CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números Naturales

El ser humano desde sus inicios tuvo la necesidad de contar. De ahí nacieron los números y más precisamente el conjunto de los Números Naturales.

N = Conjunto de los Números Naturales

N = { 1, 2, 3,...}

El conjunto de los números naturales se caracteriza porque:

1. Empieza con el uno.
2. Tiene un número infinito de elementos consecutivos (un natural menos el anterior es igual a uno).
3. Cada elemento tiene un siguiente y todos, a excepción del 1 tienen un anterior.

USOS DE LOS NATURALES:

1. Para contar o cuantificar. Ejemplo: 1,2,3,4 personas.
2. Para identificar. Ejemplo: Aula número 213
3. Para ordenar o jerarquizar. Ejemplo: 1º, 2º, 3º, 4º.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NATURALES

Asociativa

En una suma de números naturales pueden agruparse los sumandos de cualquier forma y su resultado no varía.

Ejemplo:

$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15$

Conmutativa

El orden que se le dé a los sumandos no altera el valor total de la suma.
Ejemplo:

$2 + 5 = 5 + 2 = 7$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NATURALES:

Asociativa

Si a, b, c $\in$ N tenemos que:

(a x b) x c = a x (b x c)

Ejemplo: (3 x 4) x 2 = 3 x (4 x -2)
12 x 2 = 3 x 8 = 24

Conmutativa

a x b = b x a
Ejemplo: 5 x 3 = 3 x 5
15 = 15

Números Enteros

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los números Naturales. Por ejemplo: a cinco (5) se le quieren quitar veinte (20): 5 – 20 = ¿?).

Z : Conjunto de los Números Enteros

Z = $\{-\infty$... –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... $\infty\}$

En este estado de cosas, la recta numérica se extendió hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representara un número natural le correspondía un punto simétrico, situado a la izquierda del cero.

El conjunto de los números enteros tiene, entre otras, las siguientes características:

1. No tiene primer elemento
2. Es infinito. No tiene último elemento.
3. Entre dos números consecutivos, no existe otro. El conjunto es de valores DISCRETOS.

USOS DE LOS ENTEROS:

1. Para cuantificar en términos relativos al cero. Ejemplos: debo diez mil pesos => - $ 10.000, tres grados centígrados por debajo del cero => - 3 ^{o}C (menos tres grados centígrados), cinco unidades por debajo del eje X => Y = - 5
2. Para identificar niveles. Ejemplo: Nivel – 2 (sótano 2).
3. En los enteros podemos sumar Números negativos:
   Ejemplo: 5 + (-4). Equivale a decir: de cinco unidades positivas corrámonos a la izquierda cuatro unidades.
   Por lo tanto: 5 + (-4) = 5 – 4 = 1

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE ENTEROS

Entenderemos que si a y b son enteros, entonces: a – b = a + (-b). Luego una resta es a la vez una suma.

Asociativa

En una suma de números enteros pueden agruparse los sumandos de cualquier forma y su resultado no varía.

Ejemplo:
3 + (2 - 7) = (3 + 2) – 7 = 5 – 7 = - 2

Conmutativa

El orden que se le dé a los sumandos no altera el valor total de la suma.

Ejemplo:
- 4 + 8 = 8 – 4 = 4

Elemento neutro

En el conjunto de los números naturales existe un número que sumado a cualquier otro da siempre este otro. Este número se llama elemento neutro de la suma y es el cero.

Ejemplos:

- 15 + 0 = - 15 ; 34 + 0 = 34

Existencia del opuesto

El opuesto del número 7 es - 7

Ejemplo:
47 + (- 47) = 47 - 47 = 0 (Elemento neutro)

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS ENTEROS:

Asociativa

Si a, b, c $\in$ Z tenemos que:

(a x b) x c = a x (b x c)

Ejemplo: (-3 x 4) x -2 = -3 x (4 x -2)
-12 x -2 = -3 x -8 = 24

Conmutativa

a x b = b x a
Ejemplo: (-6) x 2^3 = 2^3 x (-6)
-48 = -48

Elemento neutro

El uno es un elemento neutro en la multiplicación de números enteros ya que uno por cualquier entero da el mismo entero.

Producto por cero

El producto de cualquier número entero por el número cero es cero.

Números Racionales

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales y Números Enteros.

Q : Conjunto de los Números Racionales

$$Q = \{ \frac{a}{b} / a \text{ y } b \in Z \wedge b \neq 0 \}$$

Al encontrar que la división entre dos números, naturales o enteros, no siempre daba exacta y que en muchísimos casos los decimales eran infinitos no periódicos, se inventaron los racionales o fraccionarios, el cual está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$. Esta fracción en la cual el numerador **a** es un número entero y el denominador **b** es un número entero distinto de cero (por aquello de que la división por cero no está determinada.

El conjunto de los Números Racionales (Q) se expresa por comprensión como:

$$Q = \{ \frac{a}{b} / a \text{ y } b \in Z \wedge b \neq 0 \}$$

Léase: “Q es el conjunto de los números de la forma $\frac{a}{b}$, tal que **a** y **b** pertenecen a los enteros y **b** debe ser diferente de cero”.

Toda fracción es un número racional y cada número racional consta de infinitas fracciones equivalentes las cuales se pueden obtener multiplicando el numerador y denominador de la fracción por el mismo número.
Ejemplo:
Las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ son fracciones equivalentes pues: $\frac{3}{5}\frac{*2}{*2}=\frac{6}{10}$

Al conjunto de los racionales pertenecen los números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que sí pueden transformarse en una fracción.

USOS DE LOS RACIONALES:

1. Para expresar una o varias de las partes en que se ha dividido la unidad. Ejemplos: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$.
2. Para expresar la distribución de una cantidad en varias partes iguales: Ejemplos: $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE RACIONALES

Asociativa

En una suma de números racionales pueden agruparse los sumandos de cualquier forma y su resultado no varía.

Ejemplo:

2/3 + (1/5 + 7/15) = 2/3 + 10/15 = 20/15

De la misma forma:

(2/3 + 1/5) + 7/15 = 13/15 + 7/15 = 20/15

Conmutativa

El orden que se le de a los sumandos no altera el valor total de la suma.
Ejemplo:

2/3 + 1/5 + 7/15 = 1/5 + 7/15 + 2/3
20/15 = 20/15

Elemento neutro

En el conjunto de los números racionales existe un número que sumado a cualquier otro da siempre este otro. Este número se llama elemento neutro de la suma y es el cero.

Ejemplo:

3/4 + 0/6 = 9/12 = 3/4

Existencia del opuesto

El opuesto del número 3/7 es - 3/7
La suma de dos números opuestos pertenece a la clase del numerador cero.

Ejemplo:
4/7 + (- 4/7) = 4/7 - 4/7 = 0/7 = 0 (Elemento neutro)

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE RACIONALES

Asociativa

En un producto de números racionales pueden sustituirse dos o más de los factores por el producto efectuado.

Ejemplo:
3 *5*7*11 = 1155
3 *5*7*11 = 3*(5*7)*11 = 3*(35)*11 = 33*(35) = 1155

Conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.
Ejemplo: 43*12 = 12*43 = 516

Elemento neutro

En el conjunto de los números racionales existe un número que, multiplicado por cualquier otro, da siempre este otro. A tal número se le llama elemento neutro respecto del producto. Es el representado por las fracciones del tipo a/a = 1 (numerador y denominador iguales).

Elemento inverso o inverso multiplicativo

Es el que, multiplicado por un número racional, hace que su producto sea el elemento neutro.

Ejemplo:
Para 2/5 el inverso es 5/2 porque:
$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$

Números Irracionales

A este conjunto pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. Ejemplos de ellos tenemos todas las raíces inexactas como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. Igualmente el número π, la constante **e**, base de los logaritmos naturales, entre otros.

Conjunto de Números Irracionales
Q´ : Conjunto de los Números Irracionales

Q´ es el conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos.

Tienen la importante propiedad de poder ser aproximados con el grado de precisión que se necesite.

USOS DE LOS IRRACIONALES:

1. La constante **π** y la constante **e** están en los cálculos de áreas y volúmenes y en los exponenciales y logaritmos.
2. Las raíces inexactas como $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{3}$ tienen que ver con cálculos comunes en las asignaturas con base matemática.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE IRRACIONALES

Asociativa

En una suma de números irracionales pueden agruparse los sumandos de cualquier forma y su resultado no varía.

Ejemplo:

$$-\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5})=(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$$

Conmutativa

El orden que se le de a los sumandos no altera el valor total de la suma.
Ejemplo:

$$\sqrt{6}-\sqrt{7}=-\sqrt{7}+\sqrt{6}$$

Elemento neutro

En el conjunto de los números irracionales existe un número que sumado a cualquier otro da siempre este otro. Este número se llama elemento neutro de la suma y es el cero.

Ejemplo:

$$\sqrt{13}+\sqrt{0}=\sqrt{13}$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE IRRACIONALES

Asociativa

En un producto de números irracionales pueden sustituirse dos o más de los factores por el producto efectuado.

Ejemplo:
$\sqrt{13} * (\sqrt{5} * \sqrt{41}) = (\sqrt{13} * \sqrt{5}) * \sqrt{41}$

Conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.
Ejemplo: $\sqrt{13} * \sqrt{5} = \sqrt{5} * \sqrt{13}$

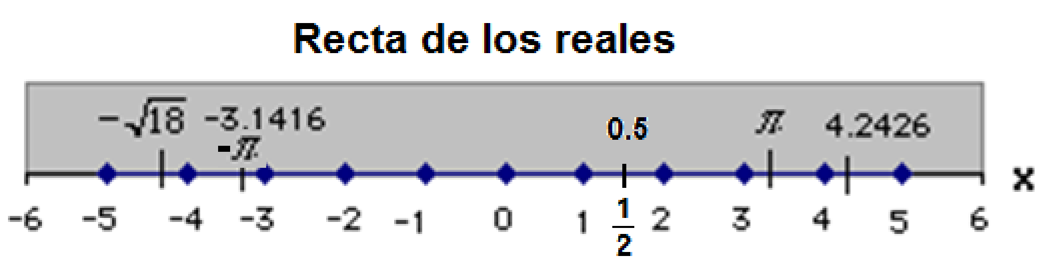
Números Reales

Se le denomina así a cualquier número que pertenezca a los racionales (Q) o a los irracionales (Q') .

Pueden expresarse de forma decimal, como número entero, decimal exacto, decimal periódico o no periódico.

Números Reales (R):
$$\mathbf{R} = \{\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'\}$$

Ejemplo:



Las **propiedades de los reales** están separadamente en los números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Propiedades de los Números Reales:

Conmutativa de adición

La conmutatividad implica que no importa el orden de operación, el resultado siempre es el mismo.

$$\boxed{x + y = y + x}$$

Por ejemplo:
4 + 2 = 2 + 4

Conmutativa de multiplicación

$$\boxed{x \cdot y = y \cdot x}$$

Por ejemplo:
4 * 2 = 2* 4

Asociativa de adición

La asociatividad implica que no importa el orden en que se agrupe, el resultado es el mismo.

$$\boxed{(x + y) + z = x + (y + z)}$$

Por ejemplo:
(4 + 2) + 9 = 4 + (2 + 9)

Asociativa de multiplicación

$$\boxed{x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z}$$

Por ejemplo:
4 * (2 * 9) = (4 * 2) * 9

Distributiva de multiplicación sobre adición

$$\boxed{x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z}$$

Por ejemplo:
4 * (2 + 9) = 4 ***** 2 + 4 * 9

Números Complejos

Números Complejos (C):

$$C = \{a + bi \,/\, a \wedge b \in R\}$$

Un número complejo se define como **C = a + bi** (forma binómica) donde **a** y **b** son reales y **bi** es la parte imaginaria. Llamaremos $i = \sqrt{-1}$ a la unidad imaginaria.

Con a y b reales. La letra i representa la raíz cuadrada de –1

<u>Ejemplo</u>:
7 + 5i - 8 + 4i - 20 – 6i

<u>Propiedades importantes</u>

Suma: Si **z** $\wedge$ **w** $\in$ **C =>**

z + w = (a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i

Multiplicación:
Para multiplicar este tipo de números se opera igual que con los reales:

$z_1 * z_2$ donde,
$z_1 = a + b * \mathbf{i}$ y $z_2 = c + d * \mathbf{i}$

Con a,b,c y d reales. En este caso se opera como una multiplicación de dos binomios, pero tomando en cuenta las propiedades de *i* :

$\boldsymbol{i = i}$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$ ………..

El resultado de la multiplicación es:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac – bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$