Ejemplo 7 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

Solución De acuerdo con la propiedad 4 la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ equivale a

$$\begin{aligned} 3x + 2 &\geq 4 \quad \text{o bien} \quad & 3x + 2 &\leq -4 & \\ 3x &\geq 2 & 3x &\leq -6 & \quad \text{Resta de 2} \\ x &\geq \tfrac{2}{3} & x &\leq -2 & \quad \text{División entre 3} \end{aligned}$$

De modo que el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o bien} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto se grafica en la figura 10. ■

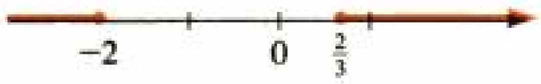


Figura 10

Modelado con desigualdades

El modelado de problemas de la vida cotidiana da con frecuencia desigualdades porque estamos interesados a menudo en determinar cuándo una cantidad es más o menos que otra.

Ejemplo 8 Boletos para el carnaval

Un carnaval tiene dos planes de boletos.

Plan A: tarifa de entrada de 5 dólares y 25 centavos cada vuelta en los juegos

Plan B: tarifa de entrada de 2 dólares y 50 centavos cada vuelta en los juegos

¿Cuántas vueltas tendría que dar para que el plan A resultara menos caro que el plan B?

Solución Se pide el número de vueltas en los juegos para que el plan A sea menos caro que el plan B. Entonces

Identifique la variable

$$x = \text{número de vueltas}$$

La información en el problema se podría organizar como sigue.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de vueltas	x
Costo con el plan A	$5 + 0.25x$
Costo con el plan B	$2 + 0.50x$

Ahora planteamos el modelo.

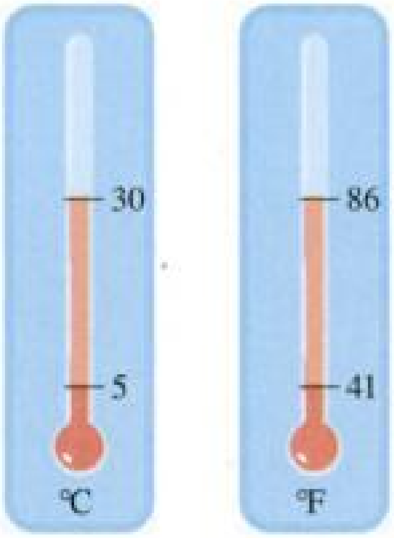
Plantee el modelo

$$\text{costo con el plan A} < \text{costo con el plan B}$$

Resuelva

$$\begin{aligned} 5 + 0.25x &< 2 + 0.50x & \\ 3 + 0.25x &< 0.50x & \quad \text{Resta de 2} \\ 3 &< 0.25x & \quad \text{Resta de 0.25x} \\ 12 &< x & \quad \text{División entre 0.25} \end{aligned}$$

De modo que si planea dar *más de* 12 vueltas, el plan A es menos caro. ■



Ejemplo 9 Escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en un empaque de película indican que la caja debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué temperaturas corresponden en la escala Fahrenheit?

Solución La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) la da la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Al expresar la condición de la caja en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

De modo que las temperaturas Fahrenheit correspondientes cumplen con las desigualdades

$$\begin{aligned} 5 &< \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 \\ \tfrac{9}{5}\cdot 5 &< F - 32 < \tfrac{9}{5}\cdot 30 && \text{Multiplicación por } \tfrac{9}{5} \\ 9 &< F - 32 < 54 && \text{Simplificación} \\ 9 + 32 &< F < 54 + 32 && \text{Suma de 32} \\ 41 &< F < 86 && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

La película se debe conservar a una temperatura de entre 41 y 86°F. ■

Ejemplo 10 Boletos para un concierto

Un grupo de estudiantes decide asistir a un concierto. El costo de contratar a un autobús para que los lleve al concierto es de 450 dólares, lo cual se debe repartir en forma uniforme entre los estudiantes. Los promotores del concierto ofrecen descuentos a grupos que lleguen en autobús. Los boletos cuestan normalmente 50 dólares cada uno, pero se reducen 10 centavos de dólar del precio del boleto por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del autobús). ¿Cuántos estudiantes deben ir en el grupo para que el costo total por estudiante sea menor a 54 dólares?

Solución Se pide determinar el número de estudiantes que debe ir en el grupo. Entonces,

Identifique la variable

$$x = \text{cantidad de estudiantes en el grupo}$$

La información del problema se podría organizar como se indica a continuación.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de estudiantes en el grupo	x
Costo del autobús por estudiante	$\frac{450}{x}$
Costo del boleto por estudiante	$50 - 0.10x$

Ahora planteamos el modelo.

Plantee el modelo

costo del autobús de cada estudiante + costo del boleto para cada estudiante < 54

$$\frac{450}{x} + (50 - 0.10x) < 54$$

Resuelva

$$\frac{450}{x} - 4 - 0.10x < 0 \qquad \text{Sustracción de 54}$$

$$\frac{450 - 4x - 0.10x^2}{x} < 0 \qquad \text{Denominador común}$$

$$\frac{4500 - 40x - x^2}{x} < 0 \qquad \text{Multiplicación por 10}$$

$$\frac{(90 + x)(50 - x)}{x} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

	$(-\infty, -90)$	$(-90, 0)$	$(0, 50)$	$(50, \infty)$
Signo de $90 + x$	−	+	+	+
Signo de $50 - x$	+	+	+	−
Signo de x	−	−	+	+
Signo de $\dfrac{(90 + x)(50 - x)}{x}$	+	−	+	−

El diagrama de signos muestra que la solución de la desigualdad es $(-90, 0) \cup (50, \infty)$. Debido a que no podemos tener un número negativo de estudiantes, se infiere que el grupo debe tener más de 50 estudiantes para que el total del costo por persona sea menor de 54 dólares. ■

1.7 Ejercicios

1–6 ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S cumplen con la desigualdad.

1. $3 - 2x \le \frac{1}{2}$

2. $2x - 1 \ge x$

3. $1 < 2x - 4 \le 7$

4. $-2 \le 3 - x < 2$

5. $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}$

6. $x^2 + 2 < 4$

7–28 ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

7. $2x - 5 > 3$

8. $3x + 11 < 5$

9. $7 - x \ge 5$

10. $5 - 3x \le -16$

11. $2x + 1 < 0$

12. $0 < 5 - 2x$

13. $3x + 11 \le 6x + 8$

14. $6 - x \ge 2x + 9$

15. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$

16. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

17. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$

18. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$

19. $4 - 3x \le -(1 + 8x)$

20. $2(7x - 3) \le 12x + 16$

21. $2 \le x + 5 < 4$

22. $5 \le 3x - 4 \le 14$

23. $-1 < 2x - 5 < 7$

24. $1 < 3x + 4 \le 16$

25. $-2 < 8 - 2x \le -1$

26. $-3 \le 3x + 7 \le \frac{1}{2}$

27. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \le \dfrac{2}{3}$

28. $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{4 - 3x}{5} \le \dfrac{1}{4}$

29–62 ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

29. $(x + 2)(x - 3) < 0$

30. $(x - 5)(x + 4) \ge 0$

31. $x(2x + 7) \ge 0$

32. $x(2 - 3x) \le 0$

33. $x^2 - 3x - 18 \le 0$

34. $x^2 + 5x + 6 > 0$

35. $2x^2 + x \ge 1$

36. $x^2 < x + 2$

37. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$

38. $5x^2 + 3x \ge 3x^2 + 2$

39. $x^2 > 3(x + 6)$

40. $x^2 + 2x > 3$

41. $x^2 < 4$

42. $x^2 \ge 9$

43. $-2x^2 \le 4$

44. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \le 0$

45. $x^3 - 4x > 0$

46. $16x \le x^3$

47. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \ge 0$

48. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$

49. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$

50. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$

51. $\dfrac{2x+1}{x-5} \le 3$

52. $\dfrac{3+x}{3-x} \ge 1$

53. $\dfrac{4}{x} < x$

54. $\dfrac{x}{x+1} > 3x$

55. $1 + \dfrac{2}{x+1} \le \dfrac{2}{x}$

56. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{x} \ge 1$

57. $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{6}{x} \ge 1$

58. $\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{5}{x+1} + 4$

59. $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-2}$

60. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \le 0$

61. $x^4 > x^2$

62. $x^5 > x^2$

63–76 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

63. $|x| \le 4$

64. $|3x| < 15$

65. $|2x| > 7$

66. $\frac{1}{2}|x| \ge 1$

67. $|x-5| \le 3$

68. $|x+1| \ge 1$

69. $|2x-3| \le 0.4$

70. $|5x-2| < 6$

71. $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 2$

72. $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \ge 4$

73. $|x+6| < 0.001$

74. $3 - |2x+4| \le 1$

75. $8 - |2x-1| \ge 6$

76. $7|x+2| + 5 > 4$

77–80 ■ Se proporciona una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contiene valores absolutos.

77. Todos los números reales x menores que 3 unidades a partir del 0

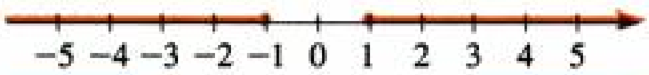
78. Todos los números reales x de más de 2 unidades a partir del 0

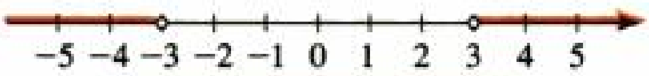
79. Todos los números reales x de por lo menos 5 unidades a partir del 7

80. Todos los números reales x cuando mucho de 4 unidades a partir del 2

81–86 ■ Está graficado un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

81.


82.


83.


84.


85.


86.


87–90 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como un número real.

87. $\sqrt{16 - 9x^2}$

88. $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

89. $\left(\dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$

90. $\sqrt[4]{\dfrac{1-x}{2+x}}$

91. Resuelva la desigualdad con respecto a x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

a) $a(bx - c) \ge bc$ **b)** $a \le bx + c < 2a$

92. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

Aplicaciones

93. Escalas de temperatura Aplique la relación entre C y F dada en el ejemplo 9 para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde al intervalo de temperatura $20 \le C \le 30$.

94. Escalas de temperatura ¿Qué intervalo de la escala de Celsius corresponde al intervalo $50 \le F \le 95$?

95. Costo de la renta de un automóvil Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.

Plan A: 30 dólares por día y 10 centavos por milla

Plan B: 50 dólares por día y gratis millas recorridas ilimitadas

¿Para qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero?

96. Costos de las llamadas de larga distancia Una compañía telefónica ofrece dos planes de larga distancia.

Plan A: 25 dólares por mes y 5 centavos por minuto

Plan B: 5 dólares por mes y 12 centavos por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia el plan B sería ventajoso desde el punto de vista financiero?

97. Costos de manejo de un automóvil Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Jane compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre 6400 y 7100 dólares para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que puede recorrer con su nuevo automóvil?

98. Cantidad de millas por galón de gasolina La cantidad de millas que recorre un vehículo particular por cada galón de gasolina, manejado a v millas por hora, se obtiene mediante la fórmula $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, siempre que v esté entre 10 millas/h y 75 millas/h. ¿Para qué velocidades la cantidad de millas recorridas por galón es 30 millas/galón o más?

99. Gravedad La fuerza gravitacional F que ejerce la Tierra sobre un objeto cuya masa es de 100 kg se determina mediante la ecuación

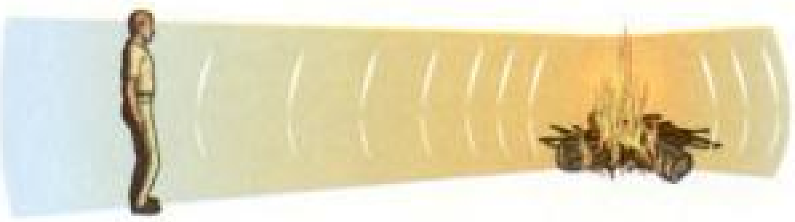
$$F = \frac{4\,000\,000}{d^2}$$

donde d es la distancia en km del objeto desde el centro de la Tierra y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias la fuerza que ejerce la Tierra sobre este objeto estará entre 0.0004 N y 0.01 N?

100. Temperatura de una hoguera En las cercanías de una hoguera, la temperatura T en °C a una distancia de x metros desde el centro de la hoguera se determina mediante

$$T = \frac{600\,000}{x^2 + 300}$$

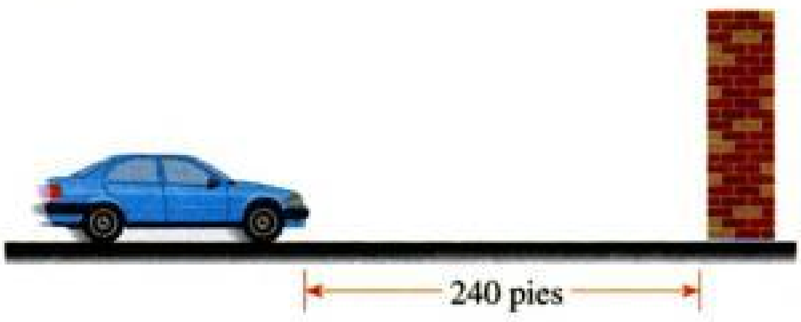
¿A qué distancias del centro del fuego la temperatura será menor de 500°C?



101. Distancia de frenado Para un cierto modelo de automóvil la distancia d que requiere para detenerse si está viajando a una velocidad v millas/h se encuentra mediante la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde d se mide en pies. Kerry desea que su distancia de frenado no exceda 240 pies. ¿Entre qué rango de velocidad debe viajar?



102. Ganancia de un fabricante Si un fabricante vende x unidades de un cierto producto, sus ingresos R y sus costos C todo en dólares, son

$$R = 20x$$
$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Aplique el hecho de que

$$\text{ganancia} = \text{ingresos} - \text{costos}$$

para determinar cuántas unidades debe vender para disfrutar de una ganancia de por lo menos 2400 dólares.

103. Temperatura del aire A medida que el aire seco asciende, se expande, y al hacerlo se enfría a un ritmo de alrededor de 1°C por cada 100 metros que sube, hasta casi los 12 km.

a) Si la temperatura del suelo es de 20°C, plantee una fórmula para la temperatura a una altura h.

b) ¿Que temperaturas se pueden esperar si un aeroplano despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

104. Precio del boleto de avión Una aerolínea que fleta aviones observa que en sus vuelos del sábado desde Filadelfia a Londres, los 120 lugares se venderán si el precio del boleto es de 200 dólares. Pero por cada 3 dólares de incremento en el precio del boleto, los lugares vendidos disminuirán en uno.

a) Determine una fórmula para el número de lugares vendidos si el precio del boleto es P dólares.

b) En un cierto periodo, el número de lugares vendidos para este vuelo varían entre 90 y 115. ¿Cuál fue el intervalo correspondiente de precios para el boleto?

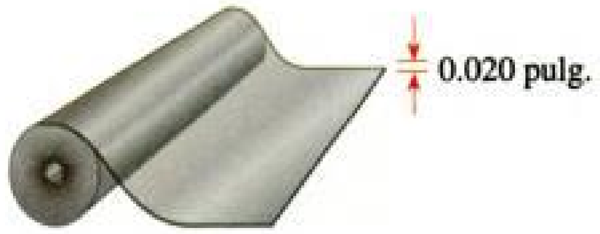
105. Costo de una función de teatro Un barco en el río ofrece funciones de teatro y el viaje en autobús para grupos de personas con las siguientes bases. Alquilar un autobús cuesta al grupo 360 dólares, que los del grupo deben aportar por partes iguales. Los boletos para la función de teatro cuestan normalmente 30 dólares cada uno, pero se les descuentan 25 centavos de dólar por cada persona del grupo. ¿Cuántas personas deben ir en grupo para que el costo de la tarifa del autobús más el boleto de la función de teatro sea de menos de 39 dólares por persona?

106. Cercado de un jardín Una mujer tiene 120 pies de una cerca resistente a los venados. Quiere delimitar un huerto rectangular en su terreno que mida por lo menos 800 pies cuadrados. ¿Qué valores son posibles para el largo de dicho huerto rectangular?

107. Espesor de un material laminado Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con una base de nailon) de 0.020 pulg. de espesor, con una tolerancia de 0.003 pulg.

a) Determine una desigualdad que contenga valores absolutos y que describa el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

b) Resuelva la desigualdad que encontró en el inciso a).



108. Estaturas posibles La estatura promedio de un varón adulto es de 68.2 pulg. y 95% de los varones adultos tiene una altura h que cumple la desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \le 2$$

Resuelva la desigualdad para determinar el intervalo de estaturas.

Descubrimiento • Debate

109. ¿Con las potencias se conserva el orden? Si $a < b$, ¿es $a^2 < b^2$? (Compruebe tanto el valor positivo como el negativo para a y b.) Si $a < b$, ¿es $a^3 < b^3$? Con base en sus observaciones plantee una regla general con respecto a la relación entre a^n y b^n cuando $a < b$ y n es un entero positivo.

110. ¿Qué es lo que está mal aquí? Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver $1 < 3/x$ multiplicando ambos miembros por x, para obtener $x < 3$, de modo que la solución sería $(-\infty, 3)$. Pero esto es falso; por ejemplo, $x = -1$ está en este intervalo, pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense con respecto al *signo* de x). Resuelva luego la desigualdad correctamente.

111. Uso de las distancias para resolver desigualdades que contienen valores absolutos Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre a y b en la recta numérica. Para cualquier número x, ¿qué representan $|x - 1|$ y $|x - 3|$? Aplique esta interpretación para resolver geométricamente la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

1.8 Geometría analítica

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación existente entre las variables de la ecuación. En esta sección se trata el plano coordenado.

El plano coordenado

El plano cartesiano lleva ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650), aunque otro francés, Pierre Fermat (1601-1665) también inventó los principios de la geometría analítica al mismo tiempo. (Véanse sus biografías en las páginas 112 y 652.)

Al igual que los puntos sobre una recta se pueden representar con números reales para formar la recta numérica, los puntos sobre un plano se pueden identificar por medio de pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacerlo, trazamos dos rectas de números reales entre sí y que se cortan en el 0 de cada recta. Por lo regular, una recta es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical y la dirección posi-tiva es hacia arriba; recibe el nombre de **eje *y***. El punto de intersección del eje x y del eje y es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, llamados I, II, III y IV en la figura 1. (Los puntos que se localizan *sobre* los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

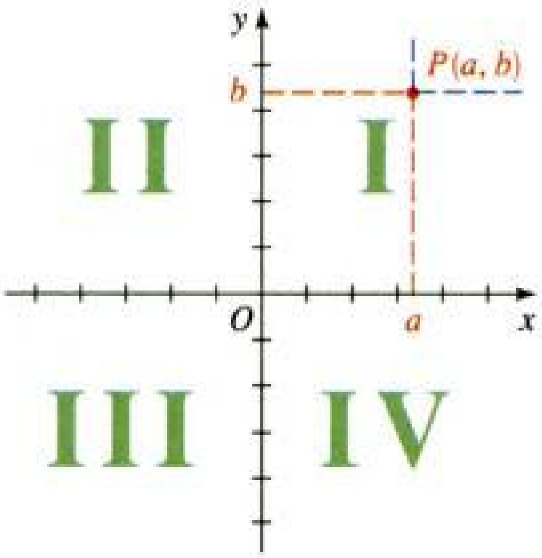


Figura 1

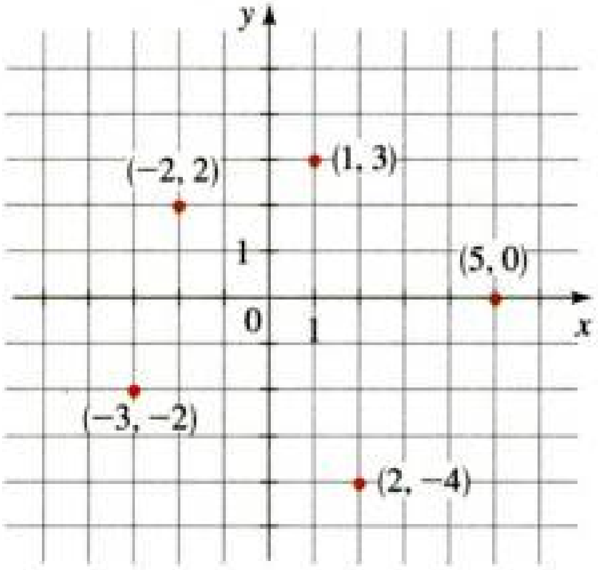


Figura 2

Aunque la notación para un punto (a, b) es la misma que la notación para un intervalo abierto, el contexto debe ayudar a aclarar qué es lo que se quiere representar.

Cualquier punto P en el plano coordenado se puede ubicar por medio de un único **par ordenado** de números (a, b), como se muestra en la figura 1. El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; y el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Podemos pensar que las coordenadas de P son como su "domicilio" porque especifican su ubicación en el plano. En la figura 2 se muestran varios puntos con sus coordenadas.

Las coordenadas son como domicilios

Las coordenadas de un punto en el plano xy determinan exclusivamente su ubicación. Podríamos decir que las coordenadas son como el "domicilio" o la dirección del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de la mayor parte de los edificios se dan de hecho como coordenadas. La ciudad se divide en cuadrantes donde la Main Street es el eje vertical (Norte-Sur) y S. Temple Street es el eje horizontal (Este-Oeste). Una dirección tal como

1760 W 2100 S

señala un lugar 17.6 cuadras al oeste de Main Street y 21 cuadras al sur de S. Temple Street. (Es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible para cualquiera que no conozca la ciudad localizar de manera inmediata cualquier dirección, tan fácil como cuando uno localiza un punto sobre el plano coordenado.

Ejemplo 1 Gráficas de regiones en el plano coordenado

Describa y grafique las regiones representadas mediante cada conjunto.

a) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$ b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

Solución

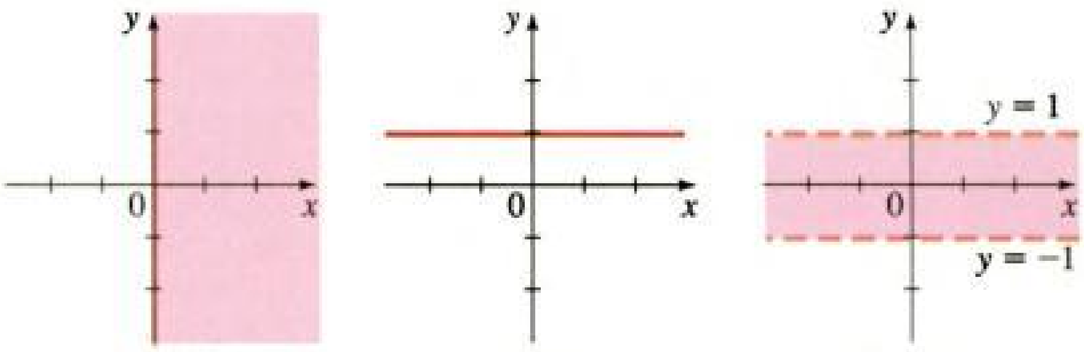
a) Los puntos cuyas coordenada x son 0 o positivas quedan en el eje y o a la derecha de él, como se muestra en la figura 3(a).

b) El conjunto de todos los puntos con coordenada y igual a 1 es una recta horizontal situada una unidad por arriba del eje de las x, como se ilustra en la figura 3(b).

c) Recuerde que en la sección 1.7 se estableció que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

Entonces, la región dada consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas y quedan entre -1 y 1. Por consiguiente, la región consiste en todos los puntos que están entre las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$, pero no sobre ellas. Estas rectas se ilustran como líneas discontinuas en la figura 3(c) para señalar que los puntos sobre esas rectas no están en el conjunto.



a) $x \geq 0$ b) $y = 1$ c) $|y| < 1$

Figura 3

■

Fórmulas para la distancia y el punto medio

Ahora determinaremos una fórmula para la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano. Recuerde que en la sección 1.1 se estableció que la distancia entre los puntos a y b sobre una recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. Entonces, de acuerdo con la figura 4, la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre la línea vertical debe ser $|y_2 - y_1|$.

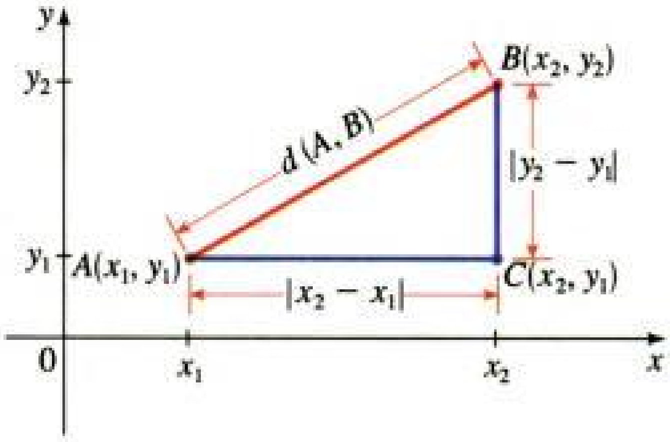


Figura 4

Puesto que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula de la distancia

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2 Aplicación de la fórmula para la distancia

¿Cuál de los puntos $P(1, -2)$ o $Q(8, 9)$ está más cerca al punto $A(5, 3)$?

Solución Según la fórmula de la distancia, tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$
$$d(Q, A) = \sqrt{(5 - 8)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, de modo que P está más cerca a A (véase la figura 5). ■

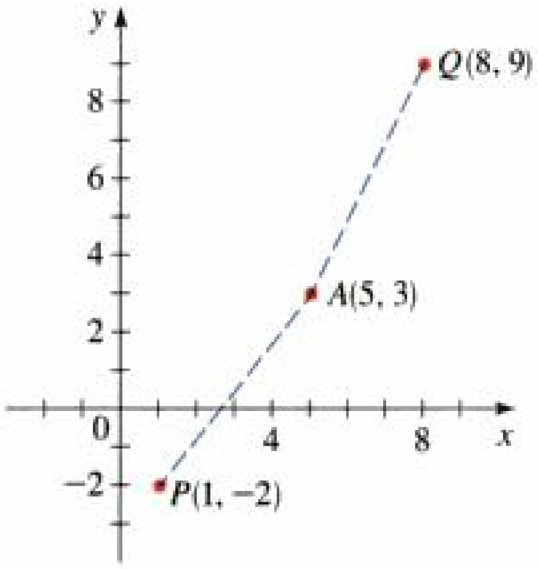


Figura 5

Ahora determinemos las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une el punto $A(x_1, y_1)$ con el punto $B(x_2, y_2)$. En la figura 6 vemos que los triángulos APM y MQB son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales.

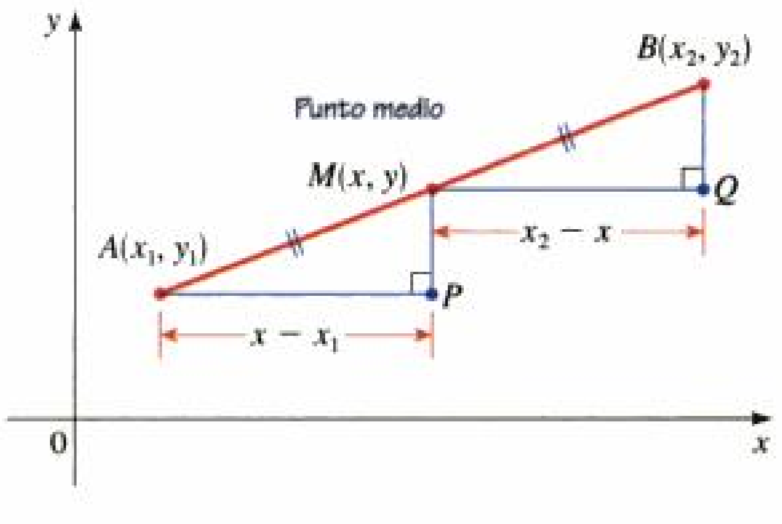


Figura 6

Se infiere entonces que $d(A, P) = d(M, Q)$ y que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Al determinar el valor de x, en esta ecuación, tenemos $2x = x_1 + x_2$, y entonces $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. De igual manera, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta desde $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 3 Aplicación de la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo al probar que sus dos diagonales se bisecan.

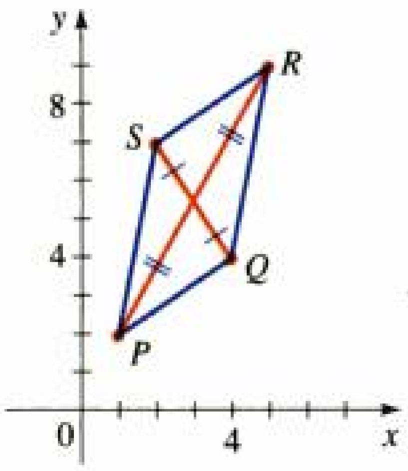


Figura 7

Solución Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse. El punto medio de la diagonal PR es

$$\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{2 + 9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

y el punto medio de la diagonal QS es

$$\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{4 + 7}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

de modo que ambas diagonales se bisecan, como se ilustra en la figura 7. (Un teorema de la geometría elemental establece que el cuadrilátero es por lo tanto un paralelogramo.) ■

Gráficas de las ecuaciones con dos variables

Principio fundamental de la geometría analítica

Un punto (x, y) pertenece a una gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Una **ecuación de dos variables**, tal como $y = x^2 + 1$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto (x, y) **satisface** la ecuación si la ecuación es verdadera cuando los valores para x y y se sustituyen en dicha ecuación. Por ejemplo, el punto (3, 10) satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto (1, 3) no porque $3 \neq 1^2 + 1$.

Gráfica de una ecuación

La **gráfica** de una ecuación con x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano coordenado que satisfacen la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de modo que para graficar una ecuación trazamos tantos puntos como podamos y, luego, los unimos por medio de una curva suave.

Ejemplo 4 Trazo de una gráfica mediante la ubicación de puntos

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

Solución Primero resolvemos la ecuación para encontrar el valor de

$$y = 2x - 3$$

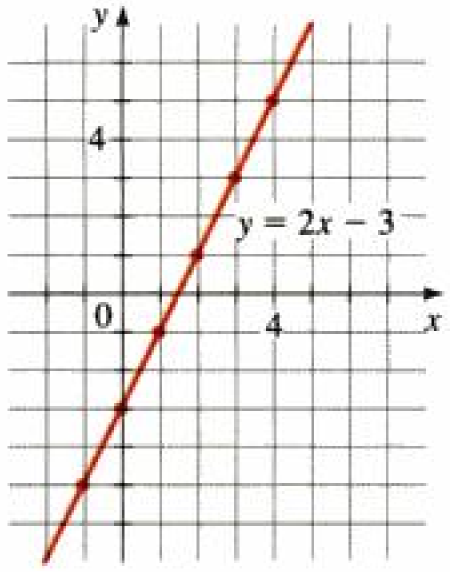


Figura 8

Esto ayuda a calcular las coordenadas y en la tabla siguiente.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$
4	5	$(4, 5)$

Claro, hay una infinidad de puntos en la gráfica, por lo que es imposible localizar todos. Pero entre más puntos ubiquemos mejor imaginaremos cómo es la gráfica que representa la ecuación. Trazamos los puntos que encontramos en la figura 8; al parecer forman una recta. Entonces, para completar la gráfica unimos los puntos mediante una línea. (En la sección 1.10 comprobamos que la gráfica de esta ecuación es realmente una recta.) ■

Ejemplo 5 Trazo de una gráfica mediante la ubicación de puntos

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

Un análisis exhaustivo de las parábolas y sus propiedades geométricas se presenta en el capítulo 10.

Solución Determinamos algunos de los puntos que satisfacen a la ecuación en la tabla siguiente. En la figura 9 graficamos estos puntos y los unimos mediante una curva suave. Una curva con esta forma se llama *parábola*. ■

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

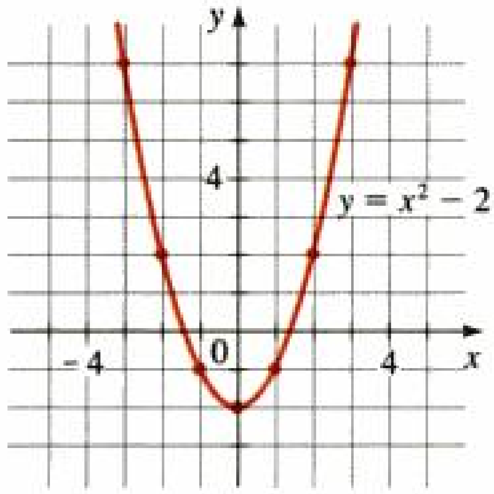


Figura 9

Ejemplo 6 Gráfica de una ecuación que contiene valores absolutos

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

Solución Elaboramos una tabla de valores:

x	$y = \lvert x \rvert$	(x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

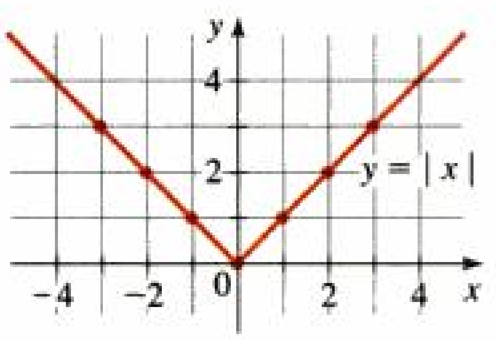


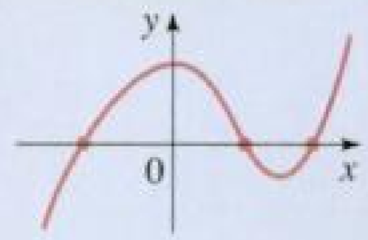
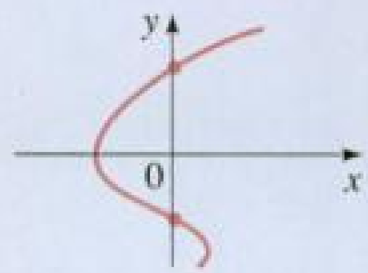
Figura 10

En la figura 10 localizamos estos puntos y los utilizamos para graficar la ecuación. ■

Intersecciones con los ejes

Las coordenadas x de los puntos donde una gráfica corta al eje x se denominan **intersección con el eje x** de la gráfica y se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas y de los puntos donde una gráfica corta al eje y se llaman **intersección con el eje y** de la gráfica y se determinan haciendo $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

Definición de las intersecciones con los ejes

Intersecciones	Manera de determinarlas	En qué parte de la gráfica se encuentran
Intersecciones con el eje x Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de una ecuación corta al eje x	Hacer $y = 0$ y determinar x	
Intersecciones con el eje y Las coordenadas y de los puntos donde la gráfica de una ecuación corta al eje y	Hacer $x = 0$ y determinar y	

Ejemplo 7 Determinación de las intersecciones

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

Solución Para encontrar las intersecciones con el eje x hacemos $y = 0$ y determinamos x. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 && \text{Se hace } y = 0 \\ x^2 &= 2 && \text{Suma de 2 a ambos miembros} \\ x &= \pm\sqrt{2} && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Las intersecciones con el eje x son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para calcular las intersecciones con el eje y hacemos $x = 0$ y calculamos y. Entonces,

$$\begin{aligned} y &= 0^2 - 2 && \text{Se hace } x = 0 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

La intersección con el eje y es -2.

La gráfica de esta ecuación se ilustra en el ejemplo 5. Se repite en la figura 11 con las intersecciones señaladas. ■

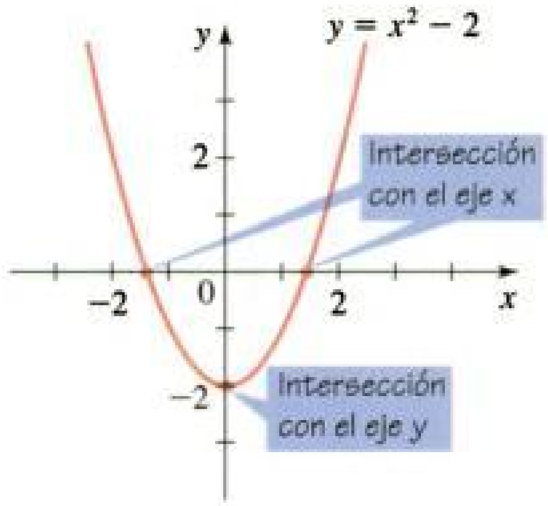


Figura 11

Circunferencia

Hasta ahora hemos estudiado cómo determinar la gráfica de una ecuación que contiene x y y. El problema inverso consiste en encontrar una ecuación de una gráfica,

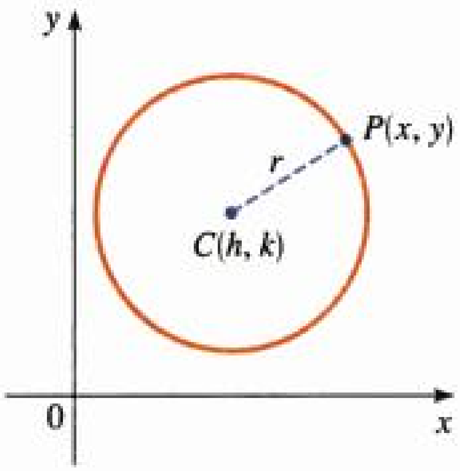


Figura 12

es decir, una ecuación que representa a una curva dada en el plano xy. Las coordenadas de los puntos de la curva, y no otros, satisfacen tal ecuación. Ésta es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica según lo formularon Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada mediante una ecuación algebraica, entonces las reglas del álgebra se pueden utilizar para analizar la curva.

Para ejemplificar este tipo de problema, determinemos la ecuación de una circunferencia con radio r y centro en (h, k). Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es r (véase la figura 12). Por lo tanto, P está sobre la circunferencia si y sólo si $d(P, C) = r$. De acuerdo con la fórmula de la distancia tenemos

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos miembros}$$

Ésta es la ecuación deseada.

Ecuación de una circunferencia

Una ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Esta expresión se denomina **forma ordinaria** de la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 8 Gráfica de una circunferencia

Grafique las ecuaciones.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Solución

a) Volvemos a escribir la ecuación como $x^2 + y^2 = 5^2$, y advertimos que es una ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en el origen. Su gráfica se ilustra en la figura 13.

b) Reescribimos la ecuación como $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$, y nos percatamos de que es una ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en $(2, -1)$. Su gráfica se muestra en la figura 14.

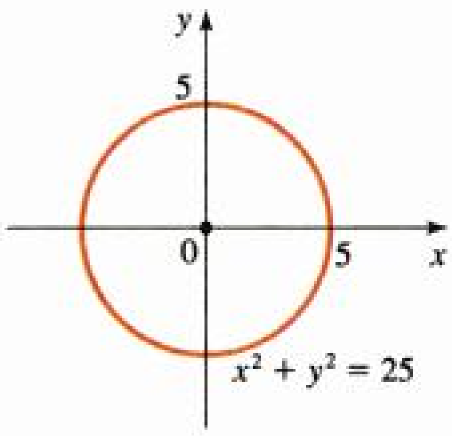


Figura 13

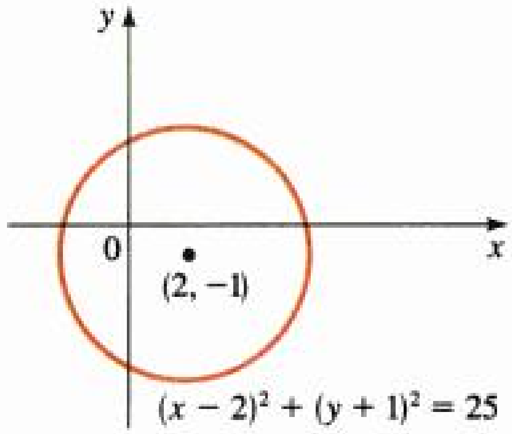


Figura 14

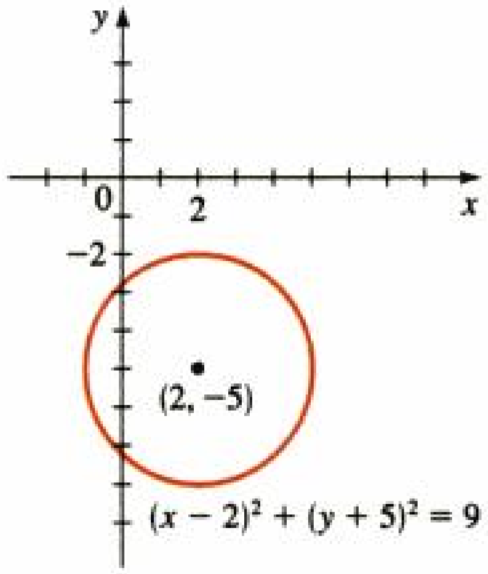


Figura 15

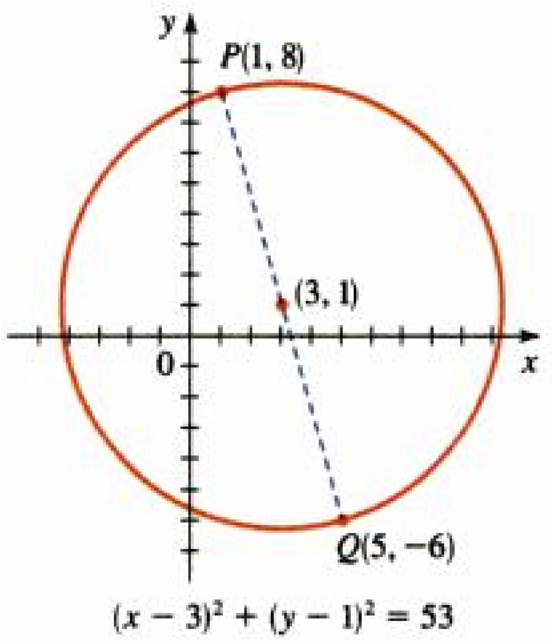


Figura 16

Ejemplo 9 Determinación de la ecuación de una circunferencia

a) Determinar la ecuación de una circunferencia cuyo radio es 3 y su centro es $(2, -5)$.

b) Encontrar una ecuación de la circunferencia cuyos puntos $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$ son los extremos de su diámetro.

Solución

a) Aplicamos la ecuación de la circunferencia con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, y obtenemos

$$(x-2)^2+(y+5)^2=9$$

La gráfica se ilustra en la figura 15.

b) Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro PQ, de modo que, según la fórmula del punto medio, el centro es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2}\right) = (3, 1)$$

El radio r es la distancia desde P hasta el centro, por lo que según la fórmula de la distancia

$$r^2 = (3-1)^2 + (1-8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2+(y-1)^2=53$$

La gráfica se muestra en la figura 16. ■

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-1)^2 &= 53 && \text{Forma ordinaria} \\ x^2-6x+9+y^2-2y+1 &= 53 && \text{Desarrollo de los cuadrados} \\ x^2-6x+y^2-2y &= 43 && \text{Sustracción de 10 para obtener la forma desarrollada} \end{aligned}$$

Suponga que se nos da la ecuación desarrollada de una circunferencia. Entonces, para encontrar su centro y su radio, tenemos que expresar la ecuación en su forma ordinaria. Esto quiere decir que tenemos que invertir los pasos de los cálculos anteriores, y para hacerlo necesitamos conocer qué sumar a una expresión como $x^2 - 6x$ para convertirla en un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado, como se hace en el ejemplo siguiente.

La técnica de completar cuadrados se utiliza en muchos contextos en el álgebra. En la sección 1.5 utilizamos dicha técnica para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 10 Identificación de la ecuación de una circunferencia

Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ representa una circunferencia y determine su centro y su radio.

Solución Primero agrupamos los términos que contienen x y los términos que contienen y. Luego completamos el cuadrado dentro de cada grupo. Es decir, completamos el cuadrado para $x^2 + 2x$ sumando $\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = 1$, y completamos el cuadrado de $y^2 - 6y$ sumando $\left[\frac{1}{2}\cdot(-6)\right]^2 = 9$.

$$\begin{aligned} (x^2+2x\quad)+(y^2-6y\quad) &= -7 && \text{Se agrupan los términos} \\ (x^2+2x+1)+(y^2-6y+9) &= -7+1+9 && \text{Completamos el cuadrado sumando 1 y 9 a ambos miembros} \\ (x+1)^2+(y-3)^2 &= 3 && \text{Factorizamos y simplificamos} \end{aligned}$$

Debemos sumar las mismas cantidades a *ambos miembros* para conservar la igualdad

Al comparar esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, vemos que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada sí representa una circunferencia con centro en $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$. ■

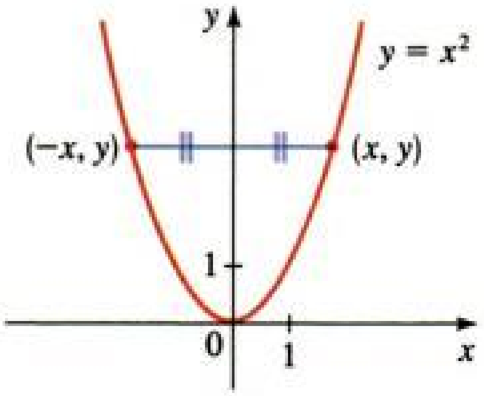
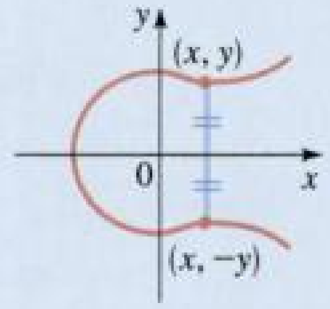
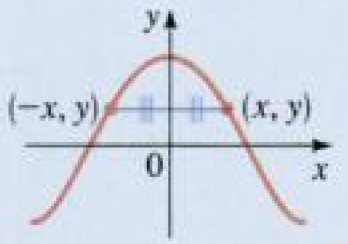
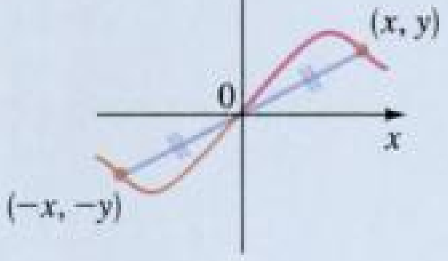


Figura 17

Simetría

En la figura 17 se muestra la gráfica de $y = x^2$. Observe que la parte de la gráfica a la izquierda del eje y es la imagen especular de la parte que se encuentre a la derecha del eje y. La razón es que si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces también lo está $(-x, y)$, y estos puntos son los reflejos de los otros con respecto al eje y. En esta situación decimos que la gráfica es **simétrica con respecto al eje y**. Con un razonamiento similar, decimos que una gráfica es **simétrica con respecto al eje x** si siempre que haya un punto (x, y) en la gráfica, hay un punto $(x, -y)$. Una gráfica **es simétrica con respecto al origen** si habiendo un punto (x, y) en la gráfica, hay un punto $(-x, -y)$.

Definición de simetría

Tipo de simetría	Cómo probar la simetría	Cómo se ve la gráfica (las figuras de esta sección)	Significado geométrico
Simetría con respecto al eje x	La ecuación permanece sin cambios cuando y es reemplazada por $-y$	 (Figuras 13, 18)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje x
Simetría con respecto al eje y	La ecuación permanece sin cambios cuando x es reemplazada por $-x$	 (Figuras 9, 10, 11, 13, 17)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje y
Simetría con respecto al origen	La ecuación permanece sin cambios cuando x es reemplazada por $-x$ y y por $-y$	 (Figuras 13, 19)	La gráfica no cambia cuando gira 180° con respecto al origen

Los ejemplos restantes de esta sección muestran cómo la simetría ayuda a trazar las gráficas de las ecuaciones.

Ejemplo 11 Aplicación de la simetría para trazar una gráfica

Pruebe si la ecuación $x = y^2$ es simétrica y trace la gráfica correspondiente.

Solución Si reemplazamos a y por $-y$ en la ecuación $x = y^2$, obtenemos

$$x = (-y)^2 \quad \text{Reemplazo de } y \text{ por } -y$$
$$x = y^2 \quad \text{Simplificación}$$

la ecuación permanece sin cambios. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje x. Pero al cambiar x por $-x$ se tiene la ecuación $-x = y^2$, lo cual no es lo mismo que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

Aplicamos la simetría con respecto al eje x para trazar la gráfica ubicando puntos para $y > 0$ y luego reflejamos la gráfica en el eje x como se muestra en la figura 18.

y	$x = y^2$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)

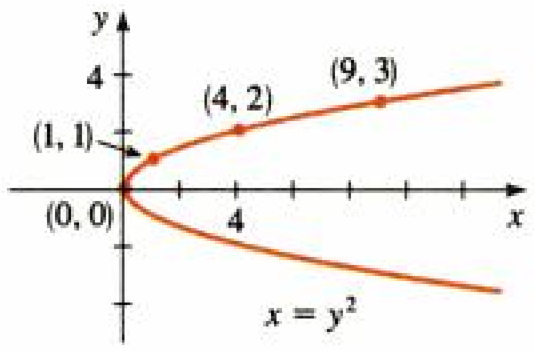


Figura 18

Ejemplo 12 Aplicación de la simetría para trazar una gráfica

Pruebe si la ecuación $y = x^3 - 9x$ es simétrica y trace la gráfica.

Solución Si reemplazamos x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación, tenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \quad \text{Reemplazo de } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$
$$-y = -x^3 + 9x \quad \text{Simplificación}$$
$$y = x^3 - 9x \quad \text{Multiplicación por } -1$$

y la ecuación no se modifica. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica se elabora localizando puntos para $x > 0$ y luego aplicando la simetría con respecto al origen (véase la figura 19).

x	$y = x^3 - 9x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	−8	(1, −8)
1.5	−10.125	(1.5, −10.125)
2	−10	(2, −10)
2.5	−6.875	(2.5, −6.875)
3	0	(3, 0)
4	28	(4, 28)

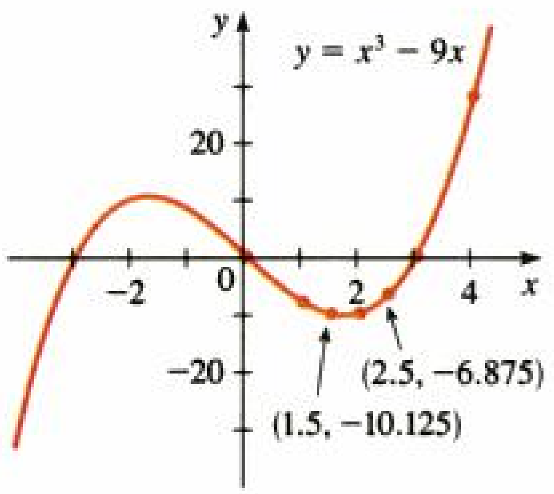


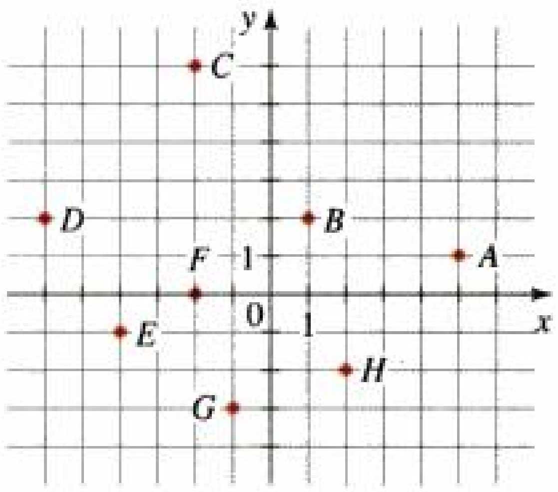
Figura 19

1.8 Ejercicios

1. Grafique los puntos dados en el plano coordenado:

$$(2, 3), (-2, 3), (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$$

2. Encuentre las coordenadas de los puntos mostrados en la figura.

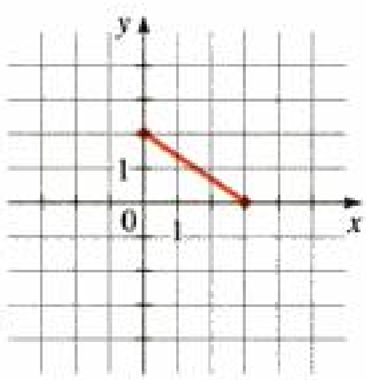


3–6 ■ Está graficado un par de puntos.

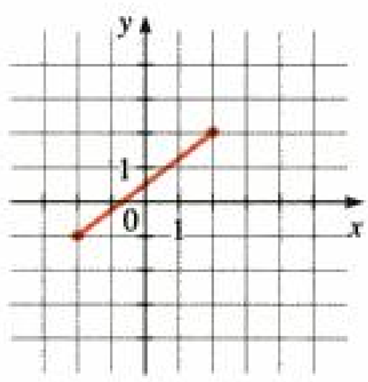
a) Determine la distancia entre ellos.

b) Calcule el punto medio del segmento que los une.

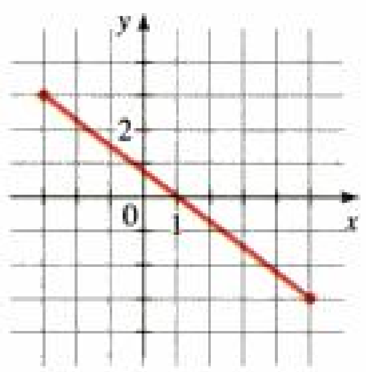
3.



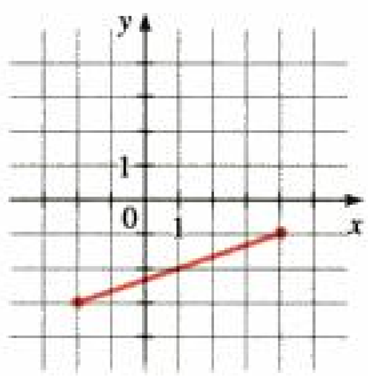
4.



5.



6.



7–12 ■ Está graficado un par de puntos.

a) Grafique los puntos en un plano coordenado.

b) Determine la distancia entre ellos.

c) Determine el punto medio del segmento de recta que los une.

7. $(0, 8), (6, 16)$

8. $(-2, 5), (10, 0)$

9. $(-3, -6), (4, 18)$

10. $(-1, -1), (9, 9)$

11. $(6, -2), (-6, 2)$

12. $(0, -6), (5, 0)$

13. Dibuje el rectángulo con vértices $A(1, 3)$, $B(5, 3)$, $C(1, -3)$, y $D(5, -3)$ en un plano coordenado. Calcule el área del rectángulo.

14. Dibuje el paralelogramo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$ y $D(7, 6)$ en un plano coordenado. Calcule el área del paralelogramo.

15. Localice los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 3)$, en un plano coordenado. Trace los segmentos AB, BC, CD y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$, y cuál es su área?

16. Localice los puntos $P(5, 1)$, $Q(0, 6)$ y $R(-5, 1)$, en un plano coordenado. ¿Dónde se debe situar el punto S para que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Calcule el área de este cuadrado.

17–26 ■ Dibuje la región dada por el conjunto.

17. $\{(x, y) \mid x \geq 3\}$

18. $\{(x, y) \mid y < 3\}$

19. $\{(x, y) \mid y = 2\}$

20. $\{(x, y) \mid x = -1\}$

21. $\{(x, y) \mid 1 < x < 2\}$

22. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$

23. $\{(x, y) \mid |x| > 4\}$

24. $\{(x, y) \mid |y| \leq 2\}$

25. $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$

26. $\{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } |y| \leq 3\}$

27. ¿Cuál de los puntos $A(6, 7)$ o $B(-5, 8)$ está más cercano al origen?

28. ¿Cuál de los puntos $C(-6, 3)$ o $D(3, 0)$ está más cercano al punto $E(-2, 1)$?

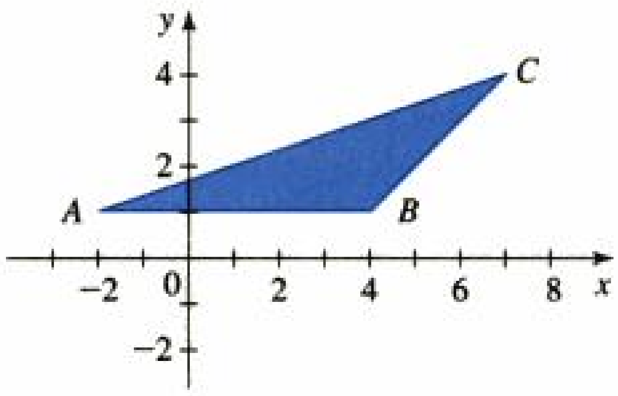
29. ¿Cuál de los puntos $P(3, 1)$ o $Q(-1, 3)$ está más cercano al punto $R(-1, -1)$?

30. **a)** Demuestre que los puntos $(7, 3)$ y $(3, 7)$ están a la misma distancia del origen.

b) Demuestre que los puntos (a, b) y (b, a) están a la misma distancia del origen.

31. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

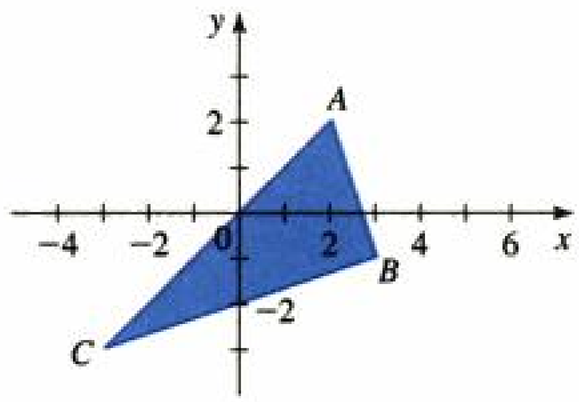
32. Determinar el área del triángulo ilustrado en la figura.



33. Refiérase al triángulo ABC de la figura.

a) Demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo usando el inverso del teorema de Pitágoras (véase pág. 54).

b) Encuentre el área del triángulo ABC.



34. Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es un triángulo rectángulo aplicando el inverso del teorema de Pitágoras. Calcule el área del triángulo.

35. Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

36. Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales probando que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

37. Encuentre un punto sobre el eje de la y que es equidistante de los puntos $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

38. Determine las longitudes de las medianas de un triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una *mediana* es un segmento de recta que parte de un vértice y se dirige al punto medio del lado opuesto.)

39. Grafique los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$, sobre un plano coordenado. ¿Dónde debe estar el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo?

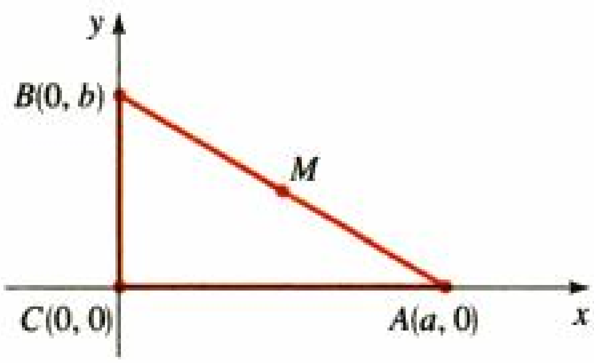
40. Si $M(6, 8)$ es el punto medio del segmento de recta AB, y si A tiene las coordenadas $(2, 3)$, determine las coordenadas de B.

41. **a)** Trace el paralelogramo con vértices $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(1, 4)$.

b) Determine los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

c) De la parte b) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

42. El punto M de la figura es el punto medio del segmento de recta AB. Demuestre que M es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



43–46 ■ Determine si los puntos dados están en la gráfica de la ecuación.

43. $x - 2y - 1 = 0$; $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

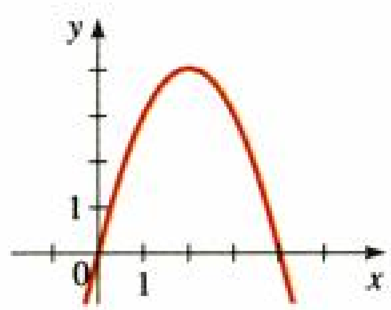
44. $y(x^2 + 1) = 1$; $(1, 1), (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$

45. $x^2 + xy + y^2 = 4$; $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

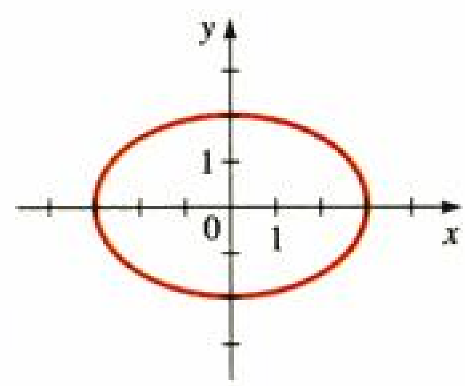
46. $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

47–50 ■ Se proporcionan una ecuación y su gráfica. Calcule las intersecciones con los ejes x y y.

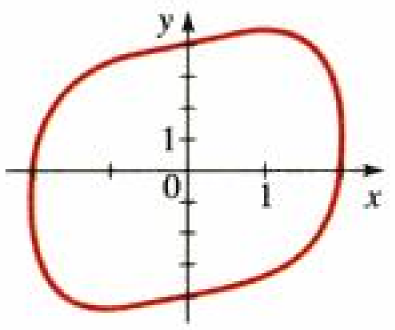
47. $y = 4x - x^2$



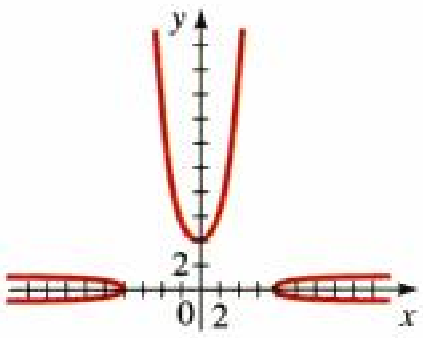
48. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



49. $x^4 + y^2 - xy = 16$



50. $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$



51–70 ■ Elabore una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Encuentre las intersecciones con los ejes x y y e investigue si hay simetría.

51. $y = -x + 4$

52. $y = 3x + 3$

53. $2x - y = 6$

54. $x + y = 3$

55. $y = 1 - x^2$

56. $y = x^2 + 2$

57. $4y = x^2$

58. $8y = x^3$

59. $y = x^2 - 9$

60. $y = 9 - x^2$

61. $xy = 2$

62. $y = \sqrt{x + 4}$

63. $y = \sqrt{4 - x^2}$

64. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

65. $x + y^2 = 4$

66. $x = y^3$

67. $y = 16 - x^4$

68. $x = |y|$

69. $y = 4 - |x|$

70. $y = |4 - x|$

71–76 ■ Investigue si la ecuación es simétrica.

71. $y = x^4 + x^2$

72. $x = y^4 - y^2$

73. $x^2y^2 + xy = 1$

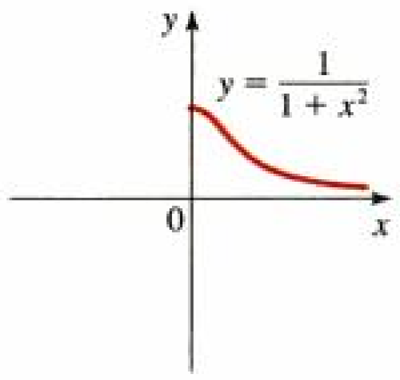
74. $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

75. $y = x^3 + 10x$

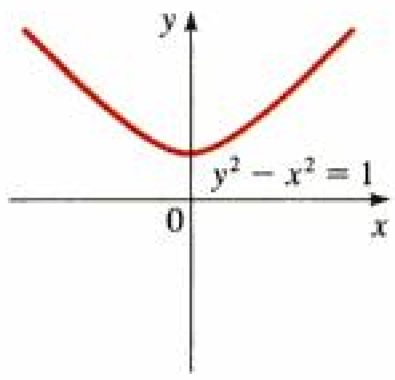
76. $y = x^2 + |x|$

77–80 ■ Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

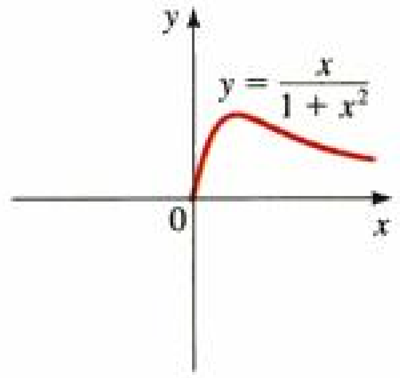
77. Simétrica con respecto al eje y



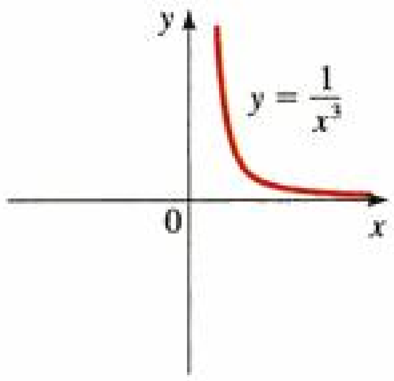
78. Simétrica con respecto al eje x



79. Simétrica con respecto al origen



80. Simétrica con respecto al origen



81–86 ■ Encuentre una ecuación de la circunferencia que cumpla con las condiciones dadas.

81. Centro $(2, -1)$; radio 3

82. Centro $(-1, -4)$; radio 8

83. Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

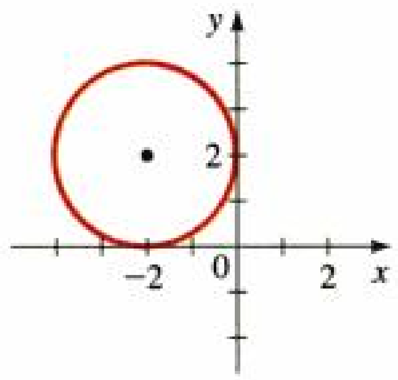
84. Los extremos de un diámetro son $P(-1, 1)$ y $Q(5, 9)$

85. Centro $(7, -3)$; tangente al eje x

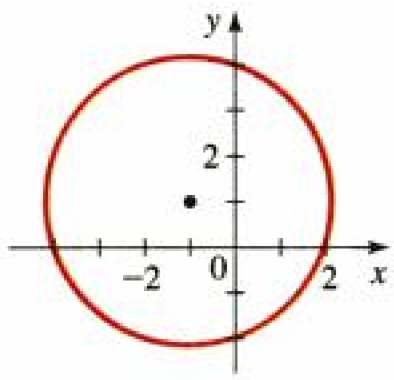
86. La circunferencia está en el primer cuadrante y es tangente tanto al eje x como al eje y; radio 5

87–88 ■ Determine la ecuación de la circunferencia mostrada en la figura.

87.



88.



89–94 ■ Demuestre que la ecuación representa una circunferencia, y determine el centro y el radio.

89. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

90. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

91. $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

92. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

93. $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

94. $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

95–96 ■ Grafique la región dada por el conjunto.

95. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

96. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

97. Determine el área de la región que queda fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

98. Grafique la región en el plano coordenado que cumple con las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 9$ y $y \geq |x|$. ¿Cuál es el área de esta región?

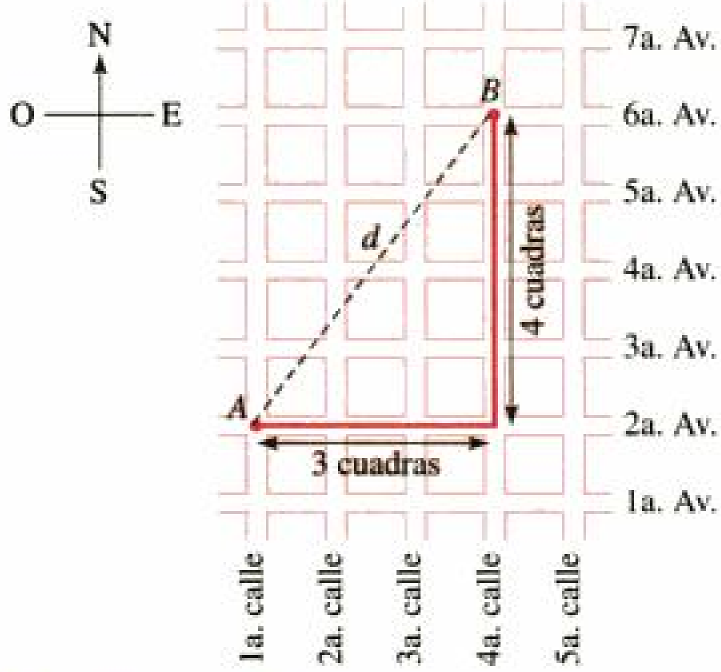
Aplicaciones

99. Distancias en una ciudad Una ciudad tiene calles que van de norte a sur y avenidas que van de oriente a poniente, todas tienen igual separación. Las calles y las avenidas están numeradas en forma consecutiva, según se muestra en la figura. La distancia *si uno va caminando* entre los puntos A y B es de 7 cuadras, es decir, 3 cuadras al oriente y 4 cuadras al norte. Para encontrar las *distancias en línea recta d*, tenemos que usar la fórmula de la distancia.

a) Determine la distancia en línea recta (en cuadras) entre A y B.

b) Calcule la distancia que se recorre caminando y la distancia en línea recta entre la esquina de la cuarta calle y la segunda avenida y la esquina de la calle decimoprimera y la vigesimosexta avenida.

c) ¿Qué tiene que ser cierto en relación con los puntos P y Q si la distancia que se recorre caminando entre P y Q es igual a la distancia en línea recta entre P y Q?



100. Punto intermedio Dos amigos viven en la ciudad descrita en el ejercicio 99: uno en la esquina de la 3a. calle y la 7a. avenida, y el otro en la esquina de la 27a. calle y la 17a. avenida. Con frecuencia se encuentran en un café que está a mitad del camino a sus casas.

a) ¿En qué intersección está situado el café?

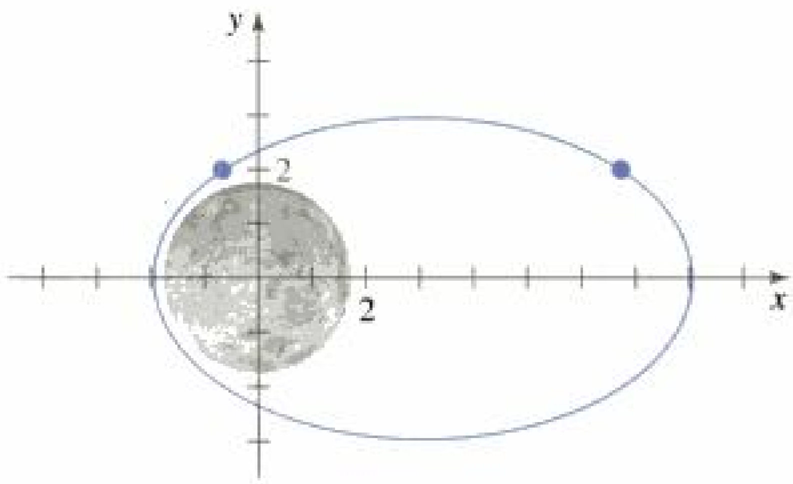
b) ¿Cuánto tiene que caminar cada uno de ellos para llegar al café?

101. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Un plano coordenado que contiene la órbita está establecido de tal manera que el centro de la Luna está en el origen, como se muestra en la gráfica. Las distancias se miden en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a) Según la gráfica, determine lo más cerca y lo más lejos que puede estar el satélite al centro de la Luna.

b) Hay dos puntos en la órbita que tienen coordenada y igual a 2. Encuentre las coordenadas x de estos puntos y calcule sus distancias al centro de la Luna.



NASA

Descubrimiento • Debate

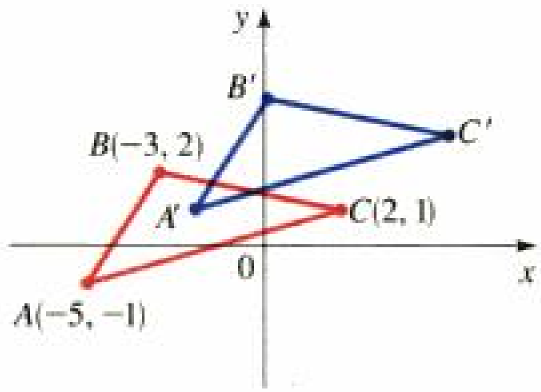
102. Cambio del plano de coordenadas Suponga que cada punto del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

a) ¿A qué punto nuevo se desplaza el punto (5, 3)?

b) ¿A qué punto nuevo se desplaza el punto (a, b)?

c) ¿Qué punto se desplazó a (3, 4)?

d) El triángulo ABC de la figura se movió al triángulo $A'B'C'$. Determine las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



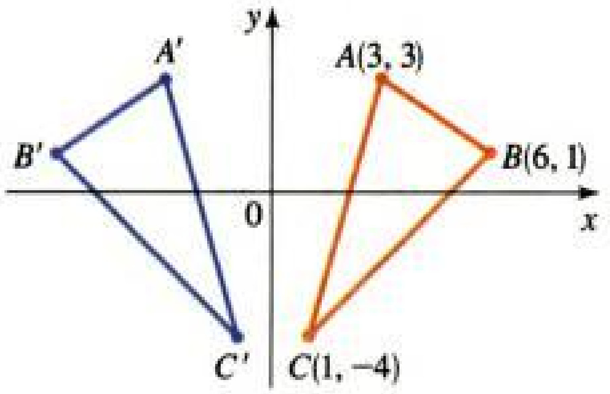
103. Reflexión en el plano coordenado Suponga que el eje y actúa como un espejo que refleja cada punto de la derecha de él en un punto a la izquierda de él.

a) ¿En qué punto se refleja el punto $(3, 7)$?

b) ¿En qué punto se refleja el punto (a, b)?

c) ¿Qué punto se refleja en el punto $(-4, -1)$?

d) El triángulo ABC de la figura se refleja como el triángulo $A'B'C'$. Determine las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



104. Completar un segmento de recta Grafique los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$ en un plano coordenado. Si M es el punto medio del segmento rectilíneo AB, determine las coordenadas de B. Escriba una breve descripción de los pasos que siguió para determinar B, y las razones que lo llevaron a seguirlos.

105. Completar un paralelogramo Grafique los puntos $P(0, 3)$, $Q(2, 2)$ y $R(5, 3)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde se debe colocar el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo. Escriba una breve explicación de los pasos que siguió y las razones de hacerlo así.

106. ¿Circunferencia, punto o conjunto vacío? Complete los cuadrados de la ecuación general $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ y simplifique el resultado tanto como sea posible. ¿En qué condiciones de los coeficientes a, b y c esta ecuación representa una circunferencia? ¿Y un solo punto? ¿Y un conjunto vacío? En el caso de que la ecuación sí represente una circunferencia, determine el centro y el radio.

107. ¿Se intersecan las circunferencias?

a) Calcule el radio de cada uno de los círculos del par y la distancia entre sus centros. Aplique después esta información para determinar si las circunferencias se intersecan.

(i) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9;$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4;$
$(x - 5)^2 + (y - 14)^2 = 9$

(iii) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1;$
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$

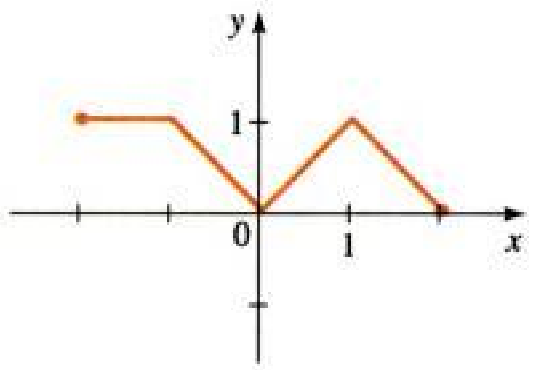
b) ¿Cómo se puede decir, sólo con saber los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, si las circunferencias se intersecan? Escriba un párrafo pequeño en el que explique cómo se decidiría esto y trace una gráfica para ilustrar su respuesta.

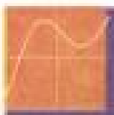
108. Cómo hacer simétrica a una gráfica La gráfica mostrada en la figura no es simétrica con respecto al eje x ni al eje y ni al origen. Añada segmentos de recta a la gráfica de modo que muestre la simetría que se pide. En cada caso añada lo menos posible.

a) Simetría con respecto al eje x

b) Simetría con respecto al eje y

c) Simetría con respecto al origen





1.9 Calculadoras para graficar y resolución de ecuaciones y desigualdades por métodos gráficos

En las secciones 1.5 y 1.7 resolvimos ecuaciones y desigualdades mediante álgebra. En la sección anterior aprendimos a trazar la gráfica de una ecuación en un plano coordenado. En esta sección usaremos las gráficas para resolver ecuaciones y desigualdades. Para hacerlo, primero necesitamos dibujar la gráfica mediante un dispositivo que grafique. Entonces, empezamos por dar algunos criterios que ayuden a utilizar con efectividad los dispositivos de graficación.

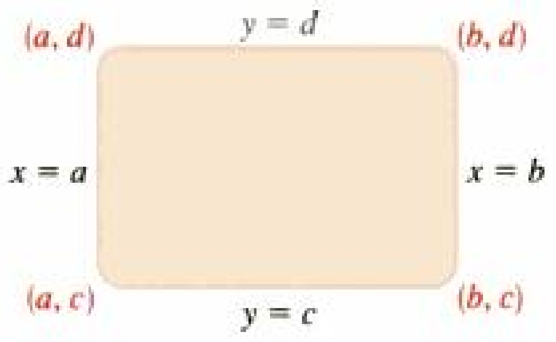


Figura 1
Rectángulo de visión $[a, b]$ por $[c, d]$

Uso de una calculadora para graficar

Una calculadora para elaborar gráficas o una computadora muestran, una parte de la gráfica de una ecuación en un rectángulo de la pantalla, llamado **rectángulo de visión**. La pantalla que aparece automáticamente proporciona una imagen incompleta o engañosa, de modo que es importante elegir con cuidado el rectángulo de visión. Si elegimos que los valores de x varíen desde un valor mínimo de `Xmin` $= a$ a un valor máximo de `Xmax` $= b$ y que los valores de y varíen de un valor mínimo de `Ymin` $= c$ a un valor máximo de `Ymax` $= d$, entonces la parte que se muestra queda en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

como se ilustra en la figura 1. Nos referimos a él como el rectángulo de visión $[a, b]$ por $[c, d]$.

Los dispositivos para graficar trazan la gráfica de una ecuación tal como usted lo podría hacer. Localizan los puntos de la forma (x, y) para un cierto número de valores de x, igualmente separados entre a y b. Si la ecuación no está definida para un valor de x o si el valor correspondiente de y queda fuera del rectángulo de visión, el dispositivo ignora este valor y pasa al siguiente valor de x. La máquina une cada uno de los puntos con el graficado anteriormente para generar una representación de la gráfica de la ecuación.

Ejemplo 1 Elección de un rectángulo de visión aceptable

Grafique la ecuación $y = x^2 + 3$ en un rectángulo de visión aceptable.

Solución Experimentemos con diferentes rectángulos de visión. Iniciemos con el rectángulo $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$, de modo que tenemos

`Xmin` $= -2$ `Ymin` $= -2$

`Xmax` $= 2$ `Xmax` $= 2$

La gráfica que resulta y que se muestra en la figura 2(a) ¡no se ve! La razón es que $x^2 \geq 0$, de modo que $x^2 + 3 \geq 3$ para todas las x. Por consiguiente, la gráfica está totalmente arriba del rectángulo de visión, de modo que este rectángulo no es adecuado. Si agrandamos el rectángulo a $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$, como en la figura 2(b), empezamos a ver una parte de la gráfica.

Intentemos ahora con el rectángulo $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$. La gráfica en la figura 2(c) parece dar una visión más completa de la gráfica. Si agrandamos aún más el rectángulo, como en la figura 2(d), la gráfica nos muestra con claridad que la intersección con el eje y es 3.

Entonces, el rectángulo $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ proporciona una representación aceptable de la gráfica.

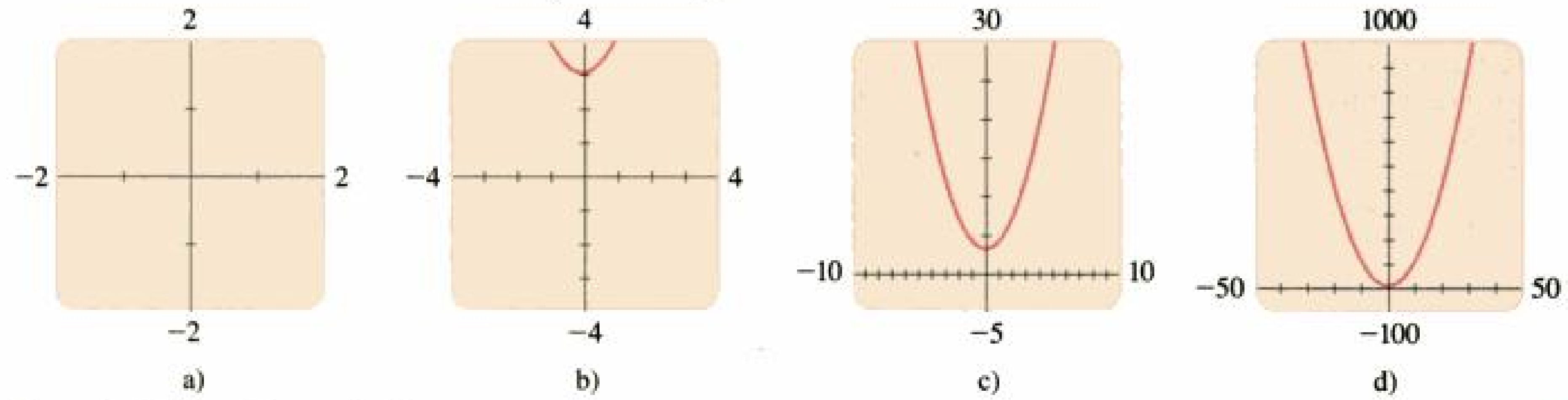


Figura 2 Gráficas de $y = x^2 + 3$ ∎

Alan Turing (1912-1954) estuvo en el centro de dos hechos determinantes del siglo xx: la Segunda Guerra Mundial y la invención de las computadoras. Cuando tenía 23 años, Turing puso su marca en las matemáticas al resolver un problema importante de las bases matemáticas que había planteado David Gilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1928 (véase pág. 708). En esta investigación inventó una máquina teórica, que en la actualidad se conoce como máquina de Turing. Esta máquina fue la inspiración para las computadoras modernas digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial, Turing estuvo a cargo del esfuerzo que hicieron los británicos para descifrar los códigos alemanes. El éxito total que tuvo en esta empresa tuvo un papel decisivo en la victoria de los aliados. Para llevar a cabo los numerosos pasos lógicos requeridos para descifrar un mensaje en código Turing elaboró procedimientos de decisión similares a los programas modernos para las computadoras. Después de la guerra ayudó a desarrollar las primeras computadoras electrónicas de los británicos. También fue de los primeros en trabajar en la inteligencia artificial y en modelos para computadora de los procesos biológicos. Turing murió envenenado a la edad de 42 años luego de comer una manzana que había sido rociada misteriosamente con cianuro.

Ejemplo 2 Dos gráficas en la misma pantalla

Grafique las ecuaciones $y = 3x^2 - 6x + 1$ y $y = 0.23x - 2.25$ juntas en el rectángulo de visión $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$. ¿Las gráficas se cortan en este rectángulo de visión?

Solución La figura 3(a) muestra las características esenciales de ambas gráficas. Una es una parábola y la otra es una recta. Se ve como si las gráficas se cortaran cerca del punto $(1, -2)$. Sin embargo, si hacemos un acercamiento de la zona que rodea al punto como se muestra en la figura 3(b), observamos que aunque las gráficas casi se tocan, en realidad no se intersecan.

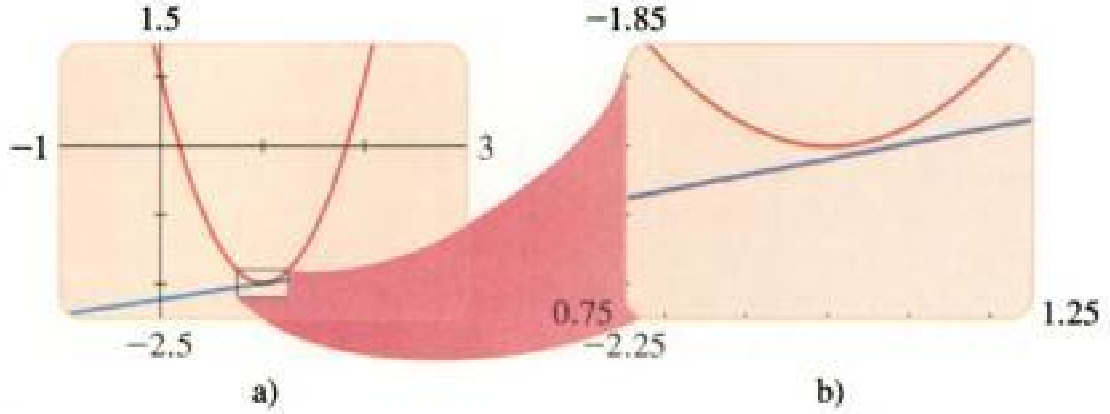


Figura 3 ■

De acuerdo con los ejemplos 1 y 2, vemos que la elección del rectángulo de visión tiene gran importancia en el aspecto de la gráfica. Si usted desea una vista global de la gráfica, tiene que seleccionar un rectángulo de visión relativamente grande para ver la gráfica. En cambio, si desea investigar los detalles, debe efectuar un acercamiento con un rectángulo de visión pequeño que muestre sólo la característica de interés.

La mayor parte de las calculadoras con las que se pueden elaborar gráficas sólo pueden graficar ecuaciones en las que y está aislada en un miembro. El siguiente ejemplo muestra cómo graficar ecuaciones que no tienen esta propiedad.

Ejemplo 3 Gráfica de una circunferencia

Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Primero despejamos y, para que quede en un solo miembro.

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{Se resta } x^2$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, la circunferencia se describe mediante las gráficas de *dos* ecuaciones:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera ecuación representa la mitad superior de la circunferencia (porque $y \geq 0$), y la segunda representa la mitad inferior de la circunferencia (porque $y \leq 0$). Si graficamos la primera ecuación en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por

$[-2, 2]$, obtenemos la semicircunferencia mostrada en la figura 4 a). La gráfica de la segunda ecuación es la semicircunferencia de la figura 4 b). Al graficar estas semicircunferencias juntas en el mismo rectángulo de visión obtenemos la figura completa en la figura 4 c).

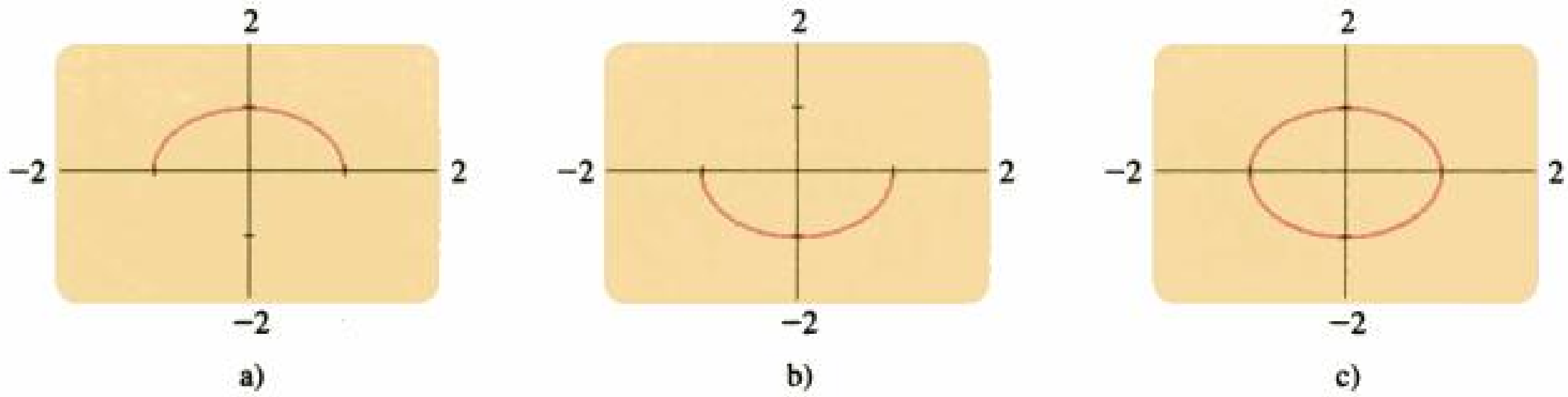


Figura 4 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ ■

La gráfica de la figura 4(c) parece algo aplanada. La mayor parte de las calculadoras permiten fijar las escalas en los ejes de modo que las circunferencias se vean como tales. En las calculadoras TI-82 y TI-83, en el menú ZOOM, escogemos **ZSquare** para fijar adecuadamente las escalas. (En la TI-86, la orden es **Zsq**.)

Resolución de ecuaciones mediante métodos gráficos

En la sección 1.5 aprendimos a resolver ecuaciones. Para resolver una ecuación como

$$3x - 5 = 0$$

aplicamos el **método algebraico**. Esto quiere decir que usaremos las reglas del álgebra para aislar a x en un lado de la ecuación. Consideramos a x como una *incógnita* y aplicamos las reglas del álgebra para cazarla. He aquí los pasos de la solución:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 0 & \\ 3x &= 5 & \text{Suma de 5} \\ x &= \tfrac{5}{3} & \text{División entre 3} \end{aligned}$$

De modo que la solución es $x = \frac{5}{3}$.

También podemos resolver la ecuación mediante el **método gráfico**. En este método consideramos a x como una *variable* y trazamos la gráfica de la ecuación

$$y = 3x - 5$$

Valores diferentes de x dan valores diferentes para y. El objetivo es determinar el valor de x para el cual $y = 0$. Según la gráfica de la figura 5 vemos que $y = 0$ cuando $x \approx 1.7$. Por consiguiente, la solución es $x \approx 1.7$. Observe que de acuerdo con la gráfica obtenemos una solución aproximada.

"El álgebra es una ciencia festiva", diría el tío Jakob. "Vamos a caza de un animalito cuyo nombre desconocemos, así que lo llamamos x. Cuando nos embolsamos nuestra presa, la calamos y le damos su nombre correcto."
ALBERT EINSTEIN

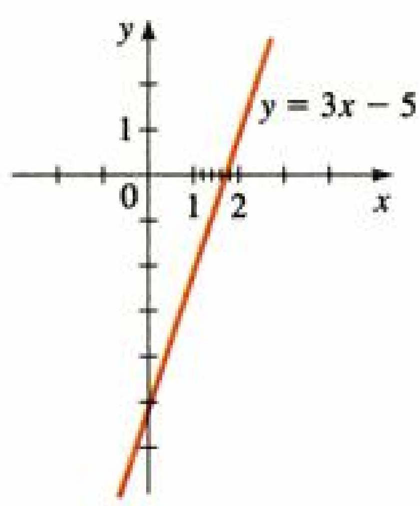


Figura 5

Estos métodos están resumidos en el recuadro siguiente.

Resolución de una ecuación

Método algebraico

Utilice las reglas del álgebra para aislar la incógnita x en un lado de la ecuación.

Ejemplo: $2x = 6 - x$

$3x = 6$ Suma de x

$x = 2$ División entre 3

La solución es $x = 2$.

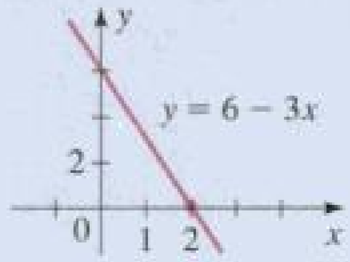
Método gráfico

Pase todos los términos a un lado e iguale todo con y. Trace la gráfica para determinar el valor de x cuando $y = 0$.

Ejemplo: $2x = 6 - x$

$0 = 6 - 3x$

Haga $y = 6 - 3x$ y grafique.



De acuerdo con la gráfica la solución es $x \approx 2$.

El proyecto de descubrimiento de la página 283 describe un método numérico para resolver ecuaciones.

La ventaja del método algebraico es que proporciona respuestas exactas. Asimismo, el proceso de descifrar la ecuación ayuda a entender la estructura algebraica de la ecuación. Por otro lado, en el caso de muchas ecuaciones es difícil o imposible aislar x.

El método gráfico proporciona una aproximación numérica a la respuesta. Esto es una ventaja cuando se desea una respuesta numérica. (Por ejemplo, un ingeniero podría encontrar una respuesta expresada como $x \approx 2.6$ que tiene mayor utilidad inmediata que $x = \sqrt{7}$.) Además, la gráfica de una ecuación ayuda a imaginarnos cómo está relacionada la solución con otros valores de la variable.

Ejemplo 4 Resolución algebraica y por métodos gráficos de una ecuación cuadrática

Resuelva algebraicamente y mediante métodos gráficos las ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 4x + 2 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $x^2 - 4x + 6 = 0$

Solución 1: por medio de álgebra

Aplicamos la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación.

La fórmula cuadrática se estudia en la página 49.

a) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Hay dos soluciones, $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$.

b) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

Hay sólo una solución, $x = 2$.

c) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No hay solución real.

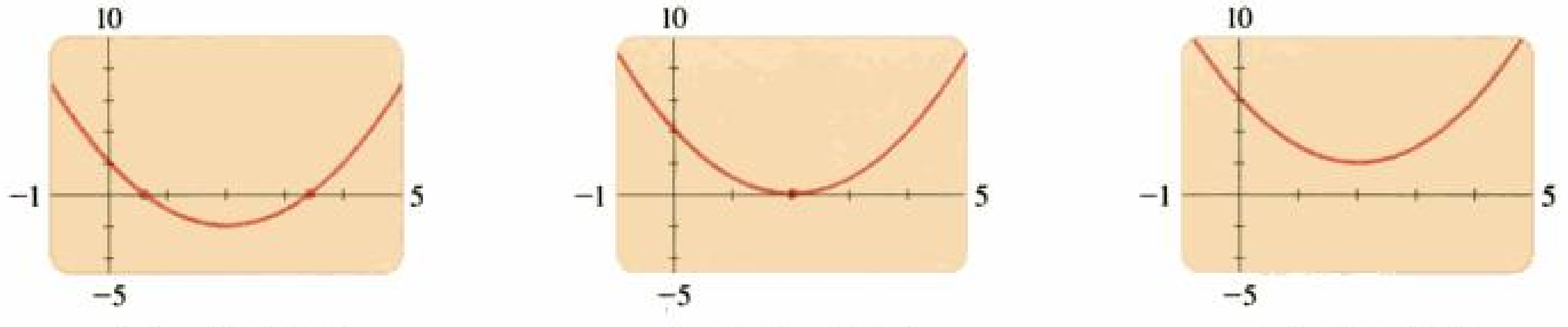
Solución 2: método gráfico

Graficamos las ecuaciones $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 - 4x + 4$, y $y = x^2 - 4x + 6$ en la figura 6. Al determinar las intersecciones con el eje x de las gráficas, encontramos las soluciones siguientes.

a) $x \approx 0.6$ y $x \approx 3.4$

b) $x = 2$

c) No hay intersecciones con el eje x por lo que la ecuación no tiene solución.



a) $y = x^2 - 4x + 2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = x^2 - 4x + 6$

Figura 6

■

Las gráficas de la figura 6 muestran por qué una ecuación cuadrática podría tener dos soluciones, una solución, o ninguna solución real. Demostramos este hecho algebraicamente en la sección 1.5 cuando estudiamos el discriminante.

Ejemplo 5 Otro método gráfico

Resuelva la ecuación en forma algebraica y mediante métodos gráficos: $5 - 3x = 8x - 20$

Solución 1: Método algebraico

$$
\begin{aligned}
5 - 3x &= 8x - 20 \\
-3x &= 8x - 25 && \text{Resta de 5} \\
-11x &= -25 && \text{Resta de } 8x \\
x &= \frac{-25}{-11} = 2\tfrac{3}{11} && \text{División entre } -11 \text{ y simplificación}
\end{aligned}
$$

Solución 2: Método gráfico

Podríamos pasar todos los términos a un lado del signo igual, igualar el resultado a y, y graficar la ecuación resultante. Pero para evitar estos pasos algebraicos, mejor graficamos las dos ecuaciones:

$$y_1 = 5 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = 8x - 20$$

La solución de la ecuación original será el valor de x que hace que y_1 sea igual a y_2; es decir, la solución es la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. Usamos la característica TRACE del comando `intersect` en una calculadora para elaborar gráficas, y vemos que, según la figura 7, la solución es $x \approx 2.27$. ■

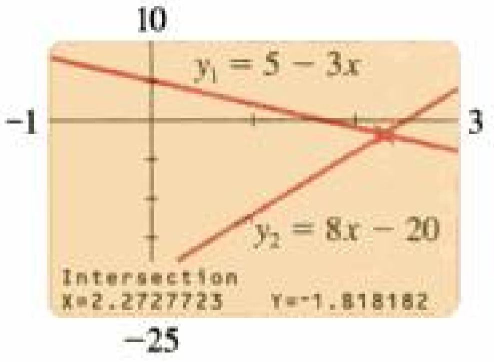


Figura 7

En el ejemplo siguiente aplicamos el método gráfico para resolver una ecuación que es muy difícil de resolver de manera algebraica.

Ejemplo 6 Resolución de una ecuación en un intervalo

Resuelva la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

en el intervalo $[1, 6]$.

Solución Se nos pide calcular todas las soluciones x que cumplen $1 \leq x \leq 6$, de modo que graficaremos la ecuación en un rectángulo de visión para el cual los valores x están restringidos a este intervalo.

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x} = 0 \qquad \text{Resta de } \sqrt{x}$$

También podemos utilizar el comando **zero** para determinar las soluciones, como se muestra en las figuras 8(a) y 8(b).

En la figura 8 se ilustra la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x}$ en el rectángulo de visión $[1, 6]$ por $[-5, 5]$. Hay dos intersecciones con el eje x en esta pantalla; si efectuamos un acercamiento vemos que las soluciones son $x \approx 2.18$ y $x \approx 3.72$.

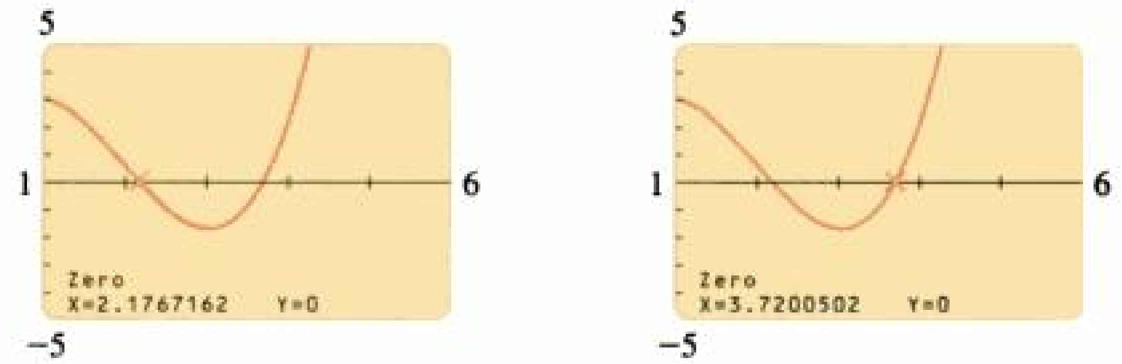


Figura 8 a) b) ■

En realidad, la ecuación del ejemplo 6 tiene cuatro soluciones. Se piden las otras dos soluciones en el ejercicio 57.

Ejemplo 7 Intensidad de la luz

Dos fuentes de luz están separadas 10 m. Una es tres veces más intensa que la otra. La intensidad de la luz L (en luxes) en el punto a x metros desde la fuente más débil es

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

(Véase la figura 9.) Calcule los puntos a los cuales la intensidad de la luz es 4 luxes.

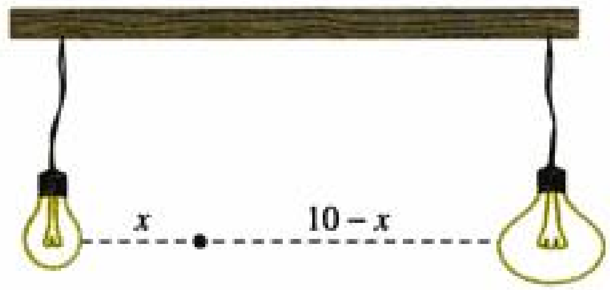


Figura 9

Solución Necesitamos resolver la ecuación

$$4 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

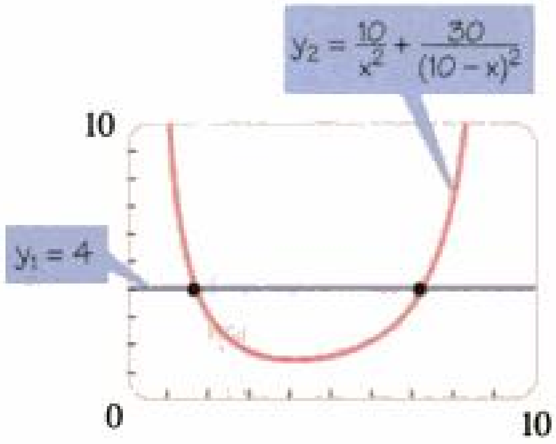


Figura 10

Las gráficas de

$$y_1 = 4 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

se muestran en la figura 10. Al efectuar un acercamiento o usar el comando `intersect` encontramos dos soluciones, $x \approx 1.67431$ y $x \approx 7.1927193$. Entonces, la intensidad de la luz es 4 luxes en los puntos que están a 1.67 y 7.19 de la fuente más débil. ■

Resolución gráfica de desigualdades

Las desigualdades se pueden resolver gráficamente. Para explicar el método resolvamos

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Esta desigualdad está resuelta algebraicamente en la sección 1.7, ejemplo 3. Para resolver la desigualdad gráficamente, dibujamos la gráfica de

$$y = x^2 - 5x + 6$$

El objetivo es calcular aquellos valores de x para los cuales $y \leq 0$. Éstos son simplemente los valores de x para los cuales la gráfica queda abajo del eje x. Podemos ver en la figura 11 que la solución de la desigualdad es el intervalo $[2, 3]$.

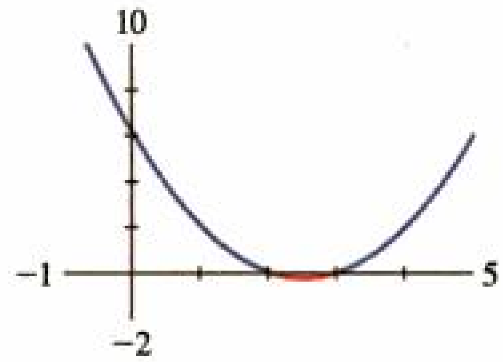


Figura 11
$x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Ejemplo 8 Resolución gráfica de una desigualdad

Resuelva la desigualdad $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \leq 2.0 - 1.4x$.

Solución Graficamos las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2.0 - 1.4x$$

en el mismo rectángulo de visión de la figura 12. Nos interesan los valores de x para los cuales $y_1 \leq y_2$; son los puntos para los cuales la gráfica de y_2 queda sobre la gráfica de y_1 o por arriba de ella. Para determinar el intervalo adecuado, buscamos las coordenadas x de puntos donde las gráficas se cortan. Concluimos que la solución es aproximadamente el intervalo $[-1.45, 0.72]$. ■

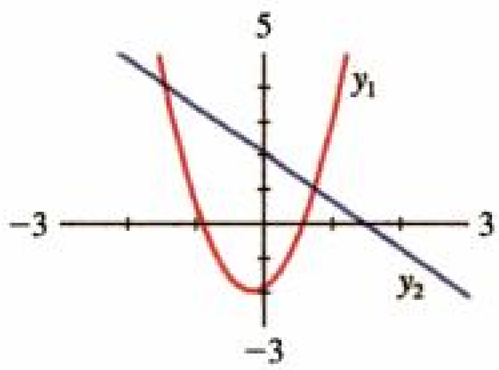


Figura 12
$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$
$y_2 = 2.0 - 1.4x$

Ejemplo 9 Resolución gráfica de una desigualdad

Resuelva la desigualdad $x^3 - 5x^2 \geq -8$.

Solución Escribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$$

y luego graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$

en el rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-15, 15]$, como se ilustra en la figura 13. La solución de la desigualdad consiste en los intervalos en los cuales la gráfica queda sobre el eje x o arriba de él. Al desplazar el cursor a las intersecciones con el eje x encontramos que la solución es $[-1.1, 1.5] \cup [4.6, \infty)$ correcta a una cifra decimal. ■

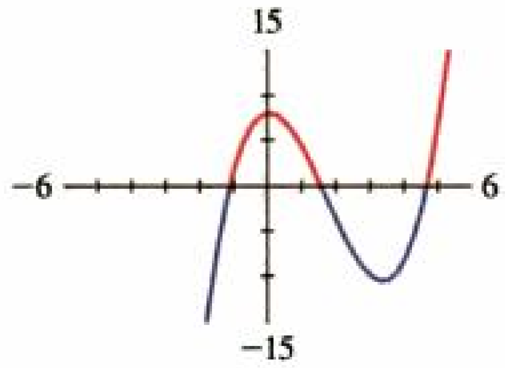


Figura 13
$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$

1.9 Ejercicios

1–6 ■ Utilice una calculadora para graficar o una computadora para decidir qué rectángulo de visión a) a d) genera la gráfica más adecuada de la ecuación.

1. $y = x^4 + 2$

a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$
c) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$
d) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. $y = x^2 + 7x + 6$

a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$
d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. $y = 100 - x^2$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
c) $[-15, 15]$ por $[-30, 110]$
d) $[-4, 4]$ por $[-30, 110]$

4. $y = 2x^2 - 1000$

a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
b) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$
c) $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$
d) $[-25, 25]$ por $[-1200, 200]$

5. $y = 10 + 25x - x^3$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

6. $y = \sqrt{8x - x^2}$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

7–18 ■ Determine un rectángulo de visión adecuado para la ecuación y utilícelo para trazar la gráfica.

7. $y = 100x^2$ **8.** $y = -100x^2$

9. $y = 4 + 6x - x^2$ **10.** $y = 0.3x^2 + 1.7x - 3$

11. $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$ **12.** $y = \sqrt{12x - 17}$

13. $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$ **14.** $y = x(x + 6)(x - 9)$

15. $y = x^4 - 4x^3$ **16.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

17. $y = 1 + |x - 1|$ **18.** $y = 2x - |x^2 - 5|$

19. Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ despejando y y trazando las dos ecuaciones como en el ejemplo 3.

20. Grafique la circunferencia $(y - 1)^2 + x^2 = 1$ despejando y y trazando las dos ecuaciones como en el ejemplo 3.

21. Grafique la ecuación $4x^2 + 2y^2 = 1$ despejando y y trazando las dos ecuaciones que corresponden a las raíces negativa y positiva (Esta gráfica se llama *elipse*.)

22. Grafique la ecuación $y^2 - 9x^2 = 1$ determinando y y trazando las dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas positiva y negativa. (Esta gráfica se llama *hipérbola*.)

23–26 ■ ¿Las gráficas se cortan en el rectángulo de visión dado? Si es así, ¿cuántos puntos de intersección hay?

23. $y = -3x^2 + 6x - \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{7 - \frac{7}{12}x^2}$; $[-4, 4]$ por $[-1, 3]$

24. $y = \sqrt{49 - x^2}$, $y = \frac{1}{5}(41 - 3x)$; $[-8, 8]$ por $[-1, 8]$

25. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

26. $y = x^3 - 4x$, $y = x + 5$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

27–36 ■ Resuelva la ecuación por medio del álgebra y de los métodos gráficos.

27. $x - 4 = 5x + 12$ **28.** $\frac{1}{2}x - 3 = 6 + 2x$

29. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x} = 7$ **30.** $\dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{6}{2x} = \dfrac{5}{2x + 4}$

31. $x^2 - 32 = 0$ **32.** $x^3 + 16 = 0$

33. $16x^4 = 625$ **34.** $2x^5 - 243 = 0$

35. $(x - 5)^4 - 80 = 0$ **36.** $6(x + 2)^5 = 64$

37–44 ■ Resuelva la ecuación gráficamente en el intervalo dado. Dé cada respuesta correcta con dos cifras decimales.

37. $x^2 - 7x + 12 = 0$; $[0, 6]$

38. $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0$; $[-2, 2]$

39. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $[-1, 4]$

40. $16x^3 + 16x^2 = x + 1$; $[-2, 2]$

41. $x - \sqrt{x + 1} = 0$; $[-1, 5]$

42. $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 + x^2}$; $[-1, 5]$

43. $x^{1/3} - x = 0$; $[-3, 3]$

44. $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0$; $[-1, 5]$

45–48 ■ Calcule todas las soluciones reales de la ecuación con dos cifras decimales.

45. $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$ **46.** $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

47. $x(x - 1)(x + 2) = \frac{1}{6}x$ **48.** $x^4 = 16 - x^3$

49–56 ■ Calcule las soluciones de la desigualdad trazando gráficas adecuadas. Proporcione cada respuesta con dos cifras decimales.

49. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

50. $0.5x^2 + 0.875x \leq 0.25$

51. $x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$

52. $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

53. $x^{1/3} < x$

54. $\sqrt{0.5x^2 + 1} \leq 2|x|$

55. $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

56. $(x + 1)^2 \leq x^3$

57. En el ejemplo 6 encontramos dos soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$, las soluciones que quedan entre 1 y 6. Determine dos soluciones más con dos cifras decimales.

Aplicaciones

58. Ganancia estimada Un fabricante de electrodomésticos estima que la ganancia y en dólares que genera la producción x de ollas por mes se determina mediante la ecuación

$$y = 10x + 0.5x^2 - 0.001x^3 - 5000$$

donde $0 \leq x \leq 450$.

a) Grafique la ecuación.

b) ¿Cuántas ollas se tienen que fabricar para empezar a generar ganancias?

c) ¿Para qué valores de x la ganancia de la compañía es mayor que 15 000 dólares?

59. ¿Qué tan lejos puede ver? Si se pone de pie en un barco que va por mar calmo, entonces su estatura x en pies por arriba del nivel del mar se relaciona con la distancia más lejana y en millas que alcanza a ver mediante la ecuación

$$y = \sqrt{1.5x + \left(\frac{x}{5280}\right)^2}$$

a) Grafique la ecuación para $0 \leq x \leq 100$.

b) ¿Qué tan alto tiene que estar usted para ser capaz de alcanzar a ver 10 millas?

Descubrimiento • Debate

60. Notación de las ecuaciones en las calculadoras para graficar Cuado usted introduce los datos de las ecuaciones siguientes en la calculadora, ¿qué tanto difiere lo que usted ve en la pantalla de la manera usual de escribir las ecuaciones? (Verifique en el manual de usuario si no está seguro.)

a) $y = |x|$

b) $y = \sqrt[5]{x}$

c) $y = \dfrac{x}{x - 1}$

d) $y = x^3 + \sqrt[3]{x + 2}$

61. Introducción cuidadosa de los datos de una ecuación Un estudiante desea graficar las ecuaciones

$$y = x^{1/3} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x}{x + 4}$$

en la misma pantalla, de modo que introduce la información siguiente en su calculadora:

$$Y_1 = X\text{^}1/3 \qquad Y_2 = X/X + 4$$

La calculadora grafica dos rectas en lugar de las ecuaciones que el estudiante quería. ¿Qué estuvo mal hecho?

62. Métodos de solución algebraico y gráfico Escriba un breve ensayo para comparar los métodos algebraico y gráfico en la resolución de ecuaciones. Plantee sus propios ejemplos para ilustrar las ventajas y desventajas de cada método.

63. ¿Cuántas soluciones? Este ejercicio trata sobre la familia de ecuaciones

$$x^3 - 3x = k$$

a) Trace las gráficas de

$$y_1 = x^3 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = k$$

en el mismo rectángulo de visión, en el caso de $k = -4$, -2, 0, 2, y 4. ¿Cuántas soluciones de la ecuación $x^3 - 3x = k$ hay en cada caso? Calcule las soluciones correctas con dos cifras decimales

b) ¿Para qué valores de k la ecuación tiene una solución? ¿Dos soluciones? ¿Tres soluciones?

1.10 Rectas

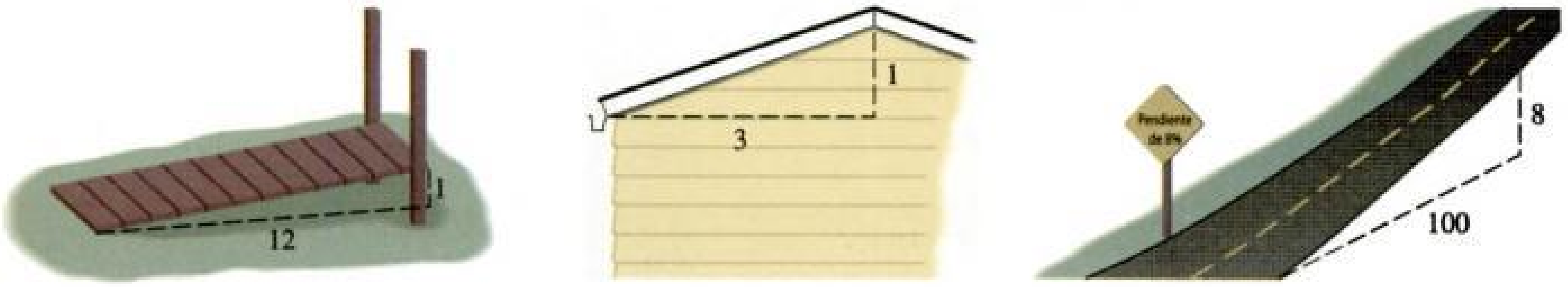
En esta sección determinamos ecuaciones para rectas que están en un plano coordenado. Las ecuaciones dependen de la inclinación de la recta, de modo que empezamos por analizar el concepto de pendiente.

La pendiente de una recta

Primero necesitamos un modo de medir la "inclinación" de una recta, o qué tan rápido se levanta o desciende cuando nos desplazamos desde la izquierda hacia la derecha. Definimos *desplazamiento horizontal* como la distancia que nos movemos a la derecha y *desplazamiento vertical* como la distancia correspondiente que la recta sube o cae. La *pendiente* de una recta es la relación de desplazamiento horizontal a desplazamiento vertical:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

En la figura 1 se muestran situaciones donde la pendiente es importante. Los carpinteros utilizan el término *declive* para dar a entender la pendiente de un techo o de una rampa; el término *rasante* se utiliza para la pendiente de una carretera.



Declive de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$

Declive de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$

Rasante de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

Figura 1

Si una recta está en un plano coordenado, entonces el **desplazamiento horizontal** es el cambio en la coordenada x y el **desplazamiento vertical** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre dos puntos cualesquiera de la recta (véase la figura. 2). Así llegamos a la siguiente definición de pendiente.

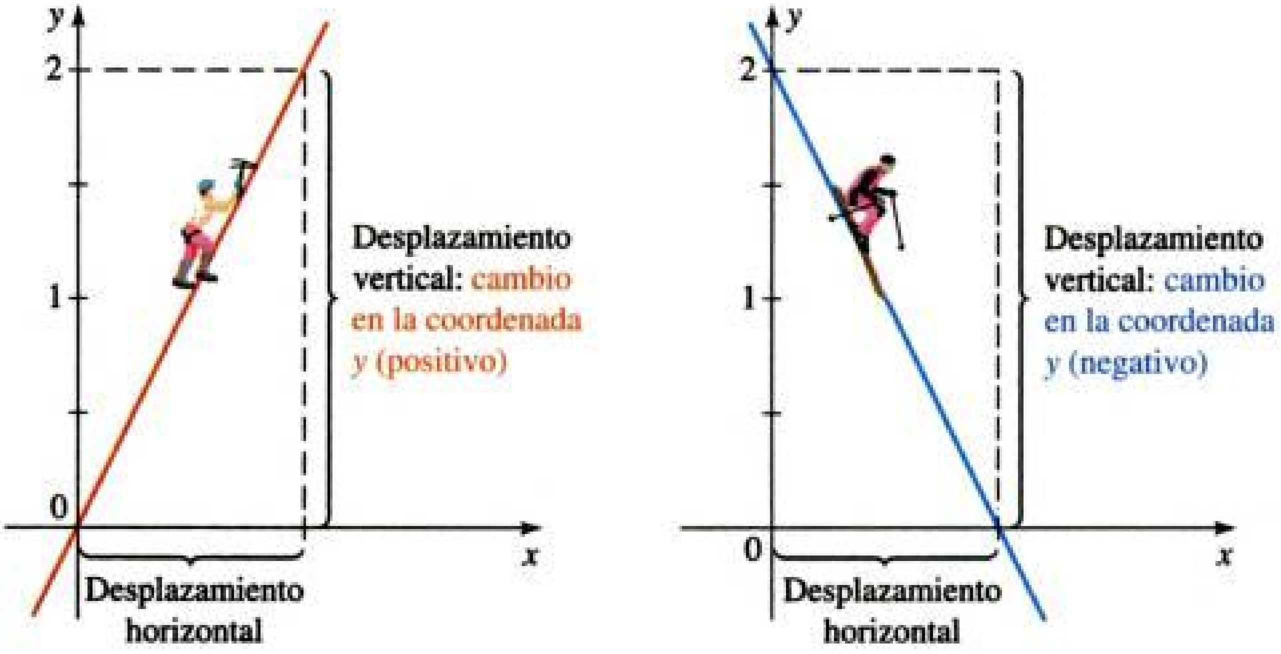


Figura 2

René Descartes (1596-1650) nació en la ciudad de La Haye en el sur de Francia. Desde temprana edad, a Descartes le gustaron las matemáticas debido a "la certeza de sus resultados y a la claridad de su razonamiento". Él opinaba que con el fin de llegar a la verdad uno debía empezar por dudar de todo, incluso de la propia existencia de uno mismo. Esto le llevó a formular quizá la frase más conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo". En su libro *Discurso del método* describió lo que ahora conocemos como plano cartesiano. Esta idea de combinar el álgebra y la geometría permitió que los matemáticos "vieran" por primera vez las ecuaciones que estudiaban. El filósofo John Stuart Mill llamó a su invención "el paso más grande jamás dado en el avance de las ciencias exactas". A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en la cama pensando y escribiendo. Inventó el plano coordenado mientras yacía en la cama observando el recorrido errático de una mosca en el techo, y razonando que podría describir la posición exacta de la mosca si supiera su distancia a dos muros perpendiculares. En 1649, Descartes se volvió tutor de la reina Cristina de Suecia. A ella le gustaba tomar sus lecciones a las 5 de la mañana, hora en que, según ella, su mente estaba más despierta. Pero el cambio en los hábitos de Descartes y la biblioteca fría como el hielo donde estudiaban fueron demasiado para él. En febrero de 1650, justo dos meses después, enfermó de neumonía y murió

Pendiente de una recta

La **pendiente** m de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de los puntos que se escogen en la recta. Podemos observar que esto es verdadero a partir de los triángulos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

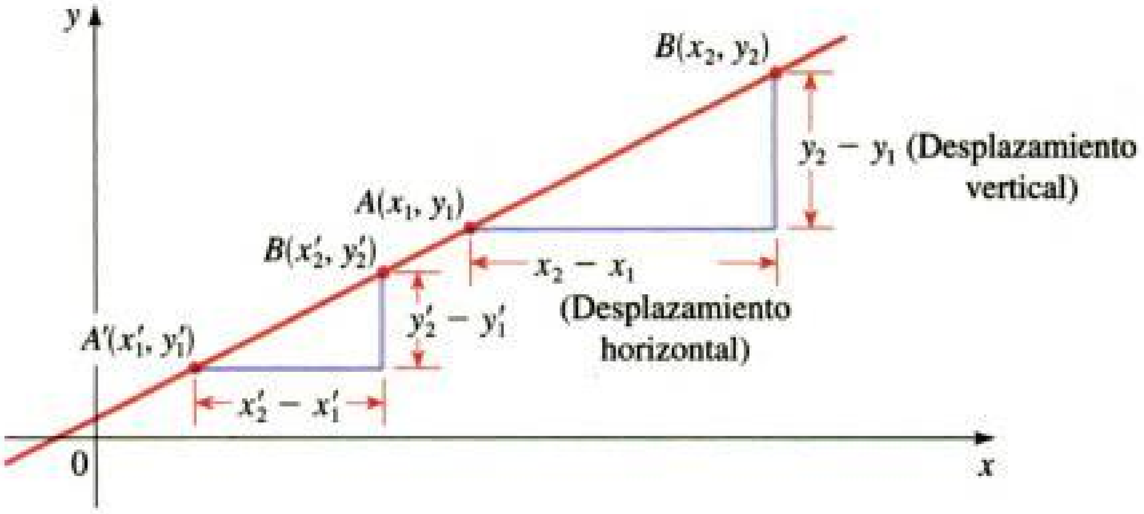


Figura 3

En la figura 4 se muestran varias rectas con sus pendientes marcadas. Observe que las rectas con pendiente positiva están hacia arriba a la derecha, y las de pendiente negativa están hacia abajo y a la derecha. Las rectas con mayor pendiente son aquellas cuyo valor absoluto de la pendiente es más grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

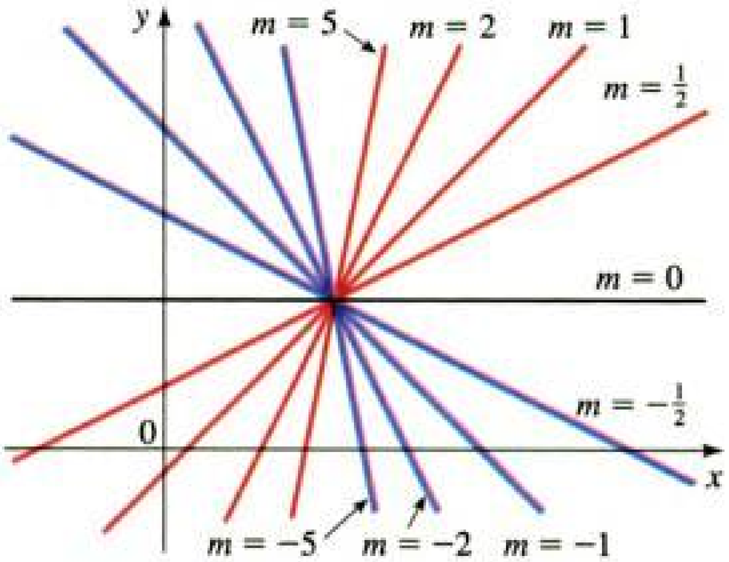


Figura 4
Rectas de varias pendientes

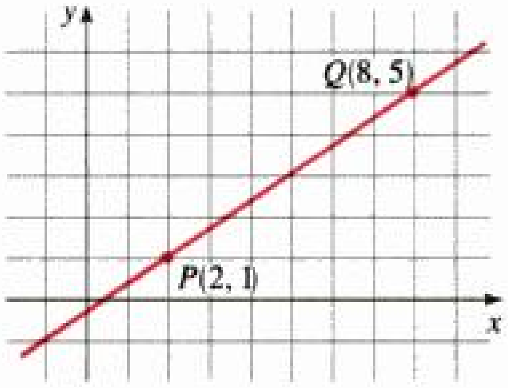


Figura 5

Ejemplo 1 **Determinación de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos**

Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

Solución Puesto que dos puntos cualesquiera determinan una recta, sólo una recta pasa por esos dos puntos. De acuerdo con la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto quiere decir que por cada 3 unidades que nos movamos hacia la derecha, el desplazamiento vertical es de 2 unidades. La recta se ilustra en la figura 5. ■

Ecuaciones de rectas

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por un punto dado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ queda en esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (véase la figura 6), es decir

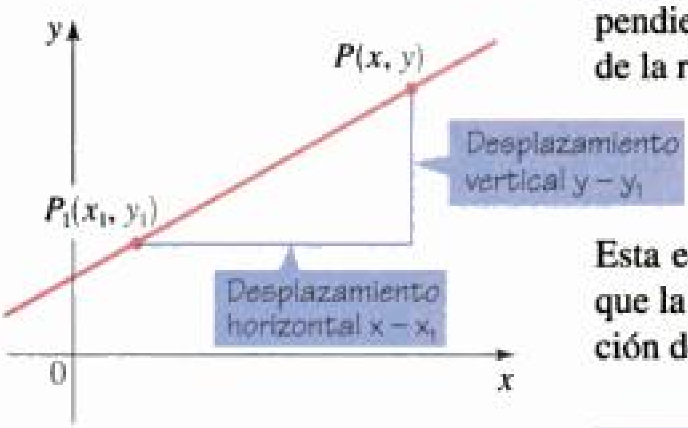


Figura 6

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; observe que la ecuación también se cumple cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

Forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 2 **Determinación de la ecuación de una recta mediante un punto y la pendiente**

a) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ y su pendiente es $-\frac{1}{2}$.

b) Grafique la recta.

Solución

a) Aplicando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos una ecuación de la recta

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \quad \text{Según la ecuación dados un punto y la pendiente}$$

$$2y + 6 = -x + 1 \quad \text{Multiplicación por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \quad \text{Reacomodo de términos}$$

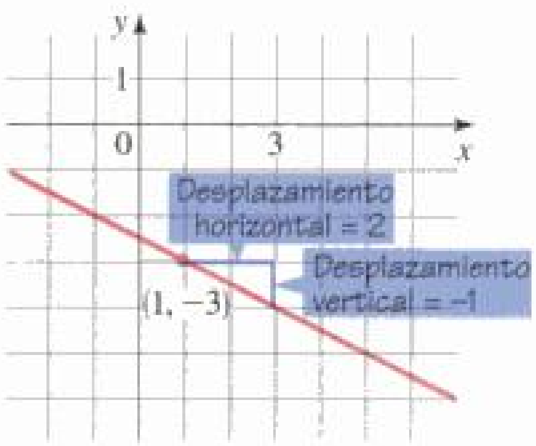


Figura 7

b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ indica que cuando nos desplazamos a la derecha 2 unidades, la recta cae una unidad. Esto posibilita que dibujemos la recta de la figura 7. ■

Ejemplo 3 Determinación de la ecuación de una recta por medio de dos puntos dados

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Al aplicar la ecuación de una recta que pasa por un punto y conocemos la pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, tenemos

Podemos utilizar *cualquier* punto, $(-1, 2)$ *o bien* $(3, -4)$, en la ecuación donde se da un punto y la pendiente. Llegaremos a la misma respuesta final.

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Según la ecuación de punto y pendiente dados}$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplicación por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomodo de los términos}$$

■

Suponga una recta no vertical que tiene una pendiente m y una ordenada al origen b (véase la figura 8). Esto significa que la recta corta al eje de las y en el punto $(0, b)$, de modo que la ecuación cuando se da un punto y la pendiente para la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = b$, se vuelve

$$y - b = m(x - 0)$$

Se simplifica a $y = mx + b$, que se conoce como ecuación de la recta **dada la pendiente y la ordenada en el origen**.

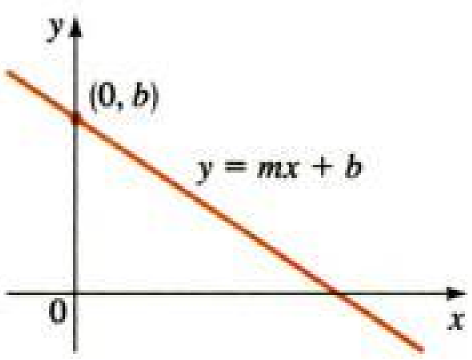


Figura 8

Ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen

Una ecuación de la recta que tiene una pendiente m y cuya ordenada en el origen es b es

$$y = mx + b$$

Ejemplo 4 Ecuación de rectas dadas la pendiente y la ordenada en el origen

a) Calcular la ecuación de la recta con pendiente 3 y ordenada en el origen igual a -2.

b) Encontrar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3y - 2x = 1$.

Solución

a) Puesto que $m = 3$ y $b = -2$, de acuerdo con la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada al origen tenemos

$$y = 3x - 2$$

b) Primero escribimos la ecuación en la forma de $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Suma de } 2x$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{División entre 3}$$

Pendiente

Ordenada en el origen y

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

Según la ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada al origen, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada es $b = \frac{1}{3}$. ■

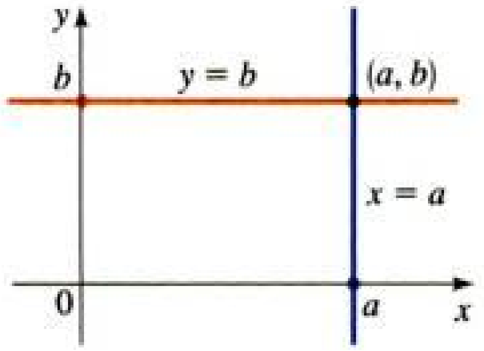


Figura 9

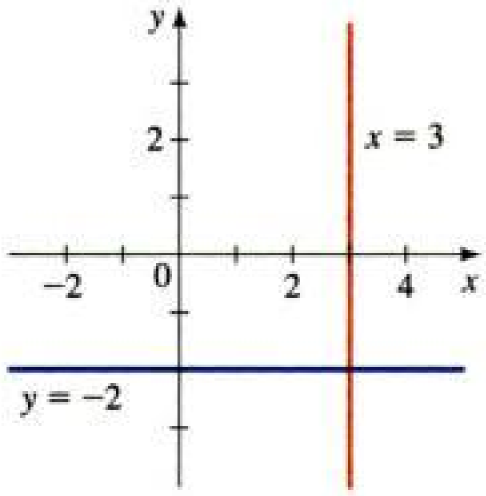


Figura 10

Si la recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es la ordenada en el origen (véase la figura 9). Una vertical no tiene una pendiente, pero podemos expresar su ecuación como $x = a$, donde a es la intersección con el eje x porque la coordenada x de cada uno de los puntos sobre la recta es a.

Rectas verticales y horizontales

Una ecuación de la vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

Ejemplo 5 Rectas verticales y horizontales

a) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una vertical cuya intersección con el eje x es 3

b) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una horizontal cuya intersección con el eje y es una horizontal cuya intersección con el eje y es -2.

Las rectas se grafican en la figura 10. ■

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son simultáneamente iguales a cero. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene por ecuación $y = mx + b$ o bien $-mx + y - b = 0$, la cual es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene por ecuación $x = a$ o bien, $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

Por lo contrario, la gráfica de una ecuación lineal es una recta:

- Si $B \neq 0$, la ecuación se transforma en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

  y ésta es la forma de la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).
- Si $B = 0$, la ecuación se vuelve

$$Ax + C = 0$$

  o bien $x = -C/A$, la cual representa una línea vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

Ecuación general de la recta

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son simultáneamente cero})$$

es una recta. En caso contrario, cada recta es la gráfica de una ecuación lineal.

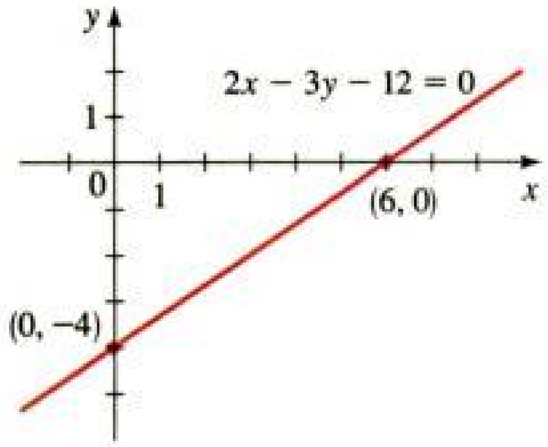


Figura 11

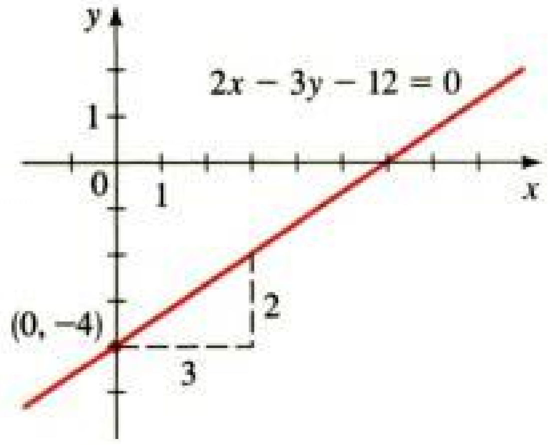


Figura 12

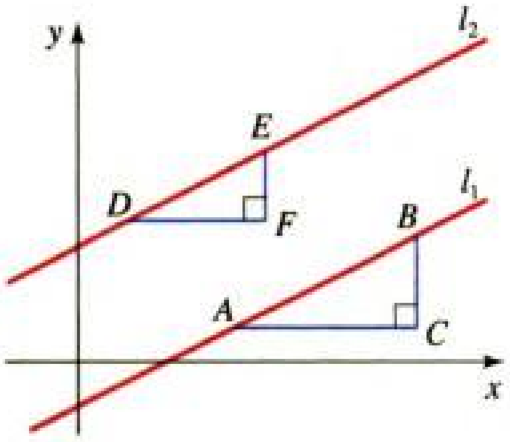


Figura 13

Ejemplo 6 Gráfica de una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

Solución 1 Puesto que la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para dibujar la gráfica es suficiente encontrar dos puntos cualesquiera sobre la recta. Las intersecciones con los ejes son los puntos más fáciles de determinar.

Intersección con el eje x:	sustituya $y = 0$ para obtener $2x - 12 = 0$, de modo que $x = 6$
Intersección con el eje y:	sustituya $x = 0$ para obtener $-3y - 12 = 0$, de modo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica en la figura 11.

Solución 2 Expresamos la ecuación en la forma de pendiente y ordenada en el origen dadas

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 12 &= 0 \\ 2x - 3y &= 12 && \text{Suma de 12} \\ -3y &= -2x + 12 && \text{Resta de } 2x \\ y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{División entre } -3 \end{aligned}$$

Esta ecuación está en la forma de $y = mx + b$, de modo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es $b = -4$. Para graficar, localizamos la intersección con el eje y y luego nos desplazamos 3 unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba como se muestra en la figura 12. ■

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Puesto que la pendiente mide la inclinación de una recta, es razonable que las rectas paralelas tengan la misma pendiente. De hecho, podemos demostrarlo.

Rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

■ **Demostración** Sean las rectas l_1 y l_2 de la figura 13 que tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes, de modo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

Y al contrario, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos son semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas. ■

Ejemplo 7 Determinación de la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

Solución Primero escribimos la ecuación de la recta dada en la forma de pendiente y ordenada en el origen.

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 5 &= 0 \\ 6y &= -4x - 5 && \text{Resta de } 4x + 5 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} && \text{División entre } 6 \end{aligned}$$

Por lo que la recta tiene la pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, tiene también la pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De acuerdo con la ecuación de una recta que pasa por un punto y se conoce su pendiente obtenemos

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= -\tfrac{2}{3}(x - 5) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}\text{, pendiente } (5, 2) \\
3y - 6 &= -2x + 10 && \text{Multiplicación por 3} \\
2x + 3y - 16 &= 0 && \text{Reacomodo de los términos}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$. ■

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como con las rectas paralelas.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes recíprocas y de signo contrario:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Asimismo, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a la recta vertical (pendiente indefinida).

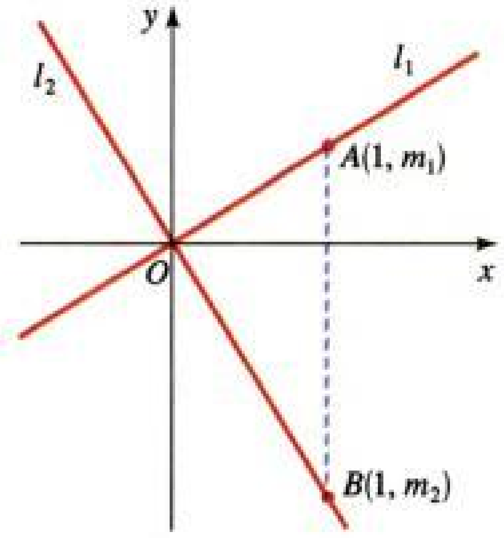


Figura 14

■ **Demostración** En la figura 14 se ilustran dos rectas que se cortan en el origen. (Si las rectas se cortan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cortan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.)

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Observe que $A(1, m_1)$ queda sobre l_1 y $B(1, m_2)$ queda sobre l_2. Según el teorema de Pitágoras y su inverso (véase pág. 54), $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

De acuerdo con la fórmula de la distancia, esto se transforma en

$$
\begin{aligned}
(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) &= (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\
2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2 \\
2 &= -2m_1 m_2 \\
m_1 m_2 &= -1
\end{aligned}
$$
■

Ejemplo 8 Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

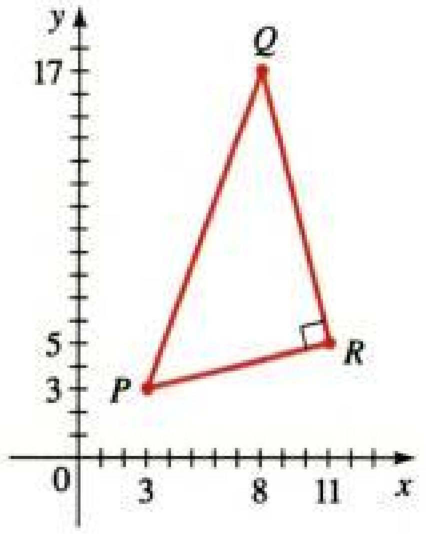


Figura 15

Solución Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Puesto que m_1 y $m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares y, entonces PQR es un triángulo rectángulo. La gráfica se ilustra en la figura 15.

Ejemplo 9 Determinación de la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Determinar una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y que pasa por el origen.

Solución En el ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Por consiguiente, la pendiente de una perpendicular es la pendiente recíproca y de signo negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Puesto que la recta requerida pasa por (0, 0), la ecuación de la recta cuando se conoce un punto y la pendiente es

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0)$$
$$y = \tfrac{3}{2}x$$

■

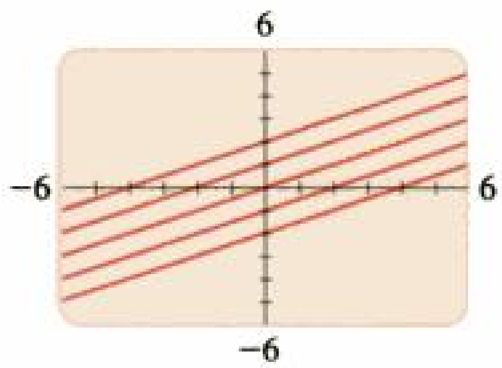


Figura 16
$y = 0.5x + b$

Ejemplo 10 Trazo de una familia de rectas

Utilice la calculadora para elaborar gráficas con el fin de trazar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

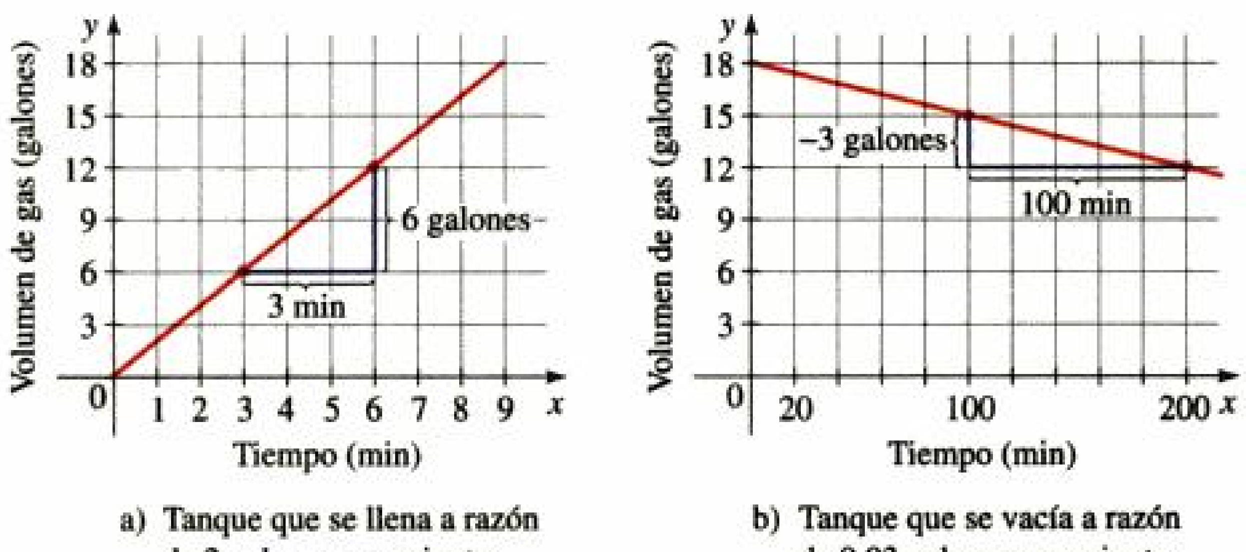
Solución Las rectas se grafican en la figura 16 en el rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Todas las rectas tienen la misma pendiente, de modo que son paralelas. ■

Aplicaciones: pendiente como razón de cambio

Cuando una recta se utiliza como modelo de la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **razón de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la figura 17 (a) da la cantidad de gas de un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{2 \text{ minutos}} = 2 \text{ galones por minuto}$$

La pendiente es la *razón* a la cual el tanque se está llenando, 2 galones por minuto. En la figura 17(b), el tanque se está vaciando a la *razón* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



a) Tanque que se llena a razón de 2 galones por minuto. La pendiente de la recta es 2

b) Tanque que se vacía a razón de 0.03 galones por minuto. La pendiente de la recta es −0.03

Figura 17

Los dos ejemplos siguientes representan otras situaciones donde la pendiente de una recta es una razón de cambio.

Ejemplo 11 Pendiente como razón de cambio

Una presa está construida sobre un río para tener un embalse. El nivel del agua w en el embalse está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es la cantidad de años desde que la presa se construyó y w se mide en pies.

a) Trace una gráfica de esta ecuación.

b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje w de esta gráfica?

Solución

a) Esta ecuación es lineal, de modo que su gráfica es lineal, es una recta. Como dos puntos definen una recta, localizamos dos puntos que quedan sobre la gráfica y dibujamos una recta que los una.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$,
por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$,
por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

La recta definida por estos puntos se muestra en la figura 18.

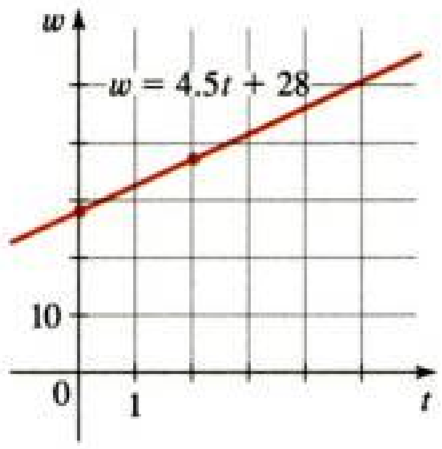


Figura 18

b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la tasa de cambio del nivel del agua con respecto al tiempo. Esto quiere decir que el nivel del agua se *incrementa* 4.5 pies por año. La intersección con el eje w es 28 y ocurre cuando $t = 0$, de modo que representa el nivel del agua cuando la presa fue construida. ■

Ejemplo 12 Relación lineal entre temperatura y altitud

a) A medida que el aire seco asciende, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es de 20°C y la temperatura a una altura de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en términos de la altura h (en kilómetros). (Suponga que la relación entre T y h es lineal.)

b) Dibuje la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente?

c) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 2.5 km?

Solución

a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe tener la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, sabemos que $T = 20$, por lo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos que $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

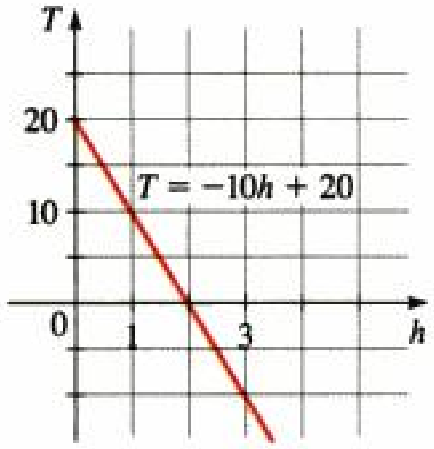


Figura 19

b) La gráfica se ilustra en la figura 19. La pendiente es $m = -10°\text{C/km}$, que representa la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia por arriba del suelo. De este modo, la temperatura *desciende* 10°C por kilómetro de altura.

c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5°\text{C}$$ ■

1.10 Ejercicios

1–8 ■ Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q.

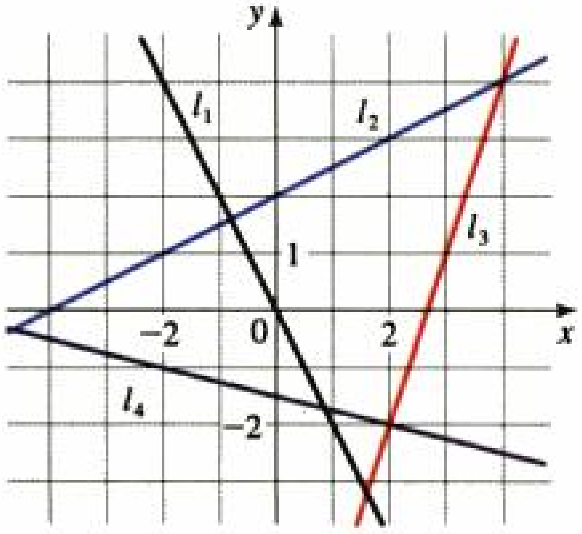
1. $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$ **2.** $P(0, 0)$, $Q(2, -6)$

3. $P(2, 2)$, $Q(-10, 0)$ **4.** $P(1, 2)$, $Q(3, 3)$

5. $P(2, 4)$, $Q(4, 3)$ **6.** $P(2, -5)$, $Q(-4, 3)$

7. $P(1, -3)$, $Q(-1, 6)$ **8.** $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

9. Calcule las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura que sigue.

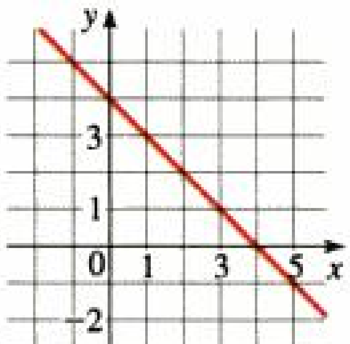


10. a) Grafique las rectas que pasan por (0, 0) con pendientes $1, 0, \frac{1}{2}, 2$ y -1.

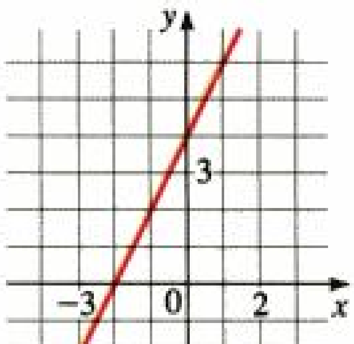
b) Grafique las rectas que pasan por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ y 3.

11–14 ■ Determine una ecuación para la recta cuya gráfica se proporciona.

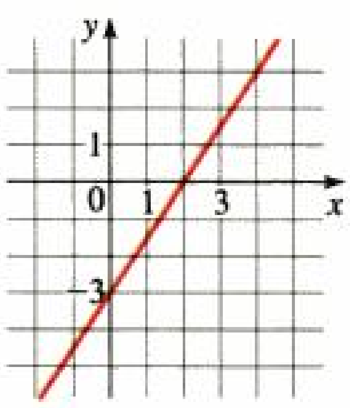
11.



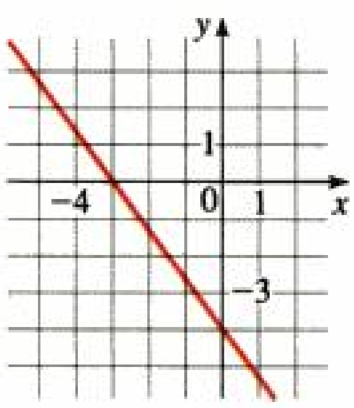
12.



13.



14.



15–34 ■ Calcule una ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

15. Pasa por $(2, 3)$; pendiente 1

16. Pasa por $(-2, 4)$; pendiente -1

17. Pasa por $(1, 7)$; pendiente $\frac{2}{3}$

18. Pasa por $(-3, -5)$; pendiente $-\frac{7}{2}$

19. Pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$

20. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

21. Pendiente 3; ordenada al origen y -2

22. Pendiente $\frac{2}{5}$; ordenada al origen y 4

23. Intersección con el eje x 1; ordenada al origen y -3

24. Intersección con el eje x -8; ordenada al origen y 6

25. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x

26. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje y

27. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

28. Ordenada al origen 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

29. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

30. Pasa por $(2, 6)$; perpendicular a la recta $y = 1$

31. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

32. Pasa por $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

33. Pasa por $(1, 7)$; paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-2, 1)$

34. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$

35. a) Grafique la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

b) Determine una ecuación para esta recta.

36. a) Grafique la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$.

b) Encuentre la ecuación de esta recta.

37–40 ■ Utilice una calculadora o una computadora para graficar y trace la familia de rectas en el mismo rectángulo de visión. ¿Qué tienen las rectas en común?

37. $y = -2x + b$ por $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

38. $y = mx - 3$ por $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

39. $y = m(x - 3)$ por $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

40. $y = 2 + m(x + 3)$ por $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm 6$

41–52 ■ Determine la pendiente y la ordenada al origen de la recta y trace la gráfica.

41. $x + y = 3$

42. $3x - 2y = 12$

43. $x + 3y = 0$

44. $2x - 5y = 0$

45. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

46. $-3x - 5y + 30 = 0$

47. $y = 4$

48. $4y + 8 = 0$

49. $3x - 4y = 12$

50. $x = -5$

51. $3x + 4y - 1 = 0$

52. $4x + 5y = 10$

53. Utilice las pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

54. Utilice las pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

55. Utilice las pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

56. Utilice las pendientes para determinar si los puntos dados son colineales, es decir, están sobre la misma recta.

a) $(1, 1), (3, 9), (6, 21)$

b) $(-1, 3), (1, 7), (4, 15)$

57. Determine una ecuación de la bisectriz perpendicular a la recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

58. Calcule el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

59. a) Demuestre que si las intersecciones con los ejes x y y de una recta son números no cero a y b, entonces la ecuación de la recta se puede expresar de la forma

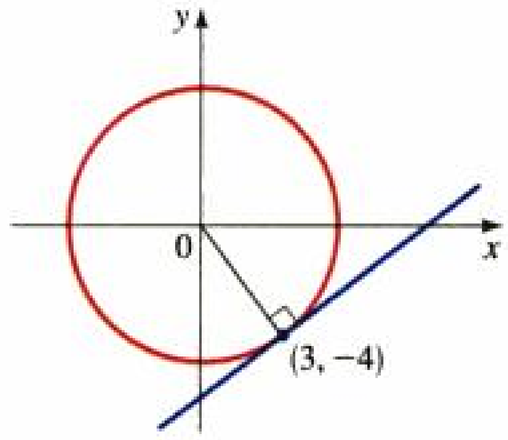
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta forma se denomina **ecuación simétrica** de la recta.

b) Utilice el inciso a) para determinar una ecuación de la recta cuya intersección con el eje x sea 6 y cuya ordenada al origen sea -8.

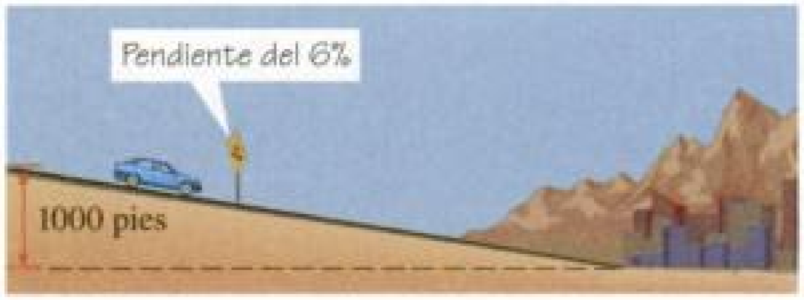
60. a) Calcule una ecuación para la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (**Véase la figura.**)

b) ¿En qué otro punto de la circunferencia una tangente será paralela a la tangente del inciso a)?



Aplicaciones

61. Rasante de una carretera Al oeste de Albuquerque, Nuevo México, la carretera 40 con rumbo al este es recta y tiene una fuerte pendiente hacia la ciudad. La carretera tiene una rasante del 6%, lo cual quiere decir que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Al manejar por esta carretera usted puede ver por los señalamientos que ha bajado 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en la distancia horizontal?



62. Advertencia mundial Algunos científicos opinan que la temperatura superficial promedio del mundo está aumentando en forma constante. La temperatura superficial promedio se expresa mediante

$$T = 0.02t + 8.50$$

donde T es la temperatura en °C y t es años desde 1900.

a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?

b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial promedio del mundo en 2100.

63. Dosis de medicamentos Si la dosis de un medicamento que se recomienda para un adulto es D en mg, entonces para determinar la dosis aceptable c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.

a) Determine la pendiente. ¿Qué representa?

b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

64. Mercado de pulgas La administradora de un mercado de pulgas de fin de semana sabe por experiencias anteriores que si cobra x dólares por un espacio en renta en el mercado, entonces el número y de espacios que puede rentar se representan mediante la ecuación $y = 200 - 4x$.

a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el costo de la renta por el espacio y la cantidad de espacios rentados deben ser cantidades no negativas.)

b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y y la intersección con el eje x?

65. Costos de producción Un pequeño fabricante de electrodomésticos observa que si produce x tostadores en un mes su costo de producción está representado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

donde y se mide en dólares.

a) Trace una gráfica de su ecuación lineal.

b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

66. Escalas de temperatura La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) se expresa mediante la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Complete la tabla para comparar las dos escalas en los valores dados.

b) Determine la temperatura a la cual las dos temperaturas concuerdan.
[*Sugerencia:* suponga que a es la temperatura a la cual las escalas concuerdan. Haga $F = a$ y $C = a$. Luego determine a.]

C	F
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

67. Grillos y temperatura Los biólogos han observado que la tasa de chirridos de los grillos de ciertas especies se relaciona con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70°F y 168 chirridos por minuto a 80°F.

a) Encuentre la ecuación lineal que relaciona la temperatura t con la cantidad de chirridos por minuto n.

b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

68. Depreciación Una pequeña empresa compra una computadora en 4000 dólares. Después de cuatro años, el valor esperado de la computadora será de 200 dólares. Para cuestiones de contabilidad, la empresa aplica la *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo dado. Esto significa que si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

a) Determine una ecuación lineal que relacione V y t.

b) Grafique la ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje V de la gráfica?

d) Calcule el valor depreciado de la computadora tres años después de la fecha de la compra.

69. Presión y profundidad En la superficie del mar, la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 lb/pulg^2. Abajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies que se descienden.

a) Determine una ecuación para la relación entre presión y profundidad abajo de la superficie del mar.

b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

d) ¿A qué profundidad se tiene una presión de 100 lb/pulg^2?

70. Distancia, velocidad y tiempo Jason y Debbie salen en automóvil de Detroit a las 2:00 PM y manejan a una velocidad constante viajando hacia el oeste sobre la I-90. Dejan atrás Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 PM.

a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

b) Trace la gráfica de la ecuación del inciso a).

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Qué representa?

71. Costos por manejar un automóvil El costo mensual de manejar un automóvil depende de la cantidad de millas recorridas. Lynn observa que, en mayo, el costo de manejo fue de 380 dólares por 480 millas y que en junio el costo fue de 460 dólares por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C por manejar un automóvil y la distancia recorrida d.

a) Calcule una ecuación lineal que relacione C y d.

b) Use el inciso a) para predecir el costo por manejar 1500 millas al mes.

c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

d) ¿Qué representa la ordenada en el origen de la gráfica?

e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo adecuado en el caso de esta situación?

72. Costos de producción El gerente de una fábrica de muebles observa que cuesta 2200 dólares manufacturar 100 sillas en un día y 4800 dólares producir 300 sillas en un día.

a) Si se supone que la relación entre costo y número de sillas fabricadas es lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. Luego grafique la ecuación.

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta del inciso a), y qué representa?

c) ¿Cuál es la ordenada al origen de esta recta y qué representa?

Descubrimiento • Debate

73. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura en el exterior en un cierto periodo es una recta. ¿Qué tanto está cambiando el tiempo si la pendiente de la recta es positiva? ¿Y si es negativa? ¿Y si es cero?

74. Puntos colineales Suponga que le dan las coordenadas de tres puntos en el plano, y que quiere ver si quedan en la misma recta. ¿Cómo lo puede hacer usando las pendientes? ¿Y aplicando la fórmula de la distancia? ¿Puede imaginar otro método?

1.11 Modelos de variación

Los modelos matemáticos se estudian con mayores detalles en *Enfoque en el modelado*, que inicia en la página 239.

Cuando los científicos hablan acerca de un modelo matemático para un fenómeno del mundo cotidiano con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir cómo la población de especies animales varía con el tiempo o cómo la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección se estudia la clase de modelado llamado *variación*.

Variación directa

Dos tipos de modelos matemáticos se presentan con tanta frecuencia que tienen nombres especiales. El primero se llama *variación directa* y se presenta cuando una cantidad es un múltiplo constante del otro, de modo que usamos una ecuación de la forma $y = kx$ para modelar esta dependencia.

Variación directta

Si las cantidades x y y están relacionadas mediante una ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y **varía directamente con** x, o y es **directamente proporcional a** x, o simplemente y **es proporcional a** x. La constante k se llama **constante de proporcionalidad**.

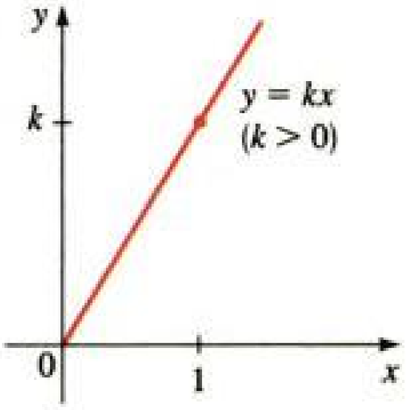


Figura 1

Recuerde que la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta cuya pendiente es m y la ordenada al origen es b. Entonces, la gráfica de una ecuación $y = kx$ que describe la variación directa es una recta con pendiente k y ordenada al origen 0 (véase la figura 1).

Ejemplo 1 Variación directa

Durante una tormenta de rayos usted ve el rayo antes de escuchar el trueno porque la luz viaja mucho más rápido que el sonido. La distancia entre usted y la tormenta varía directamente con el intervalo que transcurre entre el rayo y el trueno.

a) Suponga que el trueno de una tormenta a 5400 pies de lejanía tarda 5 s para llegar hasta usted. Determine la constante de proporcionalidad y plantee la ecuación de la variación.

b) Grafique la ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

c) Si el intervalo entre el rayo y el trueno es ahora de 8 s, ¿qué tan lejos está la tormenta?

Solución

a) Sea d la distancia desde donde está usted hasta la tormenta y sea t el tiempo transcurrido. Sabemos que d varía directamente con t, de modo que

$$d = kt$$

donde k es una constante. Para determinar k, usamos el hecho de que $t = 5$ y $d = 5400$. Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos

$$5400 = k(5) \qquad \text{Sustitución}$$

$$k = \frac{5400}{5} = 1080 \qquad \text{Determinación de } k$$

Al sustituir este valor de k en la ecuación para d, obtenemos

$$d = 1080t$$

cuando la ecuación de d está en función de t.

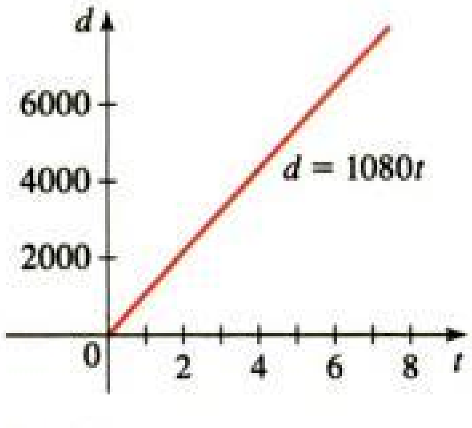


Figura 2

b) La gráfica de la ecuación $d = 1080t$ es una recta que pasa por el origen con pendiente 1080, y se muestra en la figura 2. La constante $k = 1080$ es la velocidad aproximada del sonido en pies/segundo.

c) Cuando $t = 8$, tenemos

$$d = 1080 \cdot 8 = 8640$$

Entonces, la tormenta está a 8640 pies, casi 1.6 millas. ■

Variación inversa

Otra ecuación que con frecuencia se utiliza en el modelado matemático es $y = k/x$, donde k es una constante.

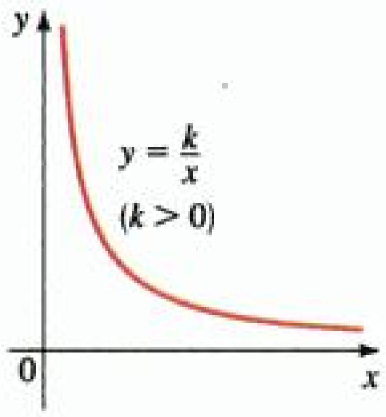


Figura 3
Variación inversa

Variación inversa

Si las cantidades x y y se relacionan mediante la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y es **inversamente proporcional** a x, o que y **varía inversamente con** x.

La gráfica de $y = k/x$ para $x > 0$ se muestra en la figura 3 para el caso $k > 0$. Esto da una imagen de lo que sucede cuando y es inversamente proporcional a x.

Ejemplo 2 Variación inversa

La Ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

a) Suponga que la presión de una muestra de aire ocupa 0.106 m^3 a 25 °C está a 50 kPa. Determine la constante de proporcionalidad y plantee la ecuación que expresa la proporcionalidad inversa.

b) Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 m^3, estime la nueva presión.

Solución

a) Sea P la presión de la muestra de gas y sea V su volumen. Entonces, de acuerdo con la definición de proporcionalidad inversa tenemos

$$P = \frac{k}{V}$$

donde k es constante. Para determinar k aplique el hecho de que $P = 50$ cuando $V = 0.106$. Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos

$$50 = \frac{k}{0.106} \qquad \text{Sustitución}$$

$$k = (50)(0.106) = 5.3 \qquad \text{Determinación de } k$$

Al sustituir este valor de k en la ecuación de P, tenemos

$$P = \frac{5.3}{V}$$

b) Cuando $V = 0.3$, tenemos

$$P = \frac{5.3}{0.3} \approx 17.7$$

Entonces, la nueva presión es de casi 17.7 kPa. ■

Variación conjunta

Con frecuencia, una cantidad física depende de otra cantidad. Si una cantidad es proporcional a dos o más cantidades, esta relación se llama *variación conjunta*.

Variación conjunta

Si las cantidades x, y y z están relacionadas mediante la ecuación

$$z = kxy$$

donde k es una constante no cero, decimos que z **varía en forma conjunta** con x y y, o que z es **conjuntamente proporcional a** x y y.

En las ciencias, las relaciones entre tres o más variables son comunes, y es posible cualquier combinación de los diferentes tipos de proporcionalidad que hemos analizado. Por ejemplo, si

$$z = k\frac{x}{y}$$

decimos que z es **proporcional a** x y que es **inversamente proporcional a** y.

Ejemplo 3 Ley de Newton de la gravitación

La Ley de Newton de la gravitación establece que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza F que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los objetos. Exprese la Ley de Newton de la gravitación como una ecuación.

Solución Si aplicamos las definiciones de variación conjunta e inversa y la notación tradicional G para la constante gravitacional de proporcionalidad tenemos

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$ ■

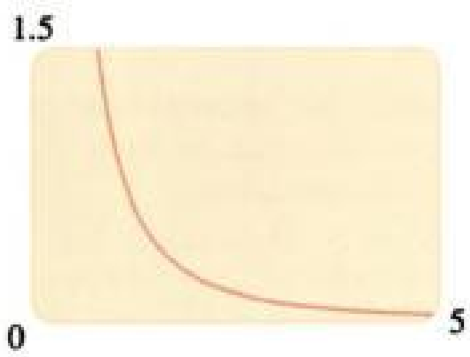


Figura 4
Gráfica de $F = \frac{1}{r^2}$

Si m_1 y m_2 son masas constantes, entonces la fuerza gravitacional entre ellas es $F = C/r^2$ donde $C = Gm_1m_2$ es una constante. En la figura 4 se ilustra la gráfica de esta ecuación para $r > 0$ con $C = 1$. Observe cómo la atracción gravitacional disminuye cuando aumenta la distancia.

1.11 Ejercicios

1–12 ■ Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

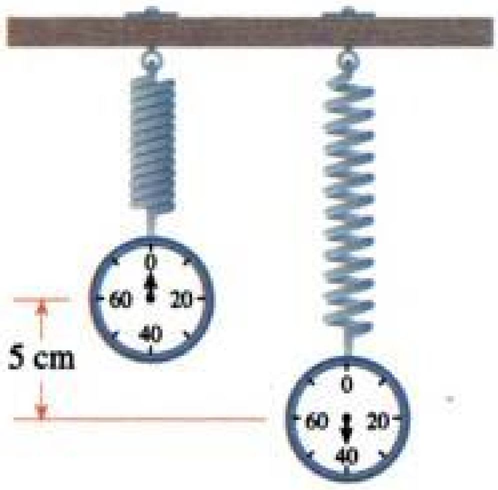
1. T varía directamente con x.
2. P es directamente proporcional a w.
3. v es directamente proporcional a z.
4. w es proporcional conjuntamente a m y n.
5. y es proporcional a s e inversamente proporcional a t.
6. P varía inversamente a T.
7. z es proporcional a la raíz cuadrada de y.
8. A es proporcional al cuadrado de t e inversamente proporcional al cubo de x.
9. V es conjuntamente proporcional a l, w y h.
10. S es conjuntamente proporcional a los cuadrados de r y θ.
11. R es conjuntamente proporcional a i e inversamente proporcional a P y t.
12. A es conjuntamente proporcional a las raíces cuadradas de x y de y.

13–22 ■ Exprese el enunciado como una ecuación. Utilice la información dada para determinar la constante de proporcionalidad.

13. y es directamente proporcional a x. Si $x = 6$, entonces $y = 42$.
14. z varía inversamente a t. Si $t = 3$, entonces $z = 5$.
15. M varía directamente con x e inversamente a y. Si $x = 2$ y $y = 6$, entonces $M = 5$.
16. S varía conjuntamente con p y q. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$.
17. W es inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $r = 6$, entonces $W = 10$.
18. t es conjuntamente proporcional a x y y e inversamente proporcional a r. Si $x = 2$, $y = 3$ y $r = 12$, entonces $t = 25$.
19. C es conjuntamente proporcional a l, w y h. Si $l = w = h = 2$, entonces $C = 128$.
20. H es conjuntamente proporcional a los cuadrados de l y w. Si $l = 2$ y $w = \frac{1}{3}$, entonces $H = 36$.
21. s es inversamente proporcional al cuadrado de t. Si $s = 100$, entonces $t = 25$.
22. M es conjuntamente proporcional a a, b y c, e inversamente proporcional a d. Si a y d valen lo mismo, y si b y c valen 2, entonces $M = 128$.

Aplicaciones

23. **Ley de Hooke** La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural es directamente proporcional a x. En este caso, la constante de proporcionalidad se denomina **constante del resorte**.
   a) Exprese la ley de Hooke en forma de una ecuación.
   b) Si un resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se necesita una fuerza de 40 N para mantener el resorte estirado a una longitud de 15 cm, determine la constante del resorte.
   c) ¿Qué fuerza se requiere para mantener estirado el resorte a una longitud de 14 cm?



24. **Ley del péndulo** El periodo de un péndulo (el tiempo que transcurre durante un balanceo completo del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del péndulo.
   a) Exprese esta relación mediante una ecuación.
   b) Con el objeto de duplicar el periodo, ¿qué tanto tendríamos que modificar la longitud l?

25. **Costos de impresión** El costo C de imprimir una revista es conjuntamente proporcional a la cantidad de páginas p de la revista y la cantidad de revistas impresas m.
   a) Plantee una ecuación que exprese esta variación conjunta.
   b) Encuentre la constante de proporcionalidad si el costo de impresión es 60000 dólares para 4000 ejemplares de la revista de 120 páginas.
   c) ¿De cuánto sería el costo de impresión para 5000 ejemplares de 92 páginas cada uno?

26. **Ley de Boyle** La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional al volumen V.
    a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.
    b) Determine la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala de Kelvin).
    c) Si la temperatura aumenta a 500 K y el volumen disminuye a 80 L, ¿cuál es la presión del gas?

27. **Potencia de un molino de viento** La potencia P que se puede obtener de un molino de viento es directamente proporcional al cubo de la velocidad del viento s.
    a) Plantee una ecuación que exprese esta variación.
    b) Determine la constante de proporcionalidad para un molino de viento que produce 96 watts de potencia cuando el viento está soplando a 20 millas/hora.
    c) ¿Cuánta potencia genera este molino si la velocidad del viento se incrementa a 30 millas/hora?

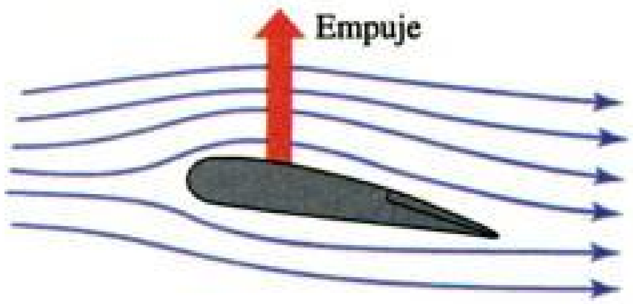
28. **Potencia necesaria para impulsar un bote** La potencia P medida en caballos de fuerza, hp, necesaria para impulsar una embarcación es directamente proporcional al cubo de la velocidad s. Se requiere un motor de 80 hp para impulsar cierto bote a 10 nudos. Encuentre la potencia necesaria para desplazar al bote a 15 nudos.

29. **Intensidad del sonido** La intensidad L de un sonido, medida en decibeles, dB, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente del sonido. Una persona a 10 pies de una podadora experimenta un nivel de sonido de 70 dB; ¿qué tan intenso es el sonido de la podadora cuando la persona está a 100 pies?

30. **Distancia de frenado** La distancia D para que un vehículo se detenga después que se han aplicado los frenos varía directamente con el cuadrado de la velocidad s. Un cierto automóvil que viaja a 50 millas/hora puede detenerse en 240 pies. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que se puede viajar si es necesario detenerse en 160 pies?

31. **Chorro de agua** La fuerza P de un chorro de agua es conjuntamente proporcional al área de la sección transversal A del chorro y al cubo de la velocidad v. Si la velocidad se duplica y el área de la sección transversal se reduce a la mitad, ¿en qué factor se incrementará la fuerza?

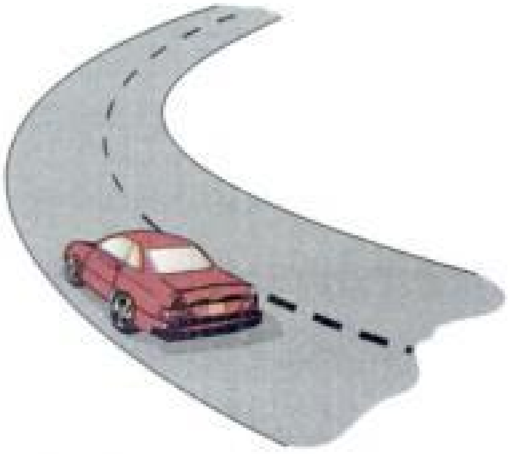
32. **Empuje aerodinámico** El empuje L sobre el ala de un aeroplano al despegar varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad s del avión y el área A de sus alas. Un aeroplano con un área de alas de 500 pies cuadrados que se desplaza a 50 millas/hora experimenta un empuje de 1700 lb. ¿Qué empuje experimenta un aeroplano que tiene un área de alas de 600 pies cuadrados y que viaja a 40 millas/h?



33. **Fuerza de arrastre de un bote** La fuerza de arrastre F de una embarcación es conjuntamente proporcional al área de superficie mojada A del casco y al cuadrado de la velocidad s del bote. Un bote experimenta una fuerza de arrastre de 220 lb cuando se desplaza a 5 millas/h con un área de superficie mojada igual a 40 pies cuadrados. ¿Qué tan rápido debe ir una embarcación si tiene 28 pies cuadrados de superficie mojada y está experimentando una fuerza de arrastre de 175 lb?

34. **Deslizamiento en curvas** Un automóvil se mueve por una curva que forma un arco circular. La fuerza F necesaria para evitar que el vehículo se deslice es conjuntamente proporcional a su peso w y al cuadrado de su velocidad s, e inversamente proporcional al radio r de la curva.
    a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.
    b) Un automóvil que pesa 1600 lb viaja por una curva a 60 millas/h. El siguiente automóvil que pasa por esta curva pesa 2500 lb y requiere la misma fuerza que el

primero para no deslizarse. ¿Qué tan rápido va el segundo vehículo?



35. **Resistencia eléctrica** La resistencia R de un alambre varía directamente con su longitud L e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.
    a) Plantee una ecuación que exprese esta variación conjunta.
    b) Encuentre la constante de proporcionalidad si un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms.
    c) Determine la resistencia de un alambre hecho del mismo material que es de 3 m de largo y tiene un diámetro de 0.008 m.

36. **Tercera Ley de Kepler** La tercera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas establece que el cuadrado del periodo T de un planeta (el tiempo que tarda el planeta en completar una revolución alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su distancia promedio d a partir del Sol.
    a) Exprese esta ley de Kepler como una ecuación.
    b) Determine la constante de proporcionalidad aplicando el hecho de que el periodo para nuestro planeta es de casi 365 días y la distancia promedio es de casi 93 millones de millas.
    c) El planeta Neptuno está a casi 2.79×10^9 millas del Sol. Calcule el periodo de Neptuno.

37. **Energía de radiación** La energía de radiación total E que emite una superficie caliente por unidad de área varía con la cuarta potencia de su temperatura absoluta T. La temperatura es 6000 K en la superficie del Sol y 300 K en la superficie de la Tierra.
    a) ¿Cuántas veces más se produce energía de radiación por unidad de área por el Sol que por la Tierra?
    b) El radio de la Tierra es de 3960 millas y el radio del Sol es de 435 000 millas. ¿Cuántas veces más emite radiación total el Sol que la Tierra?

38. **Valor de un terreno** El valor de un lote para construcción en la Isla Galiano es conjuntamente proporcional a su superficie y la cantidad de agua que produce un pozo en la propiedad. Un lote de 200 por 300 pies tiene un pozo que produce 10 galones de agua por minuto y vale 48 000 dólares. ¿Cuál es el valor de un lote de 400 por 400 pies si el pozo del terreno produce 4 galones de agua por minuto?

39. **Cultivo de coles** En la corta estación de crecimiento del territorio ártico canadiense de Nunavut, algunos jardineros logran cultivar coles gigantes con el sol de medianoche. Suponga que el tamaño final de una col es proporcional a la cantidad de nutrientes que recibe e inversamente proporcional al número de otras coles que la rodean. Una col que recibe 20 onzas de nutrientes y tiene 12 coles a su alrededor llega a pesar 30 lb. ¿Qué tamaño llegará a tener si recibe 10 onzas de nutrientes y sólo tiene como vecinas otras cinco coles?

40. **Calor de una fogata** El calor que proporciona una fogata a un excursionista es proporcional a la cantidad de leña en el fuego, e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fogata. Si el excursionista está a 20 pies del fuego y alguien duplica la cantidad de leña que se quema, ¿a qué distancia del fuego tiene que estar el excursionista de modo que sienta el mismo calor que antes?

41. **Frecuencia de vibración** La frecuencia f de vibración de una cuerda de violín es inversamente proporcional a su largo L. La constante de proporcionalidad k es positiva y depende de la tensión y densidad de la cuerda.
    a) Plantee una ecuación que represente esta variación.
    b) ¿Qué efecto hay al duplicar la longitud de la cuerda en la frecuencia de su vibración?

42. **Diseminación de una enfermedad** La tasa r a la cual una enfermedad se extiende dentro de una población de tamaño P es conjuntamente proporcional a la cantidad x de personas infectadas y al número $P - x$ de quienes no están infectados. Una infección brota en un pequeño pueblo cuya población es $P = 5000$.
    a) Escriba una ecuación que exprese a r en función de x.
    b) Compare la tasa de diseminación de esta infección cuando 10 personas están infectadas con la tasa de diseminación cuando están infectadas 1000 personas. ¿Qué tasa es mayor? ¿Con qué factor?
    c) Calcule la tasa de diseminación cuando toda la población está infectada. ¿Por qué esta respuesta es intuitiva?

Descubrimiento • Debate

43. **¿Todo es proporcionalidad?** Una gran cantidad de leyes de la física y la química se expresan como proporciones. Dé por lo menos un ejemplo de una función que se encuentra en las ciencias que *no* sea una proporción.

1 Repaso

Comprobación de conceptos

1. Defina cada término con sus propias palabras. Compruebe la respuesta refiriéndose a la definición del texto.
   a) Un entero b) Un número racional
   c) Un número irracional d) Un número real

2. Enuncie cada una de estas propiedades de los números reales.
   a) Propiedad conmutativa
   b) Propiedad asociativa
   c) Propiedad distributiva

3. ¿Qué es un intervalo abierto? ¿Qué es un intervalo cerrado? ¿Qué notación se utiliza para estos intervalos?

4. ¿Qué es el valor absoluto de un número?

5. a) En la expresión a^x, ¿cuál es la base y cuál es el exponente?
   b) ¿Qué significa a^x si $x = n$, a un entero positivo?
   (c) ¿Qué significa $x = 0$?
   d) ¿Qué significa x es un entero negativo: $x = -n$, donde n es un entero positivo?
   e) ¿Qué significa $x = m/n$, es un número racional?
   f) Enuncie las leyes de los exponentes.

6. a) ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$?
   b) ¿Por qué es $\sqrt{a^2} = |a|$?
   c) ¿Cuántas raíces n-nésimas reales tiene un número real positivo si n es impar? ¿Y si es par?

7. Explique cómo funciona el procedimiento de racionalización de un denominador.

8. Enuncie las fórmulas de los productos especiales para $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

9. Enuncie cada fórmula para factorización especial.
   a) Diferencia de cuadrados b) Diferencia de cubos
   c) Suma de cubos

10. ¿Qué es la solución de una ecuación?

11. ¿Cómo se resuelve una ecuación que contiene radicales? ¿Por qué es importante comprobar las respuestas cuando se resuelven ecuaciones de este tipo?

12. ¿Cómo se resuelve una ecuación
    a) algebraicamente? b) gráficamente?

13. Escriba la fórmula general de cada tipo de ecuación.
    a) Una ecuación lineal b) Una ecuación cuadrática

14. ¿Cuáles son las tres maneras de resolver una ecuación cuadrática?

15. Enuncie la propiedad del producto nulo.

16. Describa el proceso de completar cuadrados.

17. Proporcione la fórmula cuadrática.

18. ¿Cuál es el discriminante de una ecuación cuadrática?

19. Enuncie las reglas para trabajar con desigualdades.

20. ¿Cómo resuelve
    a) una desigualdad lineal?
    b) ¿Y una desigualdad no lineal?

21. a) ¿Cómo resuelve una ecuación que contiene un valor absoluto?
    b) ¿Cómo resuelve una desigualdad que contiene un valor absoluto?

22. a) Describa el plano coordenado.
    b) ¿Cómo localiza puntos en el plano coordenado?

23. Escriba cada fórmula.
    a) Fórmula de la distancia
    b) Fórmula del punto medio

24. Dada una ecuación, ¿qué es su gráfica?

25. ¿Cómo calcula las intersecciones con el eje x y con el eje y de una gráfica?

26. Escriba una ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

27. Explique el significado de cada tipo de simetría. ¿Cómo la prueba?
    a) Simetría con respecto al eje x
    b) Simetría con respecto al eje y
    c) Simetría con respecto al origen

28. Defina la pendiente de una recta.

29. Escriba cada forma de la ecuación de una recta.

a) Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

b) Ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

30. a) ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?

b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal?

31. ¿Cuál es la ecuación general de una recta?

32. Sean dos rectas con pendientes m_1 y m_2, explique cómo puede decir si las rectas son

a) paralelas   b) perpendiculares

33. Escriba una ecuación que exprese cada relación.

a) y es directamente proporcional a x.

b) y es inversamente proporcional a x.

c) z es conjuntamente proporcional a x y y.

Ejercicios

1–4 ■ Establezca la propiedad de los números reales que se aplicó.

1. $3x + 2y = 2y + 3x$

2. $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$

3. $4(a + b) = 4a + 4b$

4. $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

5–6 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y grafique luego el intervalo.

5. $[-2, 6)$ 6. $(-\infty, 4]$

7–8 ■ Exprese la desigualdad en la notación de intervalos y grafique después el intervalo correspondiente.

7. $x \geq 5$ 8. $-1 < x \leq 5$

9–18 ■ Evalúe las expresiones.

9. $|3 - |-9||$ 10. $1 - |1 - |-1||$

11. $2^{-3} - 3^{-2}$ 12. $\sqrt[3]{-125}$

13. $216^{-1/3}$ 14. $64^{2/3}$

15. $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$ 16. $\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{324}$

17. $2^{1/2}8^{1/2}$ 18. $\sqrt{2}\sqrt{50}$

19–28 ■ Simplifique la expresión.

19. $\dfrac{x^2(2x)^4}{x^3}$ 20. $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$

21. $(3xy^2)^3(\tfrac{2}{3}x^{-1}y)^2$ 22. $\left(\dfrac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$

23. $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$ 24. $\sqrt{x^2y^4}$

25. $\left(\dfrac{9x^3y}{y^{-3}}\right)^{1/2}$ 26. $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$

27. $\dfrac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4}$ 28. $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

29. Escriba el número 78 250 000 000 en la notación científica.

30. Escriba el número 2.08×10^{-8} en la notación decimal común.

31. Si $a \approx 0.00000293$, $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$, y $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$, utilice una calculadora para determinar el valor aproximado del número ab/c.

32. Si su corazón late 80 veces por minuto y llega a vivir 90 años de edad, estime las veces que su corazón late durante toda su vida. Escriba la respuesta en notación científica.

33–48 ■ Factorice la expresión totalmente.

33. $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$ 34. $x^2 - 9x + 18$

35. $x^2 + 3x - 10$ 36. $6x^2 + x - 12$

37. $4t^2 - 13t - 12$ 38. $x^4 - 2x^2 + 1$

39. $25 - 16t^2$ 40. $2y^6 - 32y^2$

41. $x^6 - 1$ 42. $y^3 - 2y^2 - y + 2$

43. $x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}$ 44. $a^4b^2 + ab^5$

45. $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ 46. $8x^3 + y^6$

47. $(x^2 + 2)^{5/2} + 2x(x^2 + 2)^{3/2} + x^2\sqrt{x^2 + 2}$

48. $3x^3 - 2x^2 + 18x - 12$

49–64 ■ Desarrolle las operaciones indicadas y simplifique.

49. $(2x + 1)(3x - 2) - 5(4x - 1)$

50. $(2y - 7)(2y + 7)$

51. $(1 + x)(2 - x) - (3 - x)(3 + x)$

52. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$