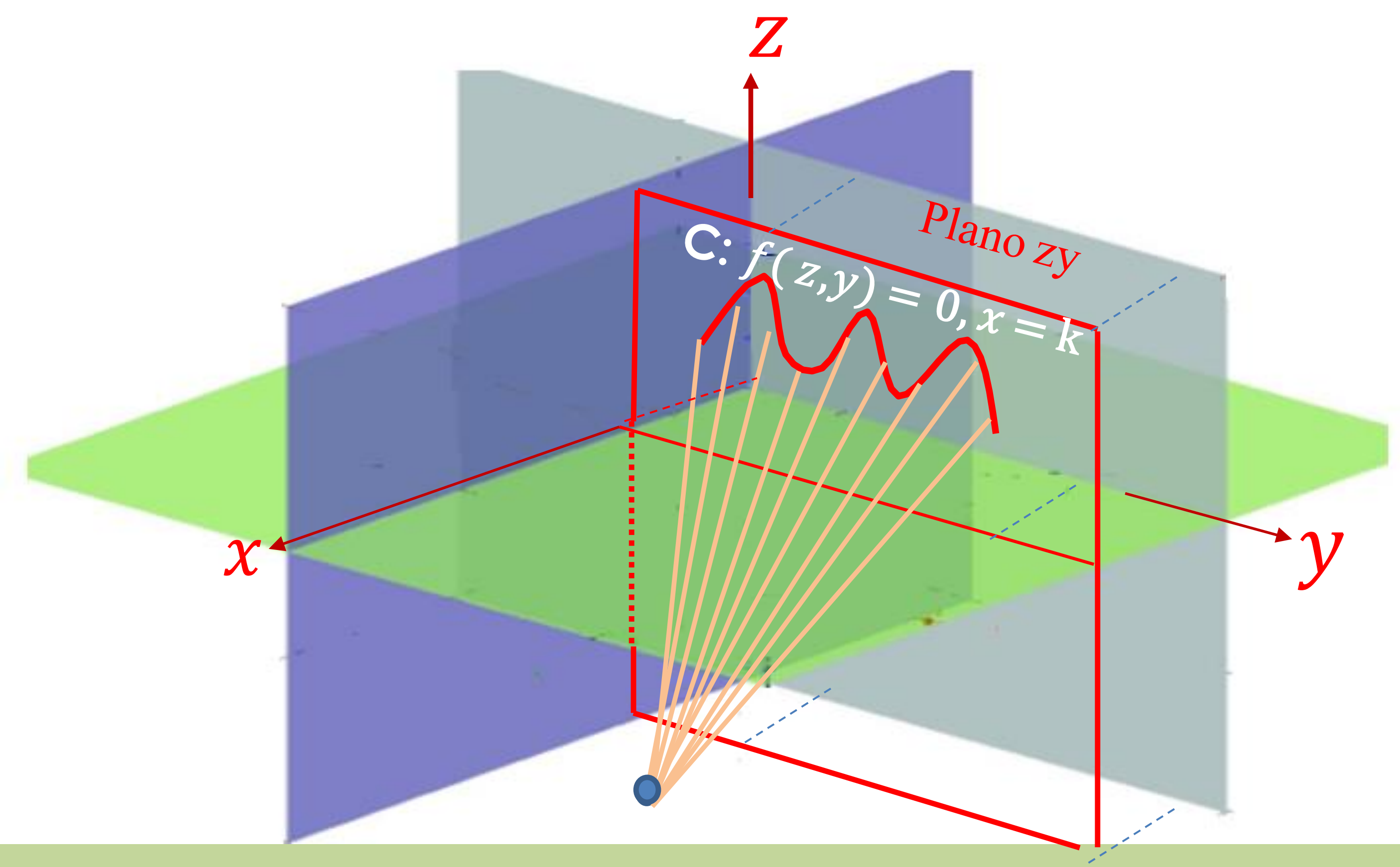




Z
X

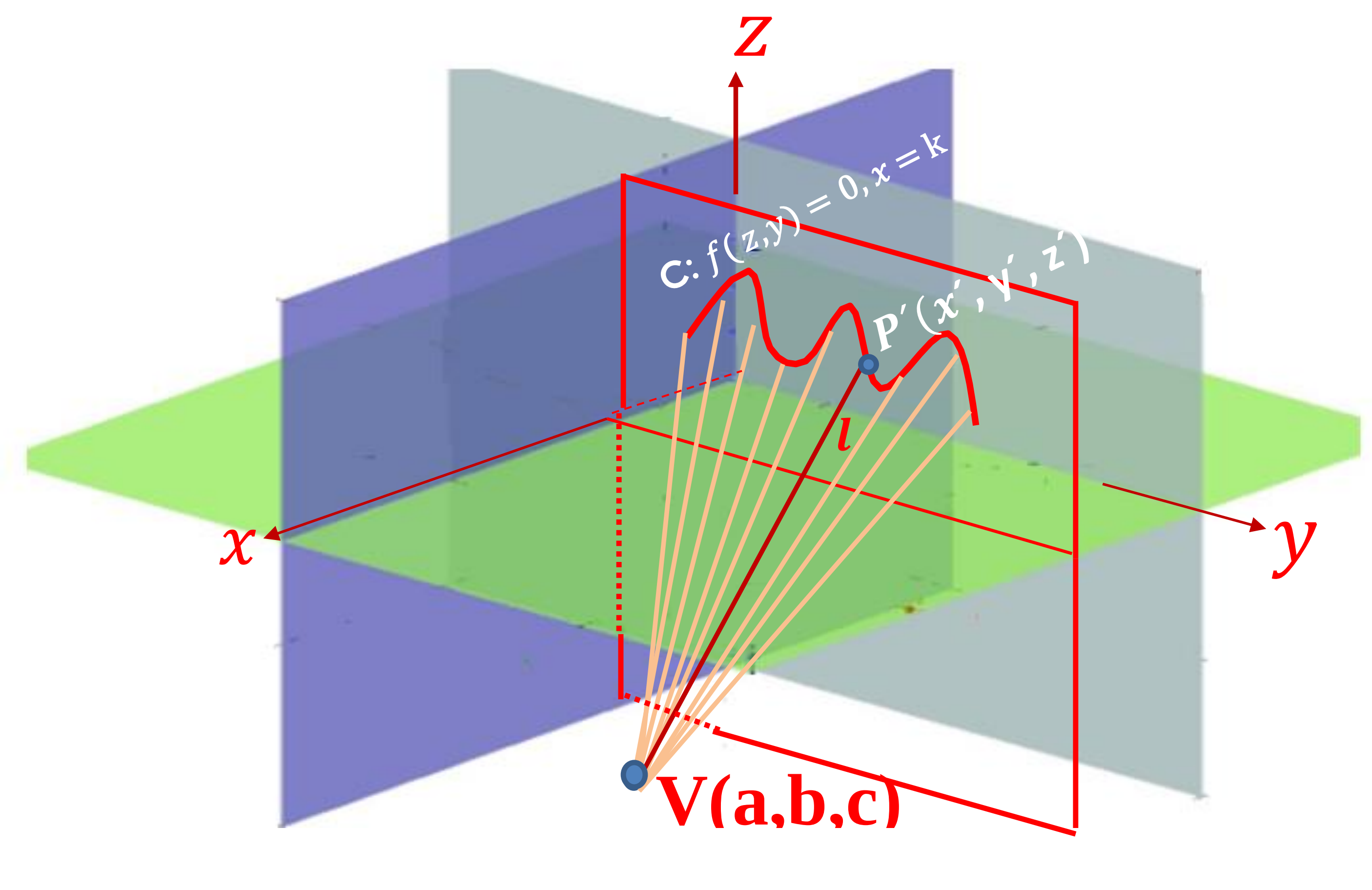
{Superficie cónica de revolución
{Superficie cónica de no revolución

Según su curva directriz:
Cono parabólico: directriz parábola, hiperbólico,
Cono circunferencial si es una circunferencia, eliptico



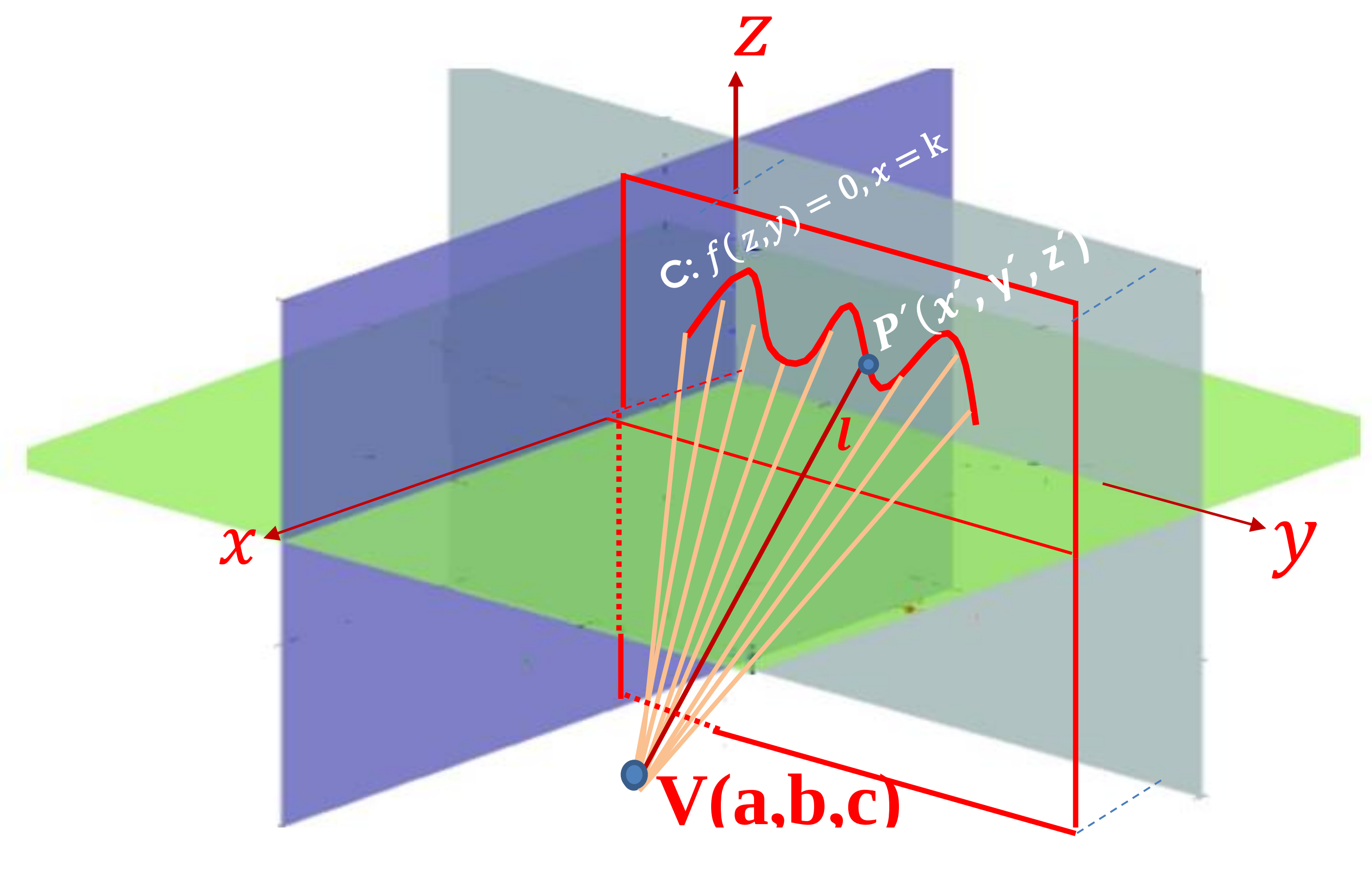
Si por ejemplo, C:$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})=0$ es una curva en un plano paralelo a zy, la coordenada en x es $x=k$. Su ecuación se acostumbra expresarla así:

$$C{:}f(z,y)=0, \longrightarrow \quad x = \mathrm{k}$$

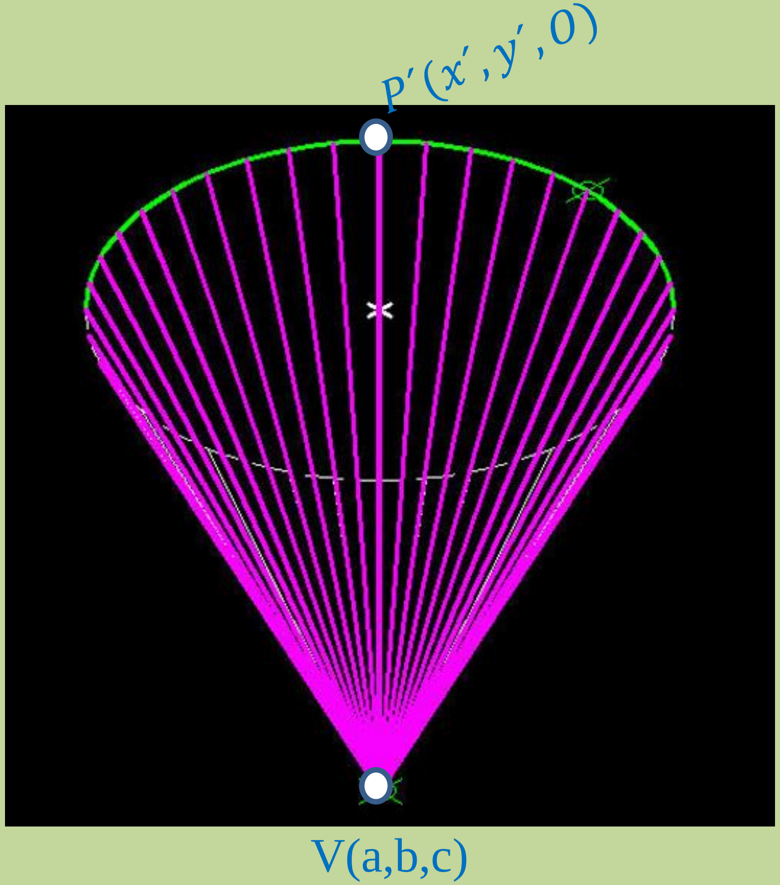


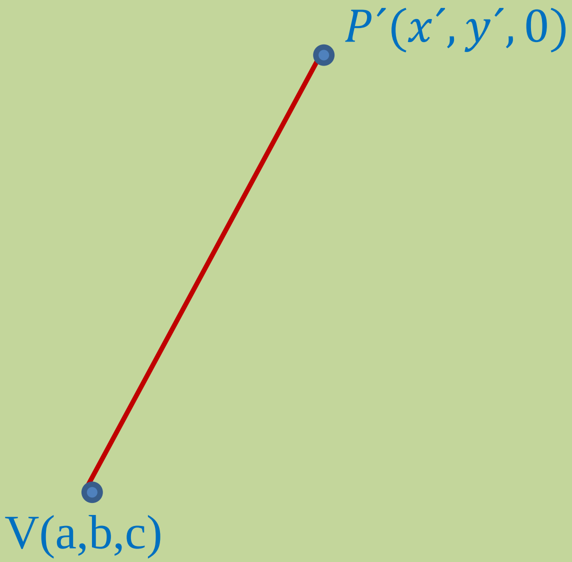
$P'(x', y', z')$ es un punto que pertenece tanto a la curva C: $f(z,y) = 0, x = \text{k}$, como a la recta generatriz l. **V(a,b,c)** es el vértice o punto común de todas las rectas generatrices.

V(a,b,c)
$P'(x',y',z')$



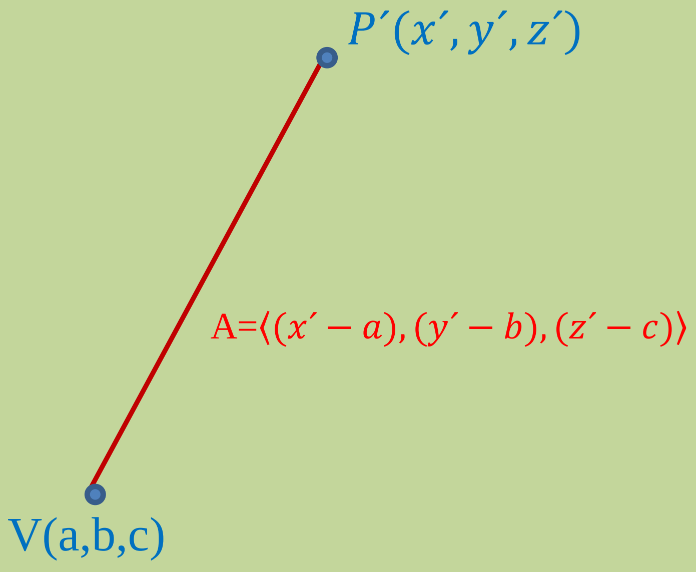
Si se observa la gráfica, vemos que la recta generatriz está determinada por dos puntos: el punto del vértice de coordenadas V(a,b,c) y el punto P´(x´,y´,z´). Por tanto, el punto V(a,b,c) se puede emplear para hallar la ecuación de la recta, y los dos puntos para hallar el vector director.





La recta generatriz está determinada por dos puntos: el punto del vértice de coordenadas V(a,b,c) y e l punto P´(x´,y´,z´).

Por tanto, el vector director A de la recta generatriz, se puede determinar restando las coordenadas respectivas de los dos puntos P´(x´, y´, z´) y V(a,b,c):



vector director A

A=$\langle (x'-a), (y'-b), (z'-c) \rangle$

Y la ecuación de la recta conociendo el punto V(a,b,c) y el vector director A

$$\frac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{(x'-a)}}=\frac{\boldsymbol{y-b}}{\boldsymbol{(y'-b)}}=\frac{\boldsymbol{z-a}}{\boldsymbol{(z'-a)}}$$

Ecuación de la recta generatriz.

ELABORÓ MSc. EFRÉN GIRALDO T.

coordenadas del punto del vértice V(a,b,c)

$$\frac{x-a}{(x' - a)} = \frac{y-b}{(y' - b)} = \frac{z-c}{(z' - c)}$$

coordenadas del vector director

Como P´ pertenece a la curva C, debe cumplir la ecuación

$$f(y, z) = 0, x = k$$

Remplazo $P´(x´, y´, z´)$

$$f(y´, z´)=0, x´ = k$$

Haciendo el mismo procedimiento que se realizó para las superficies cilíndricas: despejar x', y', z' y luego reemplazar en la ecuación de la curva directriz.

Para facilitar el estudio algunas veces se puede tomar como vértice el origen (0,0,0) sin perder generalidad. Esto simplifica grandemente el problema, pues donde estén las coordenadas (a,b,c) se puede sustituir por (0, 0, 0).

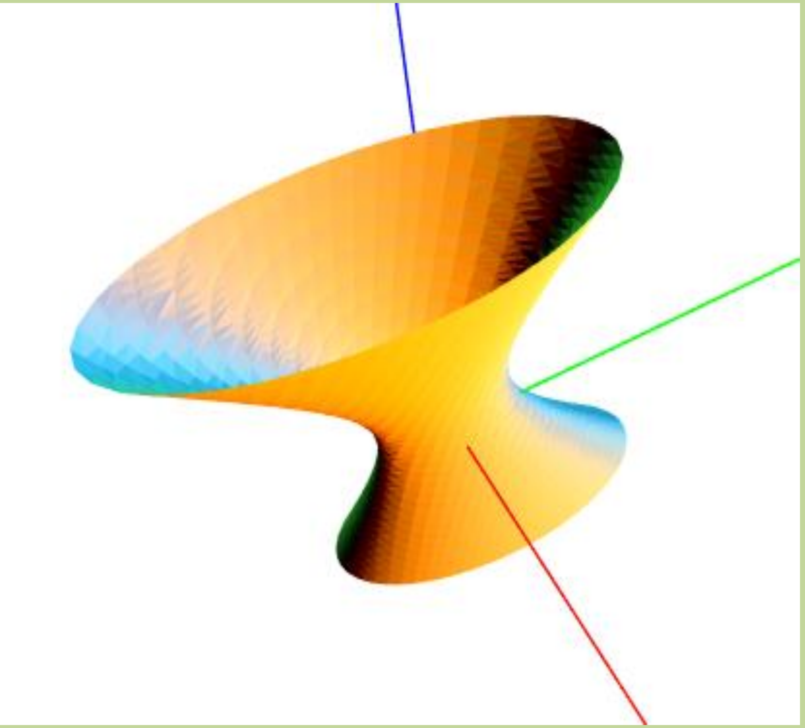
De esta manera se obtiene como ecuaciones de la generatriz:

$$\frac{x-a}{(x'-a)} = \frac{y-b}{(y'-b)} = \frac{z-c}{(z'-c)}$$

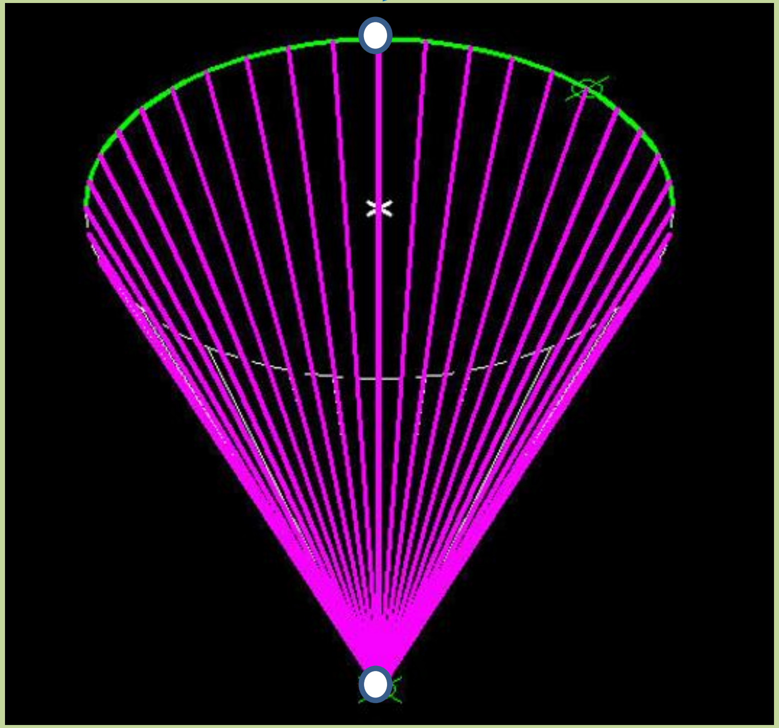
$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

Al eliminar a x´, y´ e z´ se obtiene una ecuación de la forma f(x, y, z) = 0 homogénea, es decir, cuyos términos son del mismo grado.

SUPERFICIES CÓNICAS



$P'(x', y', 0)$



v(a,b,c)

Preparó Efrén Giraldo T.

Ejercicio 1

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuyo vértice es v(2,-1,3) y cuya directriz es la elipse:

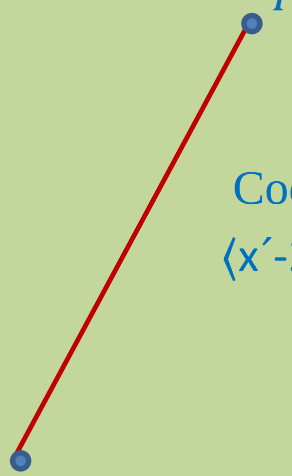
$$4x^2+y^2=1; \ \ z=0$$

La curva directriz está en el plano xy. Es una elipse.

Sea el punto común a la recta y a la curva $P´(x´,y´,0); \ \ z´= \ 0$

$$4x´^2+y´^2=1; z´=0 \quad (1)$$

$P'(x', y', 0)$



Coordenadas del vector director de la recta generatriz

$\langle x'-2,\ y'-(-1),\ 0-3 \rangle$

v(2,-1,3)

Ecuación de la recta generatriz: $v(2,-1,3)$, P´(x´, y´, 0)

$$\frac{x-2}{(x'-2)} = \frac{y-(-1)}{(y'-(-1))} = \frac{z-3}{-3}$$

No olvidar que como z´=0, la ecuación resulta.

$$\frac{x-2}{x'-2} = \frac{y+1}{y'+1} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{x'-2} = \frac{y+1}{y'+1} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{x'-2} = \frac{y+1}{y'+1} = \frac{z-3}{-3}$$

Se toman de a do términos con el más sencillo en z

$$\frac{x-2}{x'-2} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{y+1}{y'+1} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{x'-2}=\frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{-3(x-2)}{}=\frac{(x'-2)(z-3)}{}$$

$$\frac{-3(x-2)}{(z-3)}=x'-2$$

$$\frac{-3(x-2)}{(z-3)}+2=x'$$

$$\frac{-3(x-2)}{(z-3)} + \frac{2}{1} = x'$$

$$\frac{-3(x-2)+2(z-3)}{(z-3)} = x'$$

$$\frac{-3x+6+2z-6}{(z-3)} = x'$$

Se resuelve cada una para x´ e y´

$$x' = \frac{2z-3x}{z-3}$$

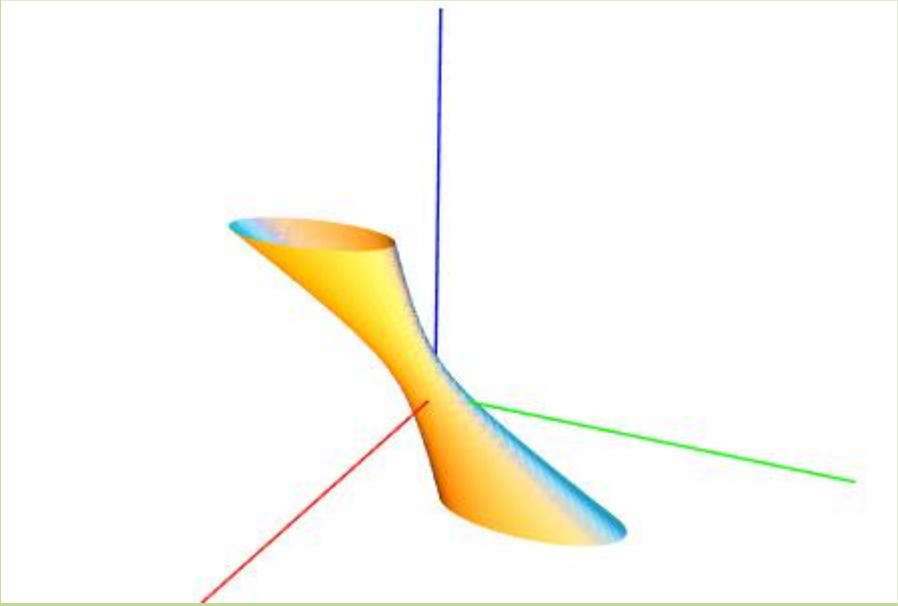
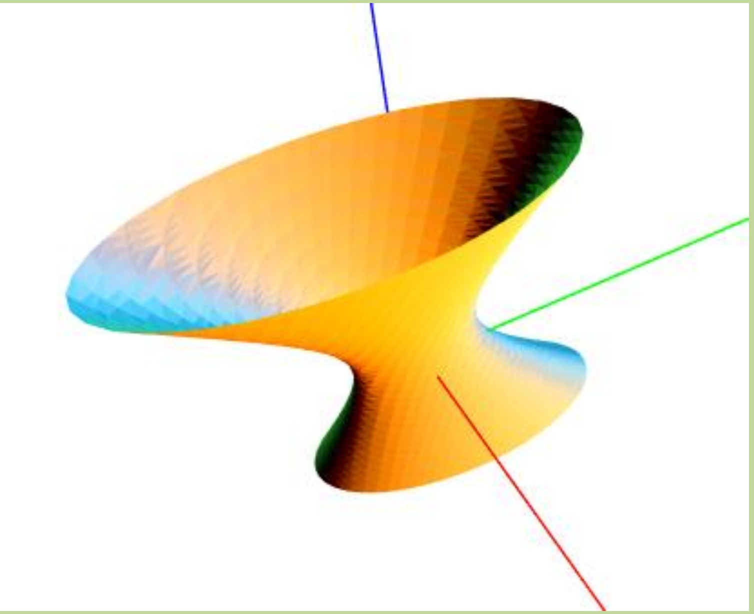
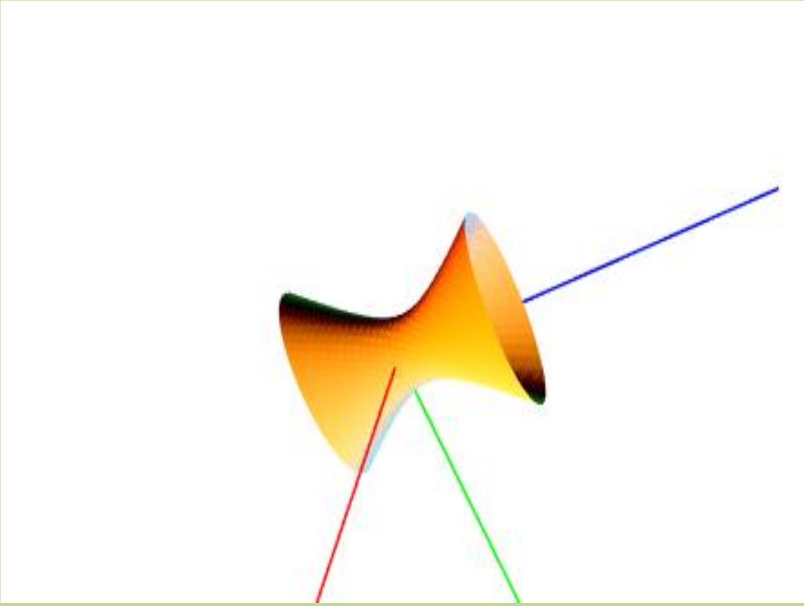
$$y' = \frac{-3y-z}{z-3}$$

Se reemplazan en la ecuación de la curva $4x'^2+y'^2=1$; $z'=0$

$$4x'^2+y'^2=1;\ \ z'=0$$

$$\frac{4(2z-3x)^2}{(z-3)^2}+\frac{(-3y-z)^2}{(z-3)^2}=1$$

$$\frac{4(2z-3x)^2+(-3y-z)^2}{(z-3)^2}=1$$

https://www.zweigmedia.com/threeDgraphFancy/newThreeDGrapher.php?lang=es

$$16z^2 - 48xz + 36x^2 + 9y^2 + 6yz + 6z - 9 = 0$$

Cono parabólico elíptico

Ejercicio 2

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es $9x^2 + 4y^2 = 36$; $z = 0$ y cuyo vértice es el punto V(1, 1, 1). Note que la curva directriz está en el plano xy. No coordenadas en z.

Curva directriz: $9x^2 + 4y^2 = 36, \ z = 0$

La curva directriz es una elipse en el plano xy

Vértice: V(1,1,1)

Sea el punto común a la recta y a la curva $P'(x', y', 0)$; $z' = 0$

$$9x^2 + 4y^2 = 36, \quad z = 0$$

V(1,1,1)

Sea el $P'(x', y', 0)$ el punto común a la recta y a la curva.

$$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{(x'-1)}} = \frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{(y'-1)}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\boldsymbol{(z'-1)}}$$

Como z´= 0

$$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{(x' - 1)}} = \frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{(y' - 1)}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\boldsymbol{-1}}$$

Tomo de a par de ecuaciones con la más sencilla:

$$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x' - 1}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\boldsymbol{-1}}$$

$$\frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{y' - 1}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\boldsymbol{-1}}$$

$$\frac{x - 1}{x´ - 1} = \frac{z - 1}{-1}$$

organizando la primera con el objetivo de despejar x´

$$-1(x - 1) = (x´ - 1)(z - 1)$$

$$\frac{-x+1}{z-1} = x´ - 1$$

$$\frac{-x+1}{z-1} + 1 = x´$$

$$\frac{(-x+1)}{(z-1)} + \frac{1}{1} = x'$$

$$\frac{(-x+1)1 + (z-1)}{(z-1)1} = x'$$

$$\frac{-x+1+z-1}{z-1} = x'$$

$$\frac{-x+z}{z-1} = x'$$

$$\frac{z-x}{z-1} = x'$$

$$\frac{y-1}{y' - 1} = \frac{z-1}{-1}$$

organizando la segunda con el objetivo de despejar y´

$$-1(y-1) = (y' - 1)(z-1)$$

$$\frac{-y+1}{z-1} = y' - 1$$

$$\frac{-y+1}{z-1} + 1 = y'$$

$$\frac{(-y+1)}{(z-1)} + \frac{1}{1} = y'$$

$$\frac{(-y+1)1 + (z-1)}{(z-1)1} = y'$$

$$\frac{-y+1+z-1}{z-1} = y'$$

$$\frac{-y+z}{z-1} = y'$$

$$\frac{z-y}{z-1} = y'$$

La ecuación de la curva directriz $4x^2+4y^2=36;\ z=0$ aplicada al punto

$$P'(x', y', 0),\ z'=0$$

resulta:

$$4x'^2+4y'^2=36;\ \ z'=0$$

Si en la ecuación

$$4x'^2+4y'^2=36; \ \ z'=0$$

Se remplazan

$$\frac{z-x}{z-1} = x' \qquad \text{y} \qquad \frac{z-y}{z-1} = y'$$

$$9\left[\frac{z-x}{z-1}\right]^2 + 4\left[\frac{z-y}{z-1}\right]^2 = 36$$

$$9\left(\frac{z-x}{z-1}\right)^2 + 4\left(\frac{z-y}{z-1}\right)^2 = 36$$

$$\frac{9(z-x)^2 + 4(z-y)^2}{(z-1)^2} = 36$$

$$9(z-x)^2 + 4(z-y)^2 = 36(z-1)^2$$

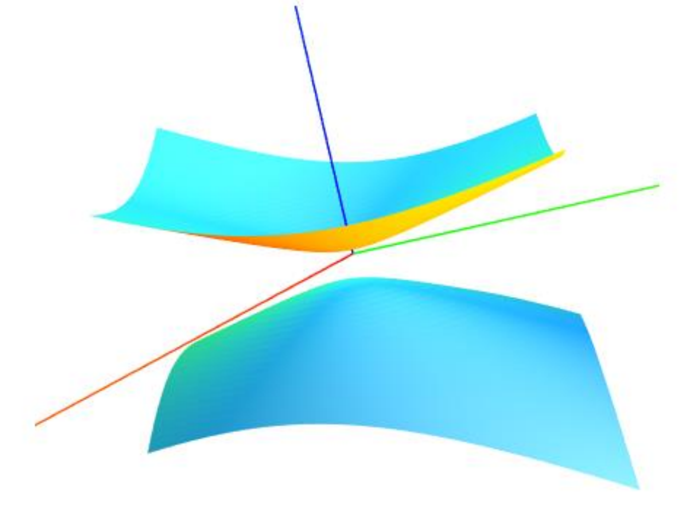
$$9(z-x)^2+4(z-y)^2=36(z-1)^2$$

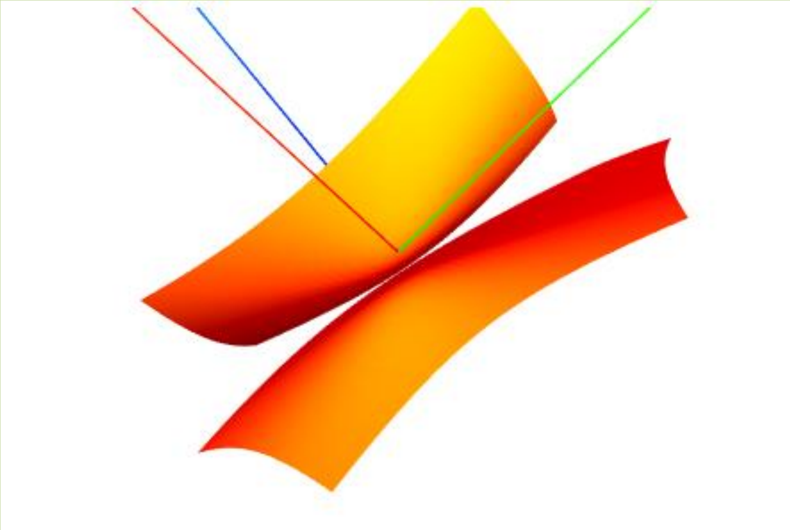
$$9(z^2-2zx+x^2)+4(z^2-2zy+y^2)=36(z-1)^2$$

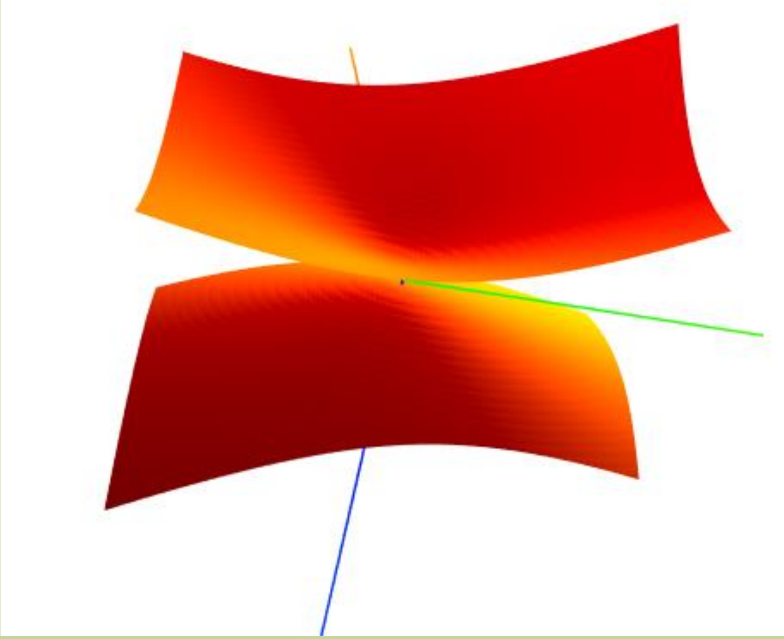
$$9z^2-18zx+9x^2+4z^2-8zy+4y^2-36z^2-72z+36=0$$

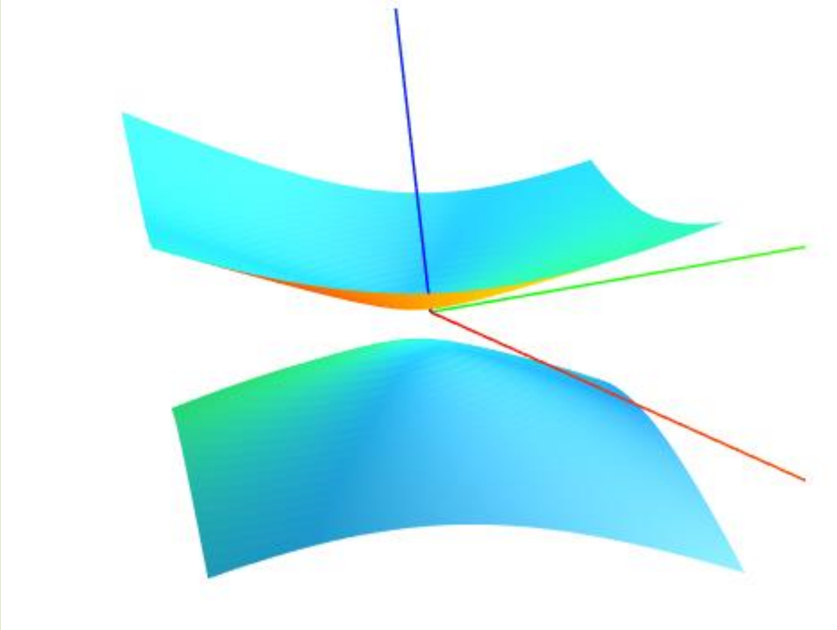
$$9x^2+4y^2-23z^2-18zx-8zy-72z+36=0$$

Es la superficie pedida. Es un cono elíptico









https://www.zweigmedia.com/threeDgraphFancy/newThreeDGrapher.php?lang=es

Ejercicio 3

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es:

$$x^2 - 4z^2 = 4, y = 4$$

y cuyo vértice es el origen P(0,0,0)

Matemáticas *finitas y* Cálculo *aplicado*

Graficador de superficies: v 3.1

https://www.zweigmedia.com/threeDgraphFancy/newThreeDGrapher.php?lang=es