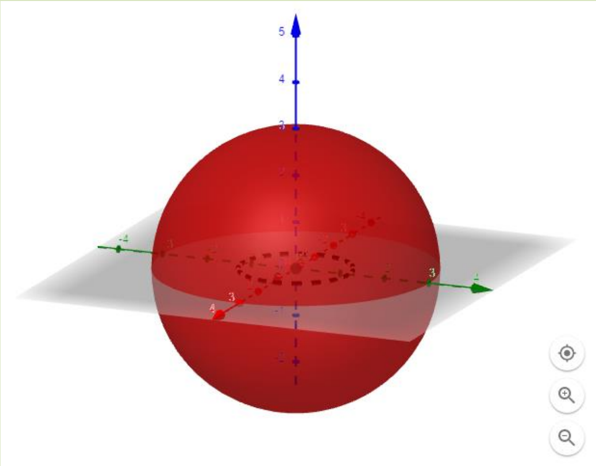
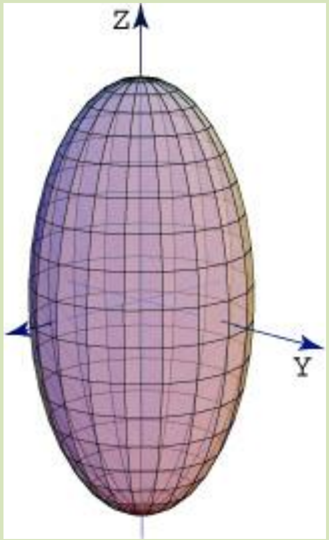
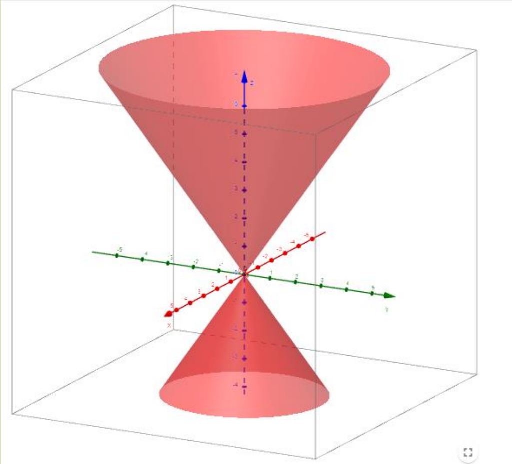
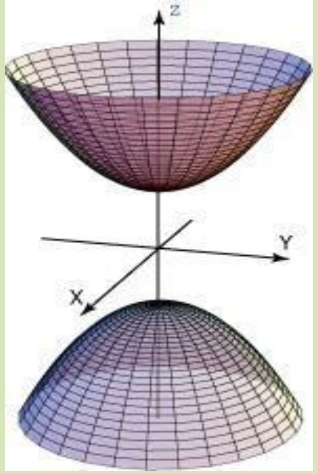
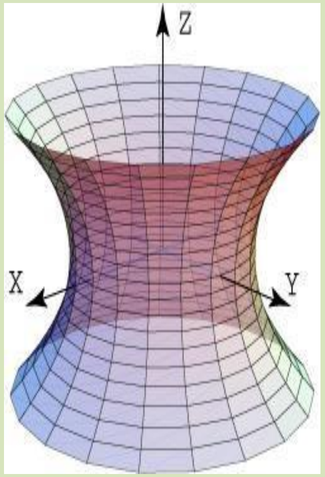
# Superficies Cuádricas



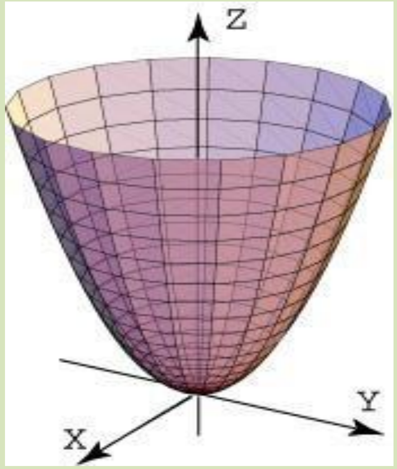





Presentación realizada por
Efrén Giraldo T.
Su único objetivo es facilitar el estudio

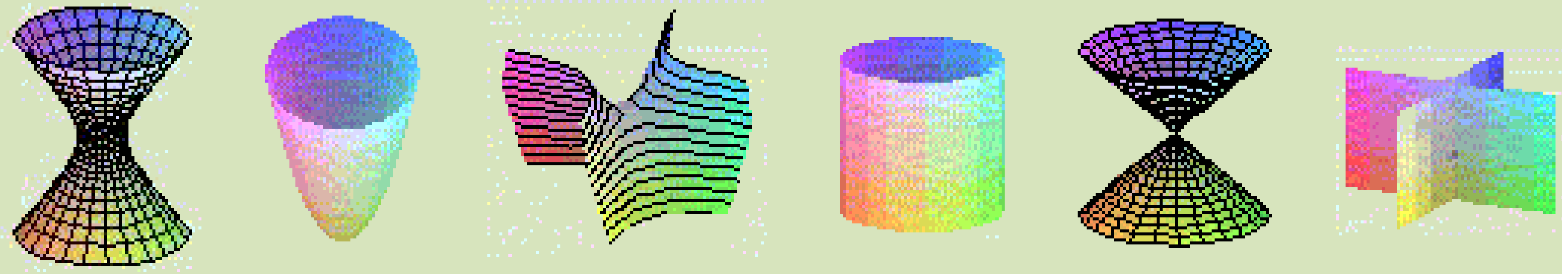


- MISVALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

- MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.
- MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
  Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com



# SUPERFICIES
# Superficies Cuadricas

# 1. Superficies cuadráticas

Llamaremos superficies cuádricas a las gráficas de la ecuación de segundo grado en las tres variables $x, y, z$:

términos cuadrados términos cruzados términos lineales independiente

$$\mathrm{A}x^2 + By^2 + Cz^2 + \quad Dxy + Eyz + Fxz + Gx + \ Hy + \mathrm{I}z + \ j \ = 0$$

# Superficies cuadráticas

- Esfera
- Elipsoide
- Cono Eliptico
- Parabolide Elíptico
- Paraboloide Hiperbólico
- Hiperboloide de una Hoja
- Hiperboloide de dos hojas

http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_vectorial/superficies_cuadrticas.html

https://www.geogebra.org/m/FUHhKXc7

## Se parte de una de estas ecuaciones:

$$A\,\boldsymbol{x}^2 + B\boldsymbol{y}^2 + C\boldsymbol{z}^2 + Dxy + Ezy + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Al variar el signo se obtienen las diversas ecuaciones cuádricas.
También al hacer uno de los términos cuadráticos, lineales.
Son simétricas respecto a un centro.

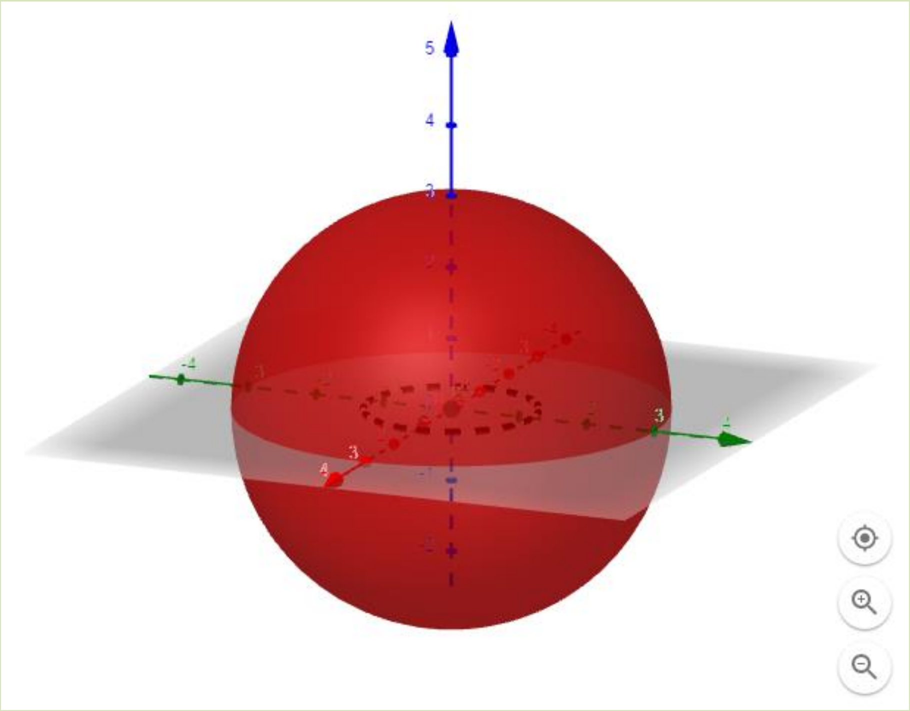
# Esfera:

La esfera (superficie esférica) es el conjunto de puntos que está a igual distancia de un punto fijo llamado centro

# Esfera: forma general

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + \mathrm{B}x + Cy + Dz + F = 0$$

En el caso de que todos los parámetros sean iguales, es decir, A = B = C, y todos los términos sean positivos se origina una esfera.



# Esfera: forma Estandarizada (ST).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

$O(0,0,0)$

$a=r$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=r^2$$

(Esfera centrada en origen (0,0,0)

$$(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2+(\boldsymbol{z}-l)^2=r^2$$

(Esfera centrada en P$(h,k,l)$

# Ejercicio 1

Pasar de la forma general a la ST
Analizar la superficie dada por la ecuación:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y - 6z + 3 = 0$$

$\div 3$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Organizo en x,}
Organizo en y
Organizo en z

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-2z)+1=0$$

$$(x^2-2x+1-1)+(y^2-4y+4-4)+(z^2-2z+1-1)+1=0$$

$$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z-1)^2-1+1=0$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-5=0$$

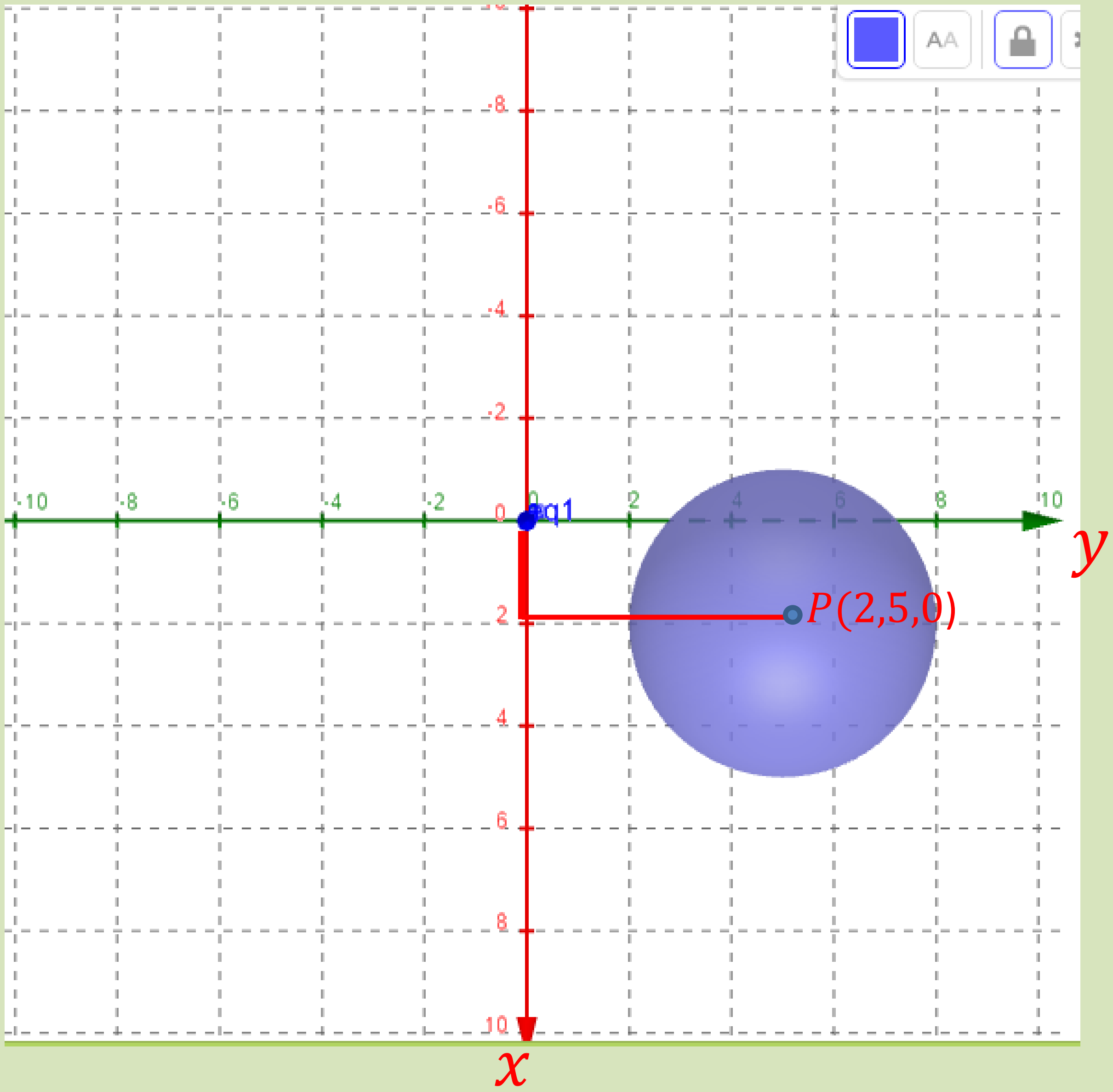
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$$

Esfera trasladada al punto P(1,2,1) y con radio $\sqrt{5}$

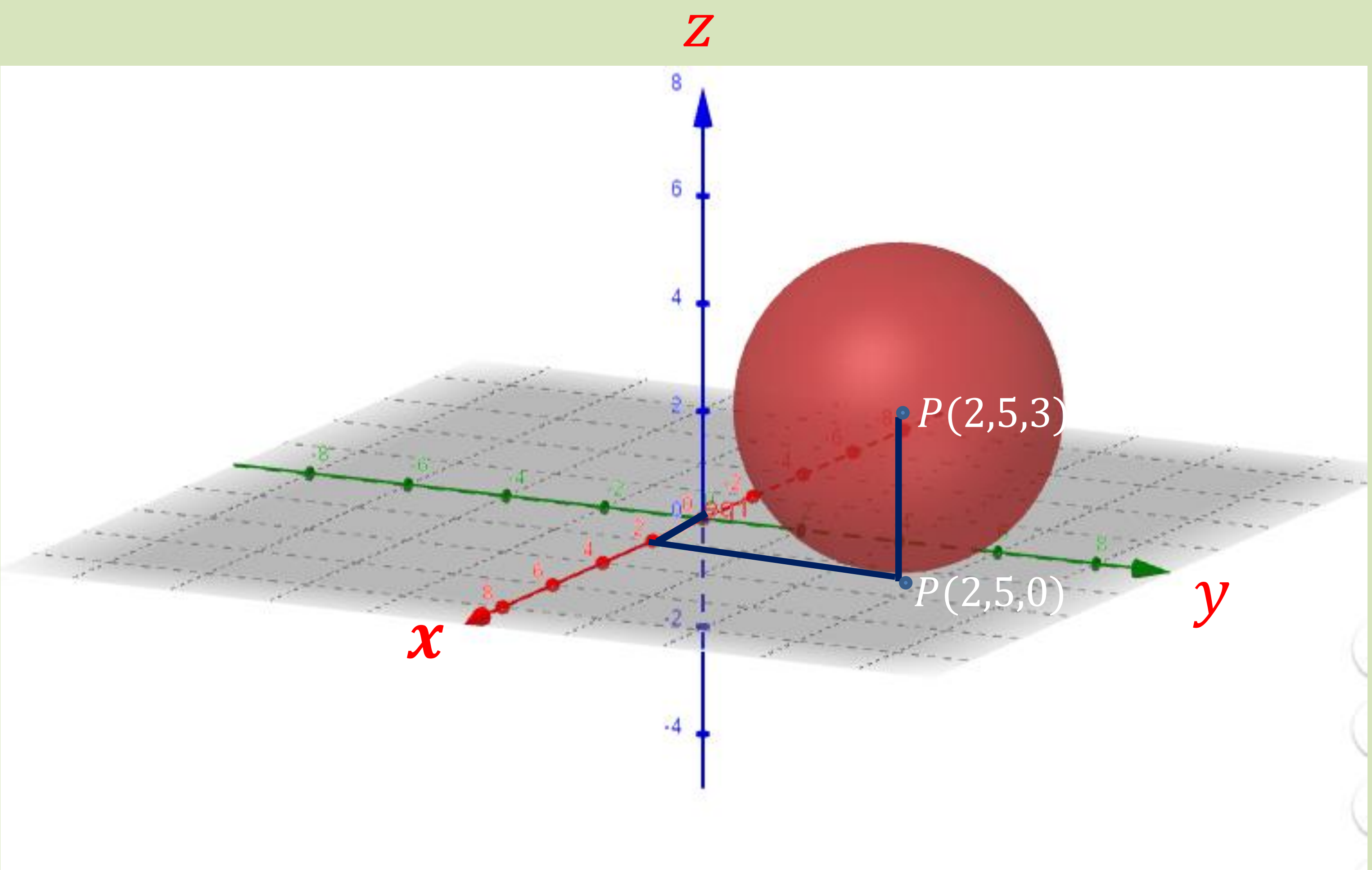
# Ejercicio 2

Hallar el centro y radio de la superficie esférica:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y - 6z + 29 = 0.$$



P(2,5,0)
y
x
eq1



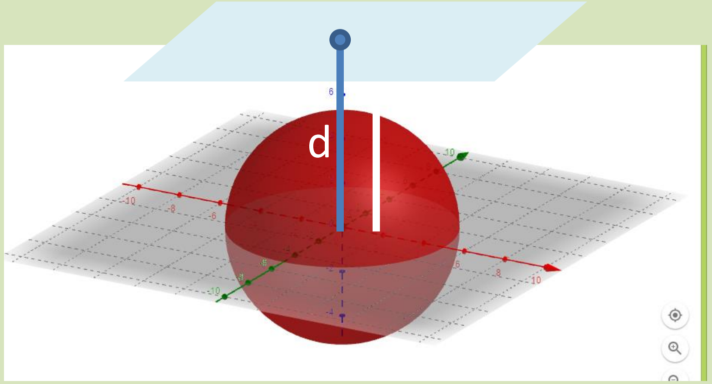
z
y
x
P(2,5,3)
P(2,5,0)

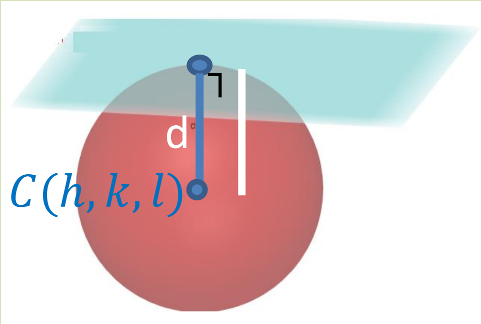
# Ejercicio 3

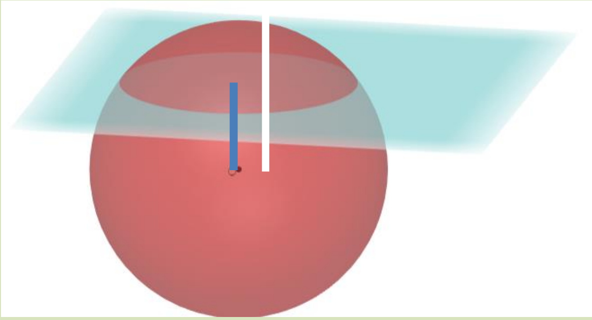
Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1) y (2,0,0).

http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/curvas_superf/problemas/prob_esfera.html

# Posición relativa entre plano y esfera



$d > r$

## Plano externo

Ningún punto en común

$d = r$

## Plano tangente

Un punto en común

Un plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de tangencia. Por tanto, el vector definido por los puntos C(h,k,l) y $P(x,y,z)$ sirve de vector normal del plano.

$d < r$

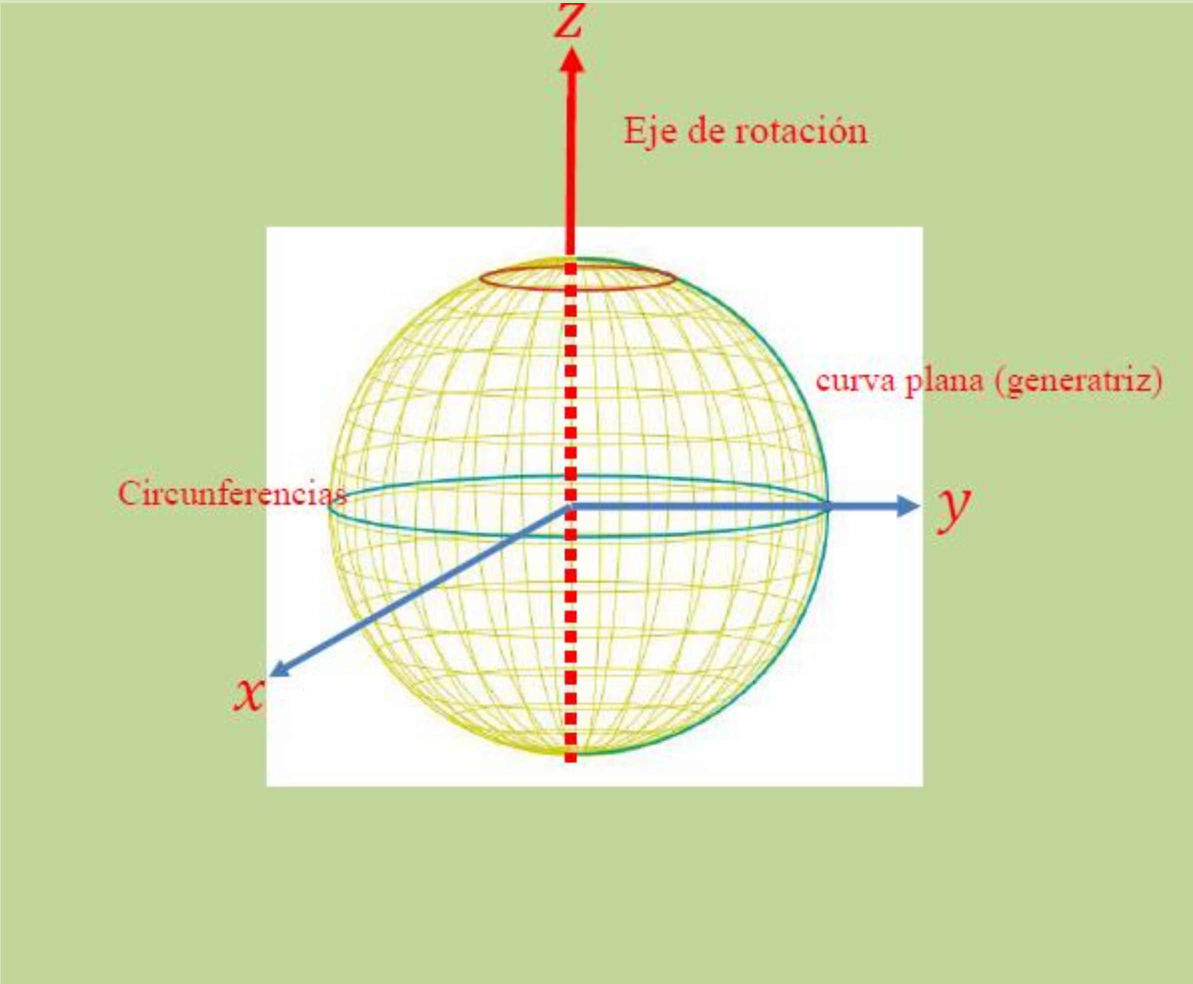
## Plano secante

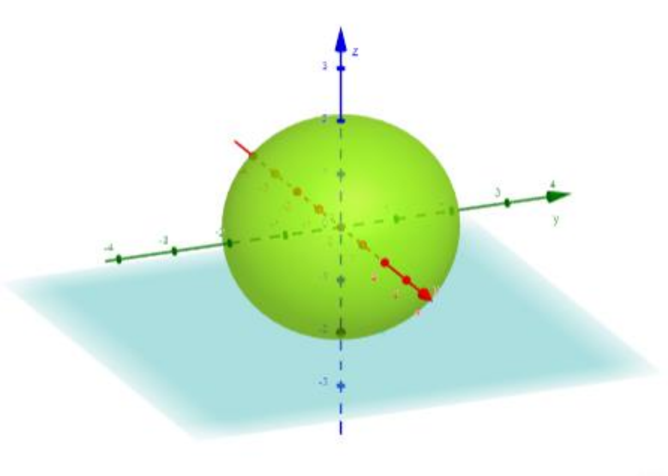
Plano corta a la esfera en una circunferencia

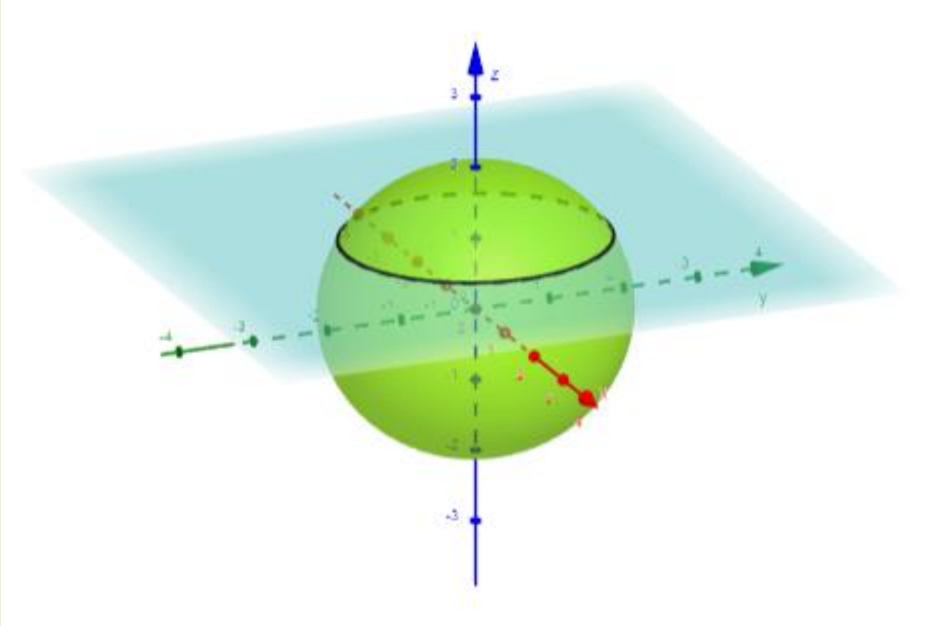
Distancia desde un punto P$(x_1, x_2, x_3)$ a un plano $ax + by + cz + d = 0$

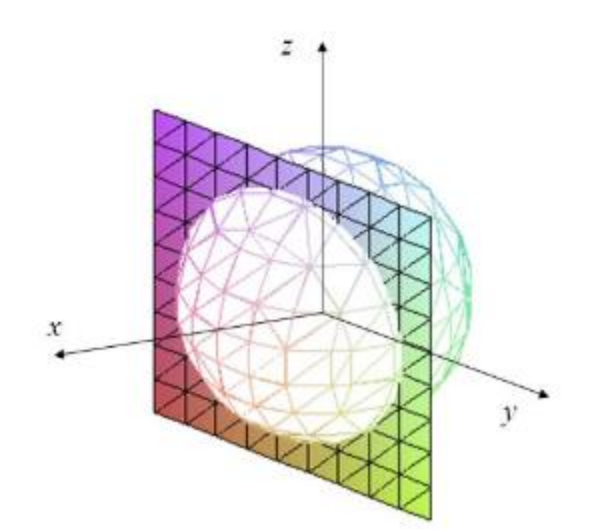
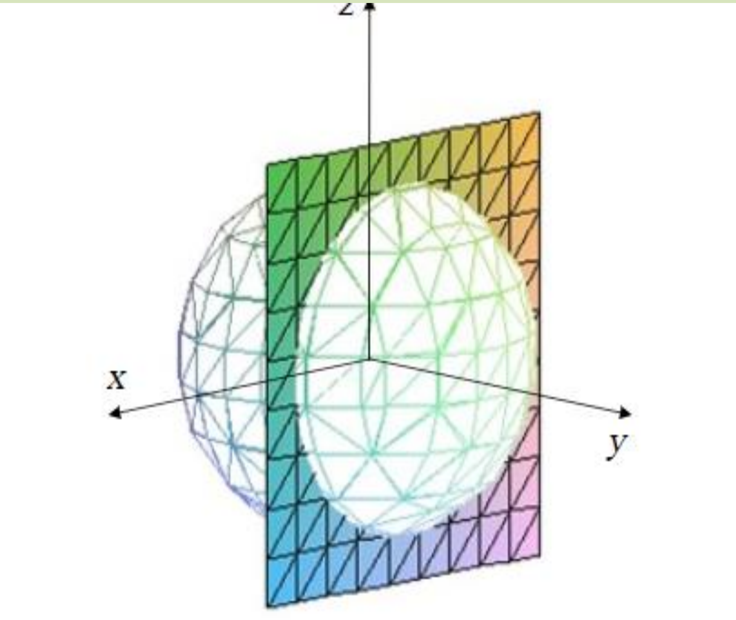
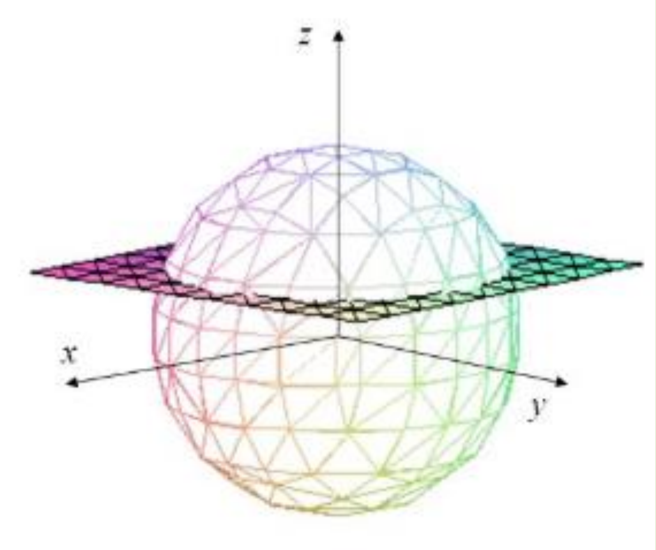
$$d= \frac{|ax_1+by_1+cz_1|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}$$

https://www.ditutor.com/distancias/punto_plano.html#targetText=La%20distancia%20de%20un%20punto,desde%20el%20punto%20al%20plano.


z
Eje de rotación
curva plana (generatriz)
Circunferencias
y
x


z
y


z
y


z
x
y

z
x
y

z
x
y

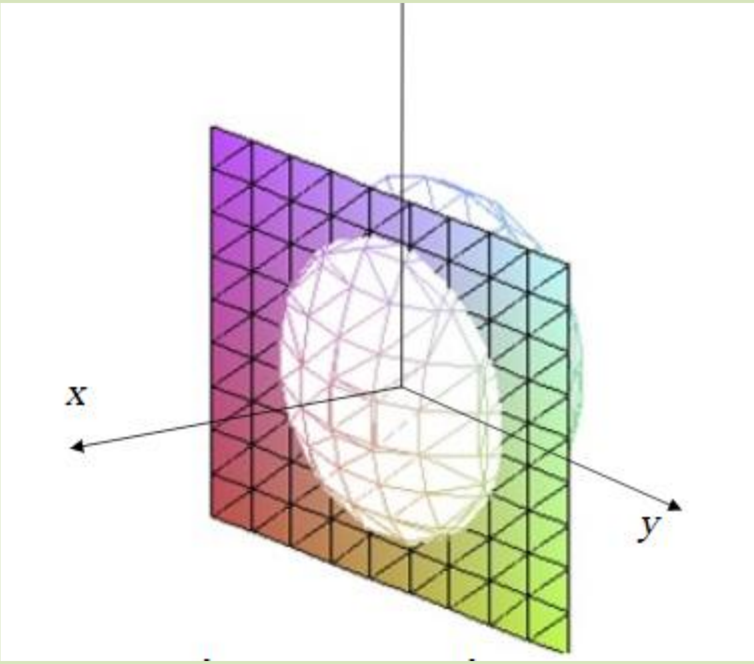
## Elipsoide

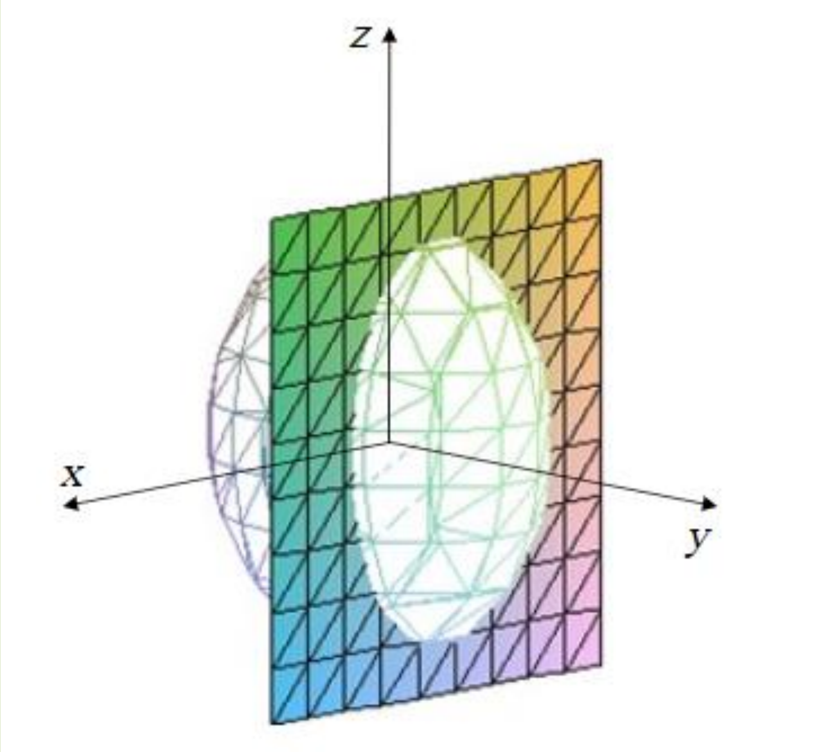
# Los tres términos cuadráticos positivos

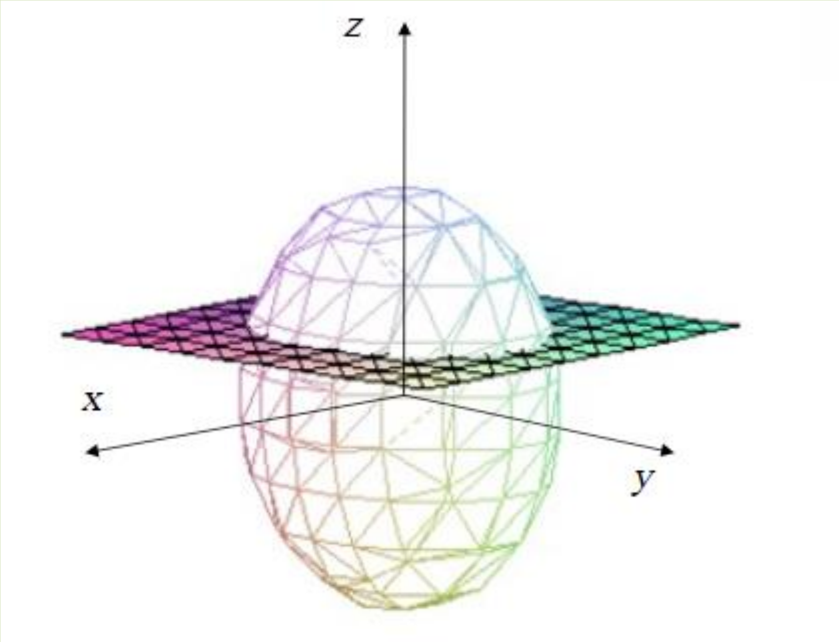
$$\mathrm{A}x^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

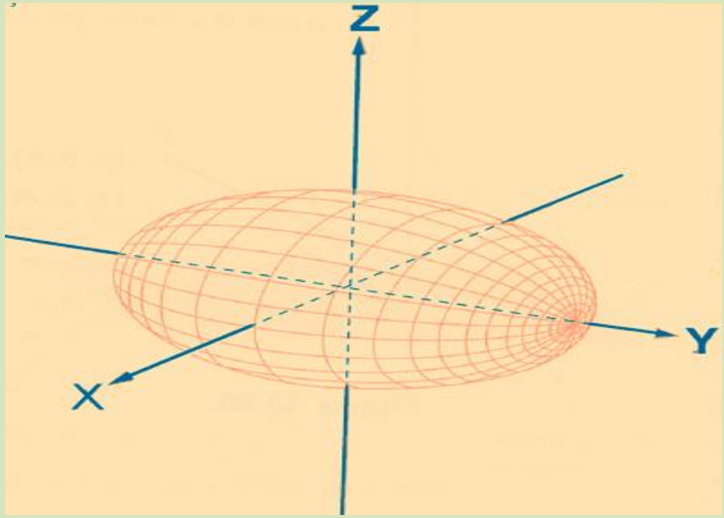
Conocida como ecuación canónica del elipsoide con centro (h,k,p).


x
y


z
x
y

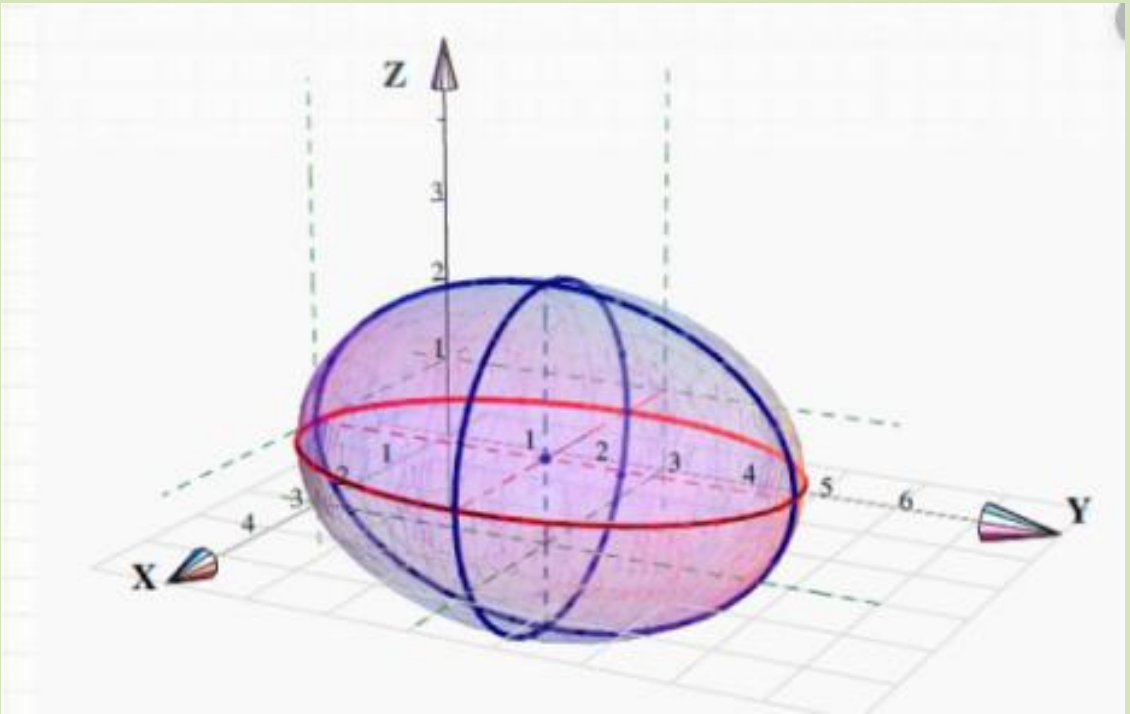

z
x
y

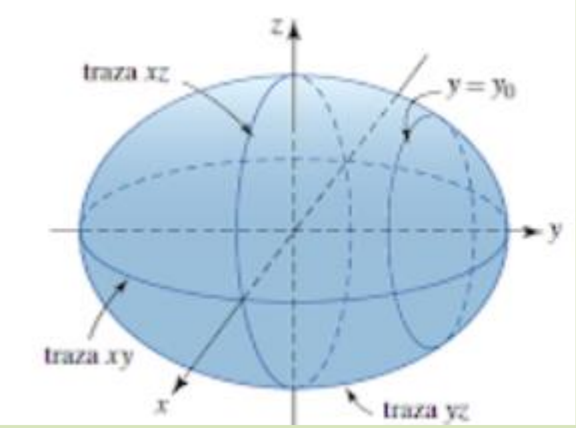
# •Elipsoide



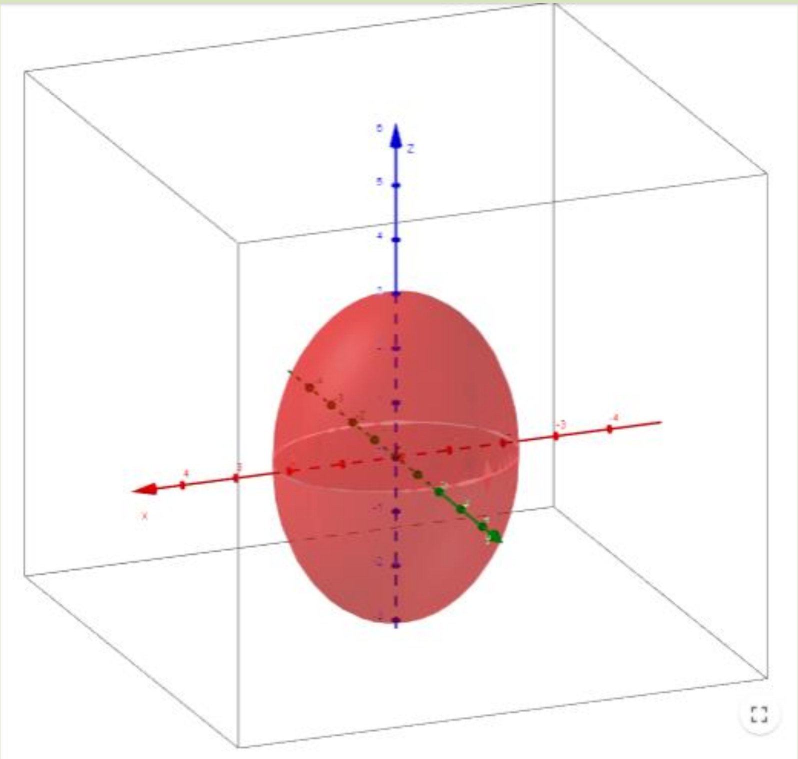

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Va orientada en la dirección del eje mayor ( en este caso en b o eje y )


Z
X
Y
1
2
3
4
5
6




además de las trazas que son la representación de un par de ejes de las 3 combinaciones posibles y la curvas de nivel que son las curvas que se representan en la variable que es distinta de las otras dos.



Va orientada en la dirección del eje mayor ( en este caso en c o eje z )

https://www.geogebra.org/m/FUHhKXc7#material/XxpdDe3U

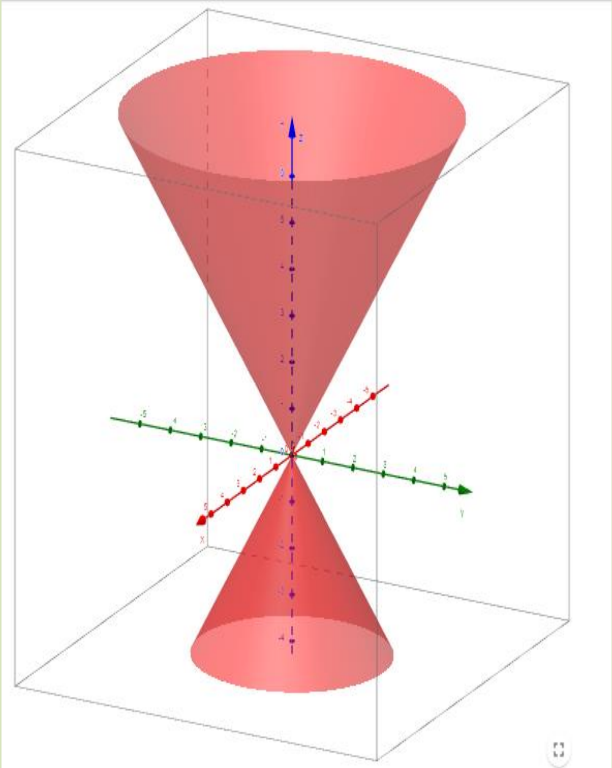
# Cono elíptico

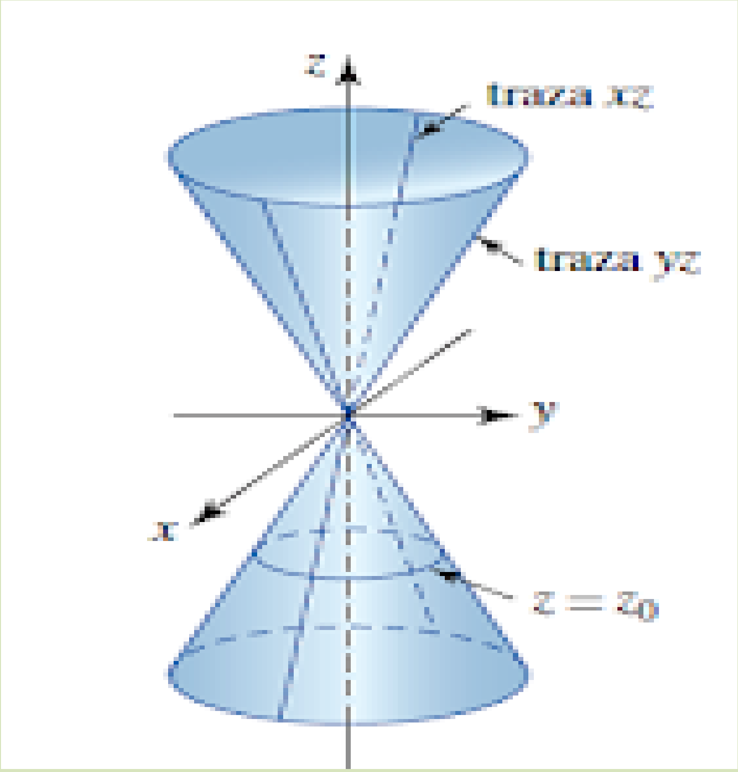
$$\mathrm{A}x^2 + By^2 - Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

Un término negativo: en este caso z, en este va la orientación






https://www.geogebra.org/m/JymUHfj6

Cono elíptico con vértice (0,0,0)

# Ejercicio

Llevar a la forma estándar y graficar la ecuación

$$9y^2 + 4z^2 - x^2 - 18y - 16z + 4x + 21 = 0$$

Completando cuadrados se obtiene:

$$9y^2 + 4z^2 - x^2 - 18y - 16z + 4x + 21 = 0$$

$$(9y^2 - 18y) + (4z^2 - 16z) - (x^2 - 4x) + 21 = 0$$

$$9[y^2 - 2y] + 4[z^2 - 4z] - [x^2 - 4x] + 21 = 0$$

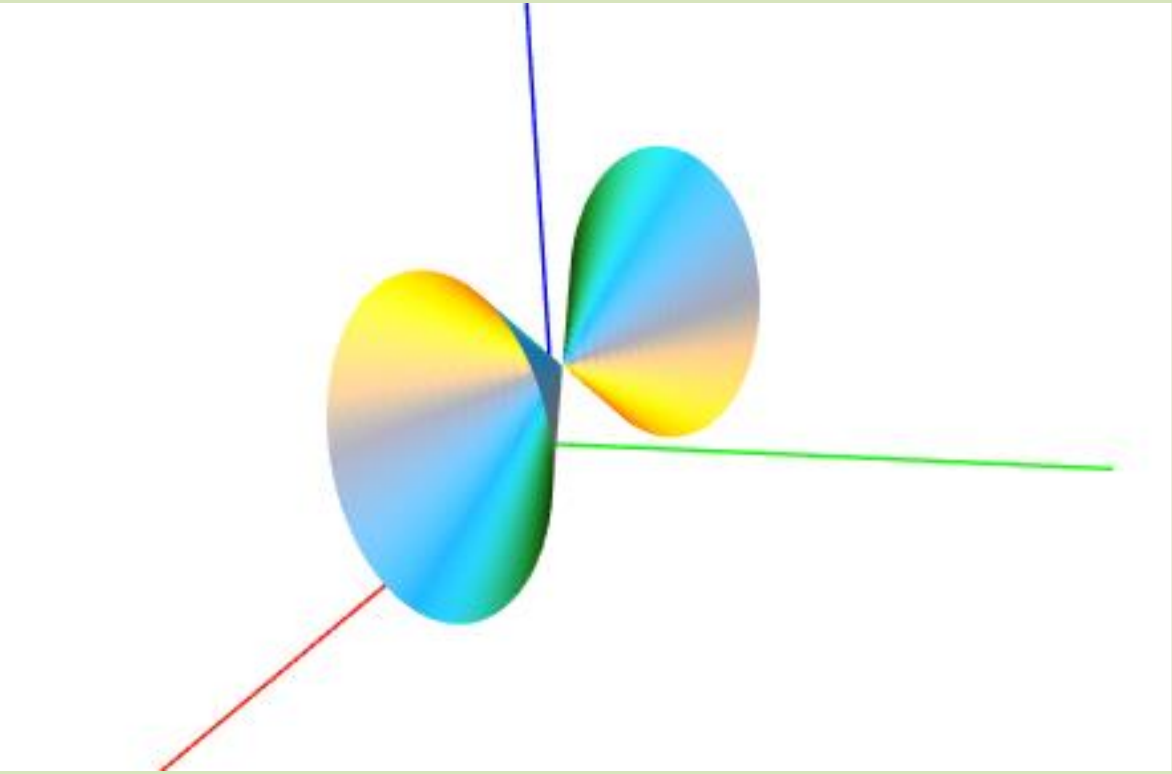
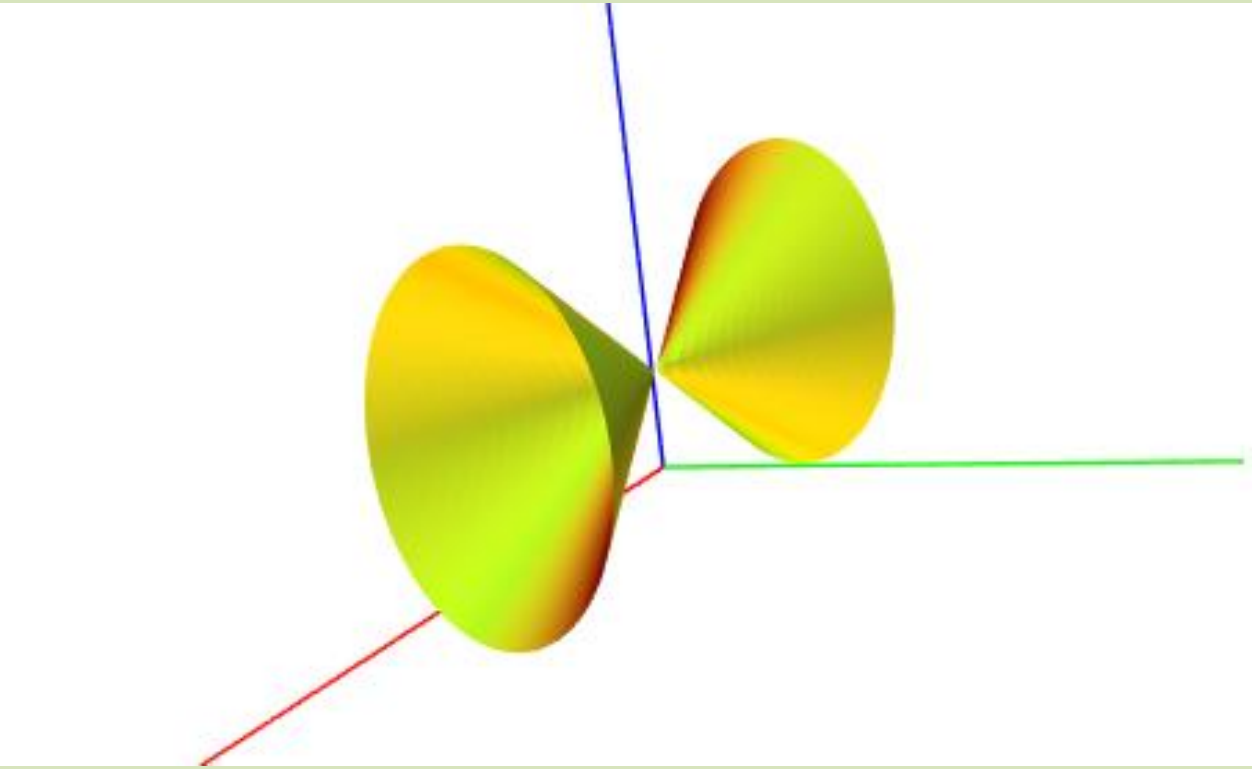
$$9[y^2 - 2y + 1 - 1] + 4[z^2 - 4z + 4 - 4] - [x^2 - 4x + 4 - 4] + 21 = 0$$

$$9[(y-1)^2 - 1] + 4[(z-2)^2 - 4] - [(x-2)^2 - 4] + 21 = 0$$

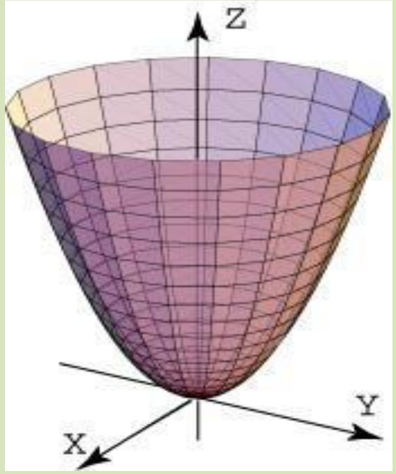
$$9(y-1)^2 - 9 + 4(z-2)^2 - 16 - (x-2)^2 + 4 + 21 = 0$$

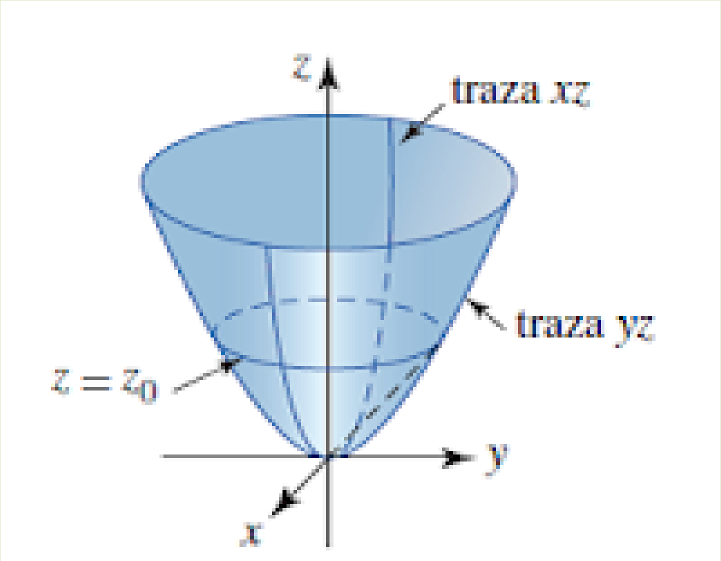
$$9(y-1)^2 + 4(z-2)^2 - (x-2)^2 = 0$$

La ecuación  representa un cono elíptico con vértice (2,1,2)

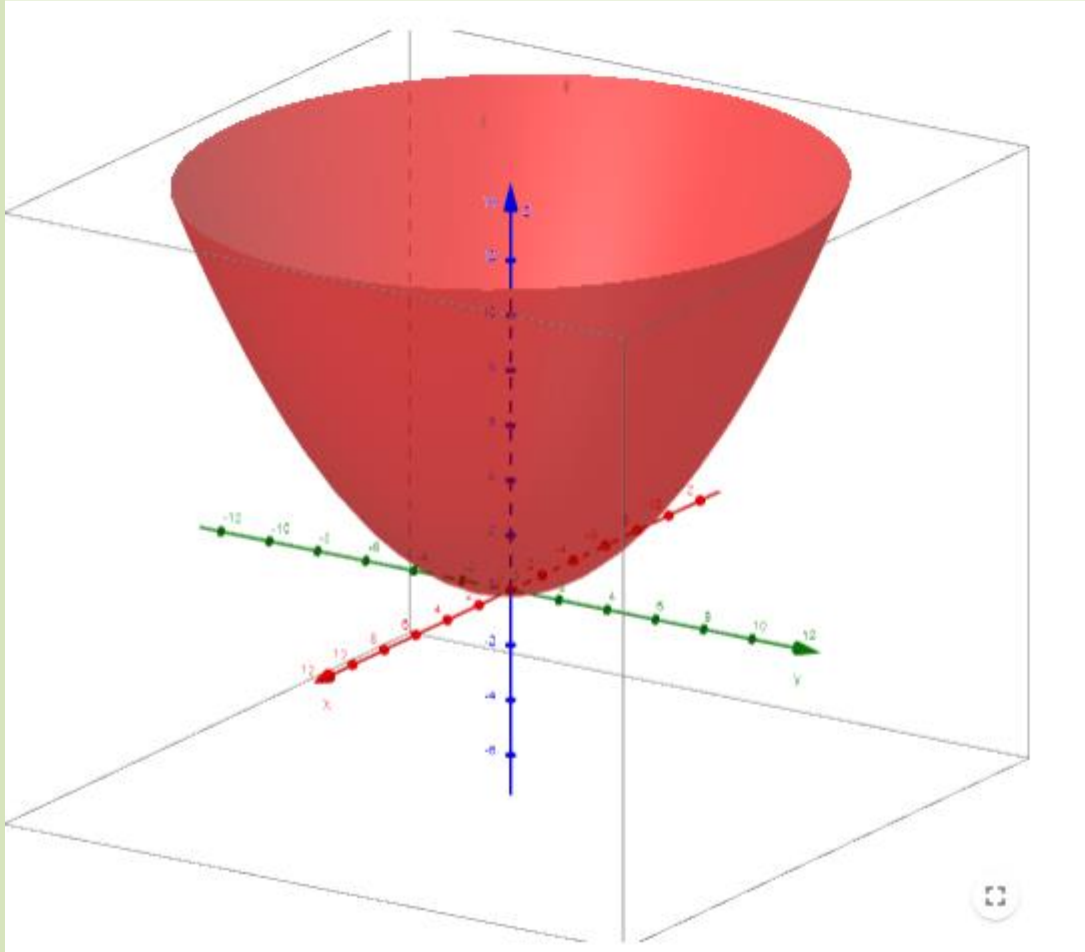
## Paraboloide Elíptico




$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{z-l}{c} = 0$$

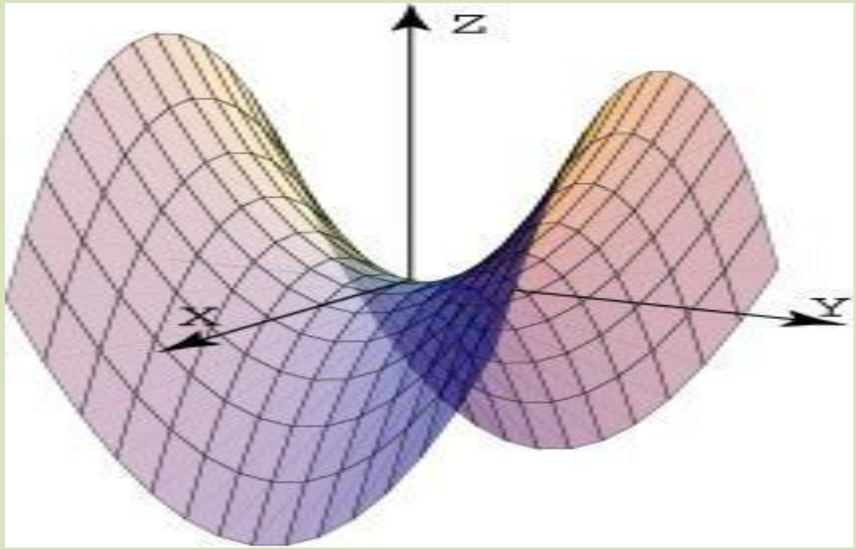
Dos términos cuadráticos de igual signo, el lineal diferente.
La orientación en el eje lineal

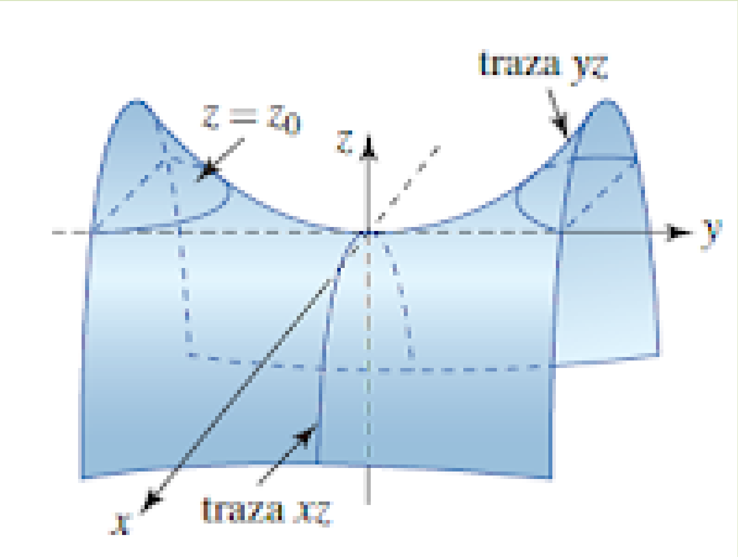


https://www.geogebra.org/m/FUHhKXc7#material/vMFZYkrT

https://www.geogebra.org/m/oeQayhIr

## Paraboloide Hiperbólico



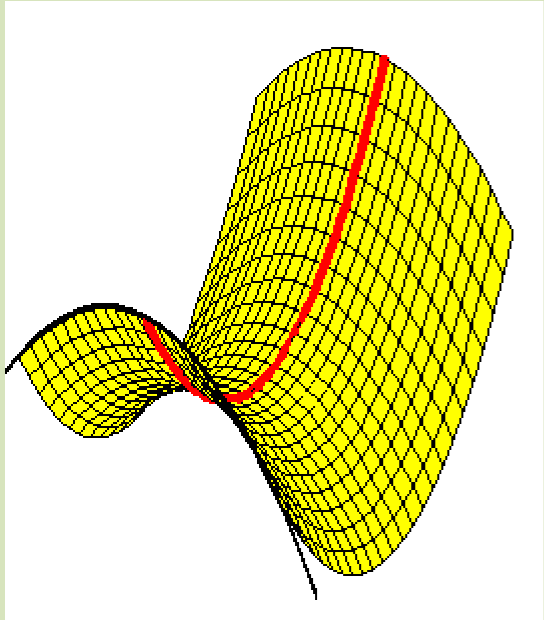




Dos térmicnos cuadrátricos de diferente signo, el lineal negativo

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{z-l}{c} = 0$$

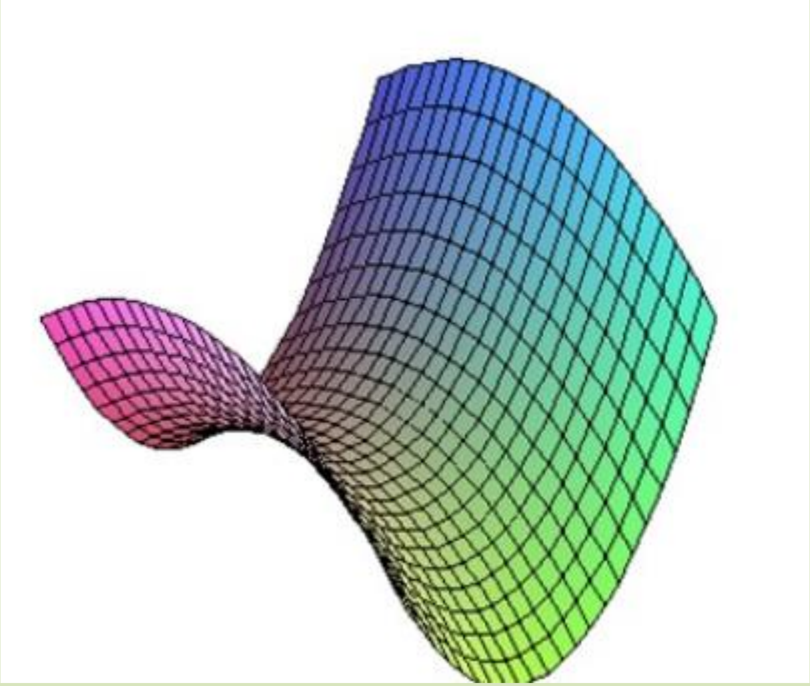
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{z-l}{c}$$

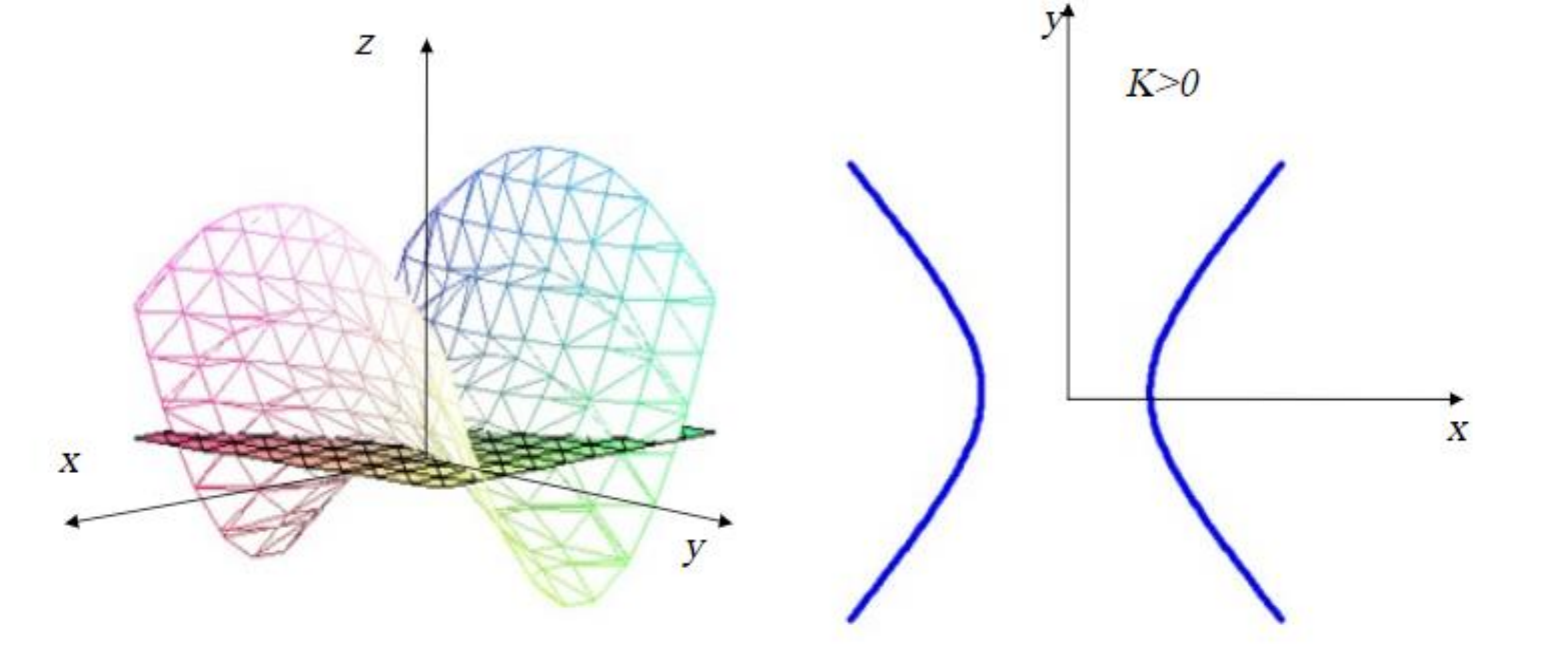
https://sites.google.com/site/portafoliodeevidenciasaylh/parcial-2/superficie-cuadraticas

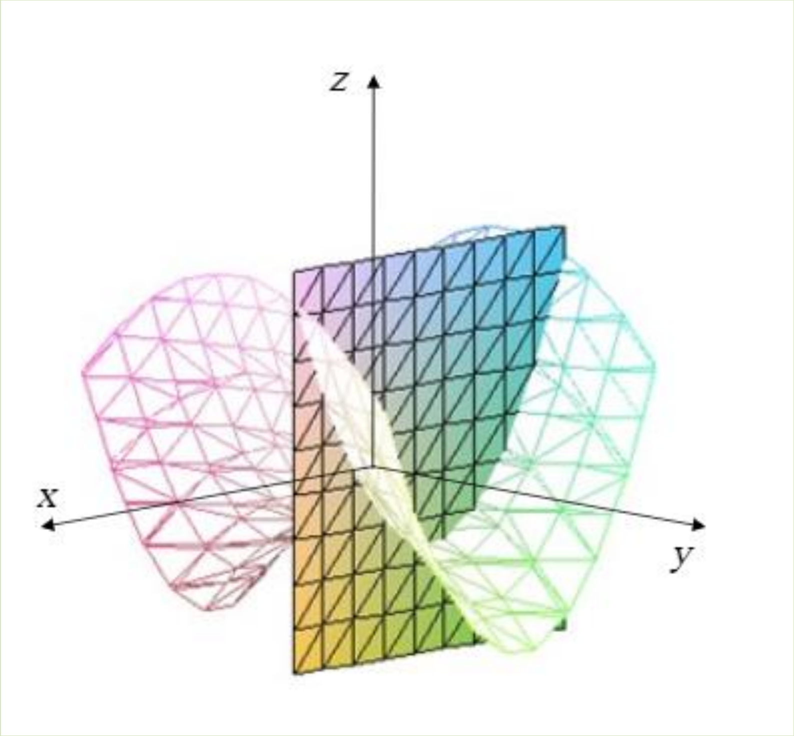


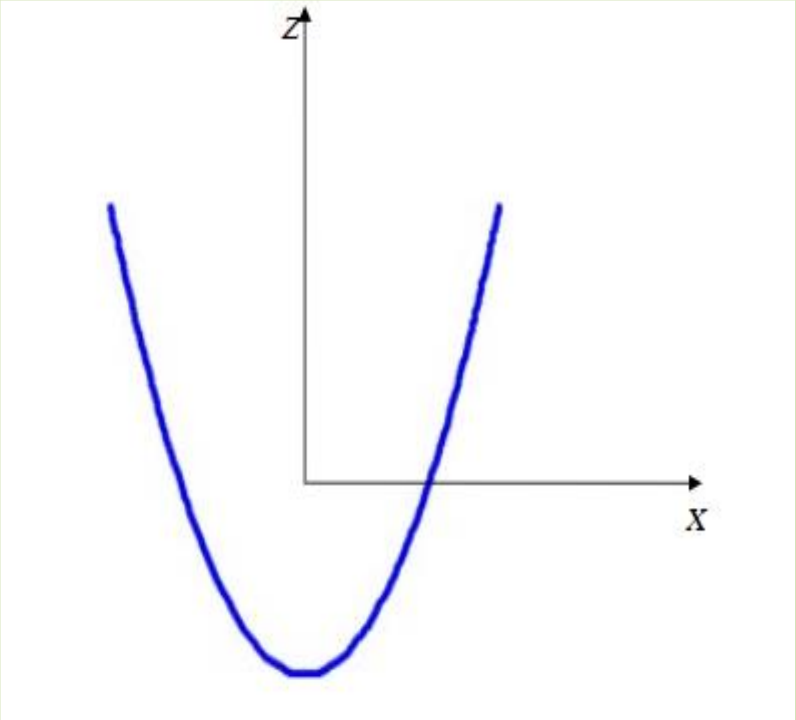
http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/curvas_superf/teoria/cuadricas.html

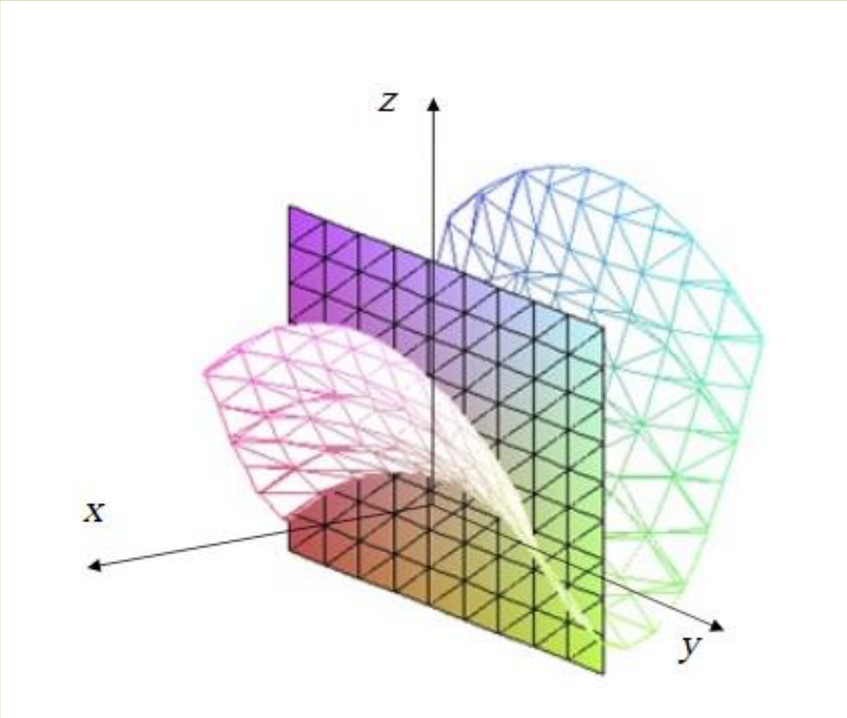
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$





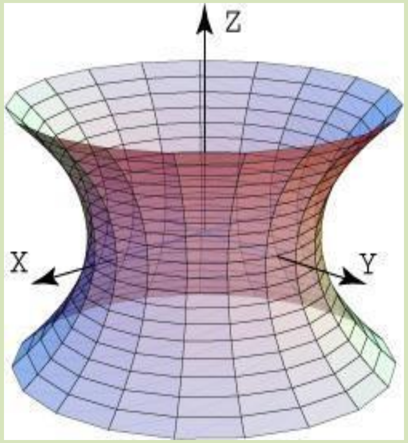

z
x
y

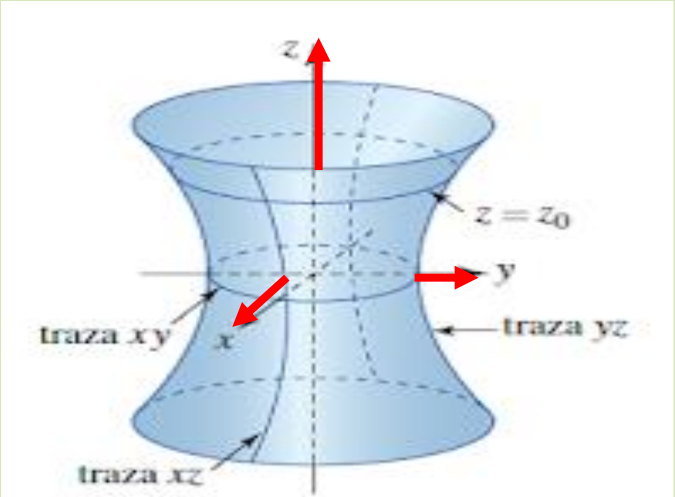

z
x



z
x
y

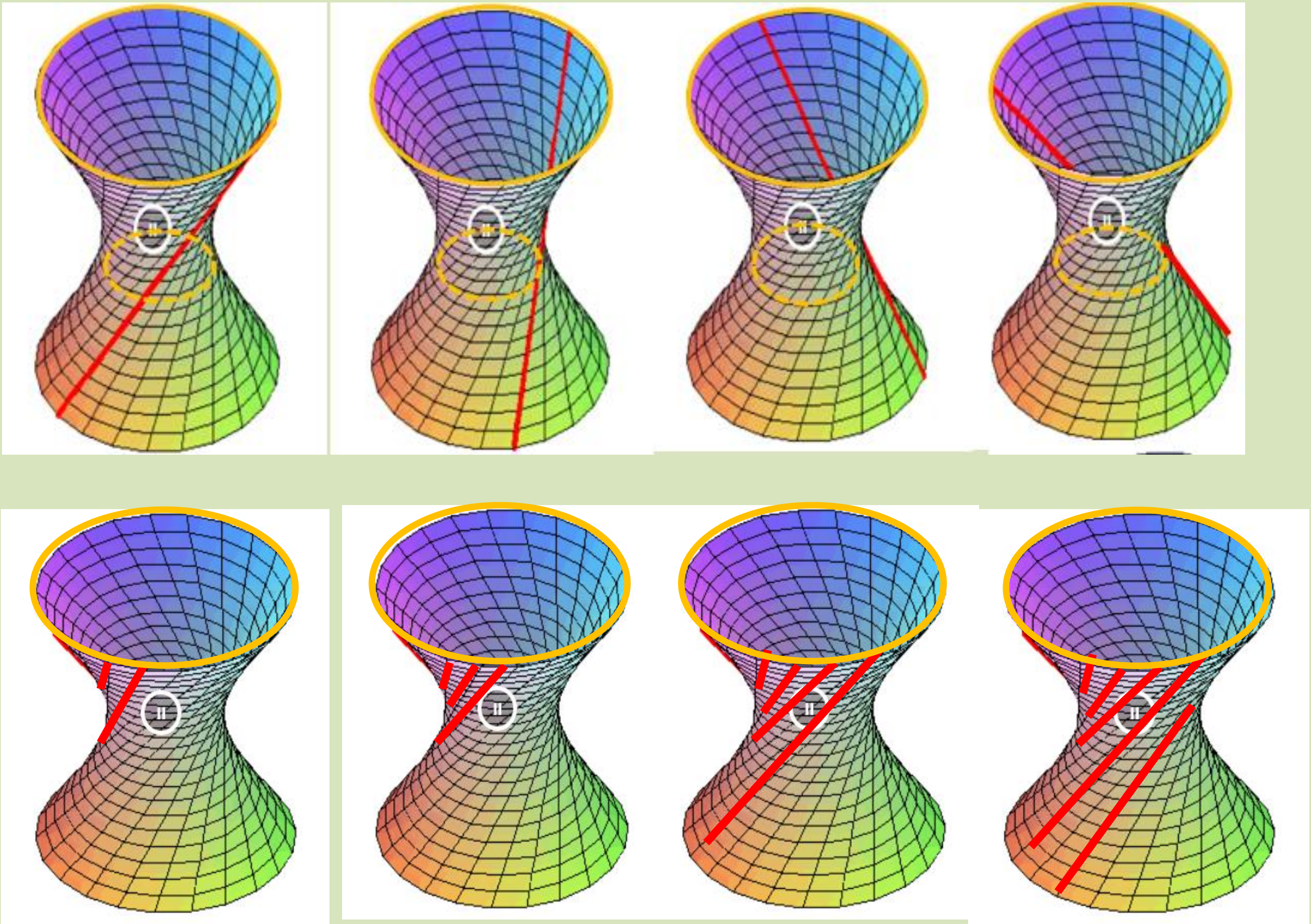
## Hiperboloide de una hoja: Hiperboloide elíptico



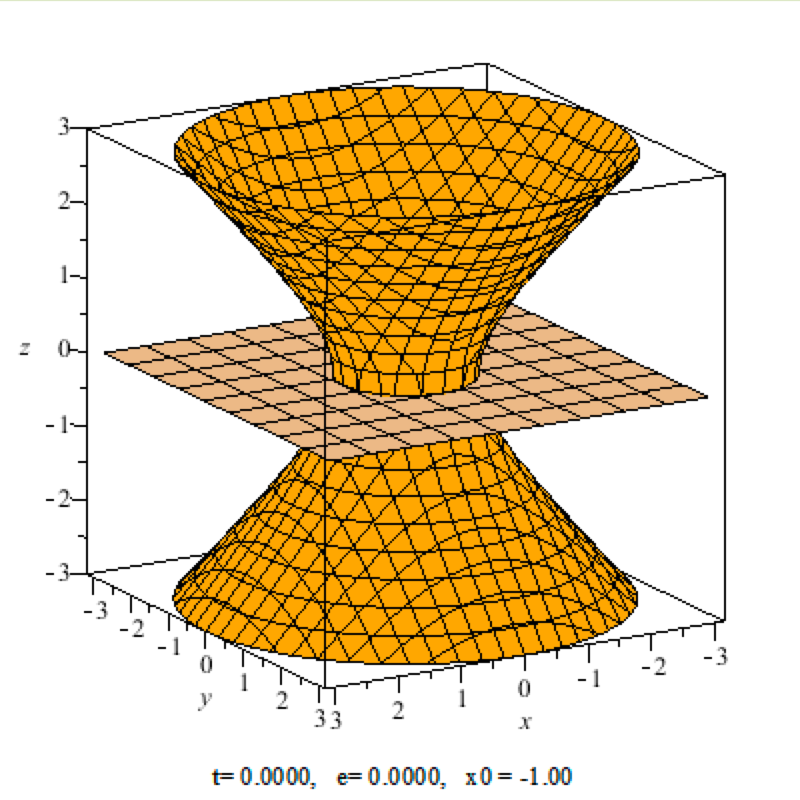




Dos términos cuadráticos positivos y uno negativo. El negativo da la dirección

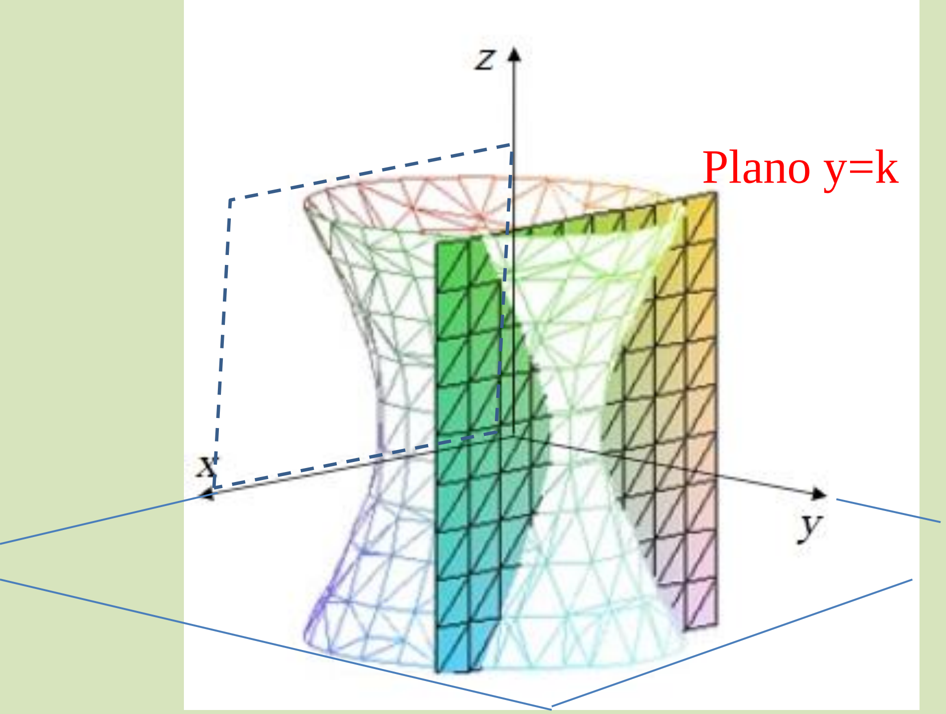
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}-\frac{(z-o)^2}{c^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-0)^2}{b^2}=1 & \text{Elipses en planos ‖s a } xy \\ \dfrac{(y-0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-0)^2}{c^2}=1 & \text{Hipérbolas en planos ‖s a yz} \\ \dfrac{(x-0)^2}{a^2}-\dfrac{(z-0)^2}{c^2}=1 & \text{Hipérbolas en planos ‖s a } xz \end{cases}$$

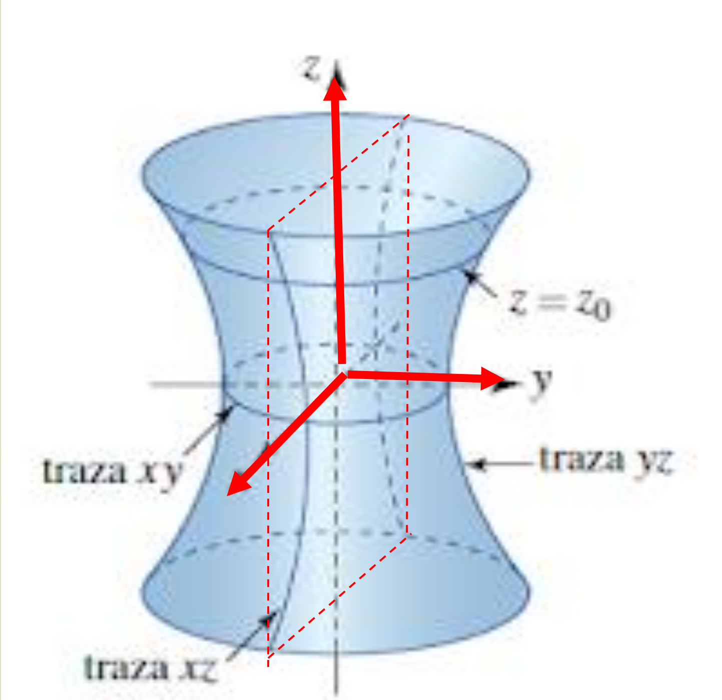


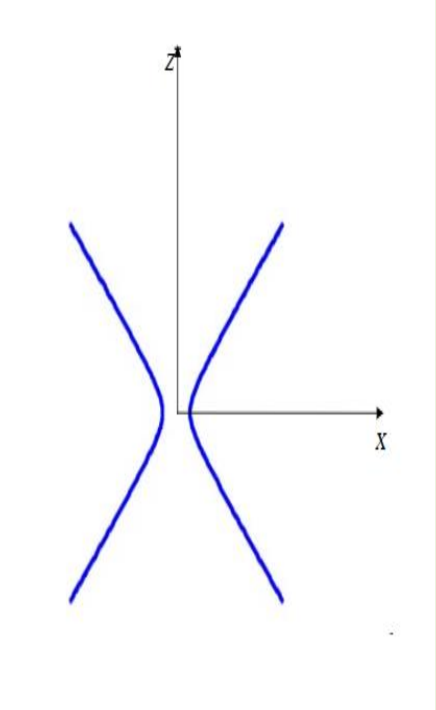
https://www.buzzfeed.com/kellyoakes/16-gif-que-puedes-ver-100-tranquilo-en-la-clase-d




http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/curvas_superf/teoria/cuadricas.html





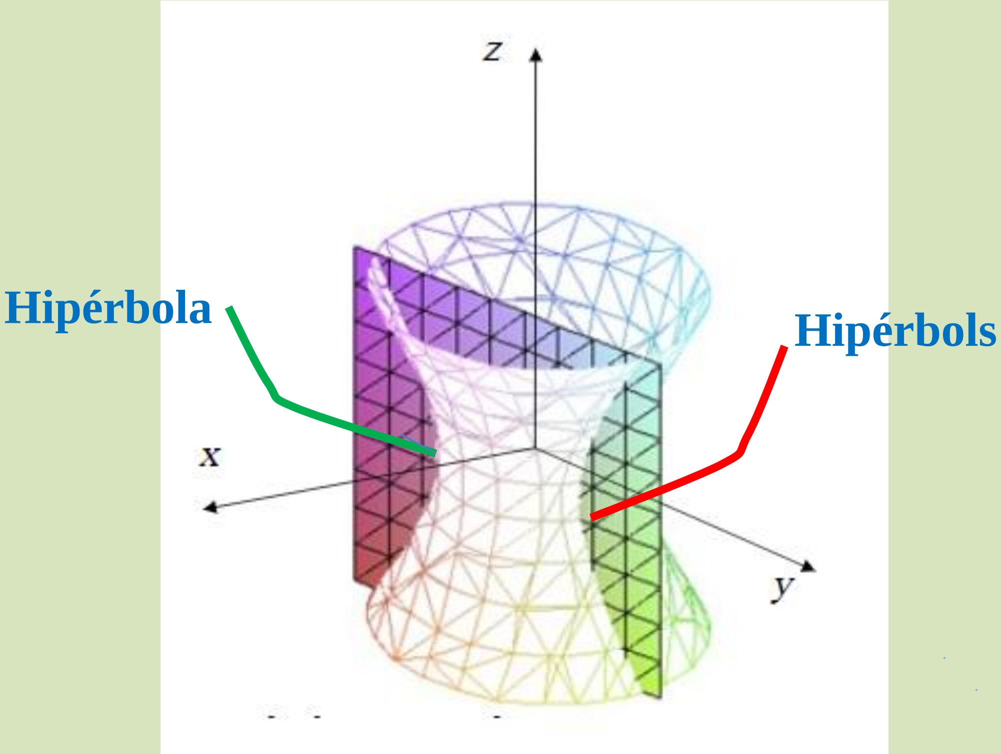


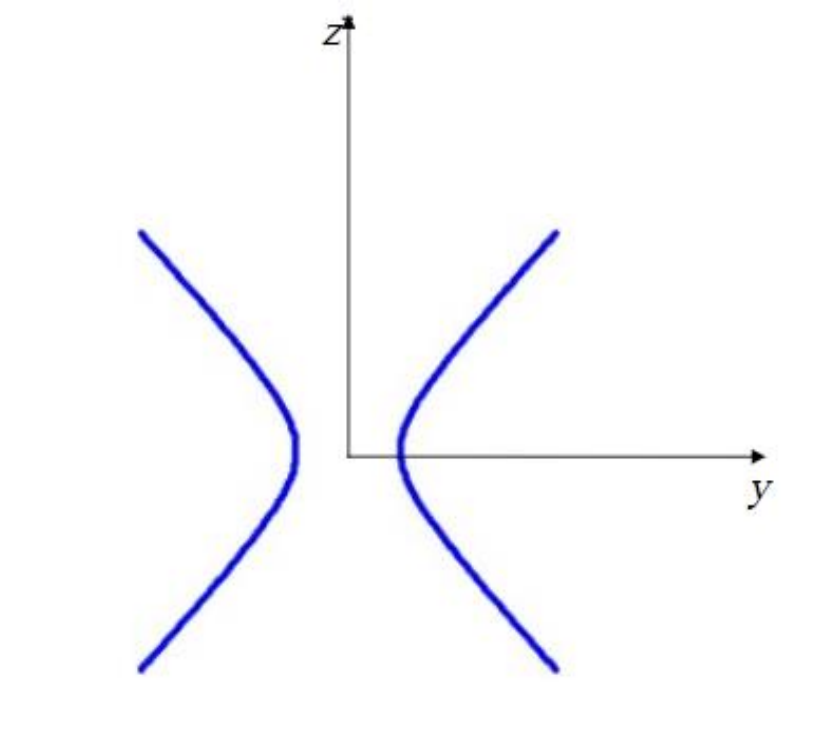

$$\frac{(x-0)^2}{a^2} - \frac{(z-0)^2}{c^2} = 1$$

Cortes con planos perpendiculares al eje y, planos y=k (planos paralelos al plano $zx$ (letras faltantes) . La hipérbola resultante estará en planos paralelos el plano $xz$.

TRAZAS

https://www.geogebra.org/m/mHKf7E9N

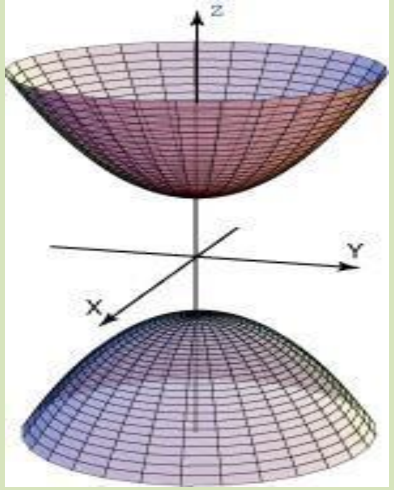


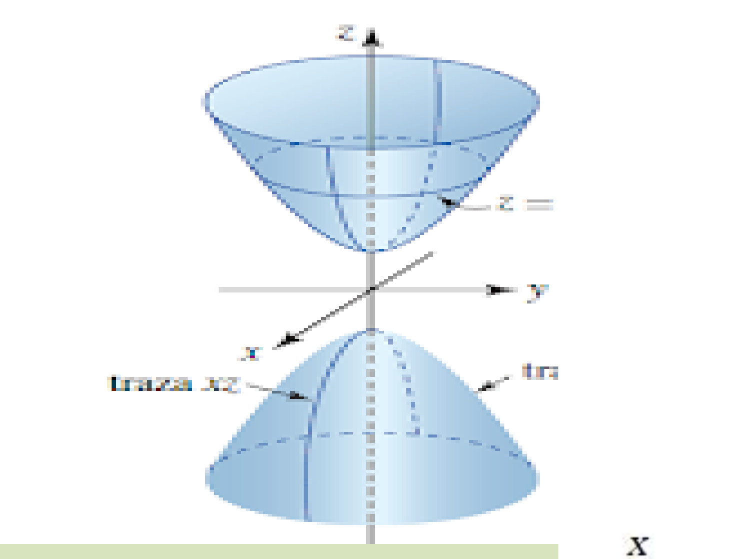



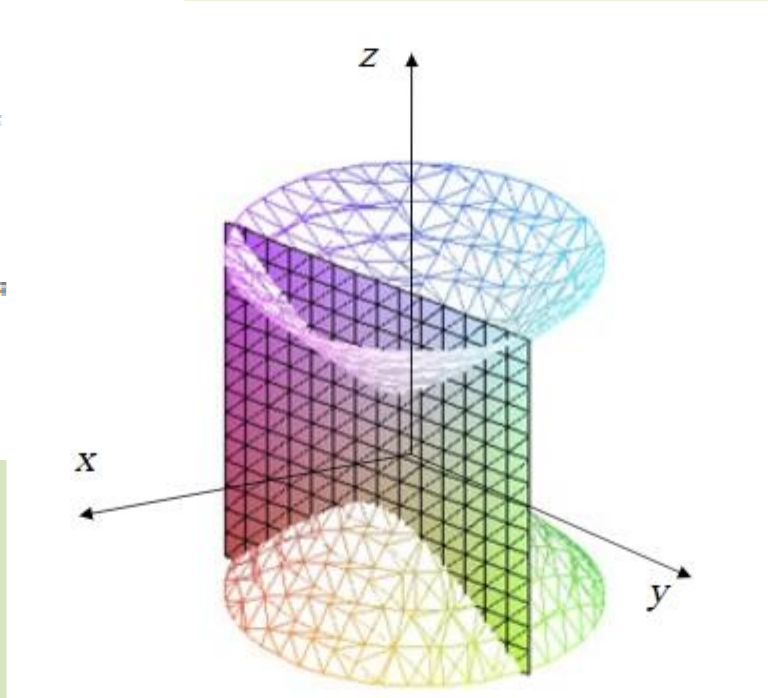

$$\frac{(y-0)^2}{a^2} - \frac{(z-0)^2}{c^2} = 1$$

**Hipérbolas en planos ‖s a yz, $x = k$**

## HIPERBOLOIDE ELIPTICO: HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS




Dos términos positivos y uno negativo . El negativo da la dirección. o

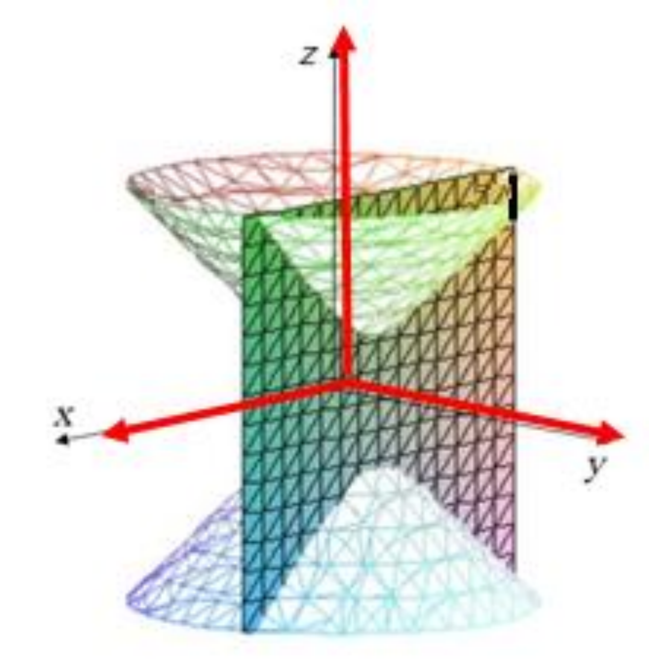
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{a^2}=-1$$

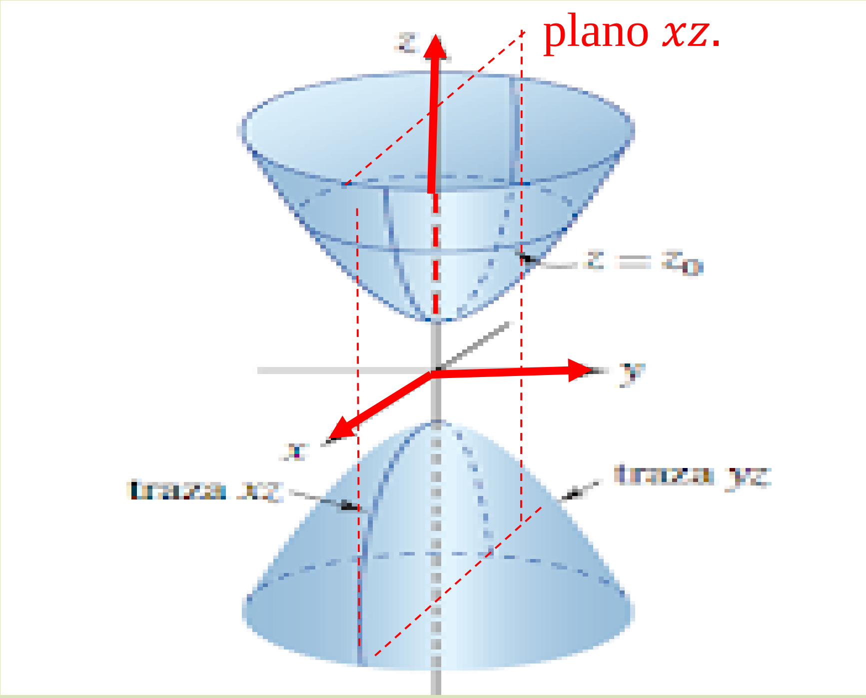
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=-1$$ **Elipses en planos ‖s a $xy$**

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{a^2}=-1$$ **Hipérbolas en planos ‖s a yz**

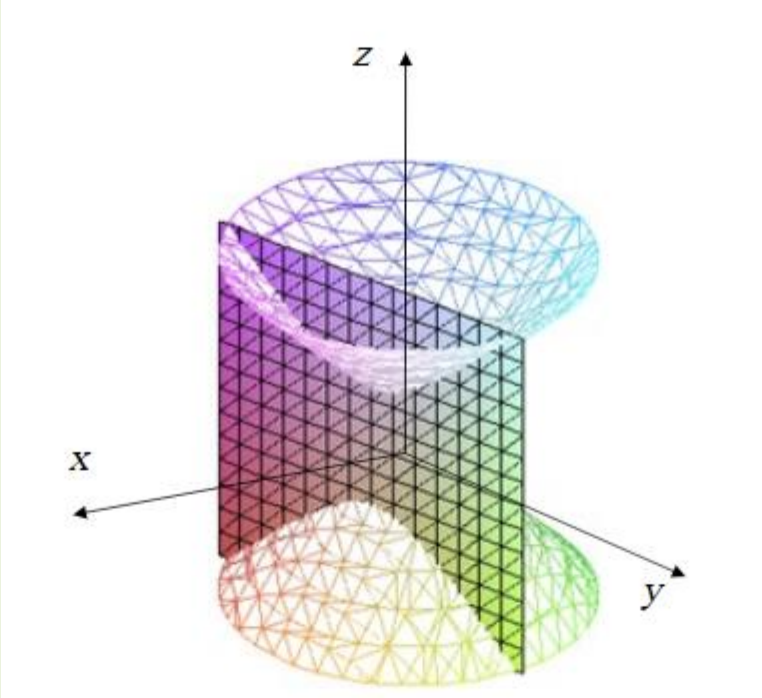
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}-\frac{(z-0)^2}{c^2}=-1$$ **Hipérbolas en planos ‖s a yz**

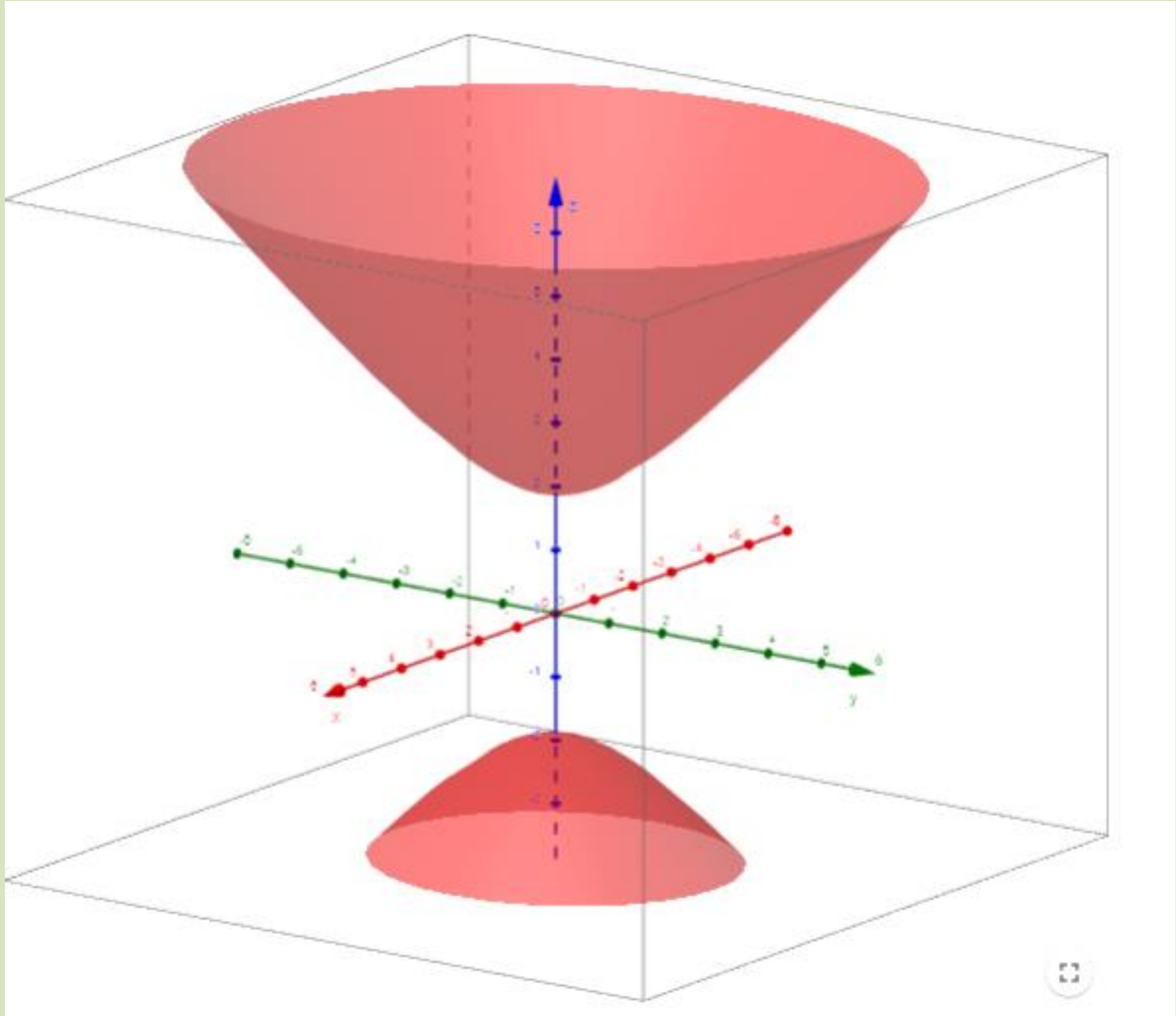
https://www.geogebra.org/m/LuEumpmf

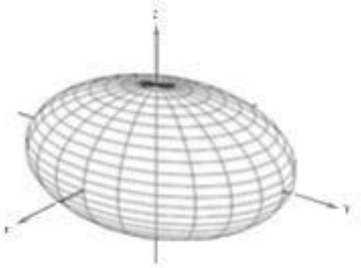



Cortes con planos perpendiculares al eje y,  planos y=k (planos paralelos al plano $zx$ (letras faltantes) . La hipérbola  resultante estará en el plano $zx$ o en planos paralelos  al plano $xz$.


z
x
y



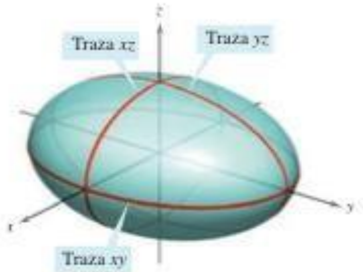


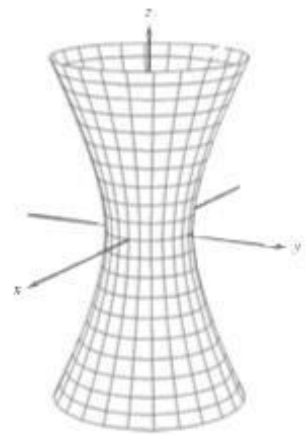
### Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Elipse | Paralelo al plano *xy* |
| Elipse | Paralelo al plano *xz* |
| Elipse | Paralelo al plano *yz* |

La superficie es una esfera si $a=b=c\neq 0$.



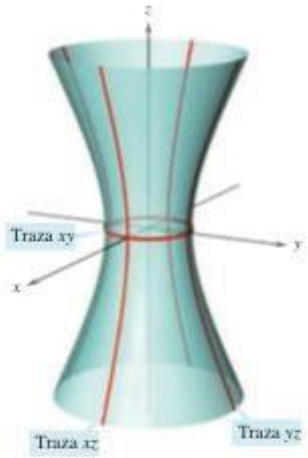



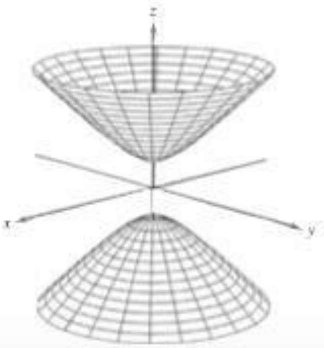
### Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Elipse | Paralelo al plano *xy* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *xz* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *yz* |

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.



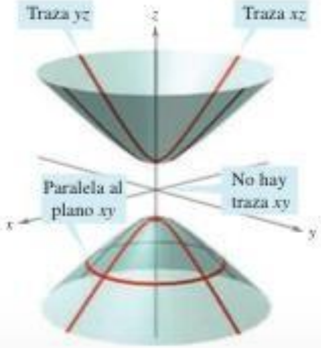



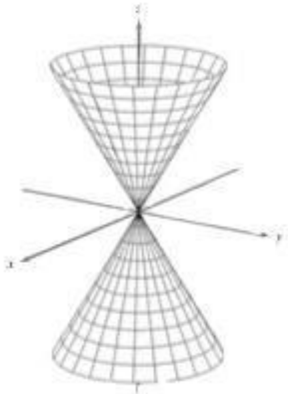
### Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Elipse | Paralelo al plano *xy* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *xz* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *yz* |

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.



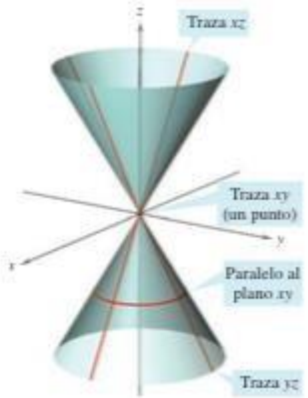



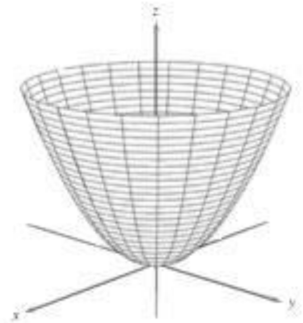
### Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Elipse | Paralelo al plano *xy* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *xz* |
| Hipérbola | Paralelo al plano *yz* |

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.



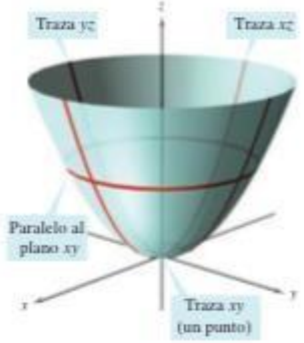



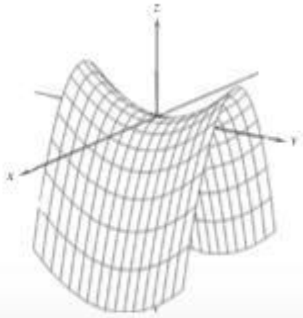
### Paraboloide elíptico

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Elipse | Paralelo al plano *xy* |
| Parábola | Paralelo al plano *xz* |
| Parábola | Paralelo al plano *yz* |

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



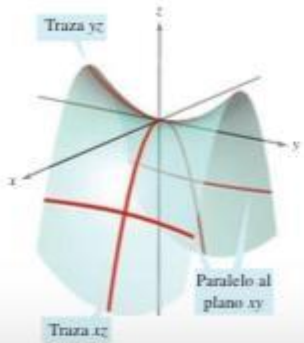



### Paraboloide hiperbólica

$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

| *Traza* | *Plano* |
|---|---|
| Hipérbola | Paralelo al plano *xy* |
| Parábola | Paralelo al plano *xz* |
| Parábola | Paralelo al plano *yz* |

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.




https://sites.google.com/site/angelopex/quinto-parc/cilindros-y-superficies-cuadraticas


Gracias!
blinkeate.co.nr

# Bibliografía


http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_vectorial/superficies_cuadrticas.html

http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra/apuntes.html

http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra/apuntes/cuadricas/02-lugares_geometricos.pdf

**Apuntes teóricos de la ing. Viviana Cappello, Profesora asociada**
Universidad Tecnológica Nacional de la Argentina *UTN*.
*Algebra y Geometría Analítica, Sitio oficial de la Cátedra de la UTN – Facultad Regional La Plata.*