17. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ **18.** $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

19. $(3t - 2)(7t - 5)$ **20.** $(4x - 1)(3x + 7)$

21. $(x + 2y)(3x - y)$ **22.** $(4x - 3y)(2x + 5y)$

23. $(1 - 2y)^2$ **24.** $(3x + 4)^2$

25. $(2x^2 + 3y^2)^2$ **26.** $\left(c + \frac{1}{c}\right)^2$

27. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ **28.** $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

29. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ **30.** $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

31. $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right)$

32. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

33. $(1 + a^3)^3$

34. $(1 - 2y)^3$

35. $(x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 2)$

36. $(3x^3 + x^2 - 2)(x^2 + 2x - 1)$

37. $(1 + x^{4/3})(1 - x^{2/3})$ **38.** $(1 - b)^2(1 + b)^2$

39. $(3x^2y + 7xy^2)(x^2y^3 - 2y^2)$ **40.** $(x^4y - y^5)(x^2 + xy + y^2)$

41. $(x + y + z)(x - y - z)$ **42.** $(x^2 - y + z)(x^2 + y - z)$

43–48 ■ Obtenga el factor común.

43. $-2x^3 + 16x$ **44.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

45. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **46.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

47. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **48.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

49–54 ■ Factorice el trinomio.

49. $x^2 + 2x - 3$ **50.** $x^2 - 6x + 5$

51. $8x^2 - 14x - 15$ **52.** $6y^2 + 11y - 21$

53. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

54. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

55–60 ■ Aplique una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

55. $9a^2 - 16$ **56.** $(x + 3)^2 - 4$

57. $27x^3 + y^3$ **58.** $8s^3 - 125t^6$

59. $x^2 + 12x + 36$ **60.** $16z^2 - 24z + 9$

61–66 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

61. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **62.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

63. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **64.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

65. $x^3 + x^2 + x + 1$ **66.** $x^5 + x^4 + x + 1$

67–70 ■ Factorice totalmente la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

67. $x^{5/2} - x^{1/2}$ **68.** $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

69. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

70. $2x^{1/3}(x - 2)^{2/3} - 5x^{4/3}(x - 2)^{-1/3}$

71–100 ■ Factorice totalmente las expresiones.

71. $12x^3 + 18x$ **72.** $5ab - 8abc$

73. $x^2 - 2x - 8$ **74.** $y^2 - 8y + 15$

75. $2x^2 + 5x + 3$ **76.** $9x^2 - 36x - 45$

77. $6x^2 - 5x - 6$ **78.** $r^2 - 6rs + 9s^2$

79. $25s^2 - 10st + t^2$ **80.** $x^2 - 36$

81. $4x^2 - 25$ **82.** $49 - 4y^2$

83. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

84. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

85. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$ **86.** $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

87. $8x^3 + 125$ **88.** $x^6 + 64$

89. $x^6 - 8y^3$ **90.** $27a^3 - b^6$

91. $x^3 + 2x^2 + x$ **92.** $3x^3 - 27x$

93. $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$ **94.** $x^3 + 3x^2 - x - 3$

95. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ **96.** $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

97. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

98. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

99. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

100. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

101–104 ■ Factorice completamente la expresión. (Este tipo de expresión surge en el cálculo cuando se usa la "regla del producto".)

101. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

102. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

103. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

104. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

105. **a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

d) Factorice completamente: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

106. Compruebe las fórmulas de factorización especial 4 y 5 expandiendo sus segundos miembros.

Aplicaciones

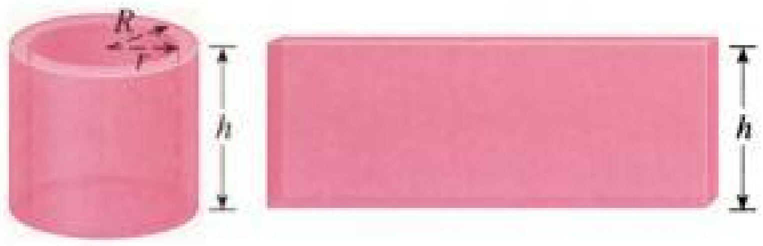
107. Volumen de concreto Una alcantarilla está construida mediante cascarones cilíndricos colados en concreto, según se muestra en la figura. Aplique la fórmula del volumen de un cilindro que se encuentra en los forros interiores de este libro y explique por qué el volumen del cascarón cilíndrico es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

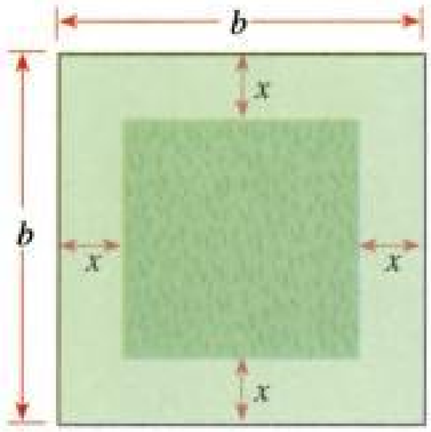
Utilice el esquema "desenrrollado" para explicar por qué tiene sentido desde el punto de vista geométrico.



108. Poda de un terreno Cada semana se corta el pasto de las orillas de un terreno cuadrado de un cierto estacionamiento. El resto del terreno permanece intacto para que sirva como hábitat de pájaros y otros pequeños animales (véase la figura). El terreno mide b pies por b pies y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

(b) Factorice la expresión del inciso a) para demostrar que el área de la parte podada es también $4x(b - x)$.



Descubrimiento • Debate

109. Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios, luego calcule la suma y el producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo es el grado del producto en relación con los grados de los polinomios originales?

b) ¿Cómo es el grado de la suma en relación con el grado de los polinomios originales?

110. El poder de las fórmulas algebraicas Aplique la fórmula de las diferencias de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Observe que es fácil de calcular mentalmente la forma factorizada, pero es difícil de calcular la forma original de esta manera. Evalúe cada expresión mentalmente:

a) $528^2 - 527^2$ b) $122^2 - 120^2$ c) $1020^2 - 1010^2$

Ahora aplique la fórmula para productos especiales

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar estos productos mentalmente:

d) $79 \cdot 51$ e) $998 \cdot 1002$

111. Diferencias de potencias pares

a) Factorice del todo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.

b) Verifique que $18335 = 12^4 - 7^4$ y que $2\,868\,335 = 12^6 - 7^6$.

c) Use los resultados de los incisos a) y b) para factorizar los enteros 18 335 y 2 868 335. Luego demuestre que en ambas factorizaciones, todos los factores son números primos.

112. Factorización de $A^n - 1$ Verifique estas fórmulas expandiendo y simplificando el segundo miembro.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Use base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa que se factorizaría $A^5 - 1$? Verifique sus suposiciones. En seguida generalice el patrón que observó para obtener una fórmula con la cual se factorice $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

113. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ Algunas veces, un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$ puede factorizarse con facilidad. Por ejemplo, $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$. Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar de esta manera, sino que podemos usar el método siguiente.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 && \text{Suma y resta de } x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 && \text{Factorización del cuadrado perfecto} \\ &= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

Factorice las expresiones siguientes usando cualquier método que sea adecuado.

a) $x^4 + x^2 - 2$

b) $x^4 + 2x^2 + 9$

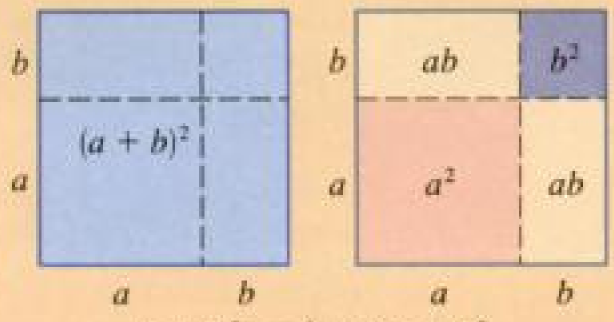
c) $x^4 + 4x^2 + 16$

d) $x^4 + 2x^2 + 1$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Representación gráfica de una fórmula

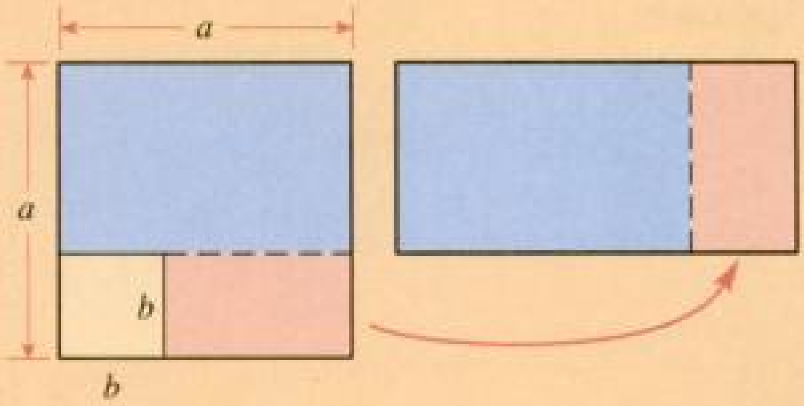
Muchas de las fórmulas para productos especiales que se tratan en esta sección se pueden representar en forma geométrica, considerando el largo, el área y el volumen. Por ejemplo, la figura ilustra cómo se puede interpretar la fórmula del cuadrado de un binomio mediante áreas de cuadrados y de rectángulos.



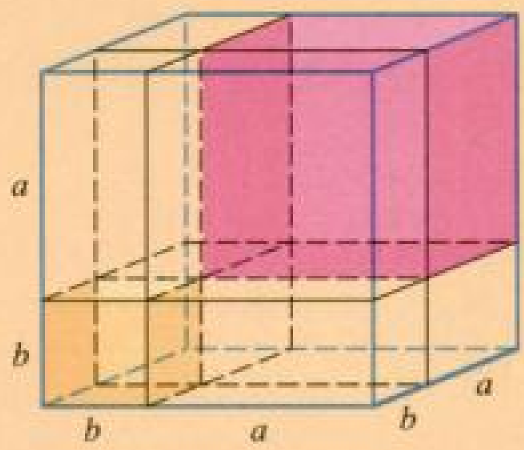
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En la figura, a y b representan longitudes, a^2, b^2, ab y $(a + b)^2$ representan áreas. Los antiguos griegos siempre interpretaban las fórmulas algebraicas en términos de figuras geométricas como se hace aquí.

1. Explique cómo la figura verifica la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.



2. Encuentre una figura que compruebe la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Explique cómo la figura siguiente verifica la fórmula $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



4. ¿Es posible dibujar una figura geométrica que verifique la fórmula para $(a + b)^4$? Explique.
5. a) Efectúe $(a + b + c)^2$.
   b) Trace una figura geométrica que verifique la fórmula que encontró en el inciso a).

1.4 Expresiones racionales

Un cociente de dos expresiones algebraicas recibe el nombre de **expresión fraccionaria**. Siguen algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde tanto el numerador como el denominador son polinomios. Por ejemplo, las que siguen son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección se estudia cómo efectuar operaciones algebraicas con expresiones racionales.

Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica podría no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de los números reales que se le permite tener a la variable. La tabla al margen proporciona algunas expresiones básicas y sus dominios.

Ejemplo 1 Determinación del dominio de una expresión

Encuentre el dominio de las expresiones siguientes.

a) $2x^2 + 3x - 1$ b) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

Solución

a) Este polinomio está definido para toda x. Por consiguiente, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$.

Puesto que el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio es $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

c) Para que el numerador esté definido, deberemos tener $x \geq 0$. Además, no podemos dividir entre cero, de modo que $x \neq 5$.

Es necesario tener $x \geq 0$ para obtener una raíz cuadrada.

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería igual a 0 si $x = 5$.

Por lo tanto, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$. ■

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar las expresiones racionales** factorizamos tanto el numerador como el denominador y aplicamos la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto permite **eliminar** los factores comunes del numerador y del denominador.

Ejemplo 2 Simplificación de expresiones racionales por eliminación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

Solución

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \quad \text{Factorización}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \quad \text{Eliminación de factores comunes} \quad ■$$

No podemos eliminar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque la x^2 no está multiplicando.

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales**, aplicamos la siguiente propiedad de las fracciones

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones se tienen que multiplicar los numeradores y por otra parte los denominadores.

Ejemplo 3 Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

Solución Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \quad \text{Factorización}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \quad \text{Propiedad de las fracciones}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \quad \text{Eliminación de factores comunes} \quad ■$$

Para **dividir las expresiones racionales** aplicamos la propiedad siguiente de las fracciones

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto quiere decir que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

Ejemplo 4 División de expresiones racionales

Efectúe la división y simplifique: $\dfrac{x-4}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$

Solución

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} \qquad \text{Inversión y multiplicación}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Se eliminan los factores comunes}$$

■

Adición y sustracción de expresiones racionales

Evite cometer el error siguiente:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si tenemos $A = 2$, $B = 1$, y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{¡Falso!}$$

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero determinamos un denominador común y luego aplicamos la propiedad siguiente de las fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}}$$

Aunque podría servir cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD), que se trató en la sección 1. El MCD se encuentra factorizando cada denominador y luego se obtiene el producto de los distintos factores; se usa la potencia más alta que aparece en alguno de los factores.

Ejemplo 5 Adición y sustracción de expresiones racionales

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ b) $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Solución

a) En este caso el MCD es simplemente el producto $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Las fracciones se escriben usando el MCD}$$

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Las fracciones se suman}$$

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Se combinan los términos del numerador}$$

Matemáticas en el mundo moderno

NASA

Codificación para corregir errores

Las imágenes que envió a la Tierra la nave espacial *Pathfinder* desde la superficie de Marte en julio de 1997 eran asombrosamente claras. Pero sólo muy pocos de quienes observaron estas imágenes estaban conscientes de la aplicación matemática tan compleja que se usó para lograr este hecho tan notable. La distancia a Marte es enorme, y el ruido de fondo, también conocido como estática, es muchas veces más fuerte que la señal original que envía la nave. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, ésta se encuentra llena de errores. Para obtener una imagen clara, se tienen que encontrar los errores y corregirlos. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria al transmitir los registros de un banco cuando usted usa un cajero automático o en la voz cuando usted habla por teléfono.

Para entender cómo se encuentran y se corrigen los errores, primero debemos tener claro que para transmitir imágenes, sonido o texto es necesario transformarlos en bits (los dígitos 0 o 1; refiérase a la pág. 30). Con el fin de ayudar al receptor a identificar los errores, se "codifica" el mensaje insertando bits adicionales. Por ejemplo, suponga que quiere transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es el siguiente: enviar cada uno de los dígitos un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si la mayoría es 1 en el primer bloque, la persona concluye

(continúa)

b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Combinación de fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{3 - x}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Combinación de términos en el numerador}$$

■

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una expresión en la cual el numerador, el denominador, o ambos son también expresiones fraccionarias.

Ejemplo 6 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

Solución 1 Combinamos los términos en el numerador para tener una sola fracción. Ejecutamos lo mismo con el denominador. Luego invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x}{x-y}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$

Solución 2 Determinamos el MCD de todas las fracciones en la expresión, luego multiplicamos el numerador y el denominador por el MCD. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto,

$$\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy} \qquad \text{Multiplicación del numerador y del denominador por } xy$$

$$= \frac{x^2 + xy}{xy - y^2} \qquad \text{Simplificación}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)} \qquad \text{Factorización}$$

■

que usted trata con probabilidad de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es efectivo tiene un poco de declaración exageradamente modesta; se requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. En otro método se insertan "dígitos de verificación". Por ejemplo, por cada bloque de ocho dígitos se inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay una cantidad par de números 1 en el bloque, y 1 si hay una cantidad impar. Entonces, si un solo dígito está mal, por ejemplo, un 0 cambiado por un 1 o viceversa, los dígitos de verificación permiten saber que ha ocurrido un error. Pero este método no nos dice dónde está el error, por lo que no podemos corregirlo. Los códigos modernos para corregir errores aplican interesantes algoritmos matemáticos que requieren la inserción de relativamente pocos dígitos, pero que permiten que el receptor no sólo identifique errores, sino que también los corrija. El primer código para corregir errores lo desarrolló Richard Hamming por el año 1940 en el Massachusetts Institute of Technology. Es interesante hacer notar que el idioma inglés tiene un mecanismo incorporado para corregir errores; para probarlo, trate de leer la oración plagada de errores: *Gve mo libty ox giv ne deth* (*Give me more liberty or give me death*).*

Los dos ejemplos siguientes muestran situaciones en el cálculo que requieren la capacidad de trabajar con expresiones fraccionarias.

Ejemplo 7 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$

Solución Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$

Combinación de fracciones en el numerador

$$=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$

Propiedad 2 de las fracciones (inversión del divisor y multiplicación)

$$=\frac{a-a-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$

Propiedad distributiva

$$=\frac{-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$

Simplificación

$$=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Propiedad 5 de las fracciones (eliminación de los factores comunes) ■

Ejemplo 8 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

Solución 1 Saque como factor $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Se saca como factor la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño* en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}=\frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}$$

$$=\frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Solución 2 Puesto que $(1+x^2)^{-1/2}=1/(1+x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos simplificar las fracciones multiplicando numerador y denominador por $(1+x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}=\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$ ■

* Dadme más libertad o dadme la muerte

Racionalización del denominador o del numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador multiplicando el numerador y el denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto es efectivo porque de acuerdo con la fórmula 1 para los productos especiales tratada en la sección 1.3, el producto del denominador por su radical conjugado no contiene un radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

Ejemplo 9 Racionalización del denominador

Racionalice el denominador: $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$

Solución Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el radical conjugado de $1 + \sqrt{2}$, el cual es $1 - \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ Multiplicación del numerador o del denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 para los productos especiales

Fórmula 1 para los productos especiales $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$ ■

Ejemplo 10 Racionalización del numerador

Racionalizar el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

Solución Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h} + 2$.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$ Multiplicación del numerador y del denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ Fórmula 1 para productos especiales

Fórmula 1 para los productos especiales $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$ Propiedad 5 de las fracciones (eliminación de factores comunes) ■

Forma de evitar los errores comunes

No cometa el error de aplicar las propiedades de la multiplicación a la operación de la adición. Muchos de los errores comunes del álgebra se relacionan precisamente con esto. En la siguiente tabla se establecen varias propiedades de la multiplicación y se ilustra el error al aplicarlos a la suma.

Propiedad correcta de la multiplicación	Error común en la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} \neq b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \neq (a+b)^{-1}$

Para comprobar que las ecuaciones en la columna de la derecha son erróneas sustituya simplemente números para a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si hacemos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

y en el lado derecho es

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Puesto que $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación planteada es errónea. Debe convencerse a sí mismo del error en cada una de las otras ecuaciones. (Véase el ejercicio 97.)

1.4 Ejercicios

1–6 ■ Determine el dominio de la expresión.

1. $4x^2 - 10x + 3$

2. $-x^4 + x^3 + 9x$

3. $\dfrac{2x+1}{x-4}$

4. $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

5. $\sqrt{x+3}$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

7–16 ■ Simplifique la expresión racional.

7. $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$

8. $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

9. $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

10. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

11. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$

12. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

13. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$

14. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$

15. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$

16. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

17–30 ■ Efectúe la multiplicación o la división, y simplifique.

17. $\dfrac{4x}{x^2-4} \cdot \dfrac{x+2}{16x}$

18. $\dfrac{x^2-25}{x^2-16} \cdot \dfrac{x+4}{x+5}$

19. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-9} \cdot \dfrac{3+x}{4-x}$

20. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \dfrac{3-x}{3+x}$

21. $\dfrac{t-3}{t^2+9} \cdot \dfrac{t+3}{t^2-9}$

22. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x} \cdot \dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

23. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2} \cdot \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

24. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

25. $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15}\div\dfrac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$

26. $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

27. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$

28. $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

29. $\dfrac{x/y}{z}$

30. $\dfrac{x}{y/z}$

31–50 ■ Efectúe la adición o la sustracción, y simplifique.

31. $2+\dfrac{x}{x+3}$

32. $\dfrac{2x-1}{x+4}-1$

33. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

34. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

35. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

36. $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

37. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

38. $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

39. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

40. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

41. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$

42. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

43. $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$

44. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

45. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

46. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

47. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

48. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

49. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

50. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

51–60 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

51. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

52. $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

53. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

54. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

55. $\dfrac{\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}$

56. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}$

57. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

58. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

59. $\dfrac{1}{1+a^n}+\dfrac{1}{1+a^{-n}}$

60. $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^m\left(a-\dfrac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^m\left(b-\dfrac{1}{a}\right)^n}$

61–66 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas se utilizan en el cálculo infinitesimal.)

61. $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$

62. $\dfrac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}$

63. $\dfrac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\dfrac{1-x}{2+x}}{h}$

64. $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-(x^3-7x)}{h}$

65. $\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

66. $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

67–72 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión se utiliza en el cálculo infinitesimal cuando se aplica la "regla del cociente".)

67. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2-(x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

68. $\dfrac{2x(x+6)^4-x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

69. $\dfrac{2(1+x)^{1/2}-x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

70. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}+x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

71. $\dfrac{3(1+x)^{1/3}-x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

72. $\dfrac{(7-3x)^{1/2}+\frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

73–78 ■ Racionalice el denominador.

73. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ **74.** $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

75. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ **76.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

77. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$ **78.** $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

79–84 ■ Racionalice el numerador.

79. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$ **80.** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

81. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$ **82.** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

83. $\sqrt{x^2+1}-x$ **84.** $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

85–92 ■ Diga si la ecuación se cumple para todos los valores de las variables. (Deseche cualquier valor que hace que el denominador sea cero.)

85. $\dfrac{16+a}{16}=1+\dfrac{a}{16}$ **86.** $\dfrac{b}{b-c}=1-\dfrac{b}{c}$

87. $\dfrac{2}{4+x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}$ **88.** $\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{x}{y}$

89. $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+y}$ **90.** $2\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{2a}{2b}$

91. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$ **92.** $\dfrac{1+x+x^2}{x}=\dfrac{1}{x}+1+x$

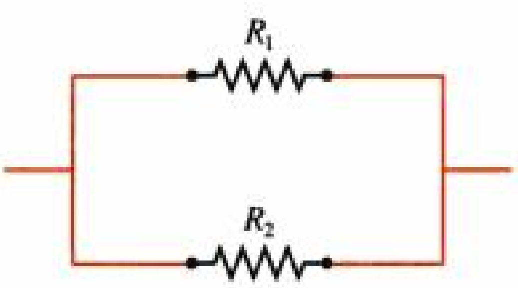
Aplicaciones

93. Resistencia eléctrica Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), entonces la resistencia total R es

$$R=\frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

a) Simplifique la expresión para R.

b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia total R?



94. Costo promedio Un fabricante de ropa determina que el costo de la producción de x camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

a) Explique la razón de que el costo promedio por camisa esté dado por la expresión racional

$$A=\frac{500+6x+0.01x^2}{x}$$

b) Complete la tabla siguiente con el cálculo del costo promedio por camisa para los valores dados de x.

x	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1000	

Descubrimiento • Debate

95. Comportamiento limitante de una expresión racional La expresión racional

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas siguientes y determine a qué valor se aproxima la expresión a medida que x se acerca más y más a 3. ¿Por qué es razonable? Descomponga en factores el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

96. ¿Esto es racionalización? En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Es lo mismo que racionalizar el denominador?

97. Errores algebraicos La columna de la izquierda en la tabla da el listado de algunos errores comunes de álgebra. En cada caso proporcione un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se denomina *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \cancel{=} \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \cancel{=} a^2+b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \cancel{=} a+b$	
$\frac{a+b}{a} \cancel{=} b$	
$(a^3+b^3)^{1/3} \cancel{=} a+b$	
$a^m/a^n \cancel{=} a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \cancel{=} \frac{1}{a^n}$	

98. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica podría verse complicada, pero su "forma" siempre es simple; tiene que ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2+\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1+x)\left(1+\frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones adecuadas para A y B, la primera tiene la forma de $A+B$, la segunda de AB, la tercera de A/B, y la cuarta de $A^{1/2}$. Identificar la forma de una expresión nos ayuda a expandir, simplificar o a factorizar en forma correcta. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x+\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ **b)** $(1+x^2)(1+x)^3$

c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ **d)** $\frac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 Ecuaciones

Una ecuación es un enunciado en el que se establece que las expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3+5=8$$

es una ecuación. La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el álgebra contiene variables, las cuales son símbolos, casi siempre letras que representan números. En la ecuación

$$4x+7=19$$

la letra x es la variable. Consideramos que la x es la "incógnita" de la ecuación, por lo que el objetivo es determinar el valor de x que hace que la ecuación sea cierta. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso para determinar las soluciones se llama **resolución de una ecuación**.

$x=3$ es una solución de la ecuación $4x+7=19$, porque al sustituir $x=3$ la ecuación se cumple:

$$x=3$$
$$4(3)+7=19 \quad ✓$$

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable esté sola en un lado del signo de "igual". En seguida están las propiedades que aplicamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan expresiones algebraicas y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a".)

Propiedades de la igualdad

Propiedad	Descripción
1. $A=B \Leftrightarrow A+C=B+C$	Sumar la misma cantidad a ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. $A=B \Leftrightarrow CA=CB \quad (C\neq 0)$	Multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad no cero se obtiene una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que *usted efectúe la misma operación en ambos lados de una ecuación* cuando la resuelve. Por lo tanto, al decir "se *suma* -7" al resolver una ecuación, lo que realmente queremos decir es "*sumar* -7 a cada miembro de la ecuación".

Ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es la *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la cual cada término es una constante o un múltiplo no cero de la variable.

Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** de una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación hay algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal, contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal, contiene el recíproco de la variable

Ejemplo 1 Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

Solución Resolvemos la ecuación cambiándola a una equivalente en la que todos los términos que tienen la variable x están en un lado y todos los términos constantes están en el otro.

$$\begin{aligned} 7x - 4 &= 3x + 8 && \text{Ecuación dada} \\ (7x - 4) + 4 &= (3x + 8) + 4 && \text{Se suma 4} \\ 7x &= 3x + 12 && \text{Simplificación} \\ 7x - 3x &= (3x + 12) - 3x && \text{Se resta } 3x \\ 4x &= 12 && \text{Se simplifica} \\ \tfrac{1}{4}\cdot 4x &= \tfrac{1}{4}\cdot 12 && \text{Multiplicación por } \tfrac{1}{4} \\ x &= 3 && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

■

Puesto que es importante VERIFICAR LAS RESPUESTAS, lo haremos en muchos de los ejemplos. En estas comprobaciones, PM quiere decir "primer miembro" y SM quiere decir "segundo miembro" de la ecuación original.

Compruebe su respuesta

$x = 3$:

$x = 3$ $\quad$ PM $= 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$ $\quad$ SM $= 3(3) + 8 = 17$

PM = SM ✓

Muchas fórmulas que se usan en las ciencias tienen varias variables, por lo que a menudo es necesario expresar una de las variables en términos de las otras. En el ejemplo siguiente determinamos una variable de la Ley de Newton de la Gravitación.

Ejemplo 2 Determinar una variable en términos de las otras

Determinar la variable M de la ecuación

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Esta es la Ley de Newton de la Gravitación. Determina la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están separadas una distancia r. La constante G es la constante universal de la gravitación.

Solución Aunque esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos de la manera usual, aislando a M en un lado y tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Se saca a M como factor en el SM}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplicación por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplificación}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$. ■

Ejemplo 3 Determinación de una variable en términos de las otras

El área superficial A de la caja rectangular cerrada de la figura 1 se puede calcular a partir del largo l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Determine w en términos de las otras variables de esta ecuación.

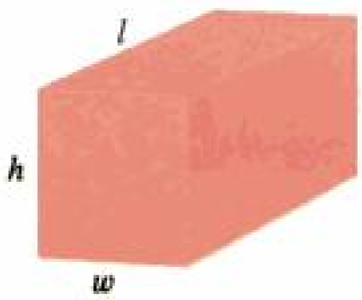


Figura 1
Una caja rectangular cerrada

Solución Aunque esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos de la manera usual, aislando a w en un lado y tratando a las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Agrupación de términos que contienen } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Resta de } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Se saca } w \text{ como factor en el SM}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{División entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$. ■

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son las ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o como $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado $x^2 + 2x - 3 = 0$ o como $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$3x + 10 = 4x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

Ecuaciones cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización y usando la propiedad básica siguiente de los números reales.

Propiedad del producto nulo

$$AB = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = 0 \quad \text{o bien,} \quad B = 0$$

Esto quiere decir que si podemos descomponer en factores el primer miembro de una ecuación cuadrática, o de otro orden, entonces podemos resolverla igualando a cero, por turnos, a cada factor. Este método funciona sólo cuando el segundo miembro de la ecuación es 0.

Ejemplo 4 Solución de una ecuación cuadrática mediante factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

Solución Primero debemos volver a escribir la ecuación de modo que el segundo miembro sea igual a cero.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= 24 & & \\ x^2 + 5x - 24 &= 0 & & \text{Resta de 24} \\ (x - 3)(x + 8) &= 0 & & \text{Factorización} \\ x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 &= 0 & & \text{Propiedad del producto nulo} \\ x = 3 \qquad\qquad x &= -8 & & \text{Solución} \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$. ■

Compruebe su respuesta

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✓

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✓

¿Se da cuenta por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el ejemplo 4? Al factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no ayuda a determinar la solución, puesto que 24 se puede descomponer en factores de infinitas maneras, como $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, así que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

Resolución de una ecuación cuadrática simple

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

Ejemplo 5 Resolución de ecuaciones cuadráticas simples

Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $x^2 = 5$ b) $(x - 4)^2 = 5$

Solución

a) De acuerdo con el principio del recuadro anterior, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

b) Obtenemos también la raíz cuadrada de cada miembro de esta ecuación.

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= 5 \\ x - 4 &= \pm\sqrt{5} && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \\ x &= 4 \pm \sqrt{5} && \text{Se suma 4} \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$. ■

Refiérase a la página 30 para saber cómo identificar cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

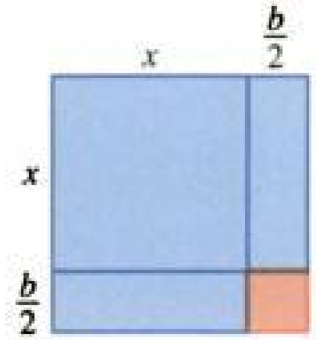
Como se estudió en el ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces la podemos resolver obteniendo la raíz cuadrada de cada miembro. En una ecuación de esta forma, el primer miembro es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x. Así, si una ecuación cuadrática no se factoriza con facilidad, entonces la podemos resolver aplicando la técnica de completar el cuadrado. Esto quiere decir que sumamos una constante a una expresión para hacerla un cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer $x^2 - 6x$ un cuadrado perfecto tenemos que añadir 9, ya que $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Completando el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un cuadrado pequeño de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.



Completar el cuadrado

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo 6 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva la ecuación.

a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ b) $3x^2 - 12x + 6 = 0$

Cuando complete el cuadrado, asegúrese de que el coeficiente de x^2 es 1. Si no es así, debe factorizar este coeficiente de los dos términos que contienen x:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

Luego complete el cuadrado que está dentro del paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro del paréntesis está multiplicado por a.

Solución

a)
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 13 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ x^2 - 8x &= -13 && \text{Se resta 13} \\ x^2 - 8x + 16 &= -13 + 16 && \text{Se completa el cuadrado: se suma } \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16 \\ (x-4)^2 &= 3 && \text{Cuadrado perfecto} \\ x - 4 &= \pm\sqrt{3} && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \\ x &= 4 \pm \sqrt{3} && \text{Se suma 4} \end{aligned}$$

b) Después de restar 6 a cada miembro de la ecuación, es necesario factorizar el coeficiente de x^2 es decir, el 3, en el primer miembro para poner la ecuación en la forma correcta completando el cuadrado.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ 3x^2 - 12x &= -6 && \text{Sustracción de 6} \\ 3(x^2 - 4x) &= -6 && \text{Factorización de 3 en el PM} \end{aligned}$$

En seguida completamos el cuadrado añadiendo $(-2)^2 = 4$ *dentro* del paréntesis. Ya que todo lo que está dentro del paréntesis está multiplicado por 3, esto quiere decir que en realidad estamos añadiendo $3 \cdot 4 = 12$ al primer miembro de la ecuación. Por lo tanto, tenemos que sumar también 12 al segundo miembro.

$$\begin{aligned} 3(x^2 - 4x + 4) &= -6 + 3 \cdot 4 && \text{Cuadrado completado: se suma 4} \\ 3(x-2)^2 &= 6 && \text{Cuadrado perfecto} \\ (x-2)^2 &= 2 && \text{División entre 3} \\ x - 2 &= \pm\sqrt{2} && \text{Se obtiene la raíz cuadrada} \\ x &= 2 \pm \sqrt{2} && \text{Se suma 2} \end{aligned}$$

■

Podemos aplicar la técnica de completar el cuadrado con el fin de deducir una fórmula para determinar las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

La fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ **Demostración** Primero dividimos ambos miembros de la ecuación entre a y pasamos la constante al lado derecho, con lo que se tiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{División entre } a$$

Luego completamos el cuadrado sumando $(b/2a)^2$ a ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{Se completa el cuadrado: se suma } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2} && \text{Cuadrado perfecto} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Se resta } \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

■

La fórmula cuadrática se podría utilizar para resolver las ecuaciones en los ejemplos 4 y 6. Usted puede llevar a cabo con todo detalle estos cálculos.

François Viète (1540–1603) era un político exitoso cuando se dedicó a las matemáticas ya tarde en su vida. Se convirtió en uno de los matemáticos franceses más famosos del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra por medio del uso de letras para representar cantidades *conocidas* de una ecuación. Antes de la época de Viète, cada una de las ecuaciones se tenía que resolver por separado. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

se tenían que resolver separadas completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas de una vez al escribir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son cantidades conocidas. Por consiguiente, él hizo posible escribir una *fórmula*, en este caso, la fórmula cuadrática, que contiene a, b y c con la que se pueden resolver todas las ecuaciones cuadráticas en unos pocos pasos.

El genio matemático de Viète demostró lo valioso que era durante la guerra entre Francia y España. Para comunicarse con las tropas, los españoles utilizaban un complicado código, que Viète descifró. El rey de España, Felipe II, ajeno a los logros de Viète, protestó ante el Papa, y afirmó que los franceses recurrían a la hechicería para leer sus mensajes.

Ejemplo 7 Aplicación de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones.

a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solución

a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\underbrace{3}_{a\,=\,3}x^2 \overbrace{-\,5}^{b\,=\,-5}x \underbrace{-\,1}_{c\,=\,-1} = 0$$

De acuerdo con la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

Otro método

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

b) Al usar la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ tenemos

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

c) Si usamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ obtenemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de los números reales. La ecuación no tiene solución real. ■

En la sección 3.4 se estudia el sistema de los números complejos, en el cual sí existen las raíces cuadradas de los números negativos. La ecuación del ejemplo 7 (c) sí tiene soluciones en el campo de los números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y se representan con el signo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definido, por lo que la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el ejemplo 7 (c). Si $D = 0$, la ecuación tiene sólo una solución real, como en el ejemplo 7 (b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el ejemplo 7 (a). En el siguiente recuadro se resumen estas observaciones.

El discriminante

El **discriminante** de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplo 8 Uso del discriminante

Utilice el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

Solución

a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, de modo que la ecuación tiene dos soluciones distintas.

b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo que la ecuación tiene exactamente una solución real.

c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. ■

En seguida consideramos una situación de la vida real que puede ser modelada mediante una ecuación cuadrática.

Ejemplo 9 Trayectoria de un proyectil

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración de la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. En este caso ignoramos el efecto de la resistencia del aire.

Un objeto arrojado o lanzado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará un altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas mediante la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se muestra en la figura 2.

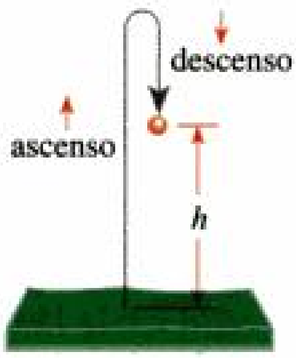


Figura 2

a) ¿Cuándo regresará la bala al nivel del piso?

b) ¿Cuándo alcanzará una altura de 6 400 pies?

c) ¿Cuándo alcanzará una altura de 2 millas?

d) ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la bala?

Solución

Puesto que la velocidad inicial es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

a) El nivel del piso corresponde a $h = 0$, de modo que necesitamos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Se hace } h = 0$$

$$0 = -16t(t - 50) \qquad \text{Factorización}$$

Por consiguiente, $t = 0$ o $t = 50$. Esto quiere decir que la bala inicia ($t = 0$) al nivel del piso y regresa al mismo nivel después de 50 segundos.

b) Haciendo $h = 6400$ tenemos

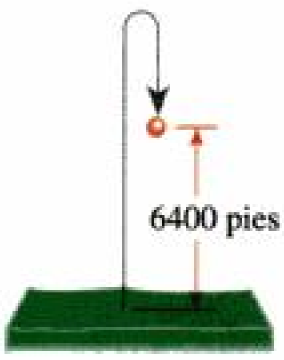
$$6400 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Se hace } h = 6\,400$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \qquad \text{Todos los términos al PM}$$

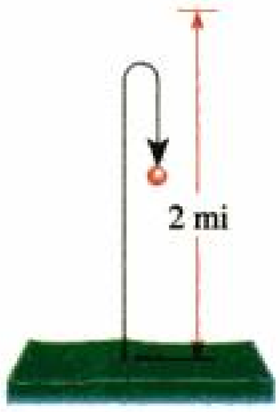
$$t^2 - 50t + 400 = 0 \qquad \text{División entre 16}$$

$$(t - 10)(t - 40) = 0 \qquad \text{Descomposición en factores}$$

$$t = 10 \quad \text{o} \quad t = 40 \qquad \text{Solución}$$



La bala alcanza 6400 pies después de 10 s (el ascenso) y otra vez después de 40 s (en el descenso al suelo).



c) Dos millas es $2 \times 5280 = 10\,560$ pies.

$$
\begin{aligned}
10\,560 &= -16t^2 + 800t && \text{Se hace } h = 10\,560 \\
16t^2 - 800t + 10\,560 &= 0 && \text{Todos los términos se pasan al PM} \\
t^2 - 50t + 660 &= 0 && \text{División entre 16}
\end{aligned}
$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca alcanza una altura de 2 millas.

d) La bala alcanza dos veces cada altura: una vez en el ascenso y una vez en el descenso. La única excepción es el punto más alto en su trayectoria, al cual llega sólo una vez. Esto quiere decir que para el valor más alto de h, la ecuación siguiente sólo tiene una solución para t:

$$
\begin{aligned}
h &= -16t^2 + 800t \\
16t^2 - 800t + h &= 0 && \text{Todos los términos al PM}
\end{aligned}
$$

A su vez, esto significa que el discriminante D de la ecuación es 0, y entonces

$$
\begin{aligned}
D = (-800)^2 - 4(16)h &= 0 \\
640\,000 - 64h &= 0 \\
h &= 10\,000
\end{aligned}
$$

La altura máxima alcanzada es 10 000 pies. ■

Otros tipos de ecuaciones

Hasta este momento, hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. En seguida se tratan otros tipos de ecuaciones, incluso aquellos en los que hay potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

Ejemplo 10 Una ecuación con expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

Solución Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común denominador.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) &= 2x(x+2) && \text{Multiplicación por MCD } x(x+2) \\
3(x+2) + 5x &= 2x^2 + 4x && \text{Desarrollo} \\
8x + 6 &= 2x^2 + 4x && \text{Desarrollo del PM} \\
0 &= 2x^2 - 4x - 6 && \text{Resta de } 8x + 6 \\
0 &= x^2 - 2x - 3 && \text{Ambos miembros se dividen entre 2} \\
0 &= (x-3)(x+1) && \text{Factorización}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x - 3 &= 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 && \text{Propiedad del producto nulo} \\
x &= 3 \qquad\quad\;\; x = -1 && \text{Solución}
\end{aligned}
$$

Compruebe su respuesta

$x = 3$:

$$
\begin{aligned}
\text{PM} &= \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} \\
&= 1 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

SM = 2

PM = SM ✓

$x = -1$:

$$
\begin{aligned}
\text{PM} &= \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} \\
&= -3 + 5 = 2
\end{aligned}
$$

SM = 2

PM = SM ✓

Es necesario comprobar las respuestas porque la multiplicación por una expresión que contiene la variable puede introducir soluciones extrañas. Según la sección *Compruebe su respuesta* vemos que las soluciones son $x = 3$ y -1. ∎

Compruebe su respuesta

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{PM} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{SM} &= 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)}\\ &= 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}}\\ &= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

PM = SM ✓

$x = 1$:

$$\text{PM} = 2(1) = 2$$

$$\begin{aligned}\text{SM} &= 1 - \sqrt{2 - 1}\\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

PM ≠ SM ✗

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, sea especialmente cuidadoso al comprobar las respuestas finales. El ejemplo siguiente demuestra por qué.

Ejemplo 11 Una ecuación que involucra un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un miembro, y luego elevamos al cuadrado.

$$\begin{aligned}2x - 1 &= -\sqrt{2 - x} && \text{Resta 1}\\ (2x - 1)^2 &= 2 - x && \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros}\\ 4x^2 - 4x + 1 &= 2 - x && \text{Desarrollo del primer miembro}\\ 4x^2 - 3x - 1 &= 0 && \text{Suma de } -2 + x\\ (4x + 1)(x - 1) &= 0 && \text{Factorización}\\ 4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 &= 0 && \text{Propiedad del producto nulo}\\ x = -\tfrac{1}{4} \qquad\quad x &= 1 && \text{Solución}\end{aligned}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución, pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$. ∎

Cuando resolvemos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no cumplen con la ecuación original. En el ejemplo 11, el valor $x = 1$ es una solución extraña. Dichas soluciones se pueden introducir cuando elevamos al cuadrado ambos miembros de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede transformar una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Por consiguiente, la ecuación cuadrada podría ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que debe comprobar siempre sus respuestas para tener la seguridad de que todas cumplen con la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde W es una expresión algebraica, es una ecuación del **tipo cuadrático**. Las ecuaciones de tipo cuadrático se resuelven reemplazando la expresión algebraica con W, como se ve en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 12 Una ecuación de cuatro grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

Solución Si hacemos que $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación en donde la nueva variable W es cuadrática:

$$\begin{aligned}(x^2)^2 - 8x^2 + 8 &= 0 && \text{Se escribe } x^4 \text{ como } (x^2)^2\\ W^2 - 8W + 8 &= 0 && \text{Se hace } W = x^2\end{aligned}$$

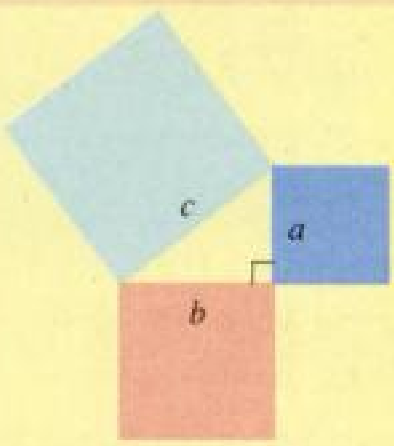
$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Pitágoras (alrededor de 580-500 antes de nuestra era) fundó una escuela en Crotona, en el sur de Italia, que estaba dedicada al estudio de la aritmética, geometría, música y astronomía. Los pitagóricos, como ellos se llamaban a sí mismos, constituían una sociedad secreta con reglas y ritos de iniciación peculiares. No escribieron nada, ni revelaban a nadie lo que aprendían del maestro. Aunque las mujeres tenían prohibido por la ley asistir a reuniones públicas, Pitágoras permitió que asistieran mujeres a su escuela, y su estudiante más famosa fue Theano, con quien se casó posteriormente.

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas eran los principios de todas las cosas". Su lema era "El todo son los números", y se referían a los números *enteros*. La principal contribución de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre: en un triángulo rectángulo el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los otros dos lados.



$c^2 = a^2 + b^2$

El inverso del Teorema de Pitágoras también es cierto: un triángulo cuyos lados a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo rectángulo.

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$. ■

Ejemplo 13 Una ecuación que contiene potencias fraccionarias

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos que $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$\begin{aligned}
x^{1/3} + x^{1/6} - 2 &= 0 \\
W^2 + W - 2 &= 0 && \text{Se hace } W = x^{1/6} \\
(W - 1)(W + 2) &= 0 && \text{Factorización} \\
W - 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad W + 2 &= 0 && \text{Propiedad del producto nulo} \\
W = 1 \qquad\qquad W &= -2 && \text{Solución} \\
x^{1/6} = 1 \qquad\qquad x^{1/6} &= -2 && W = x^{1/6} \\
x = 1^6 = 1 \qquad\qquad x &= (-2)^6 = 64 && \text{Obtención de la sexta potencia}
\end{aligned}$$

De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = 1$ es una solución, pero $x = 64$ no lo es. La única solución es $x = 1$. ■

Compruebe su respuesta

$x = 1$:	$x = 64$:
$PM = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$	$PM = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$
	$= 4 + 2 - 2 = 4$
$SM = 0$	$SM = 0$
$PM = SM$ ✓	$PM \neq SM$ ✗

Por lo común, al resolver ecuaciones que contienen valores absolutos, partimos el problema.

Ejemplo 14 Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ equivale a

$$\begin{aligned}
2x - 5 = 3 \quad &\text{o bien} \quad 2x - 5 = -3 \\
2x = 8 \quad &\qquad\qquad 2x = 2 \\
x = 4 \quad &\qquad\qquad x = 1
\end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$. ■

1.5 Ejercicios

1–4 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

1. $4x + 7 = 9x - 3$
  a) $x = -2$ **b)** $x = 2$

2. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
  a) $x = 2$ **b)** $x = 4$

3. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = 1$
  a) $x = 2$ **b)** $x = 4$

4. $\dfrac{x^{3/2}}{x-6} = x - 8$
  a) $x = 4$ **b)** $x = 8$

5–22 ■ La ecuación dada es lineal o equivale a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

5. $2x + 7 = 31$ **6.** $5x - 3 = 4$

7. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$ **8.** $3 + \frac{1}{3}x = 5$

9. $-7w = 15 - 2w$ **10.** $5t - 13 = 12 - 5t$

11. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$ **12.** $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$

13. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

14. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$

15. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$ **16.** $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{4} = 6x$

17. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$ **18.** $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$

19. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x + 3}$ **20.** $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$

21. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$ **22.** $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x + 5}{\sqrt{3}}$

23–36 ■ Resuelva la ecuación para la variable indicada.

23. $PV = nRT$; para R **24.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; para m

25. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; para R_1 **26.** $P = 2l + 2w$; para w

27. $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; para x

28. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; para x

29. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; para x

30. $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{a-1}{b} + \dfrac{b+1}{a}$; para a

31. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; para r **32.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; para r

33. $a^2 + b^2 = c^2$; para b

34. $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; para i

35. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; para t **36.** $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$; para n

37–44 ■ Resuelva la ecuación por factorización.

37. $x^2 + x - 12 = 0$ **38.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

39. $x^2 - 7x + 12 = 0$ **40.** $x^2 + 8x + 12 = 0$

41. $4x^2 - 4x - 15 = 0$ **42.** $2y^2 + 7y + 3 = 0$

43. $3x^2 + 5x = 2$ **44.** $6x(x - 1) = 21 - x$

45–52 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

45. $x^2 + 2x - 5 = 0$ **46.** $x^2 - 4x + 2 = 0$

47. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$ **48.** $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

49. $2x^2 + 8x + 1 = 0$ **50.** $3x^2 - 6x - 1 = 0$

51. $4x^2 - x = 0$ **52.** $-2x^2 + 6x + 3 = 0$

53–68 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

53. $x^2 - 2x - 15 = 0$ **54.** $x^2 + 30x + 200 = 0$

55. $x^2 + 3x + 1 = 0$ **56.** $x^2 - 6x + 1 = 0$

57. $2x^2 + x - 3 = 0$ **58.** $3x^2 + 7x + 4 = 0$

59. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$ **60.** $\theta^2 - \frac{3}{2}\theta + \frac{9}{16} = 0$

61. $4x^2 + 16x - 9 = 0$ **62.** $w^2 = 3(w - 1)$

63. $3 + 5z + z^2 = 0$ **64.** $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

65. $\sqrt{6}x^2 + 2x - \sqrt{3/2} = 0$ **66.** $3x^2 + 2x + 2 = 0$

67. $25x^2 + 70x + 49 = 0$ **68.** $5x^2 - 7x + 5 = 0$

69–74 ■ Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación

69. $x^2 - 6x + 1 = 0$ **70.** $3x^2 = 6x - 9$

71. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$ **72.** $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

73. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$ **74.** $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

75–98 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

75. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{4}$ **76.** $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$

77. $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$ **78.** $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

79. $\dfrac{x+5}{x-2}=\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{28}{x^2-4}$ 80. $\dfrac{x}{2x+7}-\dfrac{x+1}{x+3}=1$

81. $\sqrt{2x+1}+1=x$ 82. $\sqrt{5-x}+1=x-2$

83. $2x+\sqrt{x+1}=8$ 84. $\sqrt{\sqrt{x-5}+x}=5$

85. $x^4-13x^2+40=0$ 86. $x^4-5x^2+4=0$

87. $2x^4+4x^2+1=0$ 88. $x^6-2x^3-3=0$

89. $x^{4/3}-5x^{2/3}+6=0$ 90. $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}-4=0$

91. $4(x+1)^{1/2}-5(x+1)^{3/2}+(x+1)^{5/2}=0$

92. $x^{1/2}+3x^{-1/2}=10x^{-3/2}$

93. $x^{1/2}-3x^{1/3}=3x^{1/6}-9$ 94. $x-5\sqrt{x}+6=0$

95. $|2x|=3$ 96. $|3x+5|=1$

97. $|x-4|=0.01$ 98. $|x-6|=-1$

Aplicaciones

99–100 ■ Problemas de caída de los cuerpos Suponga que dejamos caer un objeto desde una altura h_0 por arriba del suelo. Entonces, su altura después de t segundos es $h=-16t^2+h_0$, donde h se mide en pies. Utilice esta información para resolver el problema.

99. Si se deja caer una pelota desde 288 pies por arriba del suelo, ¿cuánto tiempo es necesario para que llegue al suelo?

100. Se deja caer una pelota desde la parte superior de un edificio de 96 pies de alto.
 a) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer la mitad de la distancia al suelo?
 b) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?

101–102 ■ Problemas de caída de los cuerpos Utilice la fórmula $h=-16t^2+v_0t$ que se analizó en el ejemplo 9.

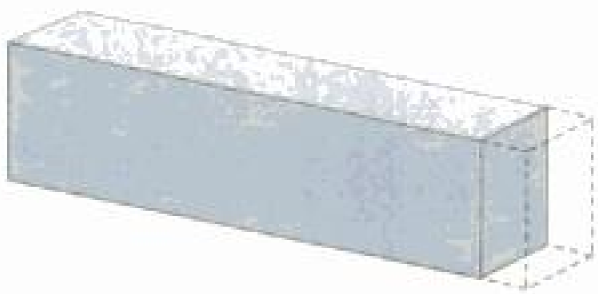
101. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0=40$ pies/s.
 a) ¿Cuándo alcanza la pelota la altura de 24 pies?
 b) ¿Cuándo alcanza la altura de 48 pies?
 c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
 d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?
 e) ¿Cuándo golpea el suelo la pelota?

102. ¿Qué tan rápido se tendría que lanzar hacia arriba una pelota para alcanzar una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* utilice el discriminante de la ecuación $16t^2-v_0t+h=0$.]

103. **Contracción de las vigas de concreto** A medida que el concreto fragua, se contrae —entre mayor es el contenido de agua, es mayor la contracción—. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m³, entonces sufrirá contracción de acuerdo con un factor

$$S=\frac{0.032w-2.5}{10\,000}$$

donde S es la fracción de la longitud de la viga original que desaparece debido a la contracción.
 a) Una viga de 12.025 m de largo se cuela con concreto que contiene 250 kg/m³ de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Cuánto medirá de largo la viga cuando seque?
 b) Una viga mide de largo 10.014 m recién colada. Queremos que se contraiga a 10.009 m, por lo que el factor de contracción debe ser de $S=0.00050$. ¿Qué contenido de agua proporcionará esta cantidad de contracción?



104. **Ecuación de una lente** Si F es la distancia focal de una lente convexa y se coloca un objeto a una distancia x de la lente, entonces la imagen del objeto estará a una distancia y de la lente, donde F, x y y están relacionadas mediante la *ecuación de una lente*

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Suponga que la distancia focal de una lente es de 4.8 cm, y que la imagen de un objeto es 4 cm más cercana a la lente que el objeto en sí. ¿A qué distancia de la lente está el objeto?

105. **Población de peces** La población de peces de un lago aumenta y disminuye según la fórmula

$$F=1000(30+17t-t^2)$$

En este caso, F es la cantidad de peces que hay en el tiempo t, donde t se mide en años desde el primero de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por vez primera.
 a) ¿En qué fecha la población de peces volverá a ser la misma que en el primero de enero de 2002?
 b) ¿En qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

106. **Población de peces** Un gran estanque se surte de peces. La población de peces P se modela mediante la fórmula $P=3t+10\sqrt{t}+140$, donde t es el número de días a partir de que los peces se introdujeron al estanque. ¿Cuántos días se tardará en que la población de peces alcance 500?

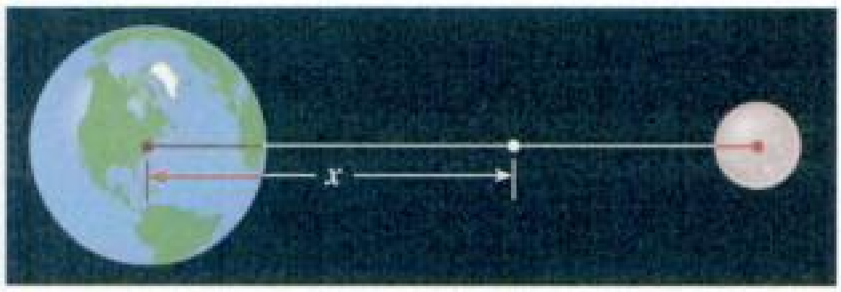
107. **Ganancias** Un fabricante de pequeños instrumentos encuentra que la ganancia P (en dólares) generada por la producción de x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula $P=\frac{1}{10}x(300-x)$ siempre que $0\le x\le 200$. ¿Cuántos hornos se tienen que fabricar en una semana para generar una ganancia de 1250 dólares?

108. **Gravedad** Si un segmento de recta imaginario se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza

gravitacional neta F que actúa en un objeto situado en este segmento es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

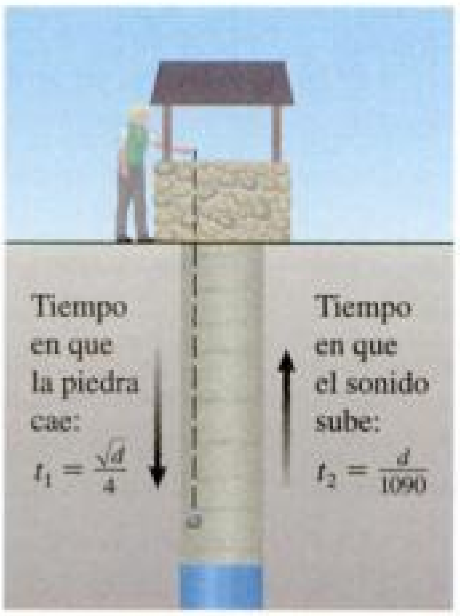
donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medido en miles de millas. ¿Qué tan lejos del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde ninguna fuerza gravitacional actúa sobre el objeto? Exprese su respuesta en la milla más cercana.



109. Profundidad de un pozo Un método para determinar la profundidad de un pozo es arrojar una piedra hacia dentro y medir el tiempo que toma hasta que se escucha el choque contra el agua. Si d es la profundidad del pozo en pies y t_1 en tiempo en segundos que requiere la piedra para llegar al agua, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Luego, si t_2 es el tiempo que tarda el sonido en viajar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Entonces $t_2 = d/1090$. Por lo tanto, el tiempo total transcurrido entre que se arroja la piedra y escuchar que choca contra el agua es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Qué tan profundo es el pozo si el tiempo total es 3 segundos?



Descubrimiento • Debate

110. Una familia de ecuaciones La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones** porque para cada valor de k obtenemos una ecuación distinta con la incógnita x. La letra k se denomina **parámetro** de esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para k para que el valor dado de x sea una solución de la ecuación resultante?

a) $x = 0$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 2$

111. ¿Demostración de que 0 = 1? Al parecer, los pasos siguientes dan ecuaciones equivalentes, lo cual parece demostrar que $1 = 0$. Encuentre el error.

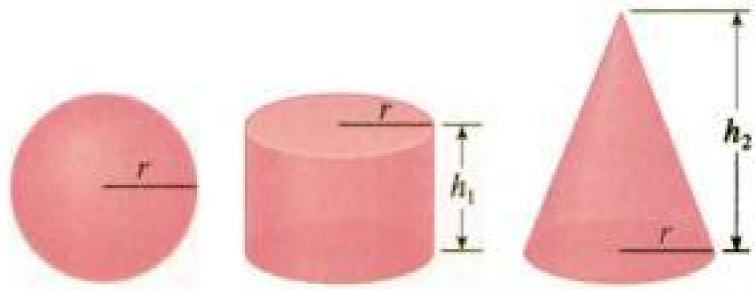
$x = 1$	Dato
$x^2 = x$	Multiplicación por x
$x^2 - x = 0$	Resta de x
$x(x - 1) = 0$	Factorización
$\frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{0}{x-1}$	División entre $x - 1$
$x = 0$	Simplificación
$1 = 0$	Dado $x = 1$

112. Volumen de sólidos La esfera, cilindro y el cono mostrados aquí tienen el mismo radio r y el mismo volumen V.

a) Utilice las fórmulas del volumen que se encuentran en los forros interiores de este libro para demostrar que

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \quad \text{y} \quad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

b) Resuelva estas ecuaciones para h_1 y h_2.



113. Relaciones entre raíces y coeficientes La fórmula cuadrática nos proporciona las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También es posible obtener los coeficientes a partir de las raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y que la suma de las raíces es 9, el negativo del coeficiente de x. Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Aplique la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces r_1 y r_2, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

114. Resolución de una ecuación de maneras distintas Ya se estudiaron varias maneras de resolver una ecuación en esta sección. Algunas ecuaciones se pueden abordar por más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático: podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando después. O también se puede eliminar $\sqrt{x}$, elevando al cuadrado ambos miembros, y luego resolviendo la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las ecuaciones siguientes usando ambos métodos señalados y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje del radical y elevar al cuadrado

b) $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplicación por el mínimo común denominador

1.6 Modelado mediante ecuaciones

Muchos de los problemas de las ciencias, economía, finanzas, medicina y otros numerosos campos se pueden traducir a problemas de álgebra. Ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos las ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas de la vida cotidiana.

Criterios para modelar con ecuaciones

Se aplican los siguientes criterios para plantear ecuaciones que modelen situaciones formuladas en palabras. Para mostrar la manera en que los criterios pueden ayudar a plantear las ecuaciones, anotamos al margen cuándo funciona cada ejemplo de esta sección.

Criterios para modelar con ecuaciones

1. **Identificar la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide determinar. Por lo regular, esta cantidad se puede determinar por medio de una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. Entonces **introduzca la notación** para la variable (llámela x o cualquier otro nombre).
2. **Expresar todas las incógnitas en términos de la variable.** Lea una vez más cada oración del problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de la variable que definió en el paso 1. Para organizar esta información, a veces es útil **dibujar un esquema** o **elaborar una tabla**.
3. **Plantear el modelo.** Encuentre el hecho decisivo en el problema que relaciona las expresiones que usted listó en el paso 2. **Plantee una ecuación** o **modelo**, que exprese esta relación.
4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique la respuesta y exprésela como una oración que responde a la pregunta hecha en el problema.

El ejemplo siguiente ilustra la manera en que estos criterios se aplican para traducir el enunciado de un problema al lenguaje del álgebra.

Ejemplo 1 Renta de un automóvil

Una compañía que renta automóviles cobra 30 dólares al día más 15 centavos de dólar por milla al rentar un automóvil. Helen renta un automóvil por dos días y su cuenta es de 108 dólares. ¿Cuántas millas recorrió?

Solución Se pide determinar la cantidad de millas que Helen recorrió. Entonces sea

Identifique la variable

$$x = \text{cantidad de millas recorridas}$$

Luego traducimos toda la información del problema al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Cantidad de millas recorridas	x
Costo de la cantidad de millas recorridas (a 15 centavos la milla)	$0.15x$
Costo diario (a 30 dólares el día)	$2(30)$

En seguida planteamos el modelo.

Plantee el modelo

$$\text{costo de las millas recorridas} + \text{costo diario} = \text{costo total}$$

Resolución

$$0.15x + 2(30) = 108$$

$$0.15x = 48 \qquad \text{Sustracción de 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \qquad \text{División entre 0.15}$$

$$x = 320 \qquad \text{Calculadora}$$

Helen recorrió 320 millas con su auto rentado. ■

Compruebe su respuesta

$$\text{costo total} = \text{costo de las millas recorridas} + \text{costo por día}$$

$$= 0.15(320) + 2(30)$$

$$= 108 \quad ✓$$

Construcción de modelos

En los ejemplos y ejercicios que siguen planteamos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones distintas de la vida cotidiana.

Ejemplo 2 Interés de una inversión

Mary hereda 100 000 dólares y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga el 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}$ % de interés anual simple. Si el interés total de Mary es 5025 dólares por año, ¿cuánto dinero está invertido en cada tasa?

Solución El problema pide la cantidad que Helen invirtió a cada una de las tasas. Sea

Identifique la variable

$$x = \text{la cantidad invertida a } 6\%$$

Puesto que el total de la herencia de Mary es de 100 000 dólares, se infiere entonces que invirtió $100\,000 - x$ al $4\frac{1}{2}$%. Pasamos toda la información al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Cantidad invertida al 6%	x
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}$%	$100\,000 - x$
Interés ganado al 6%	$0.06x$
Interés ganado al $4\frac{1}{2}$%	$0.045(100\,000 - x)$

Aprovechamos el hecho de que el interés total de Mary es de 5025 dólares para plantear el modelo.

Plantee el modelo

interés al 6% + **interés al $4\frac{1}{2}$%** = **interés total**

Resuelva

$$0.06x + 0.045(100\,000 - x) = 5025$$

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5025 \qquad \text{Multiplicación}$$

$$0.015x + 4500 = 5025 \qquad \text{Combinación de los términos } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Sustracción de 4500}$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35\,000 \qquad \text{División entre 0.015}$$

Por lo tanto, Mary invirtió 35 000 dólares al 6% y los restantes \$65 000 dólares al $4\frac{1}{2}$%. ■

Compruebe su respuesta

$$\text{interés total} = 6\% \text{ de } 35\,000 \text{ dólares} + 4\tfrac{1}{2}\% \text{ de } 65\,000 \text{ dólares}$$

$$= \$2100 + \$2925 = \$5025 \quad ✓$$

Ejemplo 3 Dimensiones de un cartel

En problemas como éste, para el que se requiere geometría, es esencial dibujar un diagrama como el que se muestra en la figura 1.

Un cartel tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja de ancho uniforme alrededor de los cuatro lados. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja en blanco y cuáles son las dimensiones del cartel?

Solución Se pide determinar el ancho de la franja en blanco. Entonces, sea

Identifique la variable

$$x = \text{ancho de la franja en blanco}$$

Luego pasamos la información de la figura 1 al lenguaje algebraico:

Exprese las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho de la franja en blanco	x
Perímetro de la superficie impresa	$2(100) + 2(140) = 480$
Ancho del cartel	$100 + 2x$
Largo del cartel	$140 + 2x$
Perímetro del cartel	$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$

A continuación usaremos el hecho de que el perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa para formular el modelo.

Plantee el modelo

$$\textbf{perímetro del cartel} = \tfrac{3}{2}\cdot \textbf{perímetro del área impresa}$$

$$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x) = \tfrac{3}{2}\cdot 480$$

Resuelva

$$480 + 8x = 720 \qquad \text{Desarrollo y combinación de términos semejantes en el PM}$$

$$8x = 240 \qquad \text{Sustracción de 480}$$

$$x = 30 \qquad \text{División entre 8}$$

La franja en blanco mide 30 cm de ancho, de modo que las dimensiones del cartel son

$$100 + 30 + 30 = 160 \text{ cm de ancho}$$

por

$$140 + 30 + 30 = 200 \text{ cm de largo}$$

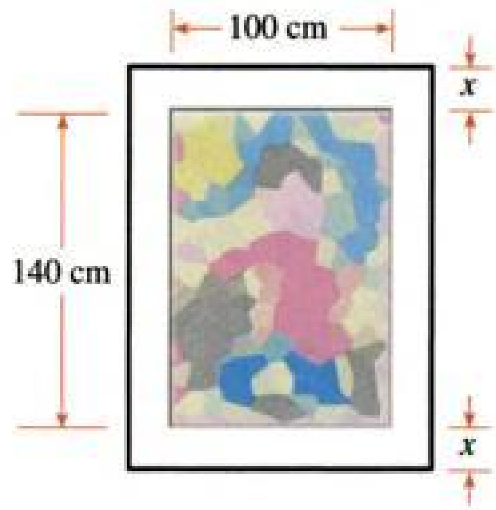


Figura 1

Ejemplo 4 Dimensiones de un terreno para construcción

Un terreno de forma rectangular para construir mide 8 pies más que el ancho y su área es de 2900 pies cuadrados. Determine las dimensiones del lote.

Solución Se pide determinar el ancho y el largo del terreno. Entonces, sea

Identifique la variable

$$w = \text{ancho del terreno}$$

Luego expresamos la información dada en lenguaje algebraico (véase la figura 2 de la pág. 62).

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho del terreno	w
Largo del terreno	$w + 8$

Ahora planteamos el modelo.

Formule el modelo

$$\boxed{\text{ancho del terreno}} \cdot \boxed{\text{largo del terreno}} = \textbf{área del terreno}$$

Resuelva

$$\begin{aligned} w(w + 8) &= 2900 & \\ w^2 + 8w &= 2900 & \text{Desarrollo} \\ w^2 + 8w - 2900 &= 0 & \text{Sustracción de 2900} \\ (w - 50)(w + 58) &= 0 & \text{Factorización} \\ w = 50 \quad \text{o} \quad w &= -58 & \text{Propiedad del producto nulo} \end{aligned}$$

Puesto que el ancho del terreno tiene que ser un número positivo, concluimos que $w = 50$ pies. El largo del terreno es $w + 8 = 50 + 8 = 58$ pies.

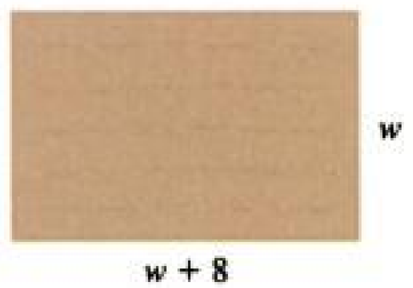


Figura 2 ■

Ejemplo 5 Determinación de la altura de un edificio aplicando los triángulos semejantes

Un hombre de 6 pies de estatura desea encontrar la altura de un edificio de cuatro pisos. Mide la sombra del edificio y encuentra que es de 28 pies, y mide también su propia sombra, la cual es $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Solución El problema pide determinar la altura del edificio. Sea

Identifique la variable

$$h = \text{altura del edificio}$$

Aprovechamos el hecho de que los triángulos de la figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones de sus lados correspondientes son iguales. Ahora traduzcamos estas observaciones al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Altura del edificio	h
Relación entre la altura y la base del triángulo mayor	$\frac{h}{28}$
Relación entre la altura y la base del triángulo menor	$\frac{6}{3.5}$

Como el triángulo mayor y el menor son semejantes, obtenemos la ecuación

Plantee el modelo

$$\boxed{\text{proporción entre la altura y la base en el triángulo grande}} = \boxed{\text{proporción entre la altura y la base en el triángulo pequeño}}$$

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

Resuelva

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48$$

El edificio es de 48 pies de alto.

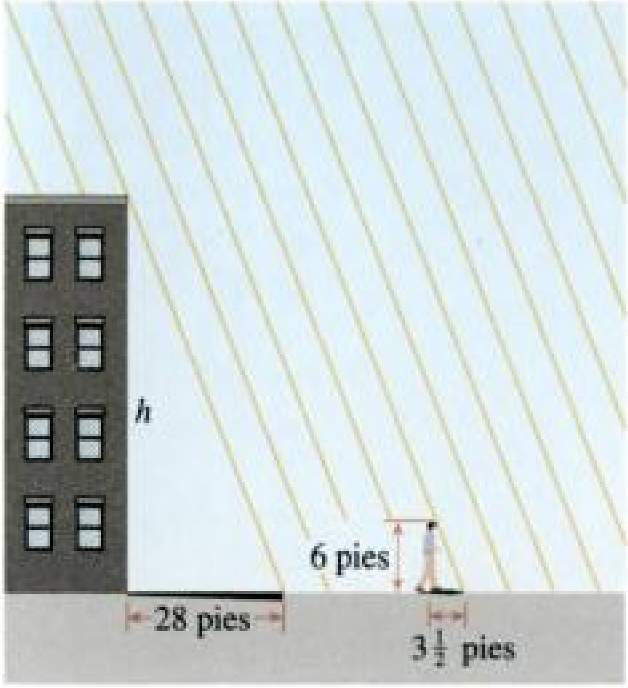


Figura 3

Ejemplo 6 Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas refrescantes afirma que su naranjada tiene "saborizante natural", aunque contiene sólo 5% de jugo de naranja. Una nueva ley federal establece que para que se le llame "natural" a una bebida ésta debe contener por lo menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo natural puro debe agregar este fabricante a los 900 galones de bebida de naranja para apegarse a la nueva reglamentación?

Solución El problema pide determinar la cantidad de jugo de naranja puro que se debe añadir.
Sea

Identifique la variable

x = la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro que se tiene que añadir

En cualquier problema de este tipo, en el cual se mezclan dos sustancias diferentes, un diagrama ayuda a organizar la información dada (véase la figura 4).

Figura 4

Luego traducimos la información que se da en la figura al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	**En el lenguaje algebraico**
Cantidad de jugo de naranja que se tiene que añadir	x
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en el primer recipiente	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo en el segundo recipiente	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

Para plantear el modelo, aprovechamos el hecho de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja en los primeros dos recipientes.

Plantee el modelo

cantidad de jugo de naranja en el primer recipiente + cantidad de jugo de naranja en el segundo recipiente = cantidad de jugo de naranja en la mezcla

Resuelva

$$45 + x = 0.1(900 + x) \quad \text{Según la figura 4}$$

$$45 + x = 90 + 0.1x \quad \text{Multiplicación}$$

$$0.9x = 45 \quad \text{Sustracción de } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \quad \text{División entre } 0.9$$

El fabricante debe añadir 50 galones de jugo de naranja puro a la bebida. ■

Compruebe su respuesta

cantidad de jugo antes de la mezcla = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de la mezcla = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✓

Ejemplo 7 Tiempo necesario para hacer un trabajo

Debido a una fuerte tormenta imprevista, el nivel del agua en una presa se debe reducir un pie. La apertura de la compuerta A reduce el nivel a esa cantidad en 4 horas, pero la apertura de la compuerta más pequeña B permite el desalojo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo se necesita para bajar el nivel del agua un pie si se abren ambas compuertas?

Solución Se pide determinar el tiempo que se requiere para bajar el nivel un pie si ambas compuertas se abren. Sea entonces

Identifique la variable

x = el tiempo en horas que se requiere para bajar el nivel un pie si ambas compuertas se abren

Encontrar una ecuación que relacione x con las otras cantidades de este problema es difícil.

Claro que x no es simplemente $4 + 6$, porque eso significaría que juntas las dos compuertas requerirían más tiempo para bajar el nivel del agua que una sola. Entonces, *examinemos la fracción del trabajo que puede hacer cada una de las compuertas en una hora.*

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Tiempo que necesitan las compuertas A y B juntas para bajar el nivel 1 pie	x h
Nivel que baja A en 1 h	$\frac{1}{4}$ de pie
Nivel que baja B en 1 h	$\frac{1}{6}$ de pie
Nivel que baja con A y B juntas en 1 h	$\frac{1}{x}$ de pie

Ahora planteamos el modelo.

Plantee el modelo

parte que efectúa A + parte que efectúa B = parte que efectúan ambas

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Resuelva

$$3x + 2x = 12 \qquad \text{Multiplicación por el MCD, } 12x$$

$$5x = 12 \qquad \text{Adición}$$

$$x = \frac{12}{5} \qquad \text{División entre 5}$$

Se necesitan $2\frac{2}{5}$ horas, o 2 h 24 min bajar el nivel un pie si se abren ambas compuertas. ■

El siguiente ejemplo trata de la distancia, rapidez (velocidad) y tiempo. La fórmula que se debe tener presente es

$$\boxed{\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}}$$

donde la rapidez es velocidad constante o velocidad promedio de desplazamiento de un objeto. Por ejemplo, manejar a 60 millas por hora durante 4 horas representa una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

Ejemplo 8 Un problema de distancia-velocidad-tiempo

Un avión voló desde Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4 200 km. La velocidad para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la velocidad de ida. Si el viaje total dura 13 horas, ¿cuál es la velocidad del avión desde Nueva York a Los Ángeles?

Identifique la variable

Solución Se pide la velocidad del avión de Nueva York a Los Ángeles. Hagamos

$$s = \text{velocidad de Nueva York a Los Ángeles}$$

Entonces $\qquad s + 100 = $ velocidad desde Los Ángeles hasta Nueva York

En seguida organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia", porque sabemos que entre las ciudades hay 4200 km. Luego llenamos la columna "Velocidad", ya que hemos expresado ambas velocidades en términos de la variable s. Por último, calculamos las entradas para la columna "Tiempo" mediante

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Exprese las cantidades desconocidas en términos de la variable

	Distancia (km)	Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	s	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s+100}$

El viaje total dura 13 horas, de modo que tenemos el modelo

Plantee el modelo

$$\text{tiempo desde N.Y. a L.A.} + \text{tiempo desde L.A. a N.Y.} = \text{tiempo total}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

Al multiplicar por el común denominador, $s(s + 100)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4200(s + 100) + 4200s &= 13s(s + 100) \\ 8400s + 420\,000 &= 13s^2 + 1300s \\ 0 &= 13s^2 - 7100s - 420\,000 \end{aligned}$$

Aunque esta ecuación se puede factorizar, con cantidades tan grandes quizá sea más rápido usar la fórmula cuadrática y una calculadora.

Resuelva

$$\begin{aligned} s &= \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420\,000)}}{2(13)} \\ &= \frac{7100 \pm 8500}{26} \end{aligned}$$

$$s = 600 \quad \text{o} \quad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Puesto que s representa la velocidad, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la velocidad del avión desde Nueva York hasta Los Ángeles fue de 600 km/h. ■

Ejemplo 9 Energía que gasta al volar un ave

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves evitan volar sobre cuerpos de agua grandes mientras haya luz del día porque, por lo general, el aire se eleva durante el día sobre el suelo, pero desciende sobre el agua, de modo que volar sobre el agua requiere más energía. Un ave es liberada en el punto A en una isla, a 5 millas de B, el punto más cercano sobre una orilla recta de la playa. El ave vuela hasta el punto C sobre la orilla de la playa y luego a lo largo de la playa hasta una zona D donde anida, según se ilustra en la figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Utiliza 10 kcal/milla al volar sobre tierra y 14 kcal/milla al volar sobre agua.

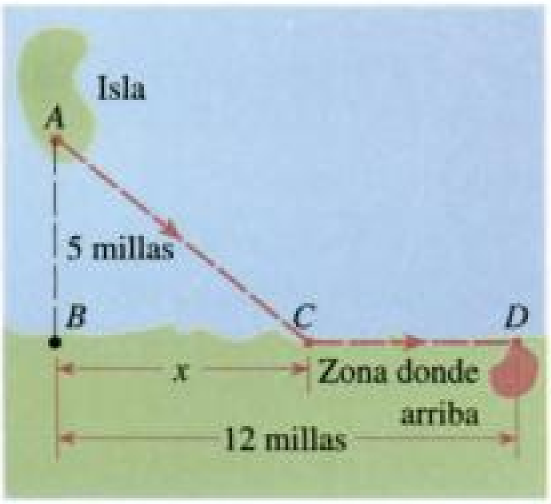


Figura 5

a) ¿Dónde se debe ubicar el punto C para que el ave utilice exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

b) ¿Tiene el ave suficientes reservas de energía para volar de manera directa desde A hasta D?

Solución

Identifique la variable

a) Se pide determinar la ubicación de C. De modo que

$$x = \text{distancia desde } B \text{ hasta } C$$

De acuerdo con la figura y por el hecho de que

$$\text{energía usada} = \text{energía por milla} \times \text{millas voladas}$$

determinamos lo siguiente:

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico	
Distancia desde B hasta C	x	
Distancia de vuelo sobre el agua (desde A hasta C)	$\sqrt{x^2 + 25}$	Teorema de Pitágoras
Distancia de vuelo sobre tierra (desde C hasta D)	$12 - x$	
Energía utilizada sobre el agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$	
Energía usada sobre tierra	$10(12 - x)$	

Ahora establecemos el modelo.

Plantee el modelo

$$\text{energía total usada} = \text{energía usada sobre el agua} + \textbf{energía usada sobre tierra}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Para resolver esta ecuación, eliminamos primero la raíz cuadrada pasando todos los otros términos a la izquierda del signo de igual y luego elevamos al cuadrado ambos miembros.

Resuelva

$$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Se aísla el término de la raíz cuadrada en el primer miembro

$$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Simplificación del primer miembro

$$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25)$$ Se elevan al cuadrado ambos miembros

$$2500 + 1000x + 100x^2 = 196x^2 + 4900$$ Desarrollo

$$0 = 96x^2 - 1000x + 2400$$ Todos los términos se pasan al primer término

Esta ecuación se puede factorizar, pero como las cantidades son muy grandes es más sencillo usar la fórmula cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \qquad \text{o bien} \qquad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto C debe estar a $6\frac{2}{3}$ millas o a $3\frac{3}{4}$ millas de B para que el ave utilice exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

b) De acuerdo con el teorema de Pitágoras (véase la pág. 54), la longitud de la ruta desde A hasta D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ millas, de modo que la energía que el ave requiere para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más de lo que tiene el ave reservado, de modo que no puede irse por esa ruta. ■

1.6 Ejercicios

1–12 ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.

1. La suma de tres enteros consecutivos; n = primer entero de los tres
2. La suma de tres enteros consecutivos; n = entero intermedio de los tres
3. El promedio de tres calificaciones de exámenes si las primeras dos calificaciones son 78 y 82; s = tercera calificación
4. El promedio de cuatro calificaciones si cada una de las tres primeras es 8; q = cuarta calificación
5. El interés obtenido después de un año de una inversión al $2\frac{1}{2}\%$ de interés simple anual; x = cantidad de dólares invertida
6. La renta total pagada por un departamento si la renta es de 795 dólares al mes; n = cantidad de meses
7. El área en pies cuadrados de un rectángulo cuyo largo es tres veces su ancho; w = ancho del rectángulo en pies
8. El perímetro en cm de un rectángulo cuyo largo es 5 cm mayor que su ancho; w = ancho del rectángulo en cm
9. La distancia en millas que recorre un automóvil en 45 min; s = velocidad del vehículo en millas por hora
10. El tiempo en horas que se requiere para viajar una distancia dada en 55 millas/h; d = distancia dada en millas
11. La concentración en onzas por galón de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contienen 25 onzas de sal, a la cual se le ha añadido agua pura; x = volumen de agua pura adicionada en galones
12. El valor en centavos del cambio que hay en una bolsa que contiene el doble de monedas de cinco centavos que de monedas de un centavo, cuatro monedas más de diez centavos que de monedas de 5 centavos y la misma cantidad de monedas de 25 centavos que de monedas de 10 y de 5 centavos combinadas; p = cantidad de monedas de a centavo

Aplicaciones

13. **Problema de números** Encuentre tres enteros consecutivos cuya suma sea 156.
14. **Problema de números** Encuentre cuatro enteros impares consecutivos cuya suma sea 416.
15. **Problema de números** Calcule dos números cuya suma es 55 y cuyo producto es 684.
16. **Problema de números** La suma de los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es 1252. Encuentre los enteros.
17. **Inversiones** Phyllis invirtió 12 000 dólares; una parte gana un interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ por año y el resto gana una tasa de 4% anual. Después de un año, el interés total ganado por las inversiones es de 525 dólares. ¿Cuánto dinero invirtió a cada tasa?
18. **Inversiones** Si Ben invierte 4000 dólares a 4% de interés anual, ¿cuánto dinero adicional debe invertir a un interés de $5\frac{1}{2}\%$ anual para que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}\%$ de la cantidad total invertida?
19. **Inversiones** ¿Qué tasa de interés anual tendría que tener usted sobre una inversión de 3500 dólares para asegurar que recibe 262.50 dólares de interés después de un año?
20. **Inversiones** Jack invierte 1000 dólares a una cierta tasa de interés anual, e invierte otros 2000 dólares a una tasa anual que es 0.5% superior. Si recibe un total de 190 dólares de interés en un año, ¿a qué tasa están invertidos los 1000 dólares?
21. **Salarios** Una ejecutiva de una compañía de ingeniería tiene un salario mensual más un bono para la Navidad de 8500 dólares. Si gana un total de 97 300 dólares al año, ¿cuál es su salario mensual?
22. **Salarios** Una mujer gana 15% más que su marido. Entre los dos juntan 69 875 dólares al año. ¿Cuál es el salario del marido al año?
23. **Herencias** Craig está ahorrando para comprar una casa para ir de vacaciones. Heredó algún dinero de un tío rico, y lo junta con los 22 000 dólares que ya tenía y duplica el total mediante una inversión afortunada. Al final tiene reunidos 134 000 dólares, lo suficiente para comprar una cabaña en un lago. ¿Cuánto dinero heredó?
24. **Tiempo extra** Helen gana 7.50 dólares por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana, se le paga $1\frac{1}{2}$ veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. Una semana obtiene un salario bruto de 352.50 dólares. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó esa semana?
25. **Costo de la mano de obra** Un plomero y su ayudante trabajan juntos para reemplazar la tubería de una casa vieja. El plomero gana 45 dólares por hora por su trabajo y 25 dólares su ayudante. El plomero trabaja el doble del tiempo que su ayudante y el cargo final por mano de obra es de 4025 dólares. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en esta casa?
26. **Una carrera de jonrones** Durante su carrera en las ligas mayores, Hank Aaron lanzó 41 jonrones más que Babe Ruth en toda su carrera. Entre los dos colocaron 1459 jonrones. ¿Cuántos jonrones colocó Babe Ruth?
27. **Acertijo** Un actor de cine, decidido a no revelar su edad, le dijo el siguiente acertijo a un articulista de chismes: "Hace siete años, yo tenía once veces la edad de mi hija. Ahora tengo cuatro veces la edad de ella." ¿Cuántos años tenía el actor?
28. **Acertijo** Un papá tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de 6 años, él tendrá tres veces la edad de ella. ¿Qué edad tiene su hija ahora?

29. Valor de las monedas Una bolsa con cambio contiene una cantidad igual de monedas de 1 centavo, 5 y 10 centavos. El valor total de las monedas es 1.44 dólares. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene la bolsa?

30. Valor de las monedas Mary tiene 3 dólares en monedas de 5, 10 y 25 centavos. Si tiene el doble de monedas de 10 centavos que de monedas de 25 y cinco monedas de 5 centavos que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene?

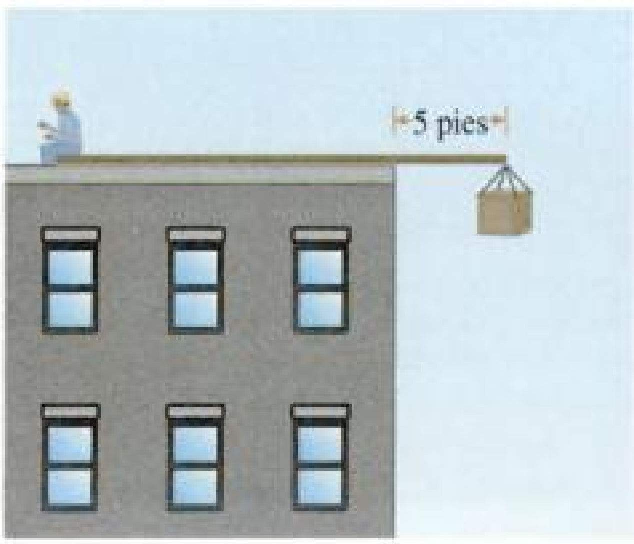
31. Ley de la palanca En la figura se ilustra un sistema de palancas, similar al sube y baja que usted encuentra en los parques para niños. Para que el sistema se equilibre, el producto del peso por la distancia a partir del punto de apoyo debe ser igual en cada lado. Es decir,

$$w_1x_1 = w_2x_2$$

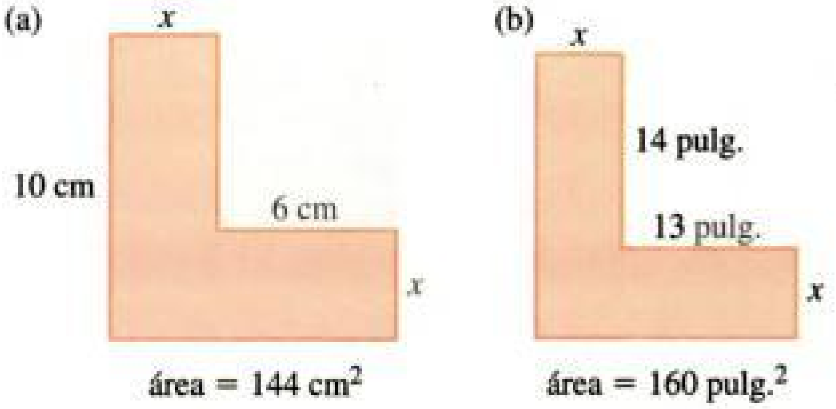
Esta ecuación recibe el nombre de ley de la palanca, y fue descubierta por Arquímedes (véase la pág. 748).

Una mujer y su hijo están jugando en un sube y baja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del punto de apoyo. Si el hijo pesa 100 libras y la madre pesa 125 libras, ¿dónde debe colocarse la mujer para equilibrar el sube y baja?

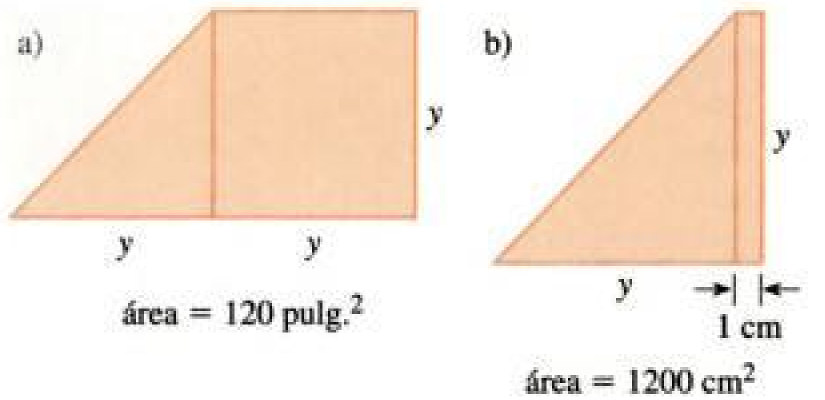
32. Ley de la palanca Un tablón de 30 pies de largo se apoya en la azotea de un edificio; 5 pies del tablón sobresalen de la orilla según se muestra en la figura. Un trabajador que pesa 240 libras se sienta en el otro extremo del tablón. ¿Cuál es el peso más grande que se puede colgar en el extremo que sobresale del tablón si tiene que estar en equilibrio? Aplique la ley de la palanca establecida en el ejercicio 31.



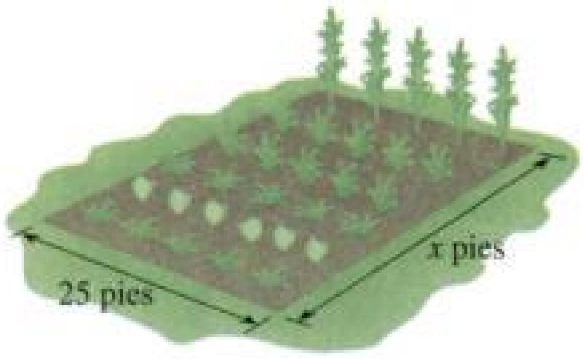
33. Longitud y área Calcule la longitud x de la figura. Se proporciona el área de la región sombreada.



34. Longitud y área Determine la longitud y de la figura. Se proporciona el área de la región sombreada.



35. Largo de un jardín El ancho de un jardín rectangular es de 25 pies. Si el área es de 1125 pies cuadrados, ¿cuál es el largo del jardín?



36. Ancho de un terreno de pastura El largo de un terreno de pastura es el doble del ancho. Su área es 115 200 pies cuadrados. ¿Cuánto mide de ancho el terreno?

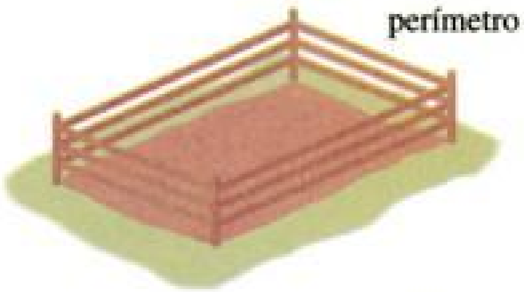
37. Dimensiones de un terreno Un terreno de forma cuadrada tiene una construcción de 60 pies de largo por 40 pies de ancho en una esquina. El resto del terreno es un estacionamiento. Si el área del estacionamiento es de 12 000 pies cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones de todo el terreno?

38. Dimensiones de un terreno El largo de un terreno de medio acre es cinco veces lo que mide el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones? [*Nota:* 1 acre = 43 560 pies cuadrados.]

39. Dimensiones de un jardín Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que lo que mide de ancho. Su área es de 875 pies cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

40. Dimensiones de una habitación Una recámara rectangular mide de largo 7 pies más de lo que mide el ancho. Su área es de 228 pies cuadrados. ¿Cuál es el ancho de la habitación?

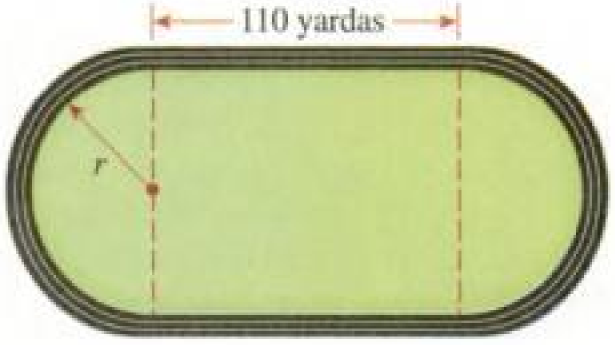
41. Dimensiones de un jardín Un granjero tiene un terreno rectangular para jardín, rodeado por una cerca de 200 pies. Determine la longitud y la anchura del jardín si el área es de 2 400 pies cuadrados.



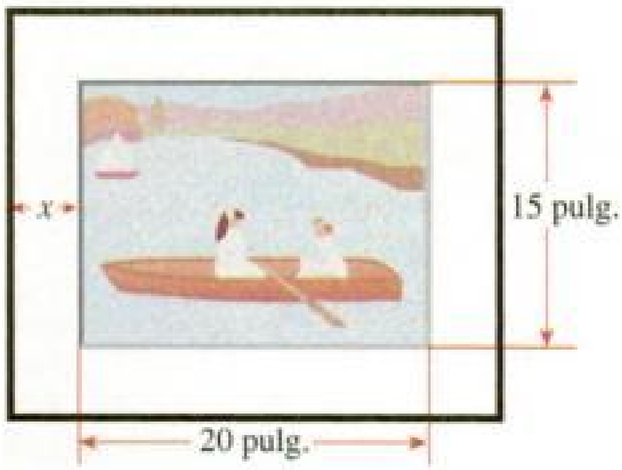
42. Dimensiones de un terreno El largo de una parcela mide 6 pies más que el ancho. Cada diagonal mide 174 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

43. Dimensiones de un terreno El ancho de una parcela rectangular mide 50 pies. Una diagonal mide 10 pies más que el largo de la parcela. ¿Cuál es el largo de la parcela?

44. Dimensiones de una pista Una pista para carreras tiene la forma que se ilustra en la figura, con lados rectos y extremos semicirculares. Si la pista mide en total 440 yardas y los dos lados rectos miden 110 yardas de largo, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares, aproximado a la yarda más cercana?

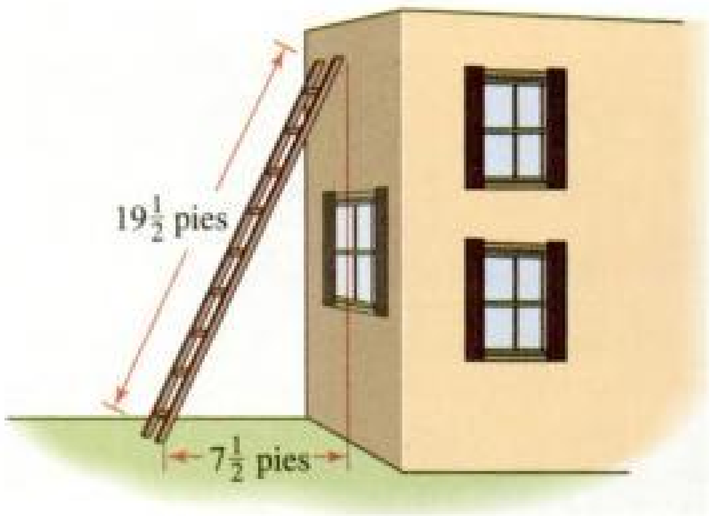


45. Marco para una pintura Alejandro pinta una acuarela en una hoja de papel de 20 por 15 pulg. Luego coloca su acuarela sobre una base de modo que quede una franja de un ancho uniforme alrededor de la pintura. El perímetro de la base es de 102 pulg. ¿Cuánto mide el ancho de la franja que rodea a la acuarela?



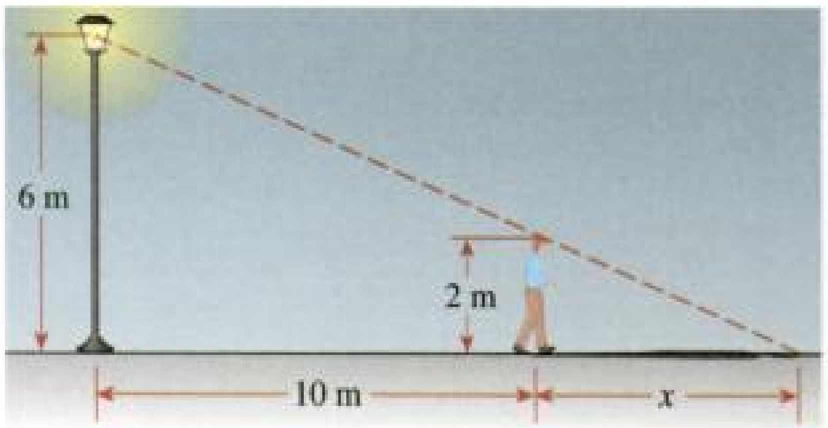
46. Ancho de un terreno con césped Se va a construir una fábrica en un terreno que mide 180 por 240 pies. El reglamento de construcción local señala que debe rodear a la fábrica un terreno con césped de ancho uniforme y de área igual al área de la misma. ¿Cuál debe ser el ancho de esta zona de césped y cuáles las dimensiones de la fábrica?

47. Alcance de una escalera Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra una construcción. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies a partir del edificio. ¿Qué altura del edificio alcanza la escalera?

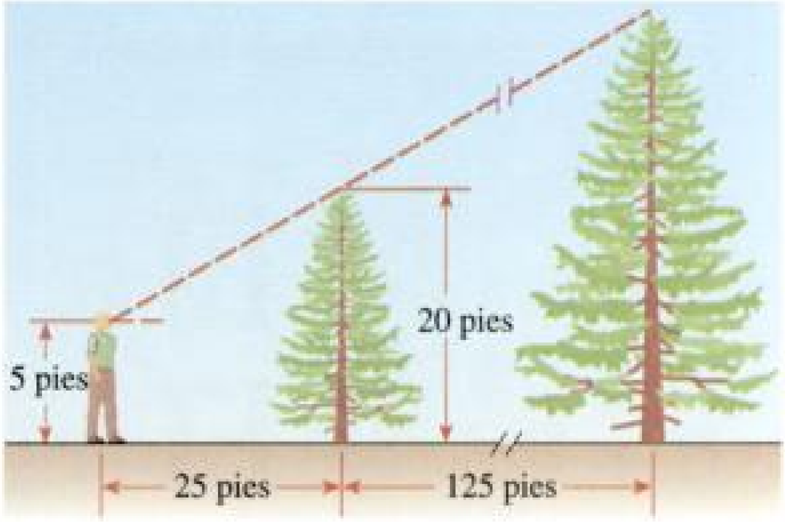


48. Altura de un asta de bandera Un asta está asegurada por dos tensores de alambre, opuestos entre sí. Cada tensor mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde se fijan los tensores al suelo es igual a la longitud de un tensor. ¿Cuál es la altura del asta, aproximada a la pulgada más cercana?

49. Longitud de una sombra Un hombre se aleja caminando de un poste cuya luminaria está a 6 m por arriba del suelo. El hombre tiene una estatura de 2 m. ¿Cuánto mide la sombra del hombre cuando está a 10 m del poste? [*Sugerencia:* aplique triángulos semejantes.]



50. **Altura de un árbol** Un aserrador estima la altura de un árbol alto midiendo primero un árbol pequeño alejado 125 pies del árbol alto; luego se desplaza de tal manera que sus ojos estén en la visual de las copas de los árboles y mide después qué tan lejos está del árbol pequeño (véase la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de altura, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y sus ojos están a 5 pies por arriba del suelo. ¿Cuánto mide el árbol más alto?



51. **Compra de una casa** Un grupo de amigos decide comprar una casa para ir de vacaciones de 120 000 dólares, para lo que compartirán los gastos en partes iguales. Si pueden encontrar una persona más que se les una, cada uno contribuirá con 6 000 dólares. ¿Cuántas personas forman el grupo?

52. **Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% se tiene que mezclar con una solución al 30% para producir 300 ml de una solución al 50%?

53. **Problema de mezclas** Un joyero tiene cinco anillos, cada uno pesa 18 g, y son de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Decide fundir los anillos y añadir suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe añadir?

54. **Problema de mezclas** Un olla contiene 6 litros de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua se debe evaporar por ebullición para que la concentración sea de 200 g/L?

55. **Problema de mezclas** El radiador de un automóvil está lleno con una solución de 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante recomienda que, en verano, el enfriamiento óptimo del motor se logra con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es de 3.6 litros, ¿cuanto anticongelante se debe extraer para reemplazarlo con agua para reducir la concentración del anticongelante al nivel recomendado?

56. **Problema de mezclas** Un centro de salud aplica una solución de blanqueador para esterilizar las cajas de Petri en las que crecieron cultivos. El recipiente de esterilización contiene 100 galones de una solución de blanqueador común para uso doméstico al 2% mezclado con agua pura destilada. Las nuevas investigaciones señalan que la concentración del blanqueador debe ser de 5% para conseguir una esterilización completa. ¿Cuánta de la solución se debe extraer y reemplazar con blanqueador para incrementar el contenido de éste y tener el nivel recomendado?

57. **Problema de mezclas** Una botella contiene 750 ml de ponche de frutas con una concentración de jugo de frutas puro al 50%. Jill toma 100 ml del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual pero de una marca más barata de ponche, si la concentración de jugo en la botella se redujo ahora a 48%, ¿cuál es la concentración del ponche que Jill añadió?

58. **Problema de mezclas** Un comerciante mezcla té que vende a 3 dólares una libra con té que vende a 2.75 dólares la libra para producir 80 libras de una mezcla que vende a 2.90 dólares la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en su mezcla?

59. **Trabajo compartido** Candy y Tim comparten una ruta de entrega de periódicos. Candy tarda 70 min en entregar todos los periódicos, y Tim se tarda 80 min. ¿Cuánto se tardan los dos cuando trabajan en forma conjunta?

60. **Trabajo compartido** Stan e Hilda pueden podar el pasto en 40 min si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto se tardará Stan en podar él solo el césped?

61. **Trabajo compartido** Betty y Karen fueron contratadas para pintar las casas de una unidad habitacional. Si trabajan juntas, las mujeres pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que se tarda Karen si trabaja sola. Betty se tarda 6 h en pintar una casa sola. ¿Cuánto se tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?

62. **Trabajo compartido** Bob y Jim son vecinos y utilizan mangueras de las dos casas para llenar la piscina de Bob. Ya saben que se requieren 18 h si se usan ambas mangueras. También saben que si se usa sólo la manguera de Bob, se tarda 20% menos de tiempo que cuando se utiliza la manguera de Jim sola. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras?

63. **Trabajo compartido** Cuando Henry e Irene trabajan juntos pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 h 48 min. Si Henry trabaja solo, se tarda $1\frac{1}{2}$ más que Irene en hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada persona sola en lavar todas las ventanas?

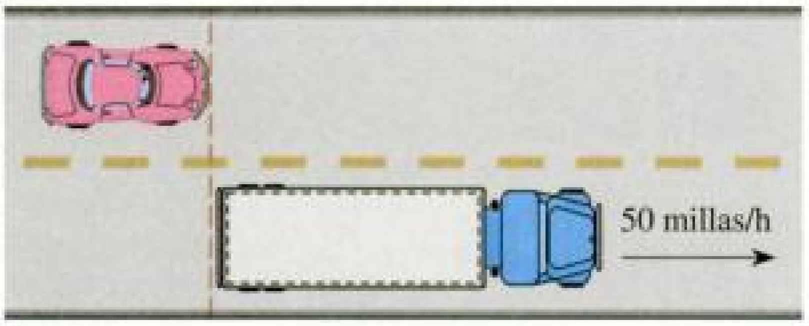
64. **Trabajo compartido** Jack, Kay y Lynn entregan folletos de propaganda en un poblado pequeño. Si cada uno de ellos trabaja solo, Jack tarda 4 h en entregar todos los folletos, y Lynn se tarda una hora más que Kay. Si trabajan juntos, pueden entregar toda la propaganda en 40% del tiempo que tarda Kay cuando trabaja sola. ¿Cuánto tarda Kay en entregar toda la propaganda ella sola?

65. **Distancia, velocidad y tiempo** Wendy emprende un viaje desde Davenport hasta Omaha, que es una distancia de 300 millas. Viaja una parte por autobús, el cual llega a la estación del tren justo a tiempo para que Wendy continúe su viaje por tren. El autobús viajó a una velocidad promedio de 40 millas por hora y el tren se mueve a una velocidad de 60 millas por hora. El viaje completo dura $5\frac{1}{2}$ h. ¿Cuánto tiempo pasó Wendy en el tren?

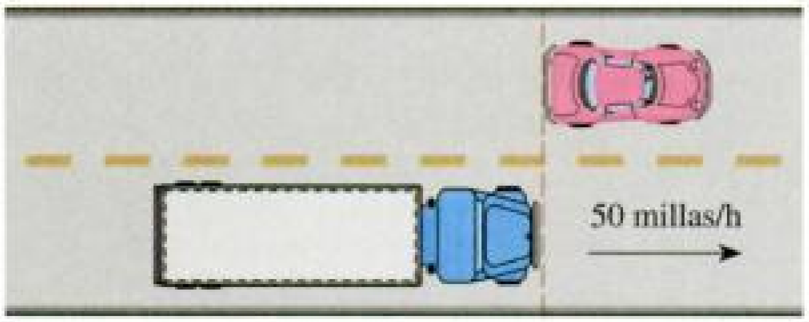
66. Distancia, velocidad y tiempo Dos ciclistas separados por 90 millas, inician al mismo tiempo un viaje para encontrarse. Uno se desplaza el doble de rápido que el otro. Si se encuentran 2 h después, ¿a qué velocidad promedio viajó cada ciclista?

67. Distancia, velocidad y tiempo Un piloto vuela un avión desde Montreal a Los Ángeles, que es una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso la velocidad promedio fue de 20% más alta que la velocidad de ida. El viaje redondo dura 9 h 10 min. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

68. Distancia, velocidad y tiempo Una mujer que maneja un automóvil de 14 pies de largo va a rebasar a un camión de carga de 30 pies de largo. El camión va a una velocidad de 50 millas/hora. ¿Qué tan rápido debe ir la mujer en su automóvil para que pueda rebasar por completo al camión en 6 s, de acuerdo con la posición que se muestra en la figura (a) hasta la posición de la figura (b)? [*Sugerencia:* utilice pies y segundos en lugar de millas y horas.]



a)



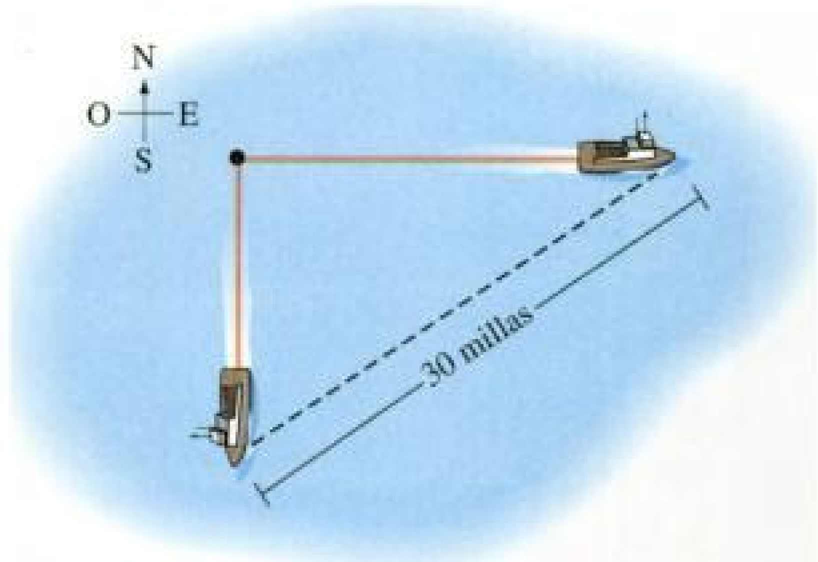
b)

69. Distancia, velocidad y tiempo Un vendedor viaja desde Ajax a Barrington, que es una distancia de 120 millas, a una velocidad constante. Después aumenta su velocidad 10 millas/h para viajar las 150 millas desde Barrington hasta Collins. Si la segunda parte de este viaje tarda 6 min más que la primera parte, ¿a qué velocidad viajó de Ajax a Barrington?

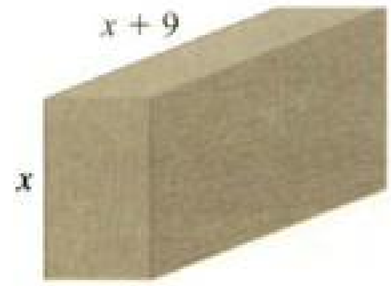
70. Distancia, velocidad y tiempo Kiran fue en automóvil desde Tortula a Cactus, que es una distancia de 250 millas. Luego aumentó su velocidad 10 millas/hora para el viaje de 360 millas entre Cactus y Dry Junction. Si todo el recorrido dura 11 h, ¿cuál fue la velocidad desde Tortula hasta Cactus?

71. Distancia, velocidad y tiempo La tripulación de una lancha tarda 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, ¿cuál fue la velocidad de remado de la tripulación en aguas tranquilas?

72. Velocidad de un bote Dos naves pesqueras salen de un puerto al mismo tiempo, una viaja hacia el este y otra hacia el sur. El bote que viaja hacia el este se desplaza a una velocidad de 3 millas/h más rápido que el que va al sur. Después de dos horas los botes están separados 30 millas. Calcule la velocidad del bote que va hacia el sur.

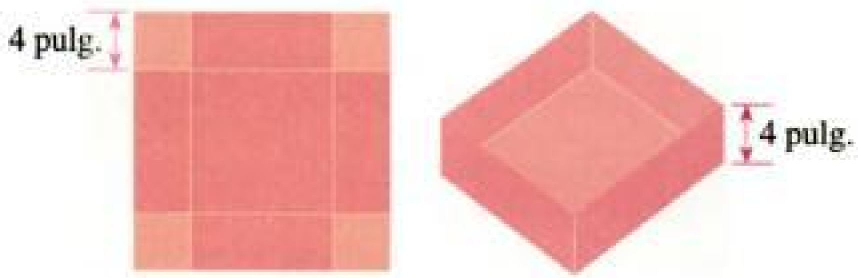


73. Dimensiones de una caja Una caja de madera contrachapada tiene un volumen de 180 pies cúbicos. El largo mide de 9 pies más que su altura y su anchura mide 4 pies menos que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?



74. Radio de una esfera Un joyero tiene tres esferas sólidas y pequeñas de oro, de 2 mm, 3 mm y 4 mm de radio. El joyero decide fundirlas y hacer una sola esfera con ellas. ¿Cuál será el radio de la esfera resultante?

75. Dimensiones de una caja Una caja de base cuadrada y sin tapa se hace con una pieza cuadrada de cartulina, en la que se recortan cuadrados de 4 pulg en cada esquina, y se doblan los lados según se muestra en la figura. La caja tendrá un volumen de 100 pulg^3. ¿De qué tamaño tiene que ser la cartulina que se requiere?

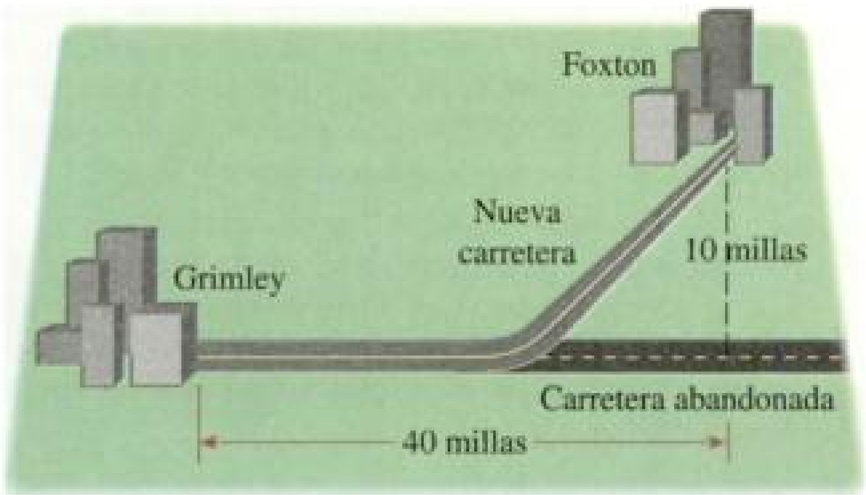


76. **Dimensiones de una lata** Una lata cilíndrica tiene un volumen de 40π cm^3 y mide 10 cm de altura. ¿Cuál es el diámetro? [*Sugerencia:* aplique la fórmula del volumen que se encuentra en los forros interiores de este libro.]

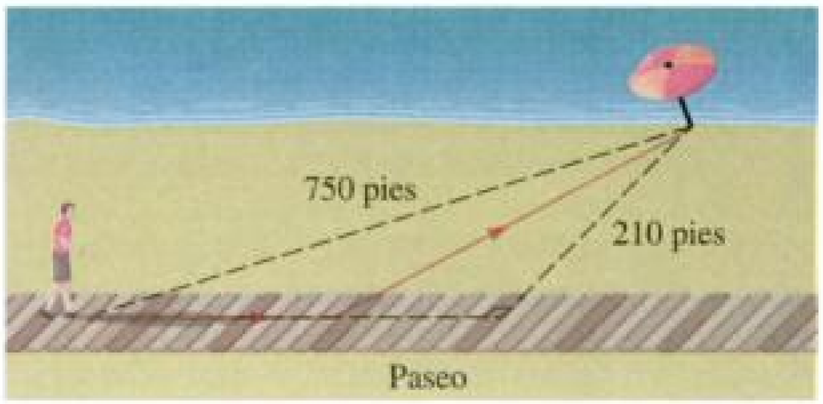
77. **Radio de un recipiente** Un recipiente esférico tiene una capacidad de 750 galones. Aplique el hecho de que un galón es casi 0.1337 pies cúbicos, y determine el radio del depósito con aproximación a la centésima de pie más cercana.

78. **Dimensiones de un terreno** Un terreno urbano tiene la forma de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de 7 pies más grande que uno de los catetos. El perímetro del terreno es de 392 pies. ¿Cuánto mide el otro cateto?

79. **Costos de construcción** El pueblo de Foxton queda a 10 millas al norte de una carretera abandonada que va del este al oeste que sale de Grimley, según se muestra en la figura. El punto de la carretera abandonada más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Las autoridades del condado están por construir una nueva carretera que una los dos pueblos. Ya calcularon que restaurar la carretera vieja costaría 100 000 dólares por milla, y que la construcción de una nueva costaría 200 000 dólares por milla. ¿Cuánto de la carretera abandonada se podría aprovechar, según la figura, si las autoridades pretenden gastar exactamente 6.8 millones? ¿Costaría menos que esta cantidad construir una nueva carretera que una en forma directa los pueblos?

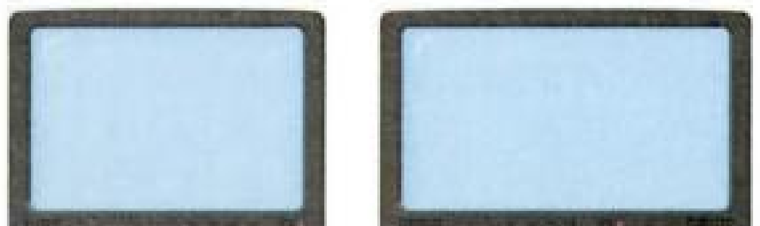


80. **Distancia, velocidad y tiempo** Un paseo es paralelo a la orilla de una playa recta y está a 210 pies tierra adentro desde dicha orilla. Una playa arenosa está situada entre el paseo y la orilla. Un hombre está parado en el paseo, exactamente a 750 pies de su sombrilla que está al otro lado de la arena; la sombrilla está sobre la orilla de la playa. El hombre camina a 4 pies/s por el paseo y a 2 pies/s sobre la arena. ¿Cuánto debe caminar por el paseo antes de cambiar de dirección y caminar sobre la arena si quiere llegar a su sombrilla en exactamente 4 min 45 s?

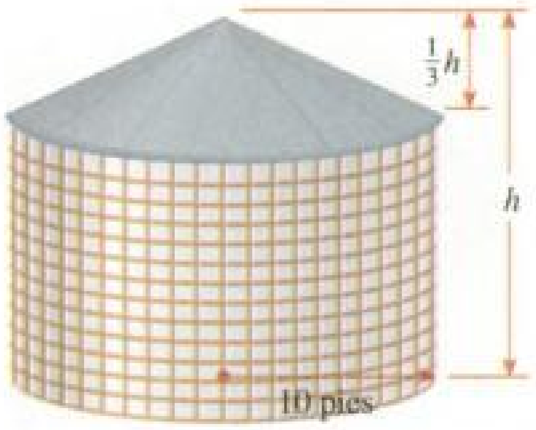


81. **Volumen de cereales** El grano está cayendo desde un canalón sobre el suelo y forma un montón en forma de cono cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿Qué altura tiene el montón, aproximada a la centésima más cercana de un pie, cuando contiene 1000 pies cúbicos de grano?

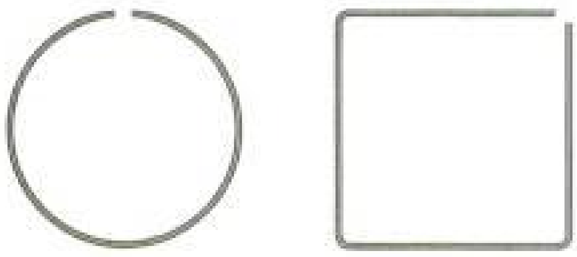
82. **Monitores de TV** Dos televisores están colocados uno al lado del otro en un aparador de una tienda de aparatos electrónicos. La altura de la pantalla es la misma. Uno tiene una pantalla ordinaria que mide 5 pulg más de ancho que el largo. El otro tiene una pantalla más amplia y de alta definición, que mide de ancho 1.8 veces la altura. La diagonal de la pantalla más ancha mide 14 pulg más que la diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura de las pantallas aproximada hasta la décima de pulgada más cercana?



83. Dimensiones de una estructura Un contenedor para almacenar maíz consta de una parte cilíndrica fabricada con tela de alambre y una cubierta cónica de estaño, como se muestra en la figura. La altura de la cubierta es de un tercio de la altura total de la estructura. Si el volumen total de esta estructura es de 1400π pies cúbicos y su radio es de 10 pies, ¿cuál es la altura total? [*Sugerencia:* utilice las fórmulas del volumen que se encuentran en los forros interiores de este libro.]



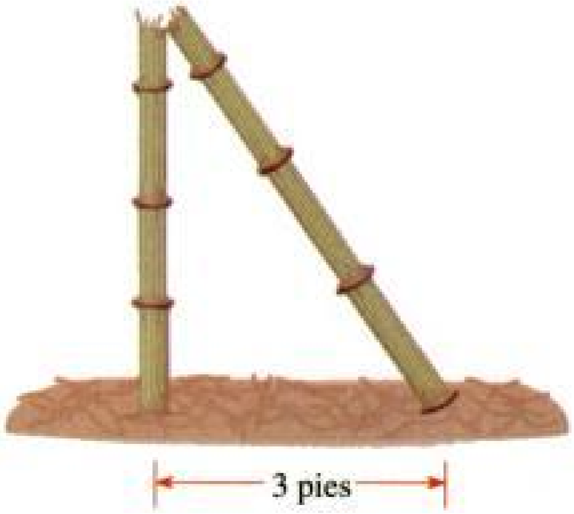
84. Comparación de áreas Un alambre de 360 pulg de largo se corta en dos partes. Con una parte se forma un cuadrado y con la otra un círculo. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuánto miden de largo los dos trozos de alambre? Exprese los resultados a la décima más cercana de una pulgada.



85. Un antiguo problema chino Este problema se tomó de un libro chino de matemáticas llamado *Chui-chang suan-shu*, que quiere decir *Nine Chapters on the Mathematical Art*, que se escribió por el año 250 antes de nuestra era.

Una vara de bambú de 10 pies de largo se parte de tal manera que la punta toca el suelo a 3 pies de la base de la vara, como se muestra en la figura. ¿A qué altura se produjo el quiebre?

[*Sugerencia:* utilice el Teorema de Pitágoras.]



Descubrimiento • Debate

86. Investigación histórica Lea las notas sobre la vida de Pitágoras (pág. 54), Euclides (pág. 532) y Arquímedes (pág. 748). Elija uno de estos matemáticos e investigue más acerca de él en la biblioteca o la Internet. Escriba un ensayo sobre lo que encuentre. Incluya tanto información biográfica como una descripción de los conceptos matemáticos por los cuales se hizo famoso.

87. Una ecuación cuadrática babilonia Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. En seguida se presenta un problema de una de las tablillas con símbolos cuneiformes encontradas en una escuela de Babilonia, que data de hace más de 2000 años antes de nuestra era.

> Tengo una vara, no conozco su largo. Le corté un codo, y así la vara cabe 60 veces en el largo de mi parcela. Restablecí a la vara lo que le había cortado, y ahora se ajusta 30 veces en el ancho de mi parcela. El área de mi parcela es de 375 nindas cuadradas. ¿Cuál era la longitud original de la vara?

Resuelva este problema. Aplique el hecho de que 1 ninda = 12 codos.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Ecuaciones a través de las épocas

Las ecuaciones se han utilizado para resolver problemas a través de toda la historia registrada, en todas las civilizaciones. (Véase por ejemplo el ejercicio 85 de la página 74.) A continuación presentamos un problema de Babilonia (alrededor de 2000 años antes de nuestra era).

The British Museum

> Encontré una piedra, pero no la pesé. Después añadí un séptimo y luego un onceavo del resultado; pesé todo y encontré que pesaba una mina. ¿Cuál era el peso original de la piedra?

La respuesta dada en la tablilla es de $\frac{2}{3}$ mina, 8 sheqel, y $22\frac{1}{2}$ se, donde 1 mina $=$ 60 sheqel y 1 sheqel $=$ 180 se.

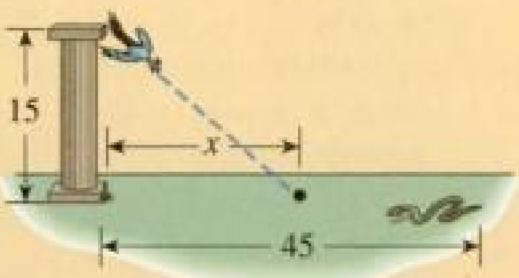
En el antiguo Egipto, el saber cómo resolver problemas planteados en palabras era un secreto altamente valorado. El Papiro Rhind (alrededor de 1850 años antes de nuestra era) contiene muchos de dichos problemas (véase pág. 716). El problema 32 en el papiro dice:

> Una cantidad, su tercio, su cuarto, sumados juntos se convierten en 2. ¿Cuál es la cantidad?

La respuesta en la notación egipcia es $1 + \overline{4} + \overline{76}$, donde la barra indica "recíproco", como nuestra notación 4^{-1}.

El matemático griego Diofanto (alrededor de 250 antes de nuestra era) escribió el libro *Arithmetica*, el cual contiene muchos enunciados de problemas y ecuaciones. El matemático indio Bhaskara (siglo XII antes de nuestra era, véase pág. 144) y el matemático chino Chang Ch'iu-Chien (siglo VI antes de nuestra era) también estudiaron y escribieron sobre ecuaciones. Naturalmente, las ecuaciones siguen siendo importantes en la actualidad.

1. Resuelvan el problema babilonio y demuestren que su respuesta es correcta.
2. Resuelvan el problema egipcio y demuestren que su respuesta es correcta.
3. Los egipcios y babilonios antiguos utilizaban ecuaciones para resolver problemas prácticos. Por los problemas que se han dado aquí, ¿cree usted que habrán disfrutado de plantear y resolver problemas sólo por gusto?
4. Resuelva este problema de la India del sigo XII antes de nuestra era.



> Un pavo real está posado en lo alto de una columna de 15 codos y la guarida de una serpiente está al pie de la columna. El pavo ve a la serpiente cuando ésta se encuentra a 45 codos de su madriguera, y se lanza en forma oblicua sobre ella cuando se desliza hacia su agujero. ¿A cuántos codos de la madriguera de la serpiente se encuentran, suponiendo que cada uno se desplaza una distancia igual?

5. Considere este problema de la China del siglo VI.

> Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?

Este problema tiene varias respuestas. Aplique el ensayo y error para encontrar por lo menos una respuesta. ¿Es un problema práctico o un acertijo? Escriba un ensayo corto para sustentar su opinión.

6. Escriba un ensayo corto para explicar cuántas ecuaciones afectan su propia vida en el mundo actual.

1.7 Desigualdades

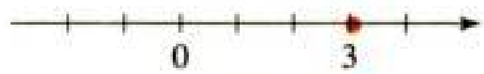
x	$4x + 7 \le 19$
1	$11 \le 19$ ✓
2	$15 \le 19$ ✓
3	$19 \le 19$ ✓
4	$23 \le 19$ ✗
5	$27 \le 19$ ✗

En el álgebra, algunos problemas originan **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo de igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\le$ o $\ge$. Aquí está un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \le 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no.

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales. La ilustración que sigue muestra cómo una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

		Solución	Gráfica
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad:	$4x + 7 \le 19$	$x \le 3$	

Para resolver desigualdades, aplicamos las reglas siguientes para aislar la variable a un lado del signo de la desigualdad. Estas reglas indican cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a"). En estas reglas, los símbolos A, B y C son números reales o expresiones algebraicas. Aquí establecemos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\le$, pero se aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

Reglas de las desigualdades

Regla	Descripción
1. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \le B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada miembro de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \le B - C$	**Restar** la misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \le CB$	**Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \ge CB$	**Multiplicar** ambos miembros de una desigualdad por la misma cantidad *negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \ge \dfrac{1}{B}$	**Obtener los recíprocos** de ambos miembros de una desigualdad que contiene cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \le B$ y $C \le D$, entonces $A + C \le B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Ponga atención especial a las reglas 3 y 4. La regla 3 establece que podemos multiplicar (o dividir) cada miembro de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 señala que si multiplicamos cada miembro de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, tenemos

$$-6 > -10$$

Desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o es un múltiplo de la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y grafique el conjunto solución.

Solución

$$\begin{aligned}
3x &< 9x + 4 \\
3x - 9x &< 9x + 4 - 9x && \text{Sustracción de } 9x \\
-6x &< 4 && \text{Simplificación} \\
\left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) &> \left(-\tfrac{1}{6}\right)(4) && \text{Multiplicación por } -\tfrac{1}{6} \text{ (o división entre } -6) \\
x &> -\tfrac{2}{3} && \text{Simplificación}
\end{aligned}$$

La multiplicación por el número $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

Figura 1

El conjunto solución consta de todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. La gráfica se ilustra en la figura 1. ■

Ejemplo 2 Resolución de un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

Solución El conjunto solución consiste en todos los valores de x que cumplen tanto la desigualdad $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Aplicando las reglas 1 y 3, vemos que las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$\begin{aligned}
4 &\leq 3x - 2 < 13 \\
6 &\leq 3x < 15 && \text{Suma de 2} \\
2 &\leq x < 5 && \text{División entre 3}
\end{aligned}$$

Figura 2

Por lo tanto, el conjunto solución es $[2, 5)$, como se ilustra en la figura 2. ■

Desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contienen la variable al cuadrado o a otras potencias, aplicamos la factorización junto con el principio siguiente.

El signo de un producto o cociente

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Ejemplo 3 Una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

Solución Primero factorizamos el primer miembro.

$$(x-2)(x-3) \le 0$$

Figura 3

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x-2)(x-3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Como se ilustra en la figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta de los números reales en tres intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. Determinamos los signos de los factores usando **valores de prueba** en cada uno de estos intervalos. Elegimos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el valor seleccionado. Por ejemplo, si usamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$ mostrado en la figura 4, entonces la sustitución en los factores $x - 2$ y $x - 3$ da

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

y

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Figura 4

Ambos factores son negativos en este intervalo. (Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y en 3, respectivamente, de modo que conservan sus signos en cada intervalo. Ésta es la razón de que usar un solo valor de prueba en cada intervalo es suficiente.)

La siguiente tabla de signos se elaboró usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (véase la figura 4), respectivamente. El renglón final es el producto de dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x-2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Si lo prefiere, puede representar esta información sobre una recta numérica, como en el siguiente diagrama de signos. Las líneas verticales indican los puntos en los cuales la recta de los números reales se divide en intervalos:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

De acuerdo con la tabla o con el diagrama vemos que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Por consiguiente, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

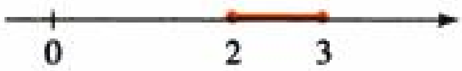


Figura 5

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

Están incluidos los extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor que o *igual a* cero. La solución se ilustra en la figura 5. ■

En el ejemplo 3 se ilustran los siguientes criterios para resolver una desigualdad que se puede factorizar.

Criterios para resolver desigualdades no lineales

1. **Pase todos los términos a un miembro.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad de modo que todos los términos no cero aparezcan a un lado del signo de la desigualdad. Si el lado no cero de la desigualdad contiene cocientes, busque un denominador común.
2. **Factorice.** Factorice el miembro no cero de la desigualdad.
3. **Determine los intervalos.** Calcule los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta numérica en intervalos. Liste los intervalos determinados por medio de estos números.
4. **Elabore una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para construir una tabla o un diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto o cociente de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Compruebe si alguno de los extremos de los intervalos cumplen con la desigualdad, lo cual es válido si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$).

La técnica de factorización descrita en estos criterios funciona sólo si todos los términos no cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. **Si la desigualdad no está expresada en esta forma, primero vuélvala a escribir, como se indica en el paso 1. Esta técnica se ilustra en los ejemplos que siguen.**

Es tentador multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si ésta fuera una *ecuación*). Esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Véase el ejercicio 110.)

Ejemplo 4 Una desigualdad que contiene un cociente

Resuelva: $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

Solución Primero pasamos todos los términos no cero al lado izquierdo, y luego simplificamos usando un denominador común.

Pase los términos a un lado

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Resta de 1 para pasar todos los términos al primer miembro}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1 - x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combinación de las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplificación}$$

El numerador es cero cuando $x = 0$ y el denominador es cero cuando $x = 1$, de modo que elaboramos el siguiente diagrama de signos usando los valores para definir intervalos en la recta numérica.

Elabore un diagrama

		0		1	
Signo de $2x$	$-$		$+$		$+$
Signo de $1 - x$	$+$		$+$		$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

Resuelva

A partir del diagrama vemos que la solución es $\{x \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$. Está incluido el extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor que o *igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro extremo porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Compruebe siempre los extremos de los intervalos de solución para determinar si cumplen la desigualdad original.

El conjunto solución $[0, 1)$ se ilustra en la figura 6. ■

Figura 6

Ejemplo 5 Resolución de una desigualdad con tres factores

Resuelva la desigualdad $x < \dfrac{2}{x-1}$.

Solución Después de pasar todos los términos no cero a un lado de la desigualdad, utilizamos un común denominador para combinar los términos.

Pase los términos a un lado

$$x - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Resta de } \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Común denominador } x - 1$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} < 0 \qquad \text{Combinación de fracciones}$$

Factorice

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

Determine los intervalos

Los factores en este cociente cambian de signo en -1, 1 y 2, de modo que debemos examinar los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al usar los valores de prueba, obtenemos el siguiente diagrama de signos.

Elabore un diagrama

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a 2	2 a ∞
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como el cociente debe ser negativo, la solución es

$$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

como se ilustra en la figura 7. ■

Figura 7

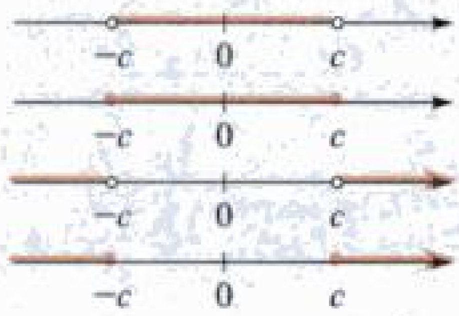
Desigualdades con valores absolutos

Aplicamos las propiedades siguientes para resolver desigualdades que contienen valores absolutos.

Propiedades de desigualdades con valores absolutos

Desigualdad	Forma equivalente
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$

Gráfica



Estas propiedades se cumplen cuando x se reemplaza por cualquier expresión algebraica. (En la figuras suponemos que $c > 0$.)

Estas propiedades se pueden demostrar usando la definición de valor absoluto. Para demostrar la propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $|x| < c$ establece que la distancia desde x hasta 0 es menor que c, y según la figura 8 usted puede observar que esto es cierto si y sólo si x está entre $-c$ y c.

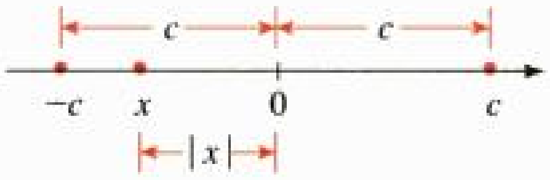


Figura 8

Ejemplo 6 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|x - 5| < 2$.

Solución 1 La desigualdad $|x - 5| < 2$ equivale a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$
$$3 < x < 7 \qquad \text{Suma de 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

Solución 2 Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución consiste en todos los números x cuya distancia desde 5 es menor que 2. Según la figura 9, vemos que es el intervalo $(3, 7)$. ■

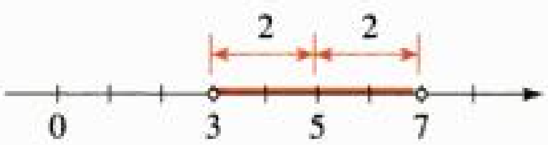


Figura 9