2.4 Transformaciones de funciones

En esta sección se estudia cómo ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto proporciona una mejor comprensión de cómo graficar funciones. Las transformaciones que se estudian son desplazamiento, reflexión y estiramiento.

Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

Ejemplo 1 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

Solución La función $f(x) = x^2$ se graficó en el ejemplo 1(a), sección 2.2. Se traza de nuevo en la figura 1.

a) Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Así que la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de g está tres unidades arriba del punto correspondiente sobre la gráfica de f. Esto significa que para graficar g se desplaza la gráfica de f hacia arriba tres unidades, como en la figura 1.

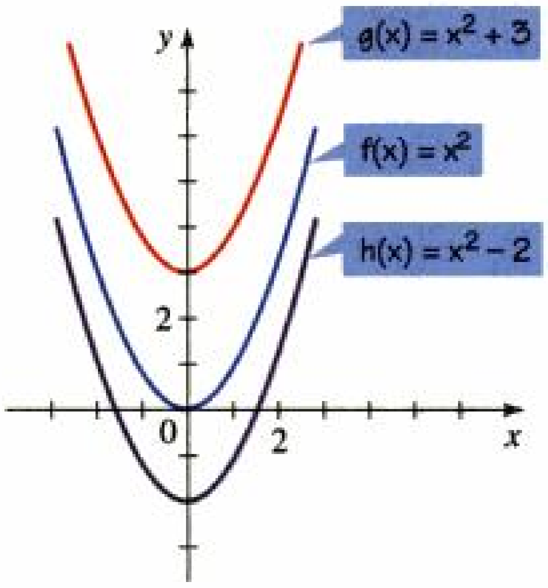


Figura 1

b) De manera similar, para graficar h se desplaza la gráfica de f hacia abajo dos unidades, como se muestra. ■

Recuerde que la gráfica de la función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

En general, suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Cómo se obtienen de ésta las gráficas de

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c \qquad (c > 0)$$

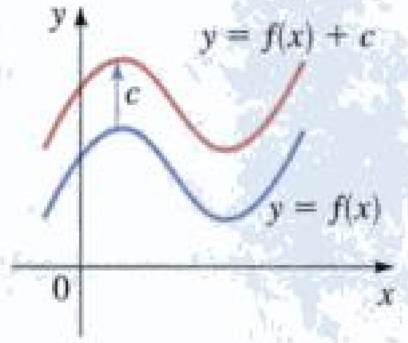
La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x) + c$ está c unidades arriba de la coordenada y del punto correspondiente sobre la gráfica de $y = f(x)$. Así, la gráfica de $y = f(x) + c$ se obtiene simplemente al desplazar c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$. De manera similar, se obtiene la gráfica de $y = f(x) - c$ al desplazar c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.

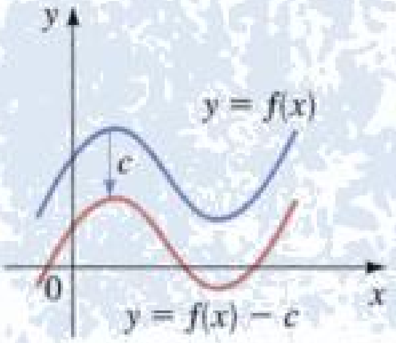
Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.





Ejemplo 2 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^3 - 9x$, que se trazó en el ejemplo 12, sección 1.8, para bosquejar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^3 - 9x + 10$ b) $h(x) = x^3 - 9x - 20$

Solución La gráfica de f se traza de nuevo en la figura 2.

a) Para graficar g la gráfica de f se desplaza 10 unidades hacia arriba, como se muestra.

b) Para graficar h la gráfica de f se desplaza 20 unidades hacia abajo, como se muestra.

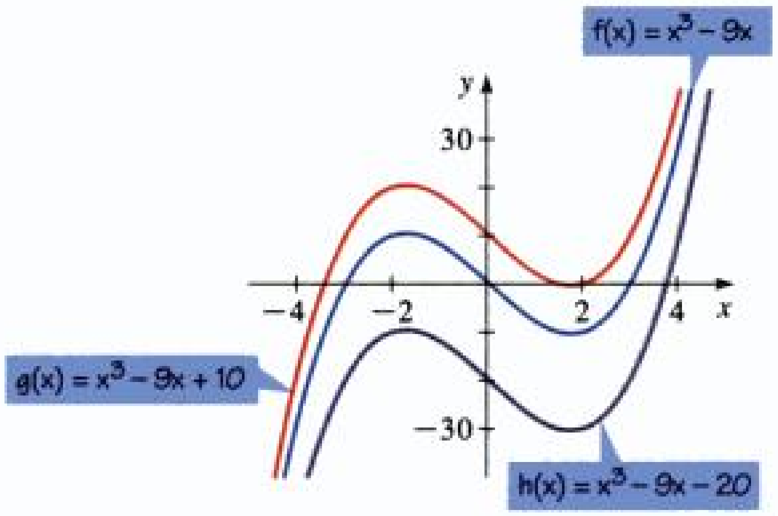


Figura 2

■

Desplazamiento horizontal

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de

$$y = f(x + c) \qquad \text{y} \qquad y = f(x - c) \qquad (c > 0)$$

El valor de $f(x - c)$ en x es el mismo que el valor de $f(x)$ en $x - c$. Puesto que $x - c$ está c unidades a la izquierda de x, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$

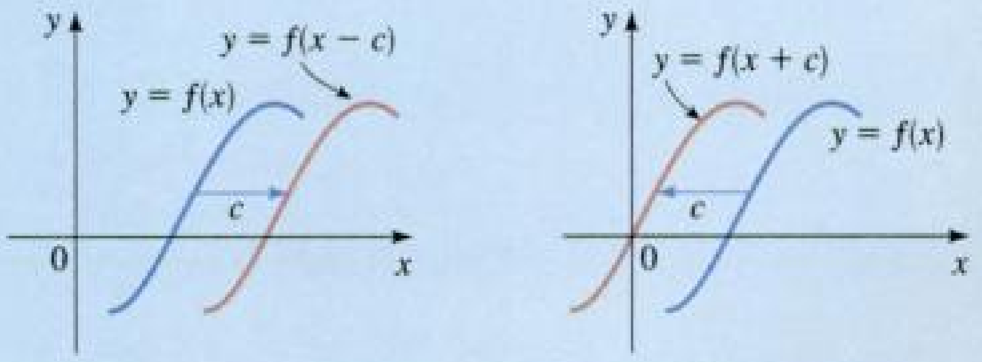
es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha c unidades. Con un razonamiento similar se demuestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda c unidades. En el cuadro siguiente se resumen estos hechos.

Desplazamientos horizontales de gráficas

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



Ejemplo 3 Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = (x + 4)^2$ b) $h(x) = (x - 2)^2$

Solución

a) Para graficar g, la gráfica de f se desplaza 4 unidades a la izquierda.

b) Para graficar h, la gráfica de f se desplaza 2 unidades a la derecha.

Las gráficas de g y h se bosquejan en la figura 3.

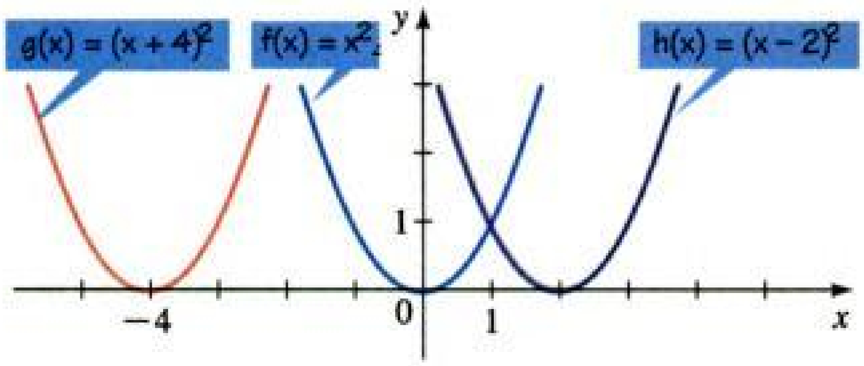


Figura 3

■

Ejemplo 4 Combinación de desplazamientos horizontales y verticales

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 3} + 4$.

Solución Se empieza con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c), sección 2.2) y se desplaza a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Luego, la gráfica resultante se desplaza 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ mostrada en la figura 4.

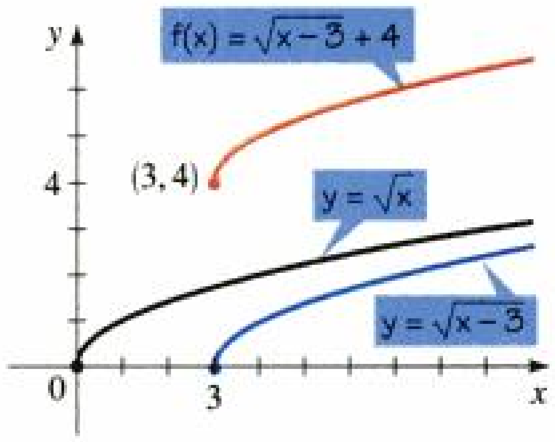


Figura 4

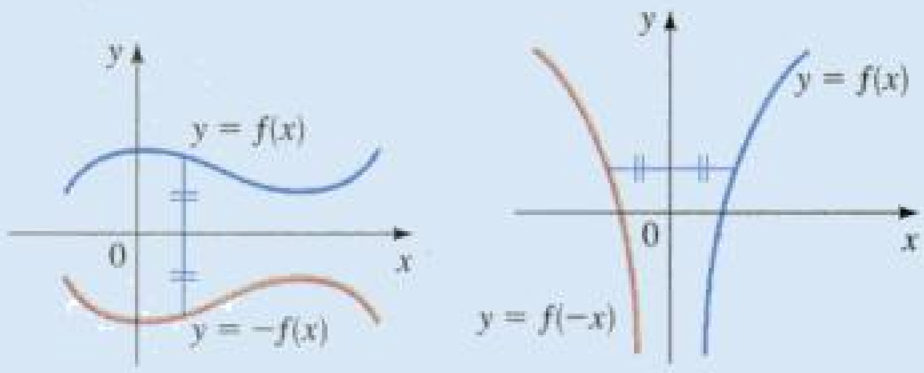
Reflexión de gráficas

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Por otro lado, el valor de $y = f(-x)$ en x es el mismo que el valor de $y = f(x)$ en $-x$ por consiguiente, la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y. En el cuadro siguiente se resumen estas observaciones.

Reflexión de gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



Ejemplo 5 Reflexión de gráficas

Trace la gráfica de cada función

(a) $f(x) = -x^2$ (b) $g(x) = \sqrt{-x}$

Solución

a) Se empieza con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje x (véase figura 5).

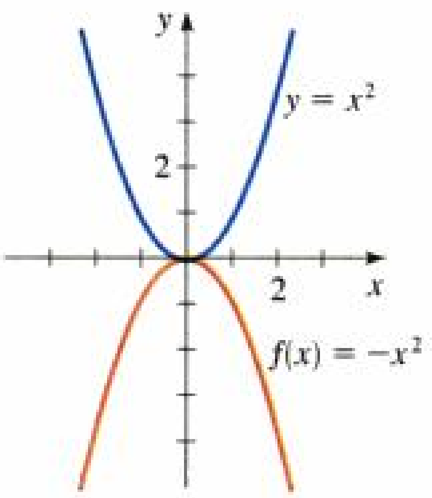


Figura 5

b) Se inicia con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2). La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje y (véase figura 6). Note que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$.

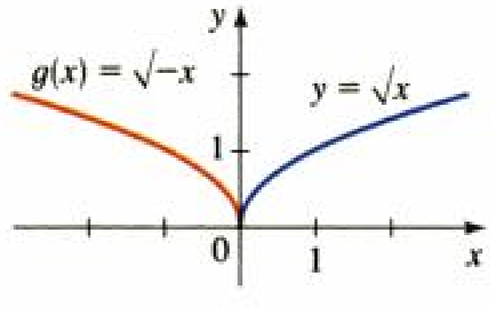


Figura 6

Estiramiento y acortamiento vertical

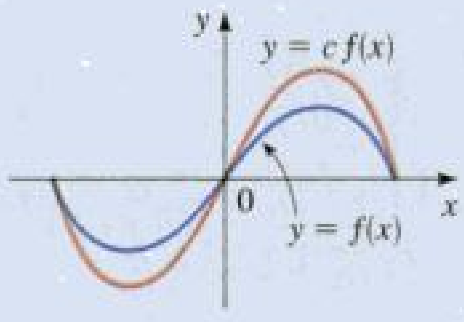
Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se usa para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es la misma que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c. Multiplicar las coordenadas y por c tiene el mismo efecto de alargar y acortar verticalmente la gráfica por un factor de c.

Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

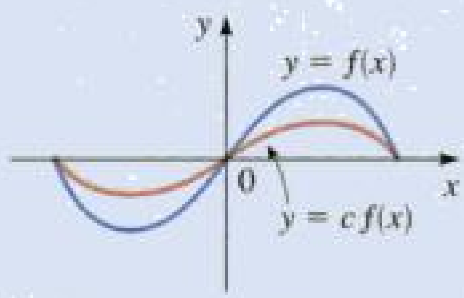
Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.



$c > 1$



$0 < c < 1$

Ejemplo 6 Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 3x^2$ b) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

Solución

a) La gráfica de g se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por 3. Es decir, para obtener la gráfica de g se alarga la gráfica de f verticalmente por un factor de 3. El resultado es la parábola más estrecha en la figura 7.

b) La gráfica de h se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por $\frac{1}{3}$. Es decir, para obtener la gráfica de h se acorta verticalmente la gráfica de f por un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más amplia en la figura 7.

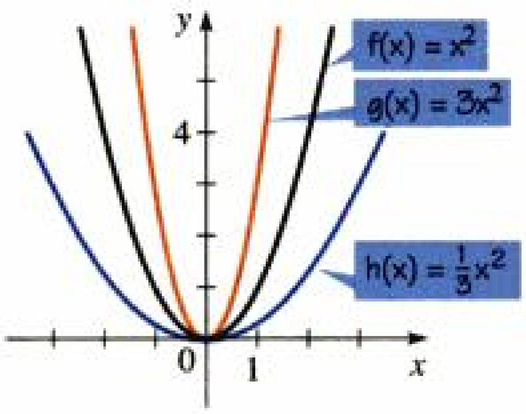


Figura 7

En el ejemplo siguiente se ilustra el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y estiramiento.

Ejemplo 7 Combinación de desplazamiento, estiramiento y reflexión

Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

Solución Comenzando con la gráfica $y = x^2$, se desplaza primero a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. Luego se refleja en el eje x y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ mostrada en la figura 8.

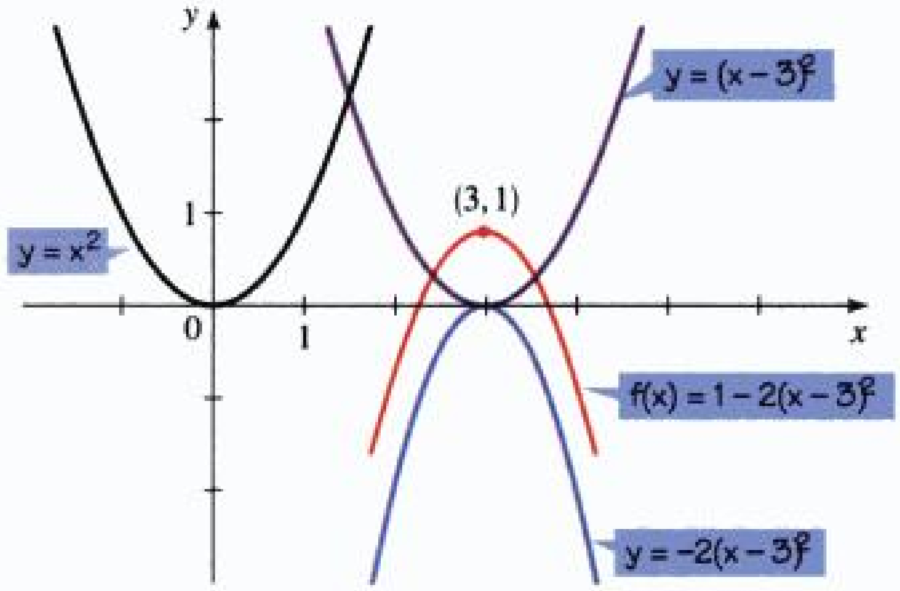


Figura 8

■

Alargamiento y estiramiento horizontal

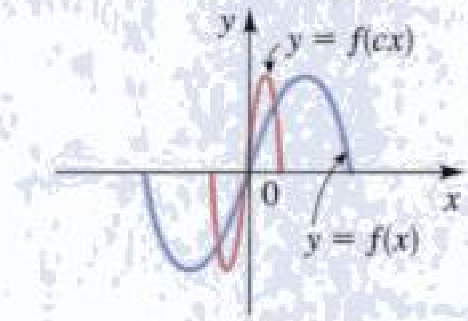
Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas. Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo se relaciona la gráfica de $y = f(cx)$ con ésta? La coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx. Así, las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ corresponde a las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicadas por c. Considerado de otro modo, se puede observar que las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, se debe acortar (o alargar) la gráfica horizontalmente por un factor de $1/c$, como se resume en el cuadro siguiente.

Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

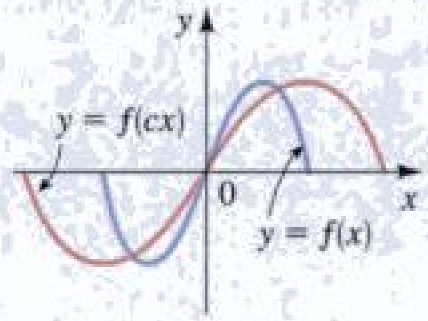
La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.



$c > 1$



$0 < c < 1$

The Granger Collection

Sonya Kovalevsky (1850-1891) es considerada la matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú en una familia aristócrata. En su infancia conoció el cálculo de una manera muy inusual, su recámara fue tapizada temporalmente con las páginas de un libro de cálculo. Ella escribió después que "pasó muchas horas enfrente de esa pared, tratando de entenderla". Puesto que la ley rusa prohibía a las mujeres estudiar en la universidad, tuvo un casamiento de conveniencia, que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Göttingen. Finalmente obtuvo una plaza de profesor de tiempo completo en la universidad de Estocolmo, donde enseñó durante ocho años antes de morir de influenza a la edad de 41 años. Su investigación fue útil para colocar sobre una base sólida y lógica las ideas y aplicaciones de las funciones y el cálculo. Recibió muchas distinciones y premios por su trabajo de investigación.

Ejemplo 8 Alargamiento y acortamiento horizontal de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 9. Trace la gráfica de cada función.

a) $y = f(2x)$ b) $y = f(\frac{1}{2}x)$

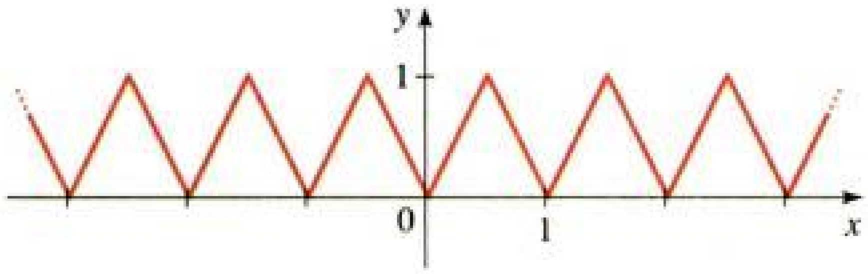


Figura 9
$y = f(x)$

Solución Con base en los principios descritos en el cuadro precedente, se obtienen las gráficas mostradas en las figuras 10 y 11.

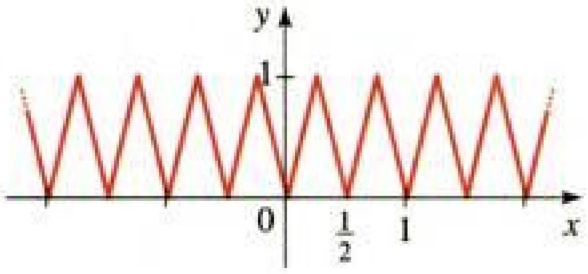


Figura 10
$y = f(2x)$

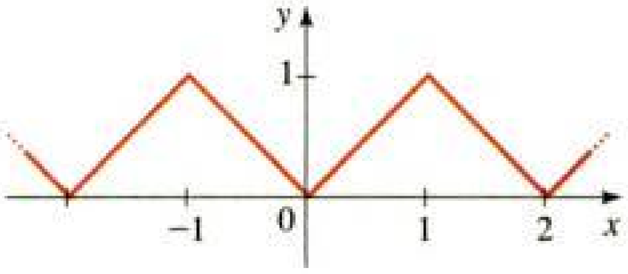


Figura 11
$y = f(\frac{1}{2}x)$ ■

Funciones par e impar

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y (véase figura 12). Esto significa que si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa simplemente reflejando esta porción en el eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen (véase figura 13). Si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa

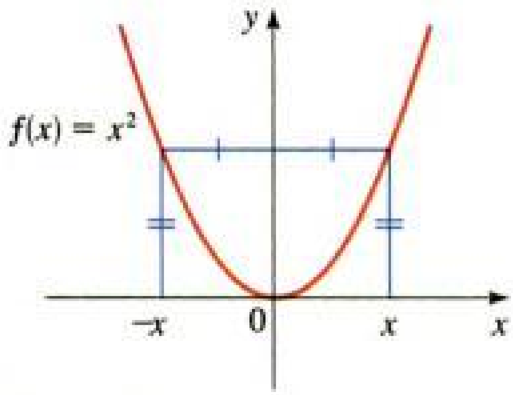


Figura 12
$f(x) = x^2$ es una función par.

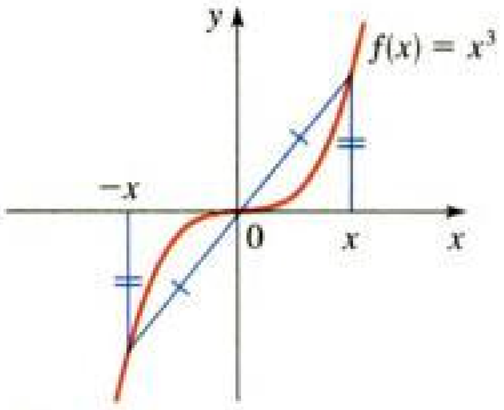


Figura 13
$f(x) = x^3$ es una función impar.

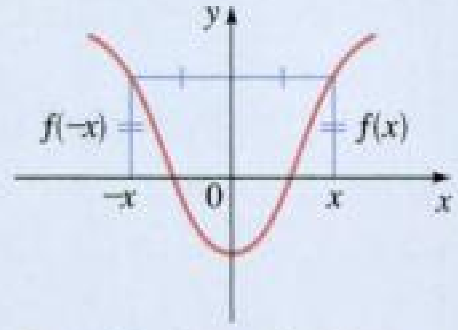
si se gira esta porción 180° respecto al origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje x luego en el eje y.)

Funciones par e impar

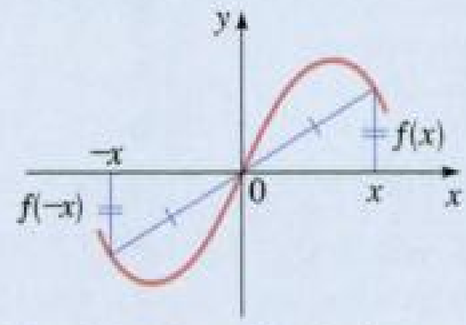
Sea f una función.

f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f



La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.



La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 9 Funciones par e impar

Determine si las funciones son par, impar o ni par ni impar.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

Solución

a) $$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función impar.

b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

Por lo tanto g es par.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Puesto que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. ■

Las gráficas de las funciones del ejemplo 9 se muestran en la figura 14. La gráfica de f es simétrica respecto al origen, y la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de h no es simétrica respecto al eje y o al origen.

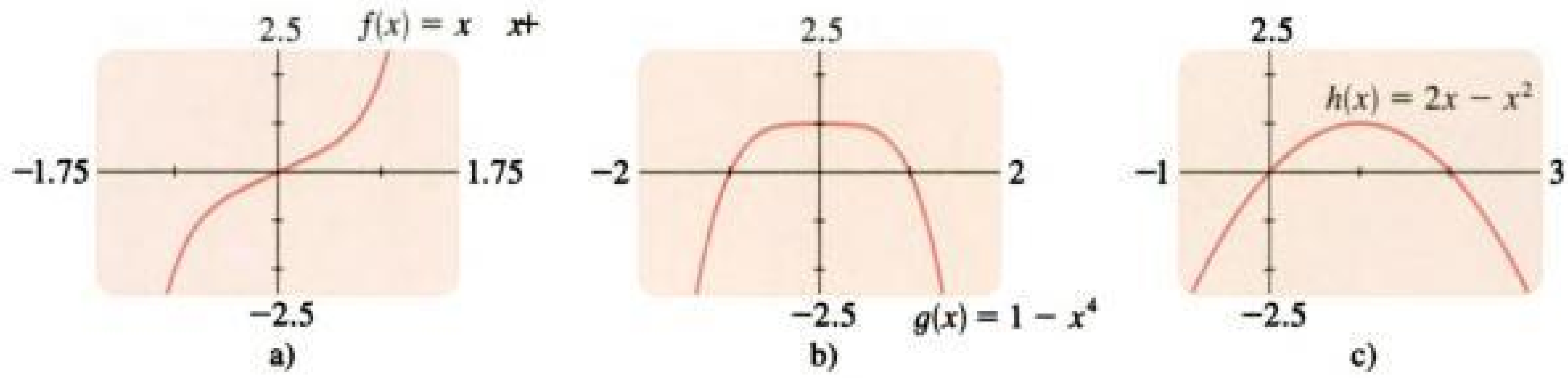


Figura 14

2.4 Ejercicios

1–10 ■ Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada función a partir de la gráfica de f.

1. a) $y = f(x) - 5$ **b)** $y = f(x - 5)$

2. a) $y = f(x + 7)$ **b)** $y = f(x) + 7$

3. a) $y = f(x + \frac{1}{2})$ **b)** $y = f(x) + \frac{1}{2}$

4. a) $y = -f(x)$ **b)** $y = f(-x)$

5. a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

6. a) $y = -f(x) + 5$ **b)** $y = 3f(x) - 5$

7. a) $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$ **b)** $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

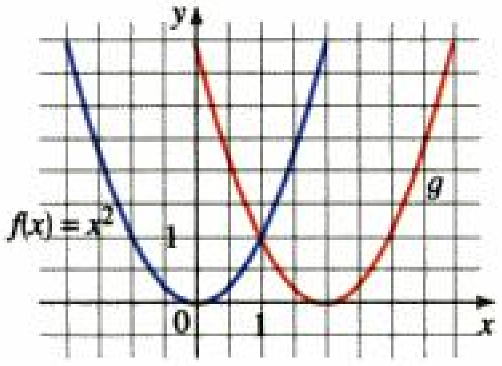
8. a) $y = 2f(x + 2) - 2$ **b)** $y = 2f(x - 2) + 2$

9. a) $y = f(4x)$ **b)** $y = f(\frac{1}{4}x)$

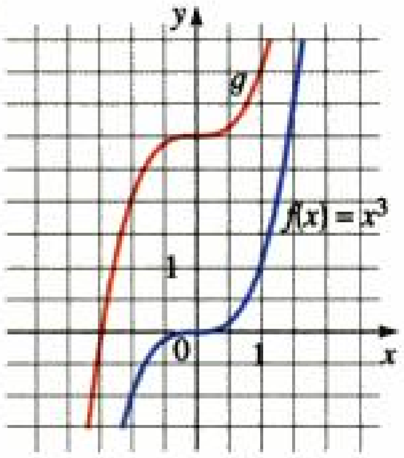
10. a) $y = -f(2x)$ **b)** $y = f(2x) - 1$

11–16 ■ Se dan las gráficas de f y g. Encuentre una fórmula para la función g.

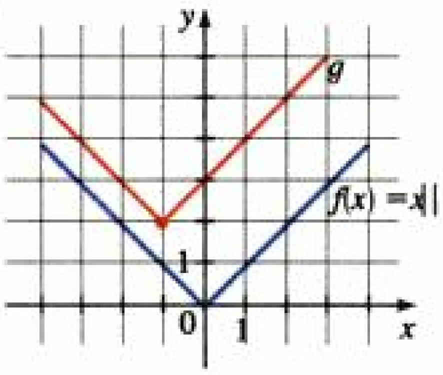
11.



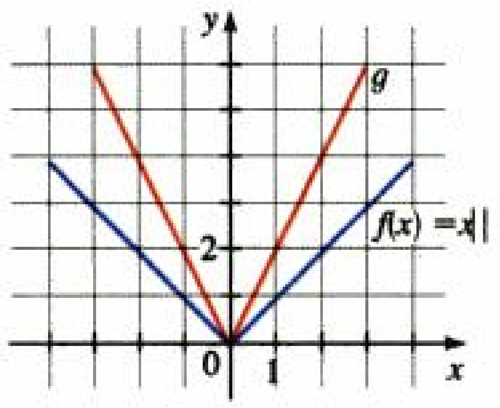
12.



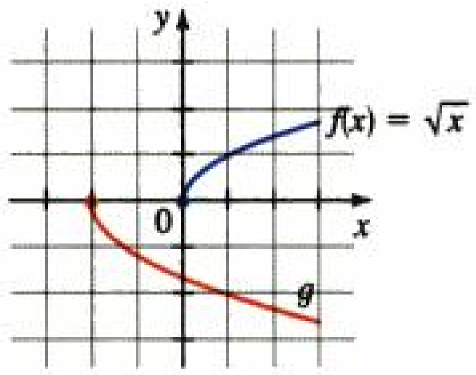
13.



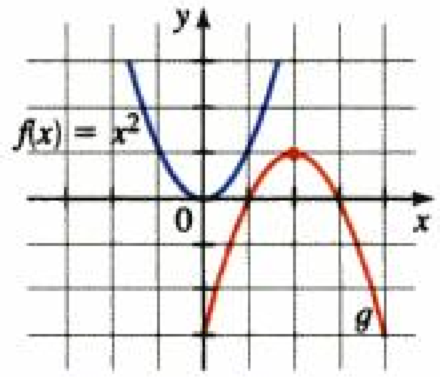
14.



15.



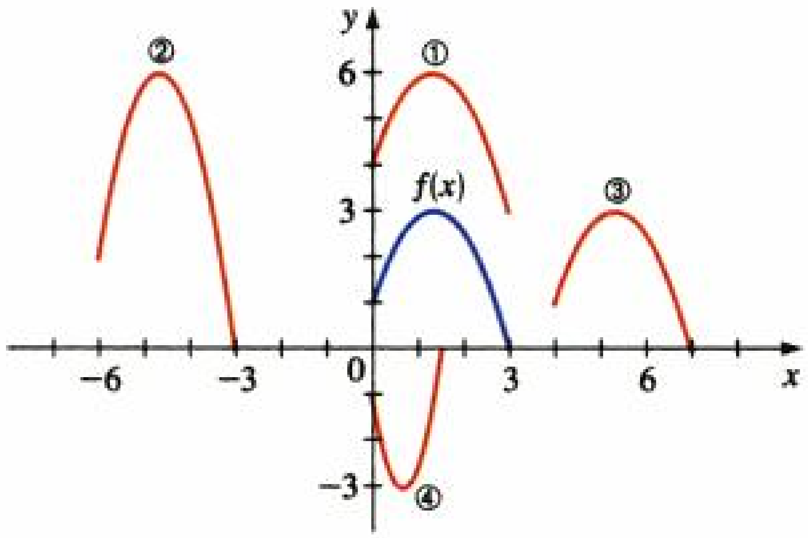
16.



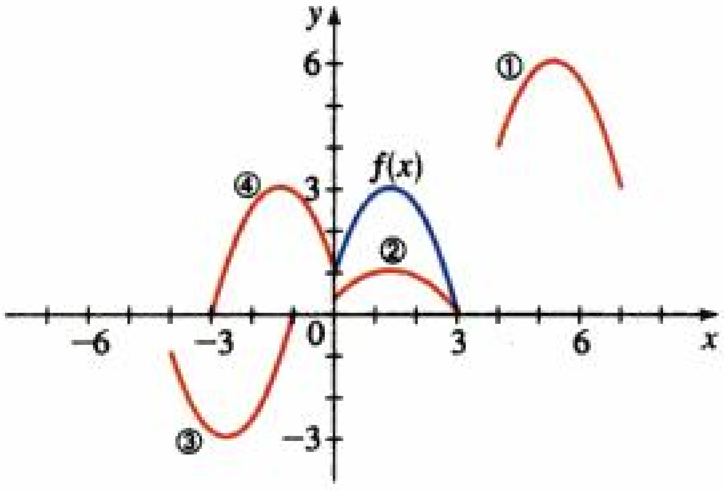
17–18 ■ Se da la gráfica de $y = f(x)$. Compare cada ecuación con su gráfica.

17. a) $y = f(x - 4)$ **b)** $y = f(x) + 3$

c) $y = 2f(x + 6)$ **d)** $y = -f(2x)$

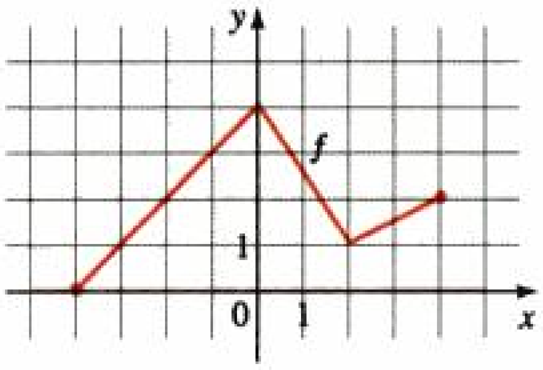


18. **a)** $y = \frac{1}{3}f(x)$ **b)** $y = -f(x + 4)$
c) $y = f(x - 4) + 3$ **d)** $y = f(-x)$



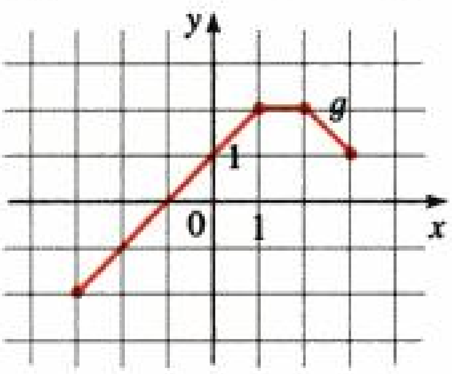
19. Se da la gráfica de f. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x) - 2$
c) $y = 2f(x)$ **d)** $y = -f(x) + 3$
e) $y = f(-x)$ **f)** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



20. Se da la gráfica de g. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = g(x + 1)$ **b)** $y = -g(x + 1)$
c) $y = g(x - 2)$ **d)** $y = g(x) - 2$
e) $y = -g(x) + 2$ **f)** $y = 2g(x)$



21. **a)** Bosqueje la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mediante la graficación de los puntos.

b) Use la gráfica de f para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

i) $y = -\dfrac{1}{x}$ ii) $y = \dfrac{1}{x - 1}$

iii) $y = \dfrac{2}{x + 2}$ iv) $y = 1 + \dfrac{1}{x - 3}$

22. **a)** Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt[3]{x}$ graficando los puntos.

b) Use la gráfica de g para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

i) $y = \sqrt[3]{x - 2}$ ii) $y = \sqrt[3]{x + 2} + 2$
iii) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ iv) $y = 2\sqrt[3]{x}$

23–26 ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

23. **a)** $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2$

24. **a)** $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 4)^3$
b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 - 4$

25. **a)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}$

26. **a)** $f(x) = |x|$, $g(x) = 3|x| + 1$
b) $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x + 1|$

27–32 ■ Se da una función f y se aplican a su gráfica las transformaciones indicadas (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica transformada final.

27. $f(x) = x^2$; desplace hacia arriba 3 unidades y 2 unidades a la derecha.

28. $f(x) = x^3$; desplace hacia abajo 1 unidad y 4 unidades a la izquierda.

29. $f(x) = \sqrt{x}$; desplace 3 unidades a la izquierda, alargue verticalmente por un factor de 5 y refleje en el eje x.

30. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; refleje en el eje y, acorte verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y desplace hacia arriba $\frac{3}{5}$ unidades.

31. $f(x) = |x|$; desplace a la derecha $\frac{1}{2}$ unidad, acorte verticalmente por un factor de 0.1 y desplace hacia abajo 2 unidades.

32. $f(x) = |x|$; desplace a la izquierda 1 unidad, alargue verticalmente por un factor de 3 y desplace hacia arriba 10 unidades.

33–48 ■ Bosqueje la gráfica de la función, no mediante la graficación de puntos, sino iniciando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

33. $f(x) = (x - 2)^2$ **34.** $f(x) = (x + 7)^2$
35. $f(x) = -(x + 1)^2$ **36.** $f(x) = 1 - x^2$
37. $f(x) = x^3 + 2$ **38.** $f(x) = -x^3$
39. $y = 1 + \sqrt{x}$ **40.** $y = 2 - \sqrt{x + 1}$
41. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$ **42.** $y = 3 - 2(x - 1)^2$
43. $y = 5 + (x + 3)^2$ **44.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$
45. $y = |x| - 1$ **46.** $y = |x - 1|$
47. $y = |x + 2| + 2$ **48.** $y = 2 - |x|$

49–52 ■ Grafique las funciones en la misma pantalla con el rectángulo de visión dado. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la gráfica del inciso a)?

49. Rectángulo de visión $[-8, 8]$ por $[-2, 8]$

a) $y = \sqrt[4]{x}$ **b)** $y = \sqrt[4]{x + 5}$

c) $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$ **d)** $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

50. Rectángulo de visión $[-8, 8]$ por $[-6, 6]$

a) $y = |x|$ **b)** $y = -|x|$

c) $y = -3|x|$ **d)** $y = -3|x - 5|$

51. Rectángulo de visión $[-4, 6]$ por $[-4, 4]$

a) $y = x^6$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^6$

c) $y = -\frac{1}{3}x^6$ **d)** $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

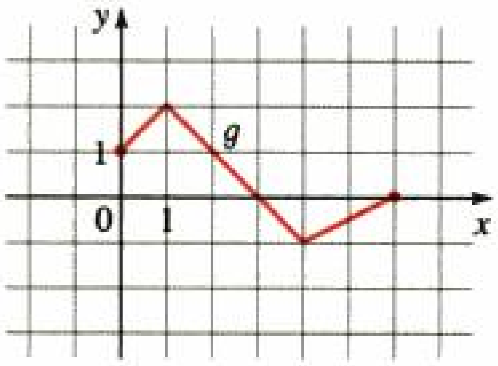
52. Rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

c) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}} - 3$

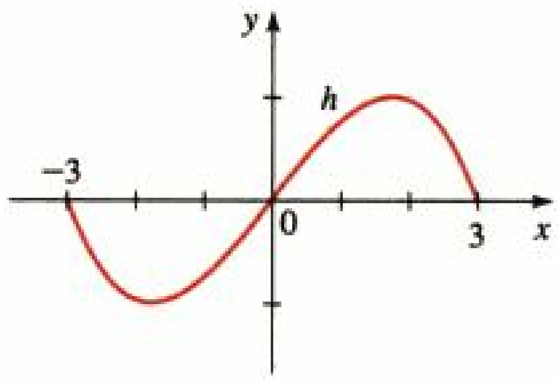
53. Se da la gráfica de g. Utilícela para graficar cada una de las siguientes funciones.

a) $y = g(2x)$ **b)** $y = g(\frac{1}{2}x)$



54. Se da la gráfica de h. Utilícela para graficar cada una de las funciones siguientes.

a) $y = h(3x)$ **b)** $y = h(\frac{1}{3}x)$

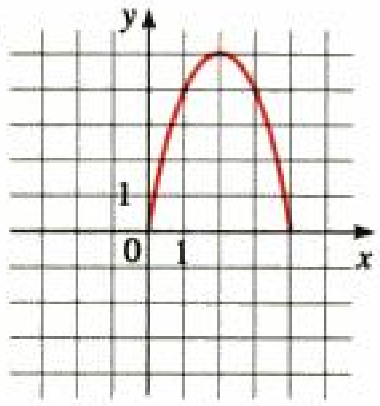


55–56 ■ Se da la gráfica de una función definida para $x \geq 0$. Complete la gráfica para $x < 0$ para construir

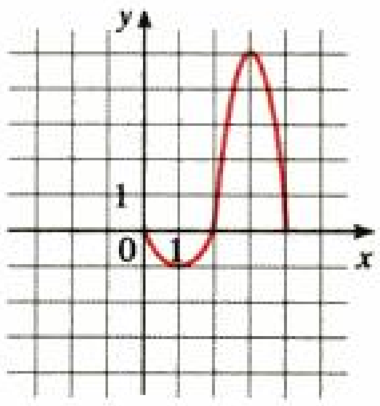
a) una función par

b) una función impar

55.



56.



57–58 ■ Use la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$ descrita en las páginas 162 a 163 para graficar la función indicada.

57. $y = [\![2x]\!]$ **58.** $y = [\![\frac{1}{4}x]\!]$

59. Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la del inciso a)?

a) $y = f(x)$ **b)** $y = f(2x)$ **c)** $y = f(\frac{1}{2}x)$

60. Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las funciones siguientes en el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la del inciso a)?

a) $y = f(x)$ **b)** $y = f(-x)$ **c)** $y = -f(-x)$

d) $y = f(-2x)$ **e)** $y = f(-\frac{1}{2}x)$

61–68 ■ Determine si la función f es par, impar o ninguna. Si f es par o impar, use la simetría para bosquejar su gráfica.

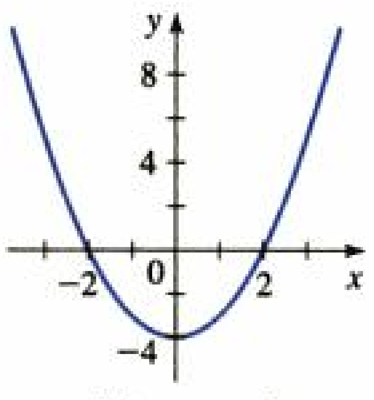
61. $f(x) = x^{-2}$ **62.** $f(x) = x^{-3}$

63. $f(x) = x^2 + x$ **64.** $f(x) = x^4 - 4x^2$

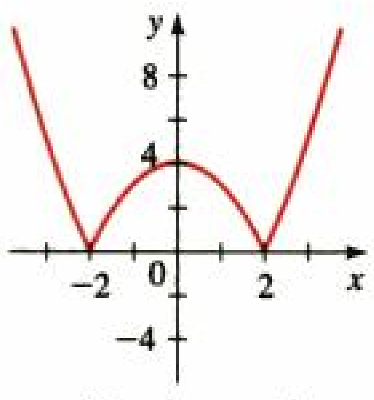
65. $f(x) = x^3 - x$ **66.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

67. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **68.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

69. Se muestran las gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |x^2 - 4|$. Explique cómo se obtiene la gráfica de g de la gráfica de f.

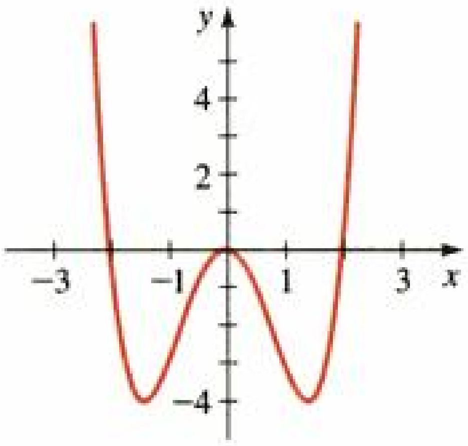


$f(x) = \quad - 4$



$g(x) = | \quad - 4 |$

70. Se muestra la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.



71–72 ■ Bosqueje la gráfica de cada función.

71. a) $f(x) = 4x - x^2$ **b)** $g(x) = |4x - x^2|$

72. a) $f(x) = x^3$ **b)** $g(x) = |x^3|$

Aplicaciones

73. Crecimiento de las ventas Las ventas anuales de cierta compañía se pueden modelar mediante la función $f(t) = 4 + 0.01t^2$, donde t representa los años desde 1990 y $f(t)$ se mide en millones de dólares.

a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y acortamiento se deben efectuar en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = f(t)$?

b) Suponga que desea que t represente los años desde 2000 en vez de 1990. ¿Qué transformación tendría que aplicar a la función $y = f(t)$ para llevar a cabo esto? Escriba la nueva función $y = g(t)$ que resulta de esta transformación.

74. Escalas de temperatura cambiantes La temperatura en cierta tarde se modela mediante la función

$$C(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + 2$$

donde t representa horas después de las 12 del día $(0 \le t \le 6)$ y C se mide en °C.

a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y decrecimiento se tienen que desarrollar en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = C(t)$?

b) Suponga que en cambio desea medir la temperatura en °F. ¿Qué transformación tendría que aplicar a la función $y = C(t)$ para llevar a cabo esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por $F = \tfrac{9}{5}C + 32$.) Escriba la nueva función $y = F(t)$ que resulta de esta transformación.

Descubrimiento • Debate

75. Sumas de funciones par e impar Si f y g son funciones pares, ¿$f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

76. Productos de funciones par e impar Conteste las mismas preguntas que en el ejercicio 75, excepto que esta vez considere el *producto* de f y g en lugar de la suma.

77. Funciones exponenciales par e impar ¿Qué debe ser cierto acerca del entero n si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué considera que se eligieron los nombres "par" e "impar" para estas propiedades de función?

2.5 Funciones cuadráticas; máximos y mínimos

Un valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo. Para una función que representa la ganancia en un negocio, se estaría interesado en el valor máximo; para una función que representa la cantidad de material en un proceso de manufactura, se estaría interesado en el valor mínimo. En esta sección se aprende cómo hallar los valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas y otras.

Graficación de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Una **función cuadrática** es una función f de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

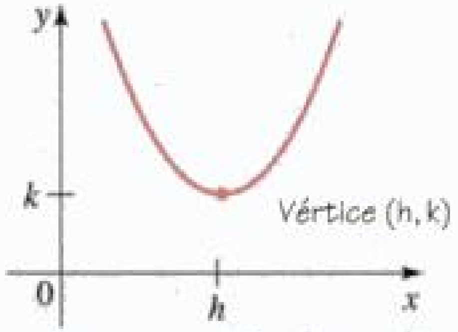
En particular, si se toma $a = 1$ y $b = c = 0$, se obtiene la función cuadrática simple $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la parábola que se dibujó en el ejemplo 1 de la sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; se puede obtener de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la sección 2.4.

Forma estándar de una función cuadrática

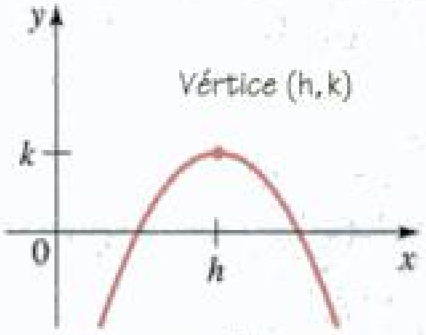
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k); la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

Ejemplo 1 Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

Solución

En la sección 1.5 se explica cómo completar el cuadrado.

a) Puesto que el coeficiente de x^2 no es 1, se debe factorizar este coeficiente a partir de los términos relacionados con x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en x} \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x - 3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

La forma estándar es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

b) La forma estándar indica que la gráfica de f se obtiene tomando la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola por un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en $(3, 5)$ y la parábola abre hacia arriba. La gráfica se bosqueja en la figura 1 después de notar que el intersecto y es $f(0) = 23$.

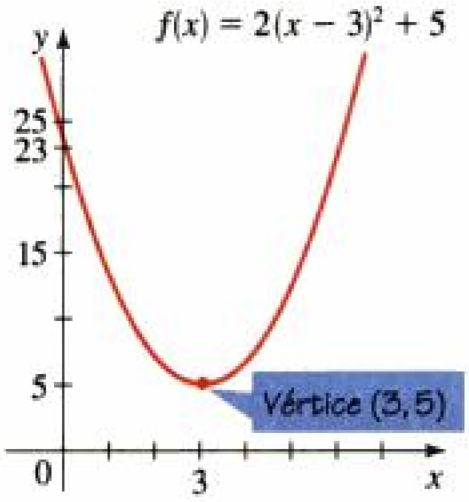


Figura 1

■

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

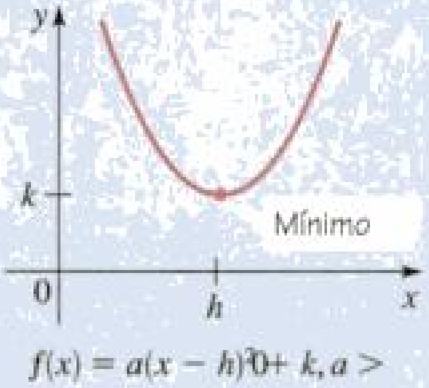
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si abre hacia arriba y un valor máximo en el vértice si abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la figura 1 tiene un valor mínimo 5 cuando $x = 3$, puesto que el vértice $(3, 5)$ es el punto mínimo sobre la gráfica.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

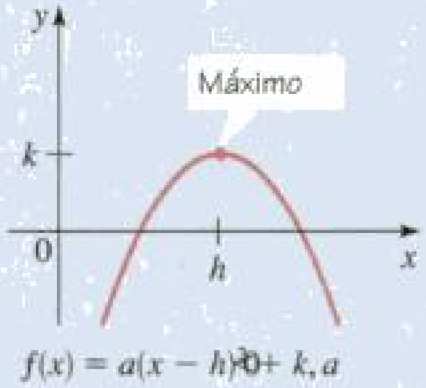
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

Ejemplo 2 Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Halle el valor mínimo de f.

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de los términos en x} \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

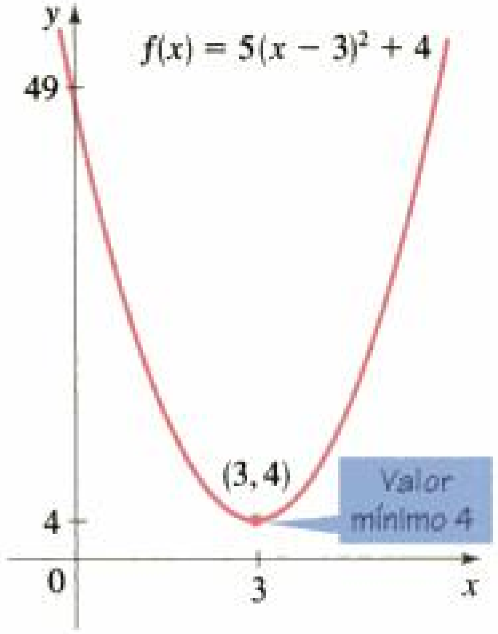


Figura 2

b) La gráfica es una parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se bosqueja en la figura 2.

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$. ■

Ejemplo 3 Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Encuentre el valor máximo de f.

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice -1 de los términos en x} \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro del paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

b) De la forma estándar se puede observar que la gráfica es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, se encuentran las intersecciones. La intersección y es $f(0) = 2$. Para hallar las intersecciones con x, se establece $f(x) = 0$ y se factoriza la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 \\ -(x^2 - x - 2) &= 0 \\ -(x - 2)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Así, las intersecciones x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la figura 3.

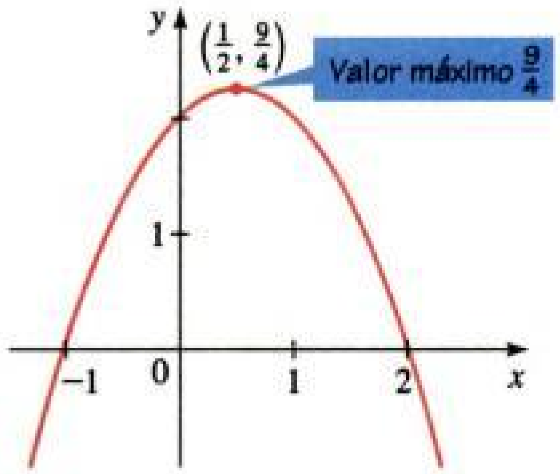


Figura 3
Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$. ■

Expresar una función cuadrática en la forma estándar ayuda a bosquejar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si se está interesado sólo en hallar el valor máximo o mínimo, entonces hay una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro del paréntesis, reste } \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad \text{Factorice}$$

Esta ecuación está en la forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Puesto que el valor máximo o mínimo ocurre en $x = h$, se tiene el resultado siguiente.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

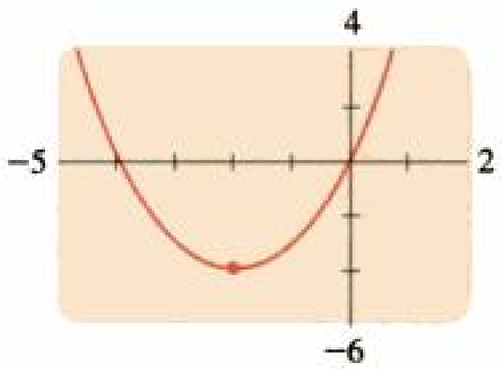
Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Ejemplo 4 Hallar valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas

Hallar el valor máximo o mínimo de cada función cuadrática.

a) $f(x) = x^2 + 4x$ b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Solución



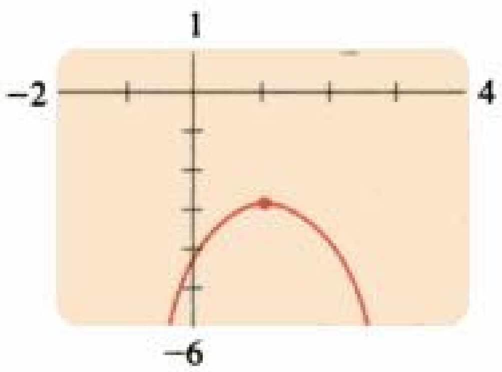
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

a) Esta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Por lo tanto, el valor máximo o mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Puesto que $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

b) Esta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Así, el valor máximo o mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Puesto que $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

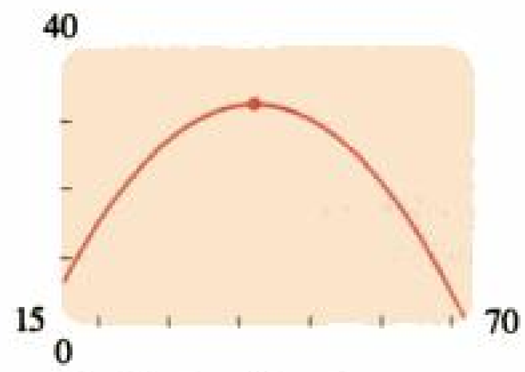
$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$ ■

Muchos problemas del mundo real tienen que ver con hallar un valor máximo o mínimo para una función que modela una determinada situación. En el ejemplo siguiente se encuentra el valor máximo de una función cuadrática que modela la cantidad de millas recorridas de un automóvil.

Ejemplo 5 Millaje máximo de combustible para un automóvil

La mayor parte de los automóviles obtienen su mejor millaje de combustible cuando viajan a velocidad relativamente modesta. El millaje M para cierto automóvil nuevo se modela mediante la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$



El millaje máximo de combustible ocurre a 42 km/h.

donde s es la velocidad en millas/h y M se mide en millas/gal. ¿Cuál es el mejor millaje de combustible para el automóvil y a qué velocidad se obtiene?

Solución La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Así, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{28})} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Así que el mejor millaje de combustible del automóvil es 32 millas/gal, cuando está viajando a 42 millas/h. ■

Uso de dispositivos de graficación para hallar valores extremos

Los métodos analizados se aplican para hallar valores extremos de funciones cuadráticas solamente. Ahora se muestra cómo localizar valores extremos de cualquier función que se puede graficar con una calculadora o computadora.

Si hay un rectángulo de visión tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f *dentro* del rectángulo de visión (no en el borde), entonces el número $f(a)$ se llama **valor máximo local** de f (véase figura 4). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números x que están cerca de a.

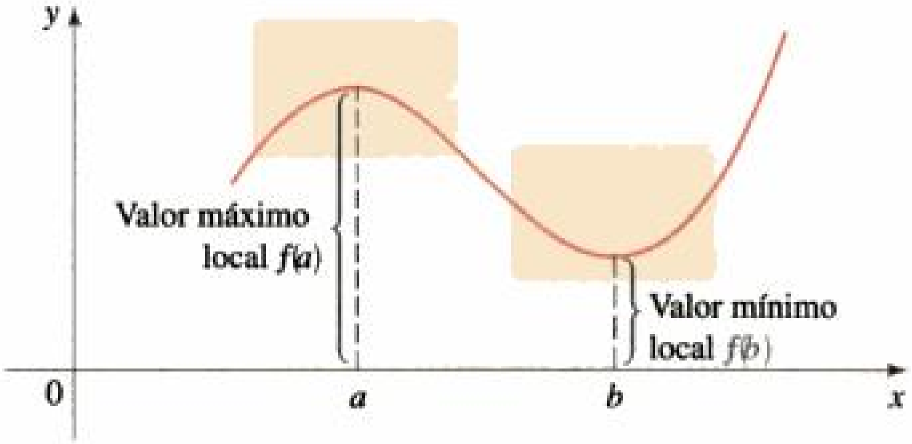


Figura 4

De manera similar, si hay un rectángulo de visión tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto mínimo en la gráfica de f dentro del rectángulo de visión, entonces el número $f(b)$ se llama **valor mínimo local** de f. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para los números x que están cercanos a b.

Ejemplo 6 Hallar los máximos y mínimos locales de una gráfica

Hallar los valores máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, correctos hasta tres decimales.

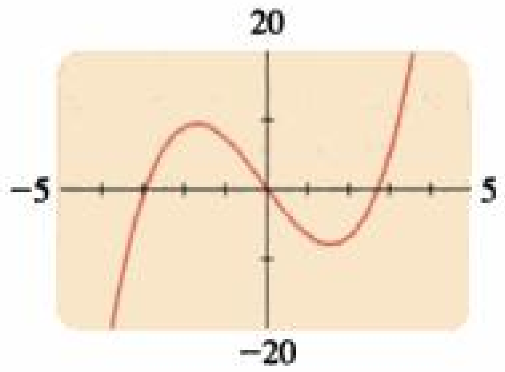


Figura 5
Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

Solución La gráfica de f se muestra en la figura 5. Al parecer hay un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

Primero se determinarán las coordenadas del punto máximo local. Se hace un acercamiento para agrandar el área cercana a este punto, como se muestra en la figura 6. Usando la característica TRACE en el dispositivo de graficación, se mueve el cursor a lo largo de la curva y se observa cómo cambian las coordenadas y. El valor máximo local de y es 9.709, y su valor ocurre cuando x es -1.633, correcto hasta tres decimales.

Se localiza el valor mínimo de una manera similar. Al realizar un acercamiento al rectángulo de visión mostrado en la figura 7, se encuentra que el valor máximo local es aproximadamente -7.709, y este valor ocurre cuando $x \approx 1.633$.

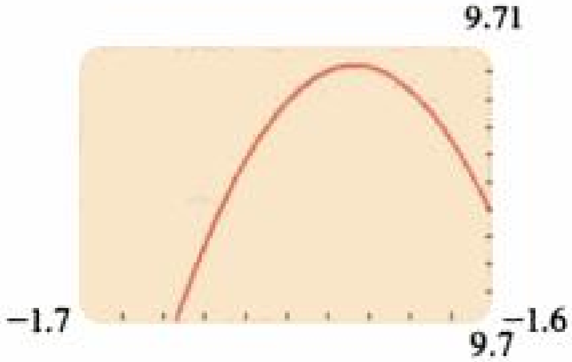


Figura 6

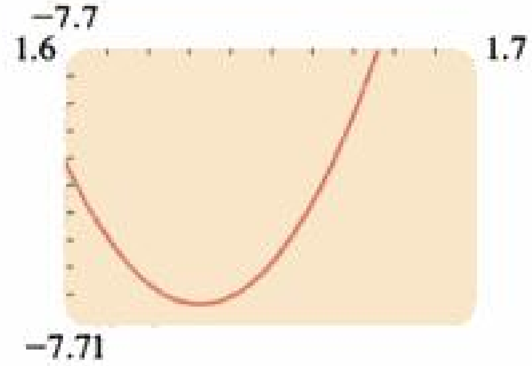


Figura 7

■

Los comandos `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-82 o TI-83 proveen otro método para hallar valores extremos de funciones. En el ejemplo siguiente se usa este método.

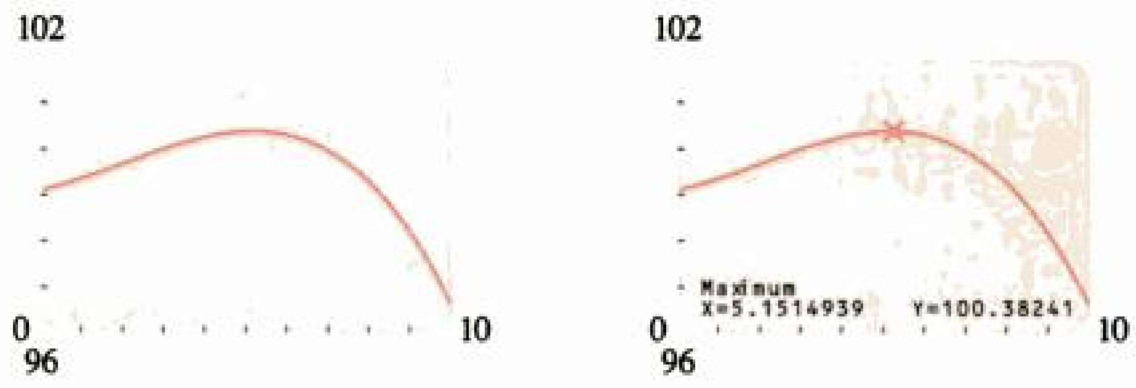
Ejemplo 7 Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde t se mide en años desde la mitad de 1990, así que $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ se escala de modo que $I(3) = 100$. Estime el tiempo cuando la comida fue más cara durante el periodo 1990-2000.

Solución La gráfica de I como una función de t se muestra en la figura 8(a). Al parecer hay un máximo entre $t = 4$ y $t = 7$. Usando el comando `maximum` como se muestra en la figura 8(b), se puede observar que el valor máximo de I es casi 100.38, y ocurre cuando $t \approx 5.15$, que corresponde a agosto de 1995.



a) b)

Figura 8 ■

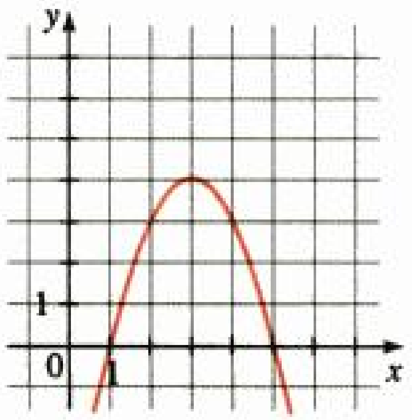
2.5 Ejercicios

1–4 ■ Se da la gráfica de una función cuadrática.

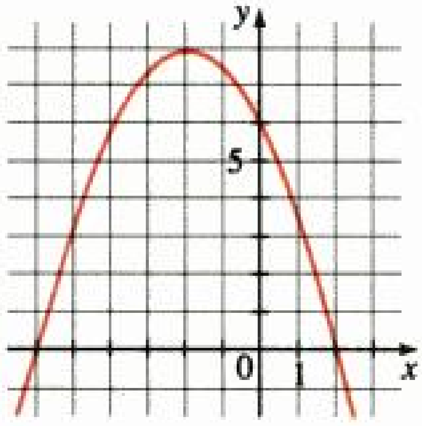
a) Determine las coordenadas del vértice.

b) Halle el valor máximo o mínimo de f.

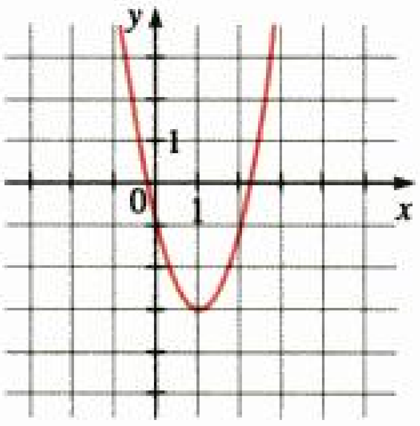
1. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



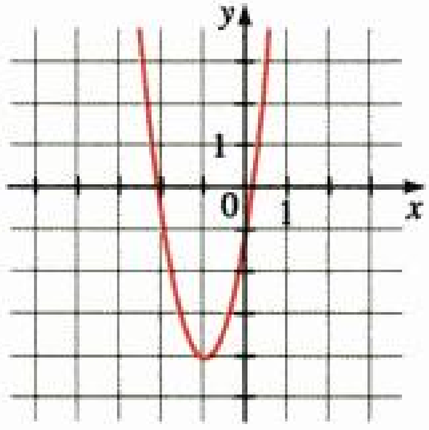
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



3. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



4. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



5–18 ■ Se da una función cuadrática.

a) Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

b) Halle su vértice y sus intersectos x y y.

c) Bosqueje su gráfica.

5. $f(x) = x^2 - 6x$ **6.** $f(x) = x^2 + 8x$

7. $f(x) = 2x^2 + 6x$ **8.** $f(x) = -x^2 + 10x$

9. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **10.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

11. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **12.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

13. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

15. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **16.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

17. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **18.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

19–28 ■ Se da una función cuadrática.

a) Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

b) Bosqueje su gráfica.

c) Halle su valor máximo o mínimo.

19. $f(x) = 2x - x^2$ **20.** $f(x) = x + x^2$

21. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **22.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

23. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **24.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

25. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **26.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

27. $h(x) = 1 - x - x^2$ **28.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

29–38 ■ Halle el valor máximo o mínimo de la función.

29. $f(x) = x^2 + x + 1$ **30.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

31. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **32.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

33. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **34.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

35. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **36.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

37. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **38.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

39. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

40. Halle una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

41–44 ■ Halle el dominio y el rango de la función.

41. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **42.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

43. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **44.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

45–46 ■ Se da una función cuadrática.

(a) Use un dispositivo de graficación para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcto a dos lugares decimales.

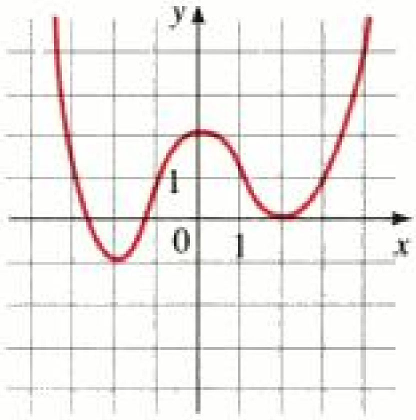
(b) Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compare con su respuesta al inciso a).

45. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

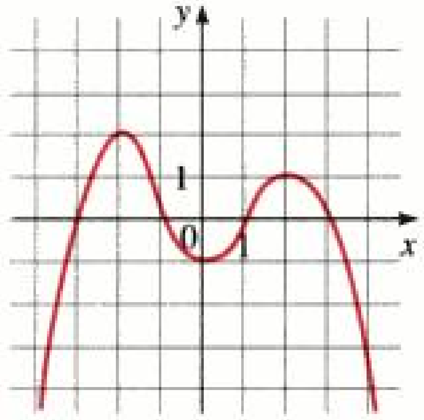
46. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

47–50 ■ Halle los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

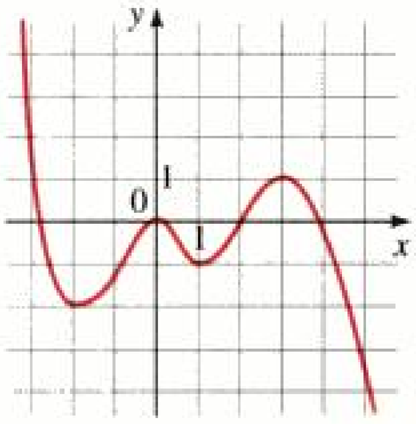
47.



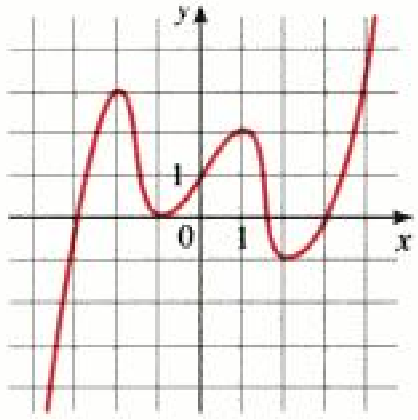
48.



49.



50.



51–58 ■ Encuentre los valores locales máximo y mínimo de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

51. $f(x) = x^3 - x$ **52.** $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

53. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$ **54.** $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

55. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$ **56.** $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

57. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$ **58.** $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

Aplicaciones

59. Altura de una bola Si se lanza una bola directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

60. Trayectoria de la bola Se lanza una bola en un campo de juego. Su trayectoria está dada por la ecuación

$y = -0.005x^2 + x + 5$, donde x es la distancia que la bola ha viajado horizontalmente, y y es la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

b) ¿Qué tan lejos ha viajado horizontalmente la bola cuando choca con el suelo?

61. Ingreso Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierto artículo está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo y cuántas unidades se tienen que fabricar para obtener ese máximo?

62. Ventas Un vendedor de bebidas carbonatadas en una popular playa analiza sus registros de ventas, y encuentra que si vende x latas de bebida en un día, su ganancia (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su ganancia máxima por día, y cuántas latas debe vender para que la ganancia sea máxima?

63. Publicidad La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces,

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

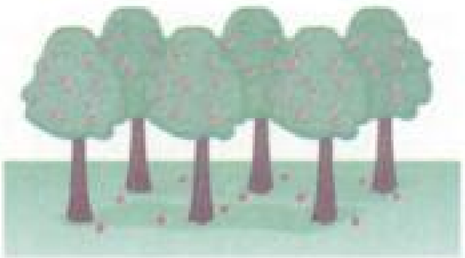
donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo debe ver un televidente?

64. Productos farmacéuticos Cuando cierto fármaco se toma oralmente, su concentración en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima, y cuál es esa concentración máxima?

65. Agricultura El número de manzanas que produce cada árbol en una huerta depende de la densidad de árboles plantados. Si se plantan n árboles en un acre de tierra, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Así que el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles se deben plantar por acre a fin de obtener la producción máxima de manzanas?



66. Peces migratorios Un pez nada a una velocidad v relativa al agua, contra una corriente de 5 millas/h. Con un modelo matemático de gasto de energía, se puede mostrar que la energía total E requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3\frac{10}{v-5}$$

Los biólogos creen que los peces migratorios tratan de reducir al mínimo la energía total requerida para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de v que minimiza la energía requerida.

NOTA: este resultado ha sido comprobado; los peces migratorios nadan contra la corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.

67. Ingeniería de carreteras Un ingeniero desea calcular el número máximo de automóviles que pueden viajar de manera segura en una determinada carretera a una velocidad especificada. Se supone que cada automóvil mide 17 pies de longitud, viaja a una velocidad s y sigue al automóvil frente a él a la "distancia segura" para esa velocidad. Encuentra que el número N de automóviles que pueden pasar en determinado punto por minuto se modela mediante la función

$$N(s) = \frac{88s}{17 + 17\left(\dfrac{s}{20}\right)^2}$$

¿A qué velocidad puede el mayor número de automóviles viajar con seguridad por la carretera?

68. Volumen de agua Entre 0°C y 30°C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el volumen de 1 kg de agua es un mínimo.

69. **Tos** Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba causando un incremento de presión en los pulmones. Al mismo tiempo la tráquea se contrae, y provoca que el aire expelido se mueva más rápido e incremente la presión sobre el objeto extraño. De acuerdo con el modelo matemático de toser, la velocidad v de la corriente de aire por la tráquea de una persona de tamaño promedio se relaciona con el radio r de la tráquea (en centímetros) mediante la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2, \qquad \tfrac{1}{2} \le r \le 1$$

Determine el valor de r para el cual v es un máximo.

Descubrimiento • Debate

70. **Máximos y mínimos** En el ejemplo 5 se analizó una situación del mundo real en la que el valor máximo de una función es importante. Mencione otras situaciones cotidianas en las que un valor máximo o mínimo es importante.

71. **Minimizar una distancia** Cuando se busca un valor mínimo o máximo de una función, algunas veces se considera más fácil trabajar con una función más simple.
   a) Suponga que $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde $f(x) \ge 0$ para toda x. Explique por qué los mínimos y máximos locales de f y g ocurren en los mismos valores de x.
   b) Sea $g(x)$ la distancia entre el punto $(3, 0)$ y el punto (x, x^2) sobre la gráfica de la parábola $y = x^2$. Exprese a g como una función de x.
   c) Encuentre el valor mínimo de la función g que encontró en el inciso b). Use el principio descrito en el inciso a) para simplificar su trabajo.

72. **Máximo de un polinomio de cuarto grado** Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + 4x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* sea $t = x^2$.]

2.6 Modelado con funciones

Muchos de los procesos estudiados en las ciencias físicas y sociales requieren entender cómo varía una cantidad respecto a otra. Hallar una función que describe la dependencia de una cantidad en otra se llama *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo se incrementa con el tiempo. Él intenta modelar este fenómeno mediante la determinación de la función precisa (o regla) que relaciona la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En esta sección se aprenderá cómo hallar modelos que se pueden construir con propiedades geométricas o algebraicas del objeto bajo estudio. (La determinación de modelos a partir de *datos* se estudia en la parte *Enfoque en el modelado* al final de este capítulo.) Una vez que se encuentra el modelo, se emplea para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso bajo estudio.

Modelado con funciones

Empezaremos con una situación simple de la vida real que ilustra el proceso de modelado.

Ejemplo 1 Modelado del volumen de una caja

Una compañía productora de cereal fabrica cajas para empacar su producto. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su amplitud es tres veces su profundidad y su altura es cinco veces su profundidad.

a) Halle una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulgadas.

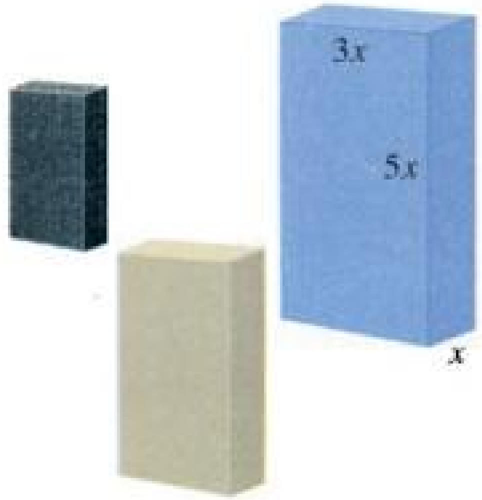
c) ¿Para qué profundidad el volumen es 90 pulg^3?

d) ¿Para qué profundidad el volumen es mayor que 60 pulg^3?

■ **Razonamiento acerca del problema**

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulg, entonces la amplitud es 3 pulg y la altura es 5 pulg. Así que en este caso, el volumen es $V = 1 \times 3 \times 5 = 15$ pulg^3. En la tabla se dan otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y mientras mayor es la profundidad mayor es el volumen.

Profundidad	Volumen
1	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2	$2 \times 6 \times 10 = 120$
3	$3 \times 9 \times 15 = 405$
4	$4 \times 12 \times 20 = 960$



Solución

a) Para hallar la función que modela el volumen de la caja, se usan los siguientes pasos.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que el volumen de una caja rectangular es

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

■ **Elija la variable**

Hay tres cantidades variables: ancho, profundidad y altura. Puesto que la función que se desea depende de la profundidad, sea

$$x = \text{profundidad de la caja}$$

Entonces se expresan las otras dimensiones de la caja en términos de x.

En palabras	En álgebra
Profundidad	x
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función V que da el volumen de la caja en términos de la profundidad x.

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja se modela mediante la función $V(x) = 15x^3$. La función V se grafica en la figura 1.

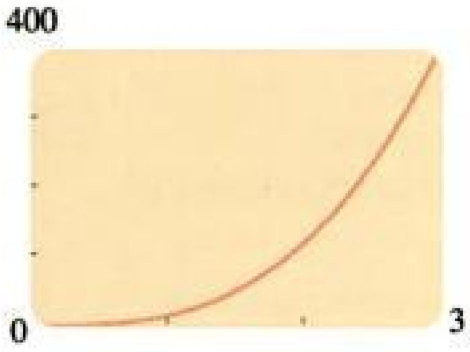
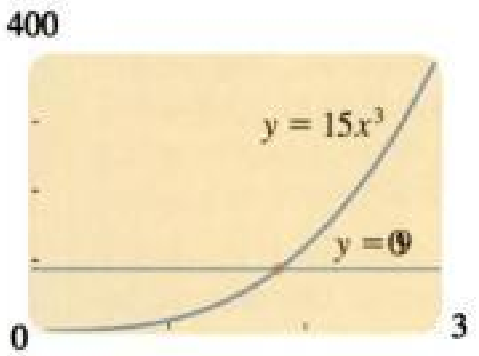
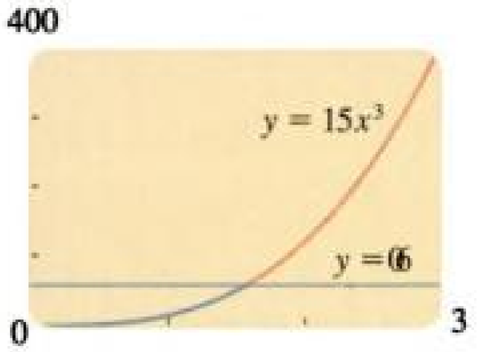


Figura 1



$15x^3 = 9$

Figura 2



$15x^3 > 6$

Figura 3

■ **Use el modelo**

Se usa el modelo para contestar las preguntas de los incisos b), c) y d).

b) Si la profundidad es 1.5 pulg, el volumen es $V(1.5) = 15(1.5)^3 = 50.625$ pulg^3.

c) Se necesita resolver la ecuación $V(x) = 90$ o bien

$$15x^3 = 90$$
$$x^3 = 6$$
$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1.82 \text{ pulg.}$$

El volumen es 90 pulg^3 cuando su profundidad es cerca de 1.82 pulg. (Esta ecuación se puede resolver también de manera gráfica, como se muestra en la figura 2.)

d) Se requiere resolver la desigualdad $V(x) > 60$, o bien,

$$15x^3 > 60$$
$$x^3 > 4$$
$$x > \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

El volumen será mayor que 60 pulg^3 si la profundidad es mayor que 1.59 pulg. (Esta desigualdad se puede resolver también de manera gráfica, como se ilustra en la figura 3.) ■

Los pasos del ejemplo 1 son representativos de cómo modelar con funciones. Se resumen en el cuadro siguiente.

Normas para modelar con funciones

1. **Exprese el modelo en palabras.** Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela, en palabras, como una función de otras cantidades en el problema.
2. **Elija la variable.** Identifique las variables empleadas para expresar la función en el paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de este símbolo.
3. **Establezca el modelo.** Exprese la función en el lenguaje del álgebra al escribirla como una función de la única variable elegida en el paso 2.
4. **Use el modelo.** Emplee la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, use los métodos algebraico o gráfico descritos en la sección 2.5.)

Ejemplo 2 Cercado de un jardín

Un jardinero tiene 140 pies de cerca para un jardín de legumbres rectangular.

a) Encuentre una función de modele el área del jardín que puede cercar.

b) ¿Para qué intervalo de amplitudes el área es mayor o igual que 825 pies^2?

c) ¿Puede cercar un jardín con área de 1250 pies^2?

d) Encuentre las dimensiones del área más grande que puede cercar.

■ **Razonamiento acerca del problema**

Si el jardinero cerca una parcela de 10 pies de ancho, entonces la longitud debe ser de 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Por lo tanto, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

En la tabla se muestran varias elecciones para cercar el jardín. Se puede observar que cuando se incrementa la amplitud, se incrementa el área cercada, luego disminuye.

Ancho	Largo	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600

Solución

a) El modelo que se desea es una función que proporciona el área que se puede cercar.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que el área de un jardín rectangular es

$$\textbf{área} = \textbf{ancho} \times \textbf{largo}$$

■ **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables, ancho y largo. Puesto que la función que se desea depende sólo de una variable, sea

$$x = \text{ancho del jardín}$$

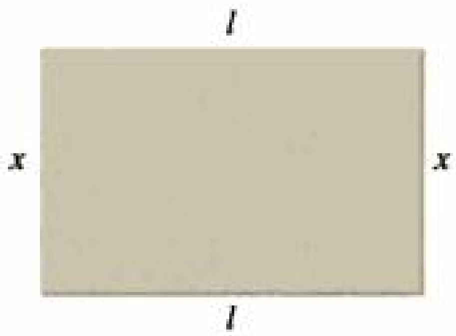


Figura 4

Luego, se expresa la longitud en términos de x. El perímetro se fija en 140 pies, así que la longitud se determina una vez que se elige la amplitud. Si se permite que l sea la longitud, como en la figura 4, entonces $2x + 2l = 140$, de modo que $l = 70 - x$. Se resumen estos hechos.

En palabras	En álgebra
Ancho	x
Largo	$70 - x$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función A que proporciona el área del jardín para cualquier ancho x.

$$\textbf{área} = \textbf{ancho} \times \textbf{largo}$$

$$A(x) = x(70 - x)$$

$$A(x) = 70x - x^2$$

El área que se puede cercar se modela mediante la función $A(x) = 70x - x^2$.

Los valores máximos de funciones cuadráticas se estudian en la página 195.

■ **Use el modelo**

Se usa el modelo para contestar las preguntas de los incisos b) a d).

b) Se requiere resolver la desigualdad $A(x) \geq 825$. Para resolver de forma gráfica, se traza $y = 70x - x^2$ y $y = 825$ en el mismo rectángulo de visión (véase figura 5). Se puede observar que $15 \leq x \leq 55$.

c) De la figura 6 se puede observar que la gráfica de $A(x)$ siempre yace debajo de la recta $y = 1250$, de modo que nunca se obtiene un área de 1250 pies².

d) Se necesita hallar el valor máximo de la función $A(x) = 70x - x^2$. Puesto que ésta es una función cuadrática con $a = -1$ y $b = 70$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2(-1)} = 35$$

En consecuencia, el área máxima que se puede cercar tiene una amplitud de 35 pies y una longitud de $70 - 35 = 35$ pies.

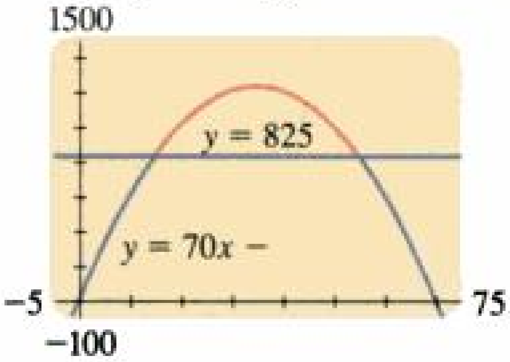


Figura 5

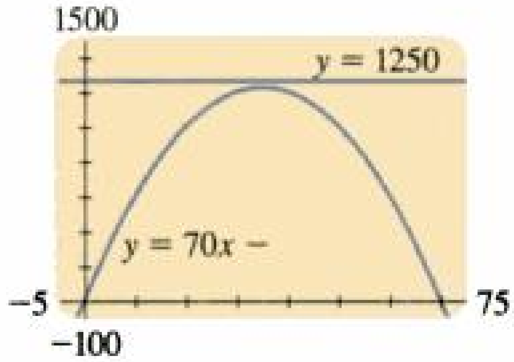


Figura 6 ■

Ejemplo 3 Maximización del ingreso por ventas de boletos

Un equipo de hockey juega en una arena con una capacidad de 15 000 espectadores sentados. Con el precio del boleto establecido en \$14, la asistencia promedio a juegos recientes ha sido 9500. Una encuesta de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia promedio se incrementa en 1000.

a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.
b) ¿Qué precio de boleto es tan alto que nadie asiste y, por lo tanto, no se genera ningún ingreso?
c) Encuentre el precio que maximiza el ingreso por la venta de boletos.

■ **Razonamiento acerca del problema**

Con un precio de boleto de \$14, el ingreso es $9500 \times \$14 = \$133\,000$. Si baja el precio del boleto a \$13, la asistencia se incrementa a $9500 + 1000 = 10\,500$, así que el ingreso se convierte en $10\,500 \times \$13 = \$136\,500$. En la tabla se muestra el ingreso para varios precios de boleto. Note que si baja el precio del boleto, se incrementa el ingreso, pero si baja mucho, disminuye el ingreso.

Precio	Asistencia	Ingreso
\$15	8 500	\$127 500
\$14	9 500	\$133 500
\$13	10 500	\$136 500
\$12	11 500	\$138 500
\$11	12 500	\$137 500
\$10	13 500	\$135 500
\$9	14 500	\$130 500

Solución

a) El modelo que se quiere es una función que proporciona el ingreso para cualquier precio del boleto.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencia}$$

■ **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables: precio del boleto y asistencia. Puesto que la función que se desea depende del precio, sea

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, se debe expresar la asistencia en términos de x.

En palabras	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que disminuye el precio del boleto	$14 - x$
Incremento de la asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x) = 23\,500 - 1000x$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función R que proporciona el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencia}$$

$$R(x) = x(23\,500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23\,500x - 1000x^2$$

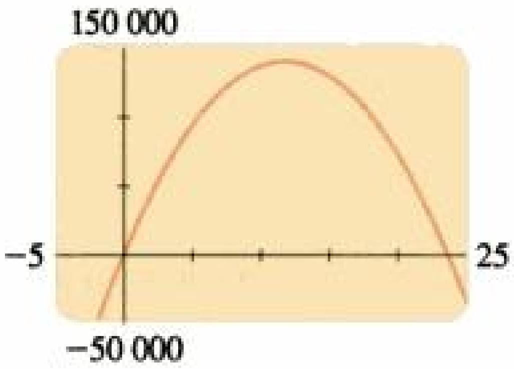


Figura 7

Los valores máximos de funciones cuadráticas se describen en la página 195.

■ **Use el modelo**

Se emplea el modelo para contestar las preguntas de los incisos b) y c).

b) Se desea hallar el precio x del boleto para el cual $R(x) = 23\,000x - 1000x^2 = 0$. Esta ecuación cuadrática se puede resolver de forma algebraica o gráfica. De la gráfica de la figura 7 se ve que $R(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 23.5$. Por lo tanto, de acuerdo con el modelo, el ingreso bajaría a cero si el precio del boleto es de \$23.50 o más alto. (Por supuesto, ¡el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero!)

c) Puesto que $R(x) = 23\,500x - 1000x^2$ es una función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23\,500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23\,500}{2(-1000)} = 11.75$$

Así, el precio de \$11.75 para el boleto produce el ingreso máximo. A este precio el ingreso es

$$R(11.75) = 23\,500(11.75) - 1000(11.75)^2 = \$138\,062.50$$ ■

Ejemplo 4 **Reducir al mínimo el metal de una lata**

Un fabricante elabora una lata de metal que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal en la lata?

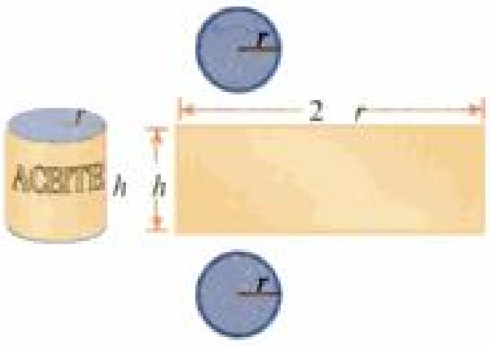


Figura 8

■ **Razonamiento acerca del problema**

Para usar la mínima cantidad de metal, se debe reducir al mínimo el área de superficie de la lata, es decir, el área de la parte de arriba, el fondo y los lados. El área de la parte superior y el fondo es $2\pi r^2$ y el área de los lados es $2\pi rh$ (véase figura 8), de modo que el área de superficie de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

El radio y la altura de la lata se deben elegir de modo que el volumen sea exactamente 1 L o 1000 cm³. Si se desea un radio pequeño, por ejemplo $r = 3$, entonces la altura debe ser la suficiente para hacer que el volumen total sean1000 cm³. En otras palabras, se debe tener

$$\pi(3)^2h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2h$$

$$h = \frac{1000}{9\pi} \approx 35.4 \text{ cm} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora que se conoce el radio y la altura, se puede hallar el área de superficie de la lata:

$$\text{área de superficie} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 729.1 \text{ cm}^3$$

Si se desea un radio diferente, se puede hallar la altura correspondiente y el área superficial de un modo similar.

Solución El modelo que se desea es una función que da el área de superficie de la lata.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que para una lata cilíndrica

área superficial = **área de la parte superior y el fondo** + **área de los lados**

■ **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables: radio y altura. Puesto que la función que se desea depende del radio, sea

$$r = \text{radio de la lata}$$

A continuación, se debe expresar la altura en términos del radio r. Puesto que el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2h$ y el volumen debe ser 1000 cm³, se tiene

$$\pi r^2h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es 1000 cm}^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora se pueden expresar las áreas de la parte superior, el fondo y los lados en términos de r solamente.

En palabras	En álgebra
Radio de la lata	r
Altura de la lata	$\dfrac{1000}{\pi r^2}$
Área de la parte superior y el fondo	$2\pi r^2$
Área de los lados $(2\pi rh)$	$2\pi r\left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right)$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función S que proporciona el área de superficie de la lata como una función del radio r.

área de superficie = **área de la parte superior y el fondo** + **área de los lados**

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

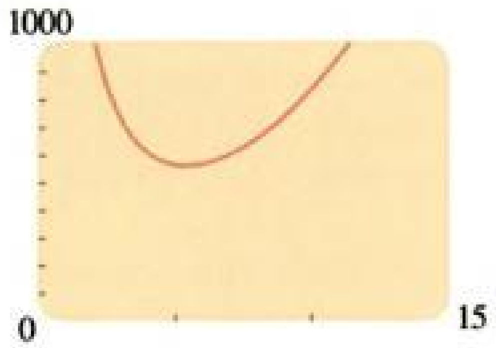


Figura 9

$S = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

■ **Use el modelo**

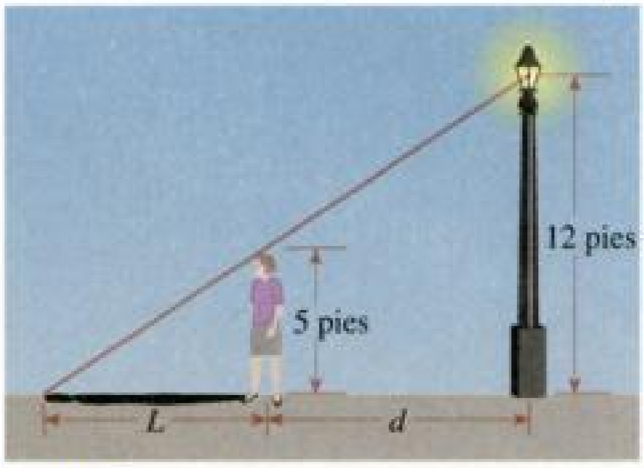
Se emplea el modelo para hallar el área de superficie mínima de la lata. Se grafica S en la figura 9 y se amplía en el punto mínimo para hallar que el valor mínimo de S es casi 554 cm^2 y ocurre cuando el radio es cercano a 5.4 cm. ■

2.6 Ejercicios

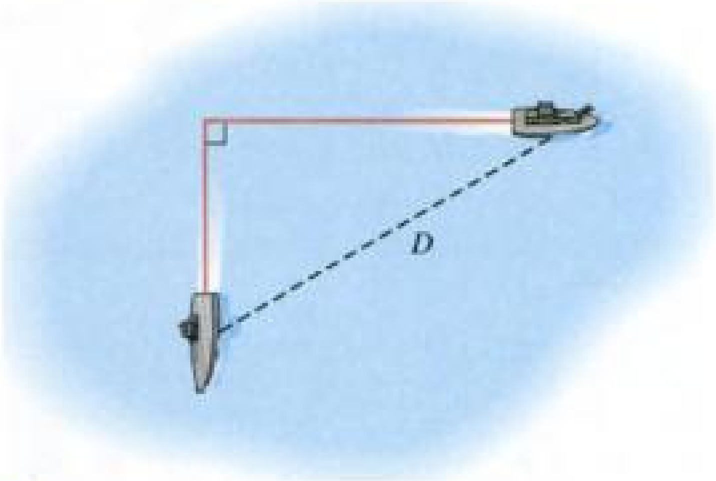
1–18 ■ En estos ejercicios se pide hallar una función que modela una situación de la vida real. Use las normas para modelado descritas en el texto como ayuda.

1. **Área** La longitud de un lote de edificación rectangular es tres veces su ancho. Encuentre una función que modela su área en términos de su ancho w.
2. **Área** Un cartel es 10 pulgadas más largo que su ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w.
3. **Volumen** Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w.
4. **Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r.
5. **Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele el área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.
6. **Perímetro** Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x de uno de sus lados.
7. **Área** Determine una función que modele el área A de un triángulo equilátero en términos de la longitud x de uno de sus lados.
8. **Área** Encuentre una función que modele el área superficial de S de un cubo en términos de su volumen V.
9. **Radio** Encuentre una función que modele el radio r de un círculo en términos de su área A.
10. **Área** Halle una función que modele el área A de un círculo en términos de su circunferencia C.
11. **Área** Una caja rectangular con un volumen de 60 $pies^3$ tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial S en términos de la longitud x de un lado de su base.
12. **Longitud** Una mujer de 5 pies de estatura está parada cerca de una lámpara del alumbrado público que tiene

12 pies de altura, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele la longitud L de su sombra en términos de su distancia d desde la base de la lámpara.



13. **Distancia** Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo. Uno navega hacia el sur a 15 millas/h y el otro navega hacia el este a 20 millas/h. Encuentre la función que modela la distancia D entre los barcos en términos del tiempo t (en horas) transcurrido desde su partida.

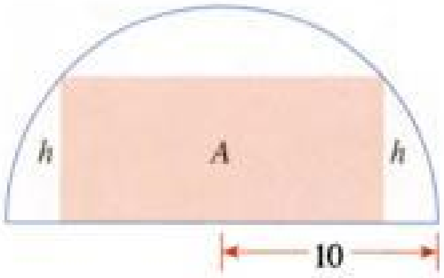


14. **Producto** La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto P en términos de x, uno de los números.

15. **Área** Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud de su base b.

16. **Perímetro** Un triángulo rectángulo tiene un cateto dos veces más grande que el otro. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x del cateto más corto.

17. **Área** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área A del rectángulo en términos de su altura h.



18. **Altura** El volumen de un cono es 100 pulg^3. Encuentre una función que modele la altura h del cono en términos de su radio r.

19–36 ▪ En estos problemas se pide hallar una función que modele una situación de la vida real, y después usar el modelo para contestar preguntas acerca de la situación. Use las normas de la página 205 como ayuda.

19. **Maximización de un producto** Considere el siguiente problema: Encuentre dos números cuya suma es 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.
    a) Experimente con el problema construyendo una tabla parecida a la siguiente, que muestre el producto de pares diferentes de números que suman hasta 19. Con base en la evidencia de su tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	18	18
2	17	34
3	16	48
⋮	⋮	⋮

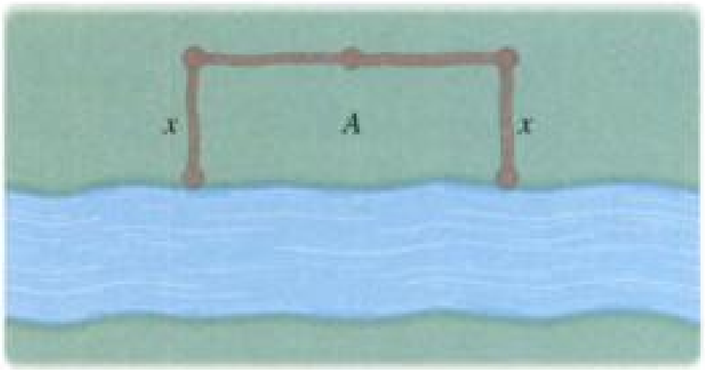
    b) Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.
    c) Use su modelo para resolver el problema, y compare con su respuesta al inciso a).

20. **Minimizar una suma** Encuentre dos números positivos cuya suma sea 100 y la suma de cuyos cuadrados sea un mínimo.

21. **Maximización de un producto** Halle dos números cuya suma sea -24 y cuyo producto sea un máximo.

22. **Maximización del área** Entre los rectángulos que tienen un perímetro de 20 pies, encuentre las dimensiones del que tiene el área más grande.

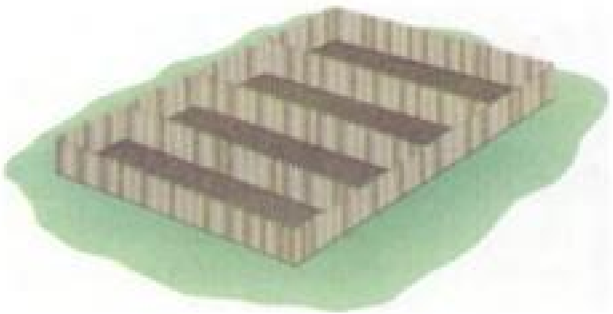
23. **Cercado de un campo** Considere el siguiente problema: un agricultor tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cercar a lo largo del río (véase la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del campo con el área más grande que puede cercar?
    a) Experimente con el problema dibujando varios diagramas que ilustran la situación. Calcule el área de cada configuración, y use sus resultados para calcular las dimensiones del campo más grande posible.
    b) Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.
    c) Use su modelo para resolver el problema, y compare con su respuesta al inciso a).



24. División de un corral Un ranchero con 750 pies de cerca quiere encerrar un área rectangular y dividirla después en cuatro corrales con cerca paralela a un lado del rectángulo (véase la figura).

a) Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.

b) Determine el área total más grande posible de los cuatro corrales.

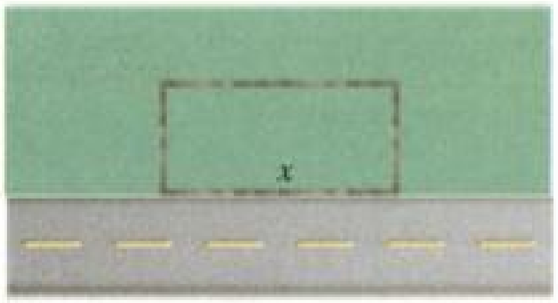


25. Cercado de una parcela de jardín El dueño de una casa quiere cercar una parcela de jardín adyacente a una carretera, como se muestra en la figura. La cerca junto a la carretera debe ser más robusta y cuesta \$5 por pie, pero la otra cerca cuesto sólo \$3 por pie. El jardín tendrá un área de 1200 pies cuadrados.

a) Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.

b) Determine las dimensiones de jardín que reducen al mínimo el costo de cercar.

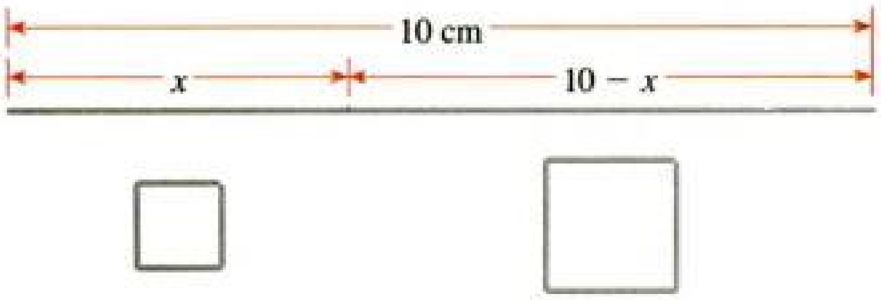
c) Si el dueño tiene a lo sumo \$600 para gastar en la cerca, encuentre el intervalo de longitudes que puede cercar a lo largo de la carretera.



26. Área máxima Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos trozos, uno de longitud x y el otro de longitud $10 - x$, como se muestra en la figura. Cada trozo se dobla en la forma de un cuadro.

a) Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.

b) Halle el valor de x que reduce al mínimo el área total de los dos cuadrados.



27. Ingreso de un estadio Un equipo de beisbol juega en un estadio que aloja 55 000 espectadores. Con el precio del boleto a \$10, la asistencia promedio en juegos recientes ha sido 27 000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que se reduce al precio del boleto, la asistencia se incrementa en 3000.

a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

b) ¿Qué precio de boleto es tan alto que no se genera ningún ingreso?

c) Encuentre el precio que maximiza el ingreso por la venta de boletos.

28. Maximizar la ganancia Una sociedad dedicada a observar aves elabora y vende alimentadores simples para pájaros con el fin de reunir fondos para sus actividades de conservación. El costo del material para cada alimentador es \$6, y venden un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. Han estado considerando subir el precio, así que llevan a cabo un estudio y encuentran que por cada incremento de un dólar pierden dos ventas por semana.

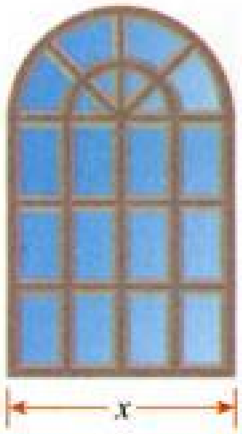
a) Encuentre una función que modele la ganancia semanal en términos del precio por alimentador.

b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador con el fin de maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia máxima?

29. Luz de una ventana Una ventana Normanda tiene la forma de un rectángulo rematado con un semicírculo, como se ilustra en la figura. Se construirá una ventana Normanda con perímetro de 30 pies.

a) Encuentre una función que modele el área de la ventana.

b) Determine las dimensiones de la ventana que admite la mayor cantidad de luz.

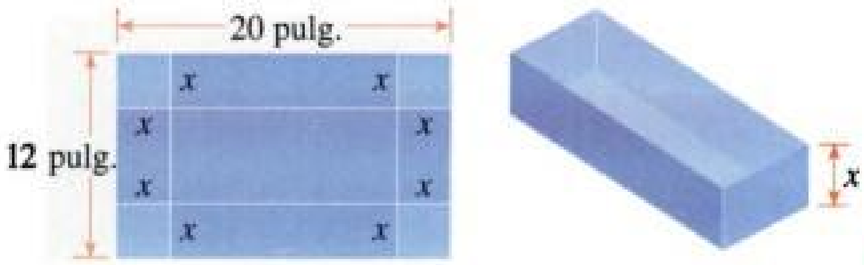


30. Volumen de una caja Se construirá una caja con una abertura en la parte superior a partir de una pieza rectangular de cartón con dimensiones de 12 por 20 pulg cortando cuadros iguales de lado x en cada esquina y luego doblando los lados hacia arriba (véase la figura).

a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja.

b) Halle los valores de x para los que el volumen es mayor que 200 pulg^3.

c) Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

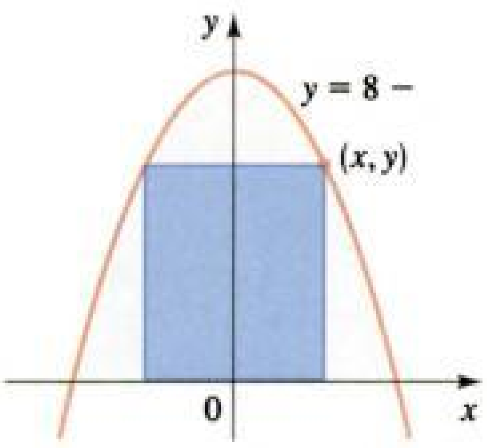


31. Área de una caja Se tiene previsto que una caja abierta con una base cuadrada tenga un volumen de 12 pies^3.

a) Halle el volumen que modela el área de superficie de la caja.

b) Encuentre las dimensiones que reducen al mínimo la cantidad de material empleado.

32. Rectángulo inscrito Encuentre las dimensiones que da el área más grande del rectángulo mostrado en la figura. Su base está sobre el eje x y sus otros dos vértices están arriba del eje x, sobre la parábola $y = 8 - x^2$.



33. Minimización de costos Un ranchero quiere construir un corral rectangular con un área de 100 m^2.

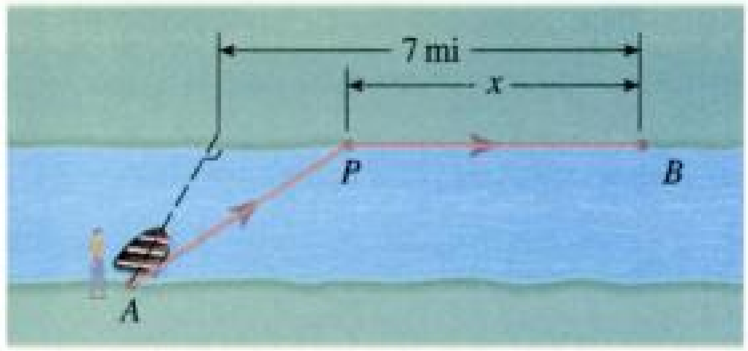
a) Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.

b) Determine las dimensiones del corral que requieren la cantidad mínima de cerca.

34. Reducción del tiempo Un hombre se encuentra parado en un punto A en la orilla de un río recto de dos millas de ancho. Para llegar al punto B, 7 millas corriente abajo en la orilla opuesta, rema primero en su bote hasta el punto P en la orilla opuesta y luego camina la distancia restante x hasta B, como se muestra en la figura. Él puede remar a una velocidad de 2 millas/h y caminar a una velocidad de 5 millas/h.

a) Encuentre una función que permita modelar el tiempo necesario para el recorrido.

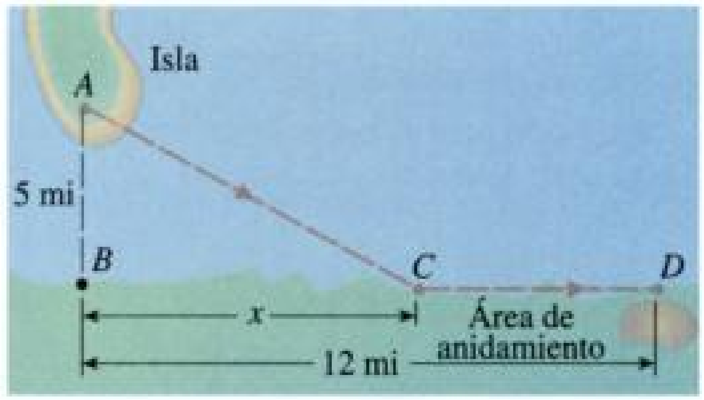
b) ¿Dónde debe desembarcar de modo que llegue a B lo más pronto posible?



35. Vuelo de un ave Se libera a un pájaro en el punto A de una isla, 5 millas desde el punto B más próximo en una ribera recta. El pájaro vuela hasta un punto C sobre la ribera y luego vuela a lo largo de la ribera hasta su área de anidamiento D (véase la figura). Suponga que el área requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre tierra y 14 kcal/milla para volar sobre el agua (véase el ejemplo 9 de la sección 1.6).

a) Encuentre una función que modele el gasto de energía del pájaro.

b) Si por instinto el pájaro elige una trayectoria que minimiza su gasto de energía, ¿hasta qué punto vuela?

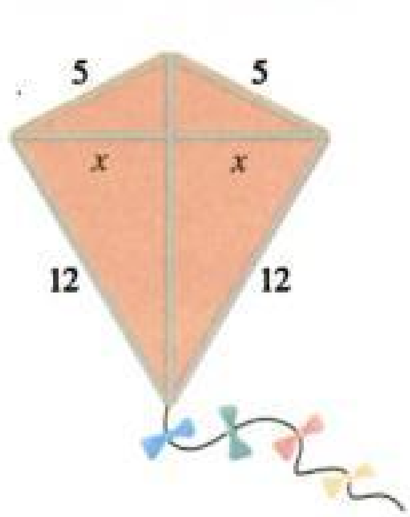


36. Área de una cometa Se construirá el marco de una cometa a partir de seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde se cortaron a las longitudes indicadas en la figura. Sea x como se muestra en la figura.

a) Muestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2})$$

b) ¿Cuál debe ser la longitud de las piezas cruzadas a fin de maximizar el área de la cometa?



2.7 Combinación de funciones

En esta sección se estudian diferentes formas de combinar funciones para construir nuevas.

Sumas, diferencias, productos y cocientes

La suma de f y g se define mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es "$f + g$." Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*. El signo + del lado derecho, sin embargo, representa la suma de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g de una manera similar a la forma en que se suma, resta, multiplica y divide números reales. Por ejemplo, se define la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función $f + g$ se llama **suma** de las funciones f y g; su valor en x es $f(x) + g(x)$. Por supuesto, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si x pertenece al dominio de f y también al dominio de g. Así, si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio de $f + g$ es la intersección de estos dominios, es decir, $A \cap B$. De manera similar, se puede definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg, y el **cociente** f/g de las funciones f y g. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente se debe recordar no dividir entre cero.

Álgebra de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g se definen como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Dominio } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 1 Combinaciones de funciones y sus dominios

Sean $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

b) Encuentre $(f + g)(4)$, $(f - g)(4)$, $(fg)(4)$ y $(f/g)(4)$.

Solución

a) El dominio de f es $\{x \mid x \neq 2\}$ y el dominio de g es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es

$$\{x \mid x \geq 0 \;\text{ y }\; x \neq 2\} = [0,2) \cup (2,\infty)$$

Para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique:

$$\frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$$

Así, se tiene

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Hay que observar que en el dominio de f/g se excluye 0 porque $g(0) = 0$.

b) Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función.

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

■

La gráfica de la función $f + g$ se puede obtener de las gráficas de f y g mediante **adición gráfica**. Esto significa que se suman las coordenadas y correspondientes, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

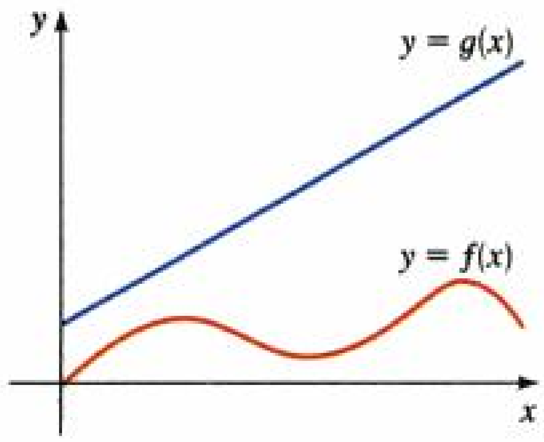


Figura 1

Ejemplo 2 Uso de la adición gráfica

Las gráficas de f y g se muestran en la figura 1. Use la suma gráfica para trazar la función $f + g$.

Solución Se obtiene la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se muestra en la figura 2. Esto se pone en práctica al copiar el segmento de recta PQ en la parte superior PR para obtener el punto S sobre la gráfica de $f + g$.

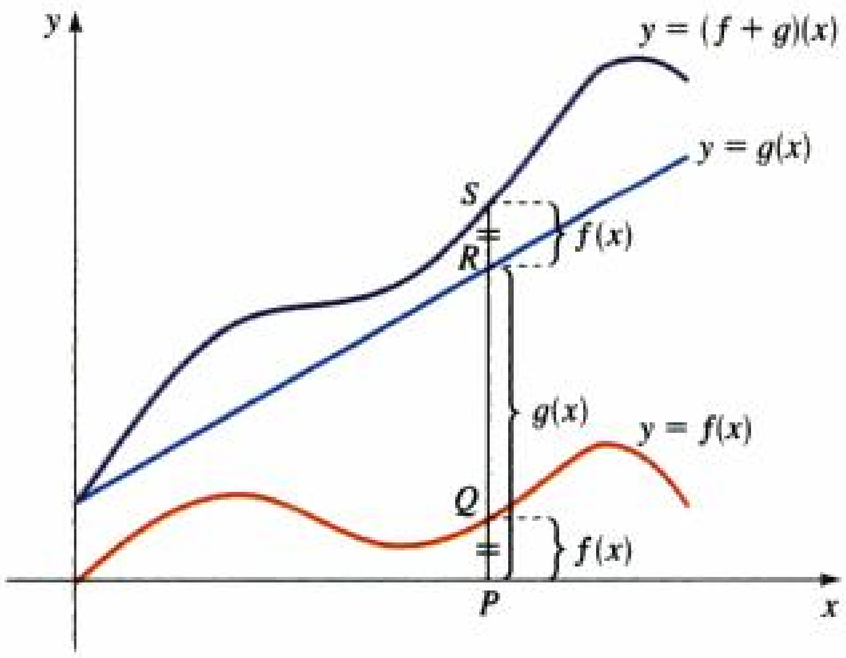


Figura 2
Suma gráfica

■

Composición de funciones

Ahora, considérese una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Se puede definir una función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está compuesta de las funciones f y g de una manera interesante: dado un número x, se aplica primero a la función g, luego se aplica f al resultado. En este caso, f es la regla "sacar la raíz cuadrada", g es la regla "elevar al cuadrado" después sumar 1", y h es la regla "elevar al cuadrado, a continuación sumar 1, luego sacar la raíz cuadrada". En otras palabras, se obtiene la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. En la figura 3 se muestra un diagrama de máquina para h.

Figura 3

La máquina h está compuesta de la máquina g (primero) y después la máquina f.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, comience con un número x en el dominio de g y encuentre su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, se puede calcular entonces el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida al sustituir g en f. Se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g y se denota mediante $f \circ g$ ("f compuesta con g").

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (denominada también la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras $(f \circ g)(x)$ se define siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. Se puede ilustrar $f \circ g$ por medio de un diagrama de flecha (figura 4).

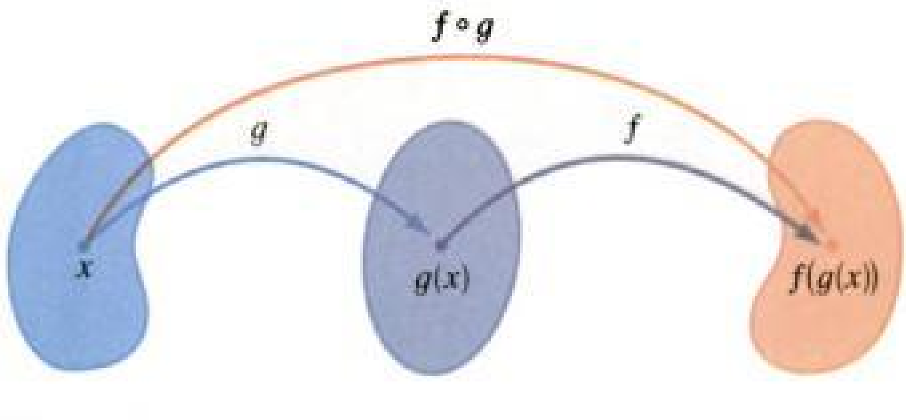


Figura 4

Diagrama de flechas para $f \circ g$

Ejemplo 3 Determine la composición de funciones

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

b) Halle $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "restar 3". La función $f \circ g$ *primero* resta 3 y *después* eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ *primero* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

Solución

a) Se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(x - 3) && \text{Definición de } g \\
&= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(x^2) && \text{Definición de } f \\
&= x^2 - 3 && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

b) Se tiene

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

■

Del ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y después f.

Ejemplo 4 Determine la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Solución

a)

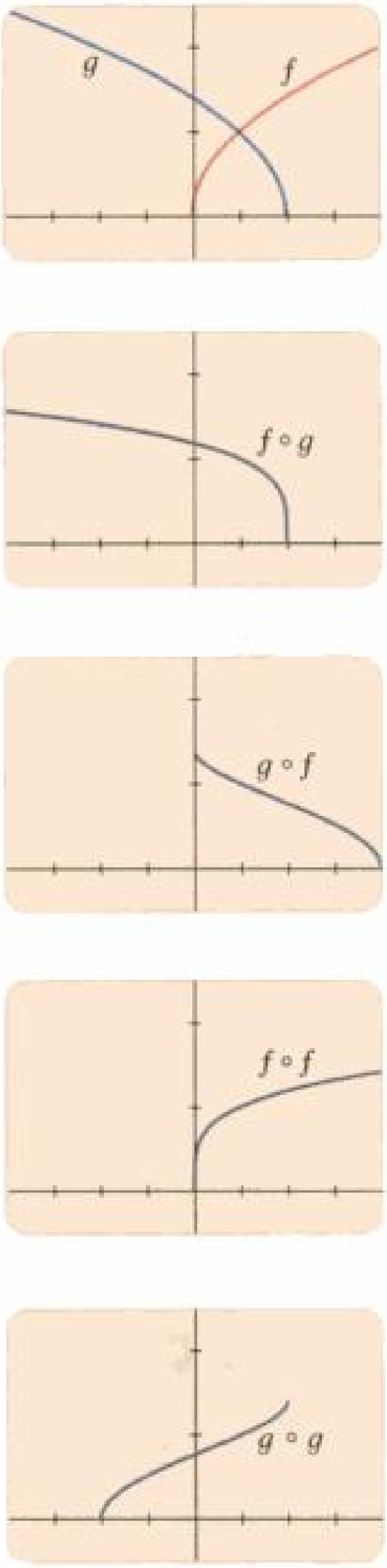
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt{\sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt[4]{2 - x}
\end{aligned}
$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

b)

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Las gráficas de f y g del ejemplo 4, así como $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones bastante diferentes de las funciones originales.



Para que $\sqrt{x}$ esté definida, se debe tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, se debe tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o bien $x \leq 4$. Así, se tiene $0 \leq x \leq 4$, por lo tanto el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

c)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f\\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g\\ &= g(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Esta expresión se define cuando $2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad significa $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por lo tanto, $-2 \leq x \leq 2$, así que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$. ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar h, luego g y después f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Ejemplo 5 Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

Solución

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h\\ &= f(g(x + 3)) && \text{Definición de } h\\ &= f((x + 3)^{10}) && \text{Definición de } g\\ &= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f\end{aligned}$$ ■

Hasta aquí se ha usado la composición para construir funciones complicadas a partir de las más simples. Pero en cálculo es útil poder "descomponer" una función complicada en funciones más simples, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6 Cómo reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre las funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

Solución Puesto que la fórmula para F indica sumar primero 9 y luego sacar la raíz cuarta, sea

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(x + 9) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f\\ &= F(x)\end{aligned}$$

■

Ejemplo 7 Una aplicación de la composición de funciones

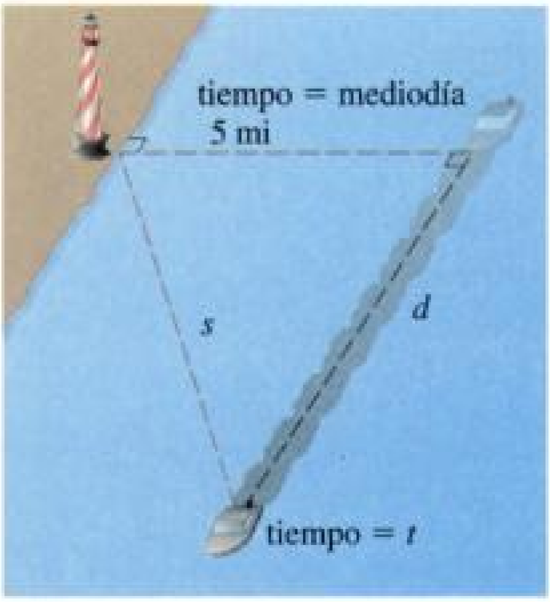


Figura 5

Un barco está viajando a 20 millas/h paralela a una ribera recta. El barco está a 5 millas de la orilla. Pasa un faro a mediodía.

a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como una función de d, la distancia que ha recorrido el barco desde mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

b) Exprese a d como una función de t, el tiempo transcurrido desde mediodía; es decir, encuentre g tal que $d = g(t)$.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

Solución Primero se traza un diagrama como en la figura 5.

a) Se pueden relacionar las distancias s y d mediante el teorema de Pitágoras. Así, s puede ser expresada como una función de d por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

distancia = velocidad × tiempo

b) Puesto que la nave está viajando a 20 millas/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

$$d = g(t) = 20t$$

c) Se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(20t) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como una función del tiempo. ■

2.7 Ejercicios

1–6 ■ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

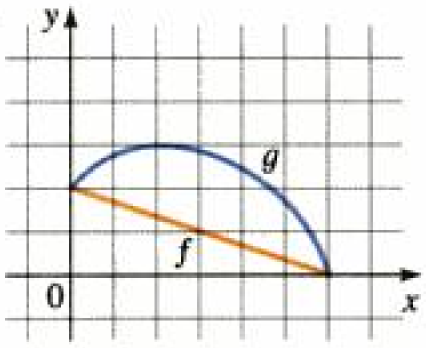
1. $f(x) = x - 3,\quad g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x,\quad g(x) = 3x^2 - 1$
3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\quad g(x) = \sqrt{1 + x}$
4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
5. $f(x) = \dfrac{2}{x},\quad g(x) = \dfrac{4}{x + 4}$
6. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1},\quad g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

7–10 ■ Encuentre el dominio de la función.

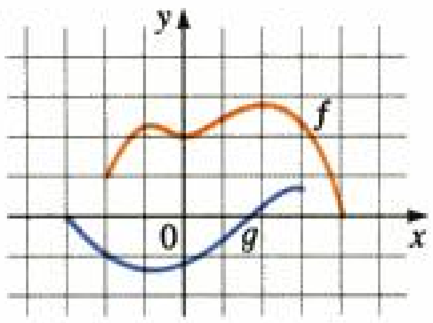
7. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$
8. $g(x) = \sqrt{x + 1} - \dfrac{1}{x}$
9. $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$
10. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

11–12 ■ Use la adición gráfica para bosquejar la gráfica de $f + g$.

11.



12.



13–16 ■ Dibuje las gráficas de f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la suma gráfica.

13. $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

14. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

15. $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$

16. $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}$, $g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

17–22 ■ Use $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ para evaluar la expresión.

17. a) $f(g(0))$ **b)** $g(f(0))$

18. a) $f(f(4))$ **b)** $g(g(3))$

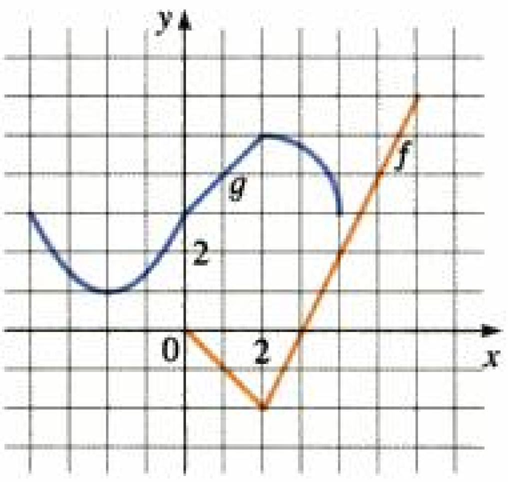
19. a) $(f \circ g)(-2)$ **b)** $(g \circ f)(-2)$

20. a) $(f \circ f)(-1)$ **b)** $(g \circ g)(2)$

21. a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

22. a) $(f \circ f)(x)$ **b)** $(g \circ g)(x)$

23–28 ■ Use las gráficas de f y g para evaluar la expresión.



23. $f(g(2))$

24. $g(f(0))$

25. $(g \circ f)(4)$

26. $(f \circ g)(0)$

27. $(g \circ g)(-2)$

28. $(f \circ f)(4)$

29–40 ■ Encuentre las funciones, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

29. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 1$

30. $f(x) = 6x - 5$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$

31. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$

32. $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x + 4$

34. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

35. $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x + 3$

36. $f(x) = x - 4$, $g(x) = |x + 4|$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, $g(x) = 2x - 1$

38. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$

39. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$

40. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

41–44 ■ Encuentre $f \circ g \circ h$.

41. $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x - 1$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$

43. $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

45–50 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g$.

45. $F(x) = (x - 9)^5$

46. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

47. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

48. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

49. $H(x) = |1 - x^3|$

50. $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

51–54 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

51. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

52. $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

53. $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$

54. $G(x) = \dfrac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

Aplicaciones

55–56 ■ **Ingreso, costo y ganancia** Una imprenta elabora calcomanías para las campañas electorales. Si se piden x calcomanías (donde $x < 10\,000$), entonces el precio por calcomanía es $0.15 - 0.000002x$ dólares, y el costo total de producir la orden es $0.095x - 0.0000005x^2$ dólares.

55. Use el hecho de que

ingreso = precio por artículo × número de artículos vendidos

para expresar $R(x)$, el ingreso de una orden de x calcomanías, como un producto de dos funciones de x.

56. Use el hecho de que

ganancia = ingreso − costo

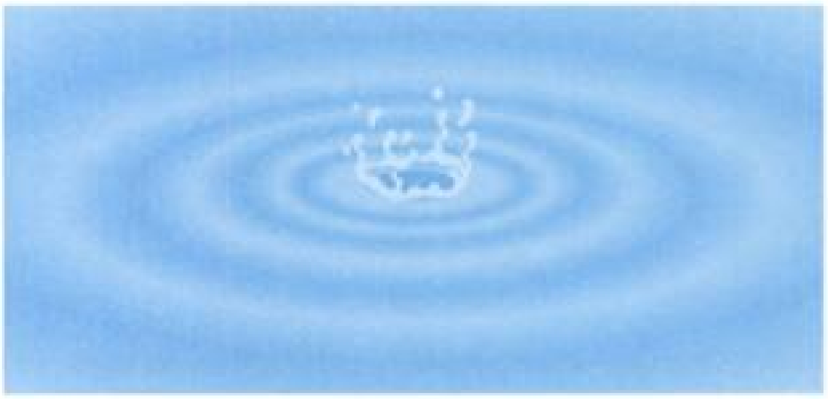
para expresar $P(x)$, la ganancia en un pedido de x calcomanías, como una diferencia de dos funciones de x.

57. Área de una onda Se deja caer una piedra en un lago, que crea una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.

a) Encuentre una función g que modele el radio como una función del tiempo.

b) Encuentre una función f que modele el área del círculo como una función del radio.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?



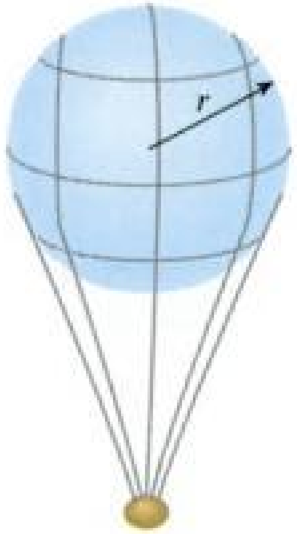
58. Inflado de un globo Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo crece a la velocidad de 1 cm/s.

a) Encuentre una función f que modele el radio como una función del tiempo.

b) Encuentre una función g que modele el volumen como una función del radio.

c) Encuentre $g \circ f$. ¿Qué representa esta función?

59. Área de un globo Se está inflando un globo meteorológico esférico. El radio del globo se incrementa a la velocidad de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como una función del tiempo t (en segundos).



60. Descuentos múltiples Se tiene un cupón de $50 de un fabricante bueno por la compra de un teléfono celular. La tienda donde compra su teléfono celular ofrece un descuento de 20% en todos los teléfonos celulares. Sea x el precio normal del teléfono celular.

a) Suponga que sólo se aplica el 20% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del teléfono celular como una función del precio regular x.

b) Suponga que sólo se aplica el cupón de $50. Encuentre una función g que modele el precio de compra del teléfono celular como una función del precio de etiqueta x.

c) Si puede usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es $f \circ g(x)$ o $g \circ f(x)$, dependiendo del orden en el que se apliquen al precio. Encuentre $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Qué composición da el precio más bajo?

61. **Descuentos múltiples** Un vendedor de aparatos anuncia un descuento de 10% en todas sus lavadoras. Además, el fabricante ofrece una rebaja de 100 dólares en la compra de una lavadora. Sea x que representa el precio de etiqueta de la lavadora.

a) Suponga que sólo se aplica el 10%. Encuentre una función f que modele el precio de compra de la lavadora como una función del precio de etiqueta x.

b) Suponga que sólo se aplica la rebaja de 100 dólares. Encuentre una función g que modele el precio de compra de la lavadora como una función del precio de etiqueta x.

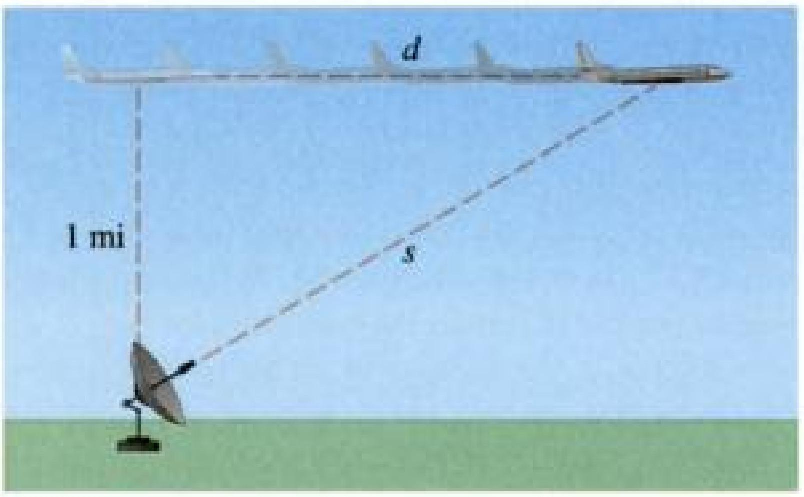
c) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?

62. **Trayectoria de un avión** Un avión está volando a una velocidad de 350 millas/h a una altitud de una milla. El avión pasa directamente arriba de una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

a) Exprese la distancia s (en millas) entre el avión y la estación de radar como una función de la distancia horizontal d (en millas) que ha volado el avión.

b) Exprese d como una función del tiempo t (en horas) que ha volado el avión.

c) Use la composición para expresar s como una función de t.



Descubrimiento • Debate

63. **Interés compuesto** Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si invierte x dólares en tal cuenta, luego la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir, $A(x) = x + 0.05x = 1.05x$. Encuentre

$$A \circ A$$
$$A \circ A \circ A$$
$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que obtiene cuando compone n copias de A.

64. **Composición de funciones lineales** Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1x + b_1$$
$$g(x) = m_2x + b_2$$

son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. ¿La gráfica de $f \circ g$ es una recta? En caso afirmativo, ¿cuál es la pendiente?

65. **Resolución de una ecuación para una función desconocida** Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$
$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Considere qué operaciones tendría que realizar en la fórmula para g a fin de terminar con la fórmula para h.) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$
$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Use la misma clase de razonamiento para hallar una función g tal que $f \circ g = h$.

66. **Composiciones de funciones impares y pares** Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si g es una función par, ¿h es necesariamente par? Si g es impar, ¿h es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es par?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Iteración y caos

Las **iteraciones** de una función f en el punto x_0 son $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, y así sucesivamente. Se escribe

$$x_1 = f(x_0) \qquad \text{Primera iteración}$$

$$x_2 = f(f(x_0)) \qquad \text{Segunda iteración}$$

$$x_3 = f(f(f(x_0))) \qquad \text{Tercera iteración}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces las iteraciones de f en 2 son $x_1 = 4$, $x_2 = 16$, $x_3 = 256$, etc. (Compruebe esto.) Las iteraciones se pueden describir en forma gráfica como en la figura 1. Empiece con x_0 en el eje x muévase verticalmente a la gráfica de f, luego horizontalmente a la recta $y = x$, después verticalmente a la gráfica de f, etc. Las coordenadas x en los puntos sobre la gráfica de f son las iteraciones de f en x_0.

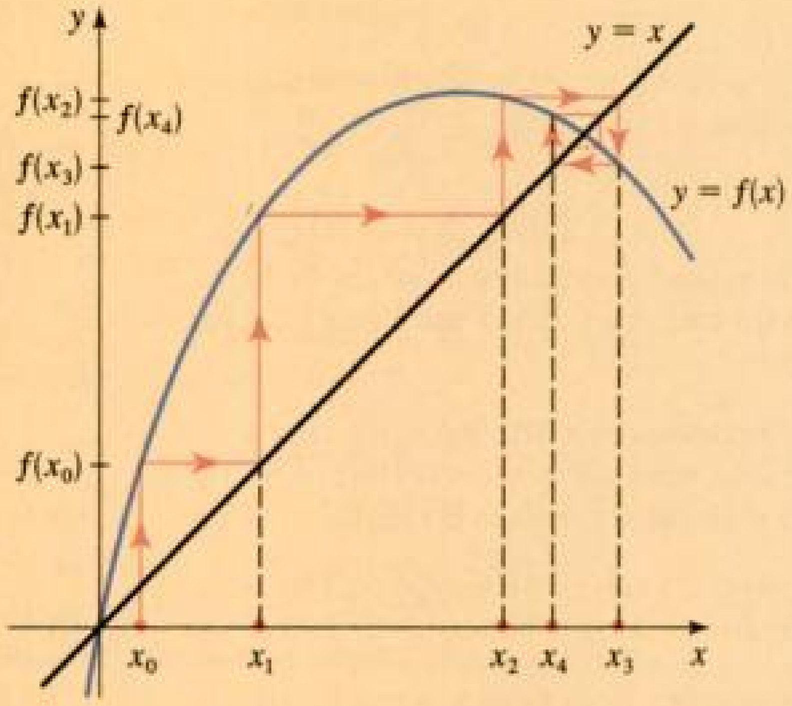


Figura 1

Las iteraciones son importantes en el estudio de la **función logística**

$$f(x) = kx(1 - x)$$

que modela la población de una especie con potencial limitado para crecimiento (p. ej., conejos en una isla o peces en un estanque). En este modelo la población máxima que puede soportar el medio es 1 (es decir, 100%). Si se comienza con una fracción de esa población, por ejemplo 0.1 (10%), entonces las iteraciones de f en 0.1 dan la población después de cada intervalo de tiempo (días, meses o años, dependiendo de las especies). La constante k depende de la tasa de crecimiento de la especie que está siendo modelada; se llama **constante de crecimiento**. Por ejemplo, para $k = 2.6$ y $x_0 = 0.1$ las iteraciones mostradas en la tabla a la izquierda dan la población de las especies para los primeros 12 intervalos de tiempo. La población se estabiliza al parecer alrededor de 0.615 (es decir, 61.5% del máximo).

n	x_n
0	0.1
1	0.234
2	0.46603
3	0.64700
4	0.59382
5	0.62712
6	0.60799
7	0.61968
8	0.61276
9	0.61694
10	0.61444
11	0.61595
12	0.61505

En las tres gráficas de la figura 2, se grafican las iteraciones de f en 0.1 para diferentes valores de la constante de crecimiento k. Para $k = 2.6$ la población al parecer se estabiliza en un valor 0.615 del máximo, para $k = 3.1$ la población parece oscilar entre dos valores, y para $k = 3.8$ no surge ningún patrón obvio. Este última situación se describe de forma matemática mediante la palabra **caos**.

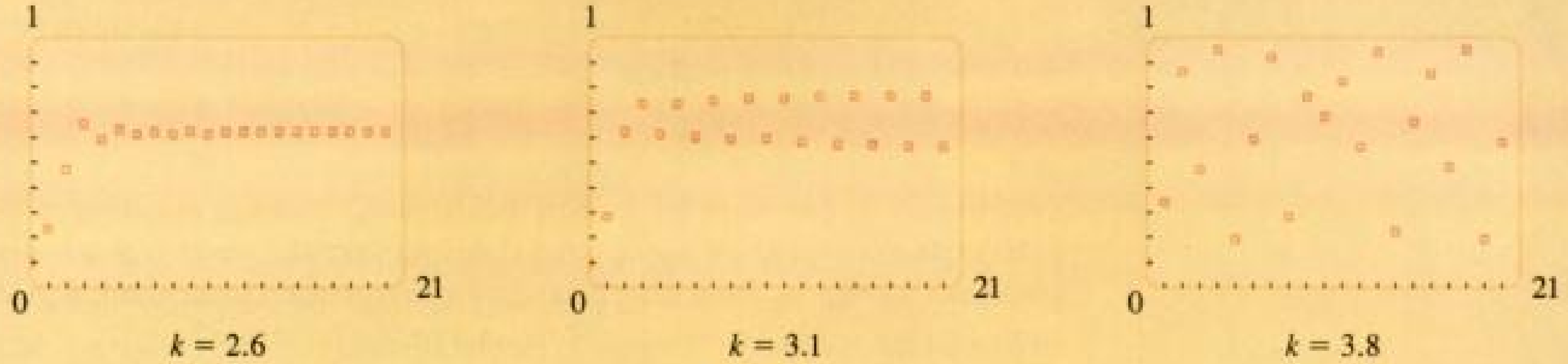


Figura 2

El siguiente programa de la TI-83 traza la primera gráfica de la figura 2. Las otras gráficas se obtienen eligiendo el valor apropiado para K en el programa.

```
PROGRAM:ITERATE
:ClrDraw
:2.6→K
:0.1→X
:For(N, 1, 20)
:K*X*(1-X)→Z
:Pt-On(N, Z, 2)
:Z→X
:End
```

1. Use el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 1 para las primeras cinco iteraciones de $f(x) = 2x(1 - x)$ en $x = 0.1$.
2. Encuentre las iteraciones de $f(x) = x^2$ en $x = 1$.
3. Encuentre las iteraciones de $f(x) = 1/x$ en $x = 2$.
4. Encuentre las seis primeras iteraciones de $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 2$. ¿Cuál es la iteración número 1000 de f en 2?
5. Encuentre las primeras 10 iteraciones de la función logística en $x = 0.1$ para el valor dado de k. ¿La población se estabiliza, oscila o es caótica?

   a) $k = 2.1$ b) $k = 3.2$ c) $k = 3.9$
6. Es fácil hallar iteraciones por medio de una calculadora graficadora. Los pasos siguientes muestran cómo encontrar las iteraciones de $f(x) = kx(1 - x)$ en 0.1 para $k = 3$ en una calculadora TI-83. (El procedimiento se puede adaptar a cualquier calculadora graficadora.)

`Y1 = K * X * (1 - X)`	Introduzca f Y_1 en la lista de gráficas
`3 → K`	Almacene 3 en la variable K
`0.1 → X`	Almacene 0.1 en la variable X
`Y1 → X`	Evalúe f en X y guarde de nuevo el resultado en X
`0.27`	Oprima ENTER y obtenga la primera iteración
`0.5913`	Mantenga oprimida la tecla ENTER para volver a ejecutar el comando y obtener iteraciones sucesivas
`0.72499293`	
`0.59813454435`	

El programa en el margen se puede usar también para graficar las iteraciones y estudiarlas de manera visual.

Use una calculadora de graficación para experimentar cómo el valor de k afecta las iteraciones de $f(x) = kx(1 - x)$ en 0.1. Encuentre varios valores diferentes de k que hacen que las iteraciones se estabilicen en un valor, oscilen entre dos valores y exhiban caos. (Use valores de k entre 1 y 4.) ¿Puede hallar valores de k que hacen que las iteraciones oscilen entre *cuatro* valores?

2.8 Funciones uno a uno y sus inversas

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Así, la inversa "deshace" o invierte lo que ha hecho la función. No todas las funciones tienen inversas; las que sí la tienen se llaman funciones *uno a uno*.

Funciones uno a uno

Compárense las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la figura 1. Hay que observar que f nunca toma el mismo valor dos veces (dos números cualesquiera en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se llaman *uno a uno*.

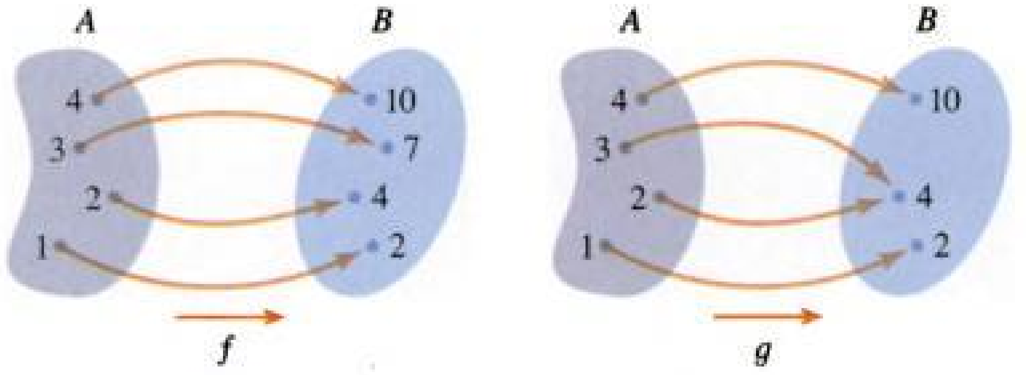


Figura 1 f es uno a uno g no es uno a uno

Definición de una función uno a uno

Una función con dominio A se llama **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición de una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces se puede observar en la figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, se tiene el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

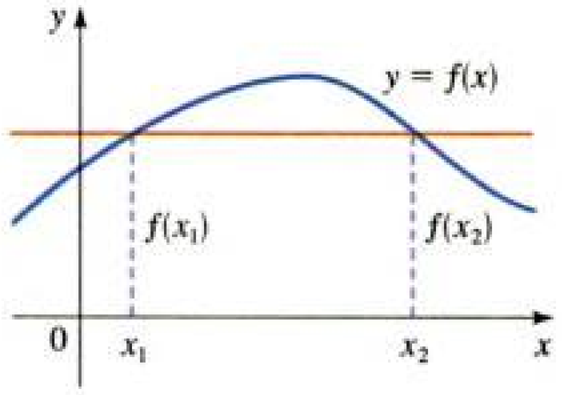


Figura 2

La función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si ninguna recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.

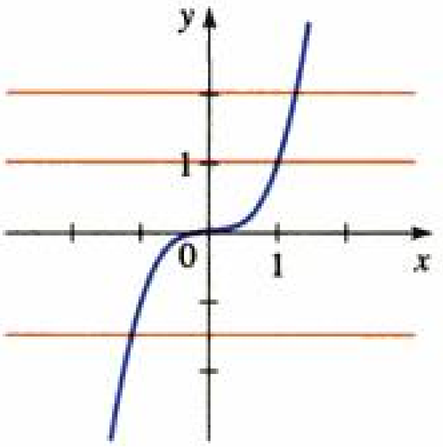


Figura 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno.

Ejemplo 1 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

Solución 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

Solución 2 En la figura 3 se puede observar que ninguna recta horizontal cruza la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, mediante la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno. ■

Observe que la función f del ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede probar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno.*

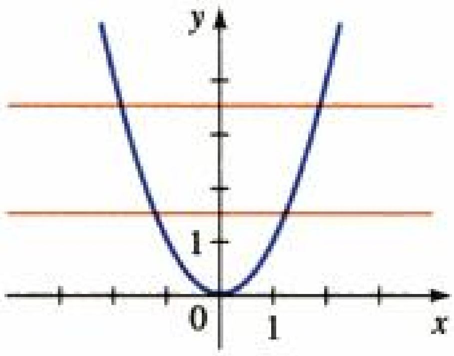


Figura 4
$f(x) = x^2$ no es uno a uno.

Ejemplo 2 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

Solución 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad g(-1) = 1$$

y, por lo tanto, 1 y -1 tienen la misma imagen.

Solución 2 De la figura 4 se puede observar que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno. ■

Aunque la función g del ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de modo que la función resultante sea uno a uno. De hecho, si se define

$$h(x) = x^2, \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede observar en la figura 5 y la prueba de la recta horizontal.

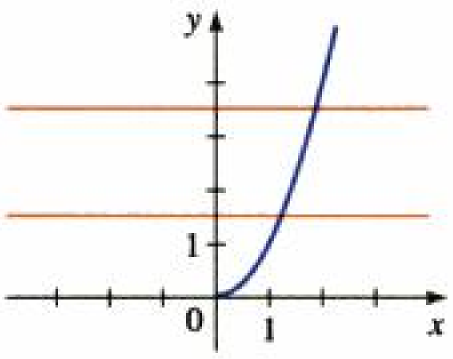


Figura 5
$f(x) = x^2 \ (x \geq 0)$ es uno a uno.

Ejemplo 3 Mostrar que una función es uno a uno

Muestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

Solución
Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4 &= 3x_2 + 4 && \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2) \\ 3x_1 &= 3x_2 && \text{Reste 4} \\ x_1 &= x_2 && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es uno a uno. ■

La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

No confunda el -1 en f^{-1} con un exponente.

$$f^{-1} \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

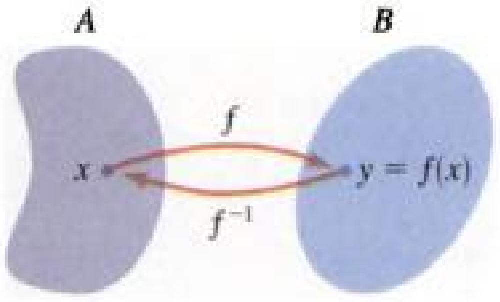


Figura 6

Definición de la inversa de una función

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Esta definición establece que si f envía x a y, entonces f^{-1} envía a y de nuevo a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manea única.) El diagrama de flechas en la figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición se tiene

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Ejemplo 4 Encuentre f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$ encuentre $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$, y $f^{-1}(-10)$.

Solución De la definición de f^{-1} se tiene

$$f^{-1}(5) = 1 \qquad \text{porque} \qquad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad \text{porque} \qquad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad \text{porque} \qquad f(8) = -10$$

En la figura 7 se muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

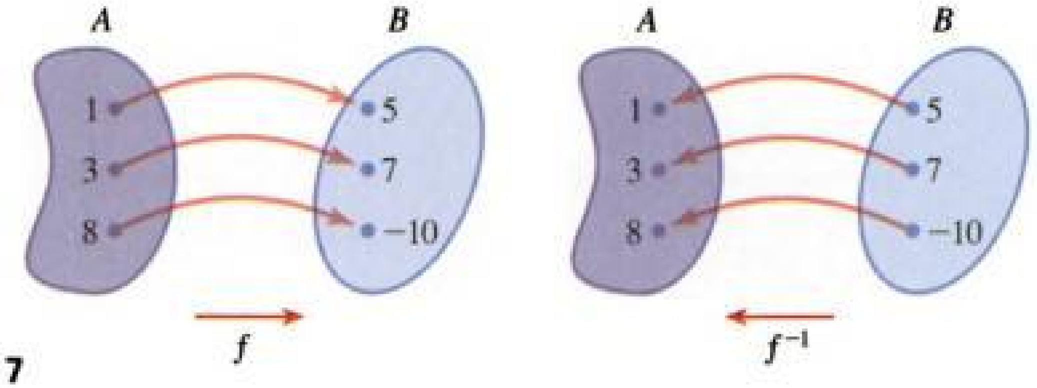


Figura 7 ■

Por definición la función inversa f^{-1} deshace lo que hace f si se empieza con x, se aplica f, y luego se aplica f^{-1}, se llega de nuevo a x, donde se inició. De manera similar, f deshace lo que hace f^{-1}. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f. Estas observaciones se expresan con precisión como sigue.

Propiedad de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación.

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } B$$

A la inversa, cualquier función f^{-1} que satisface estas ecuaciones es la inversa de f.

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1}, por lo tanto se dice que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

Ejemplo 5 Verificar que dos funciones son inversas

Muestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

Solución Observe que el dominio y el rango de f y g es $\mathbb{R}$. Se tiene

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por consiguiente, por la propiedad de las funciones inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente expresan que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando se componen, se cancelan entre sí. ■

Ahora se examinará cómo se calculan las funciones inversas. Se observa primero de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

En consecuencia, si $y = f(x)$ y si se puede resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces se debe tener $x = f^{-1}(y)$. Si luego se intercambian x y y, se tiene $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

Cómo hallar la inversa de una función uno a uno

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Hay que observar que se pueden invertir los pasos 2 y 3. En otras palabras, se puede intercambiar x y y primero y luego resolver para y en términos de x.

En el ejemplo 6 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "multiplicar por 3, luego restar 2", mientras que f^{-1} es la regla "sumar 2, luego dividir entre 3".

Ejemplo 6 Cómo determinar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

Solución Primero se escribe $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

Luego, de esta ecuación se despeja x:

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$
$$x = \frac{y+2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por último, se intercambian x y y:

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$. ■

Compruebe su respuesta

Se usa la propiedad de la función inversa.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-2) = \frac{(3x-2)+2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \quad ✓$$

En el ejemplo 7 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "multiplique entre 2, sume 3, luego tome la raíz quinta".

Compruebe su respuesta

Se emplea la propiedad de la función inversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5-3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5-3}{2}\right)+3\right]^{1/5} \\ &= (x^5-3+3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f((2x+3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x+3)^{1/5}]^5-3}{2} \\ &= \frac{2x+3-3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \quad ✓ \end{aligned}$$

Ejemplo 7 Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5-3}{2}$.

Solución Primero se escribe $y = (x^5 - 3)/2$ y se despeja x.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^5-3}{2} && \text{Ecuación que define la función} \\ 2y &= x^5 - 3 && \text{Multiplique por 2} \\ x^5 &= 2y + 3 && \text{Sume 3} \\ x &= (2y+3)^{1/5} && \text{Tome las raíces quintas} \end{aligned}$$

Luego se intercambia x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$. ■

El principio de intercambiar x y y para encontrar la función inversa también proporciona un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está sobre la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está sobre la gráfica de f^{-1}. Pero el punto (b, a) se obtiene del punto (a, b) al reflejar en la línea $y = x$ (véase figura 8). Por lo tanto, como se ilustra en la figura 9, lo siguiente es cierto.

> La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

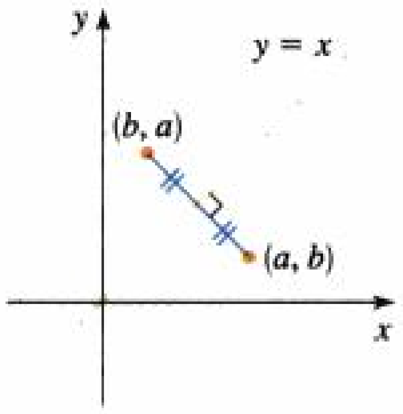


Figura 8

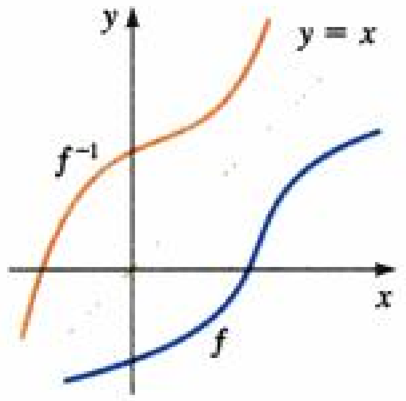


Figura 9

Ejemplo 8 Encontrar la inversa de una función

a) Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

b) Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

Solución

a) Con las transformaciones de la sección 2.4, se bosqueja la gráfica de $y = \sqrt{x-2}$ al trazar la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2) y moverla a la derecha dos unidades.

b) La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f en el inciso a) reflejándola en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 10.

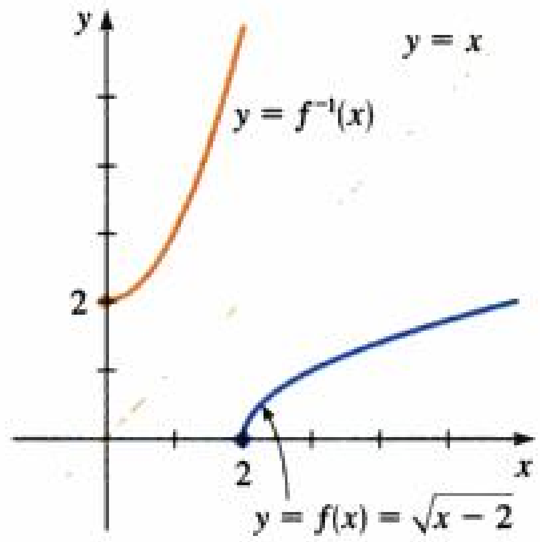


Figura 10

c) De $y = \sqrt{x-2}$ despeje x, notando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{eleve al cuadrado ambos miembros}$$

$$x = y^2 + 2, \quad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

En el ejemplo 8 se puede observar cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "reste 2, luego tome la raíz cuadrada", mientras que f^{-1} es la regla "eleve al cuadrado, después sume 2".

Intercambie x y y:

$$y = x^2 + 2, \qquad x \geq 0$$

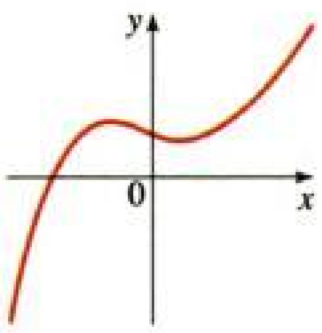
Por consiguiente, $\quad f^{-1}(x) = x^2 + 2, \qquad x \geq 0$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la figura 10, esto parece razonable. ■

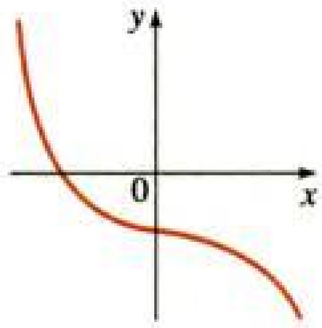
2.8 Ejercicios

1–6 ■ Se da la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno.

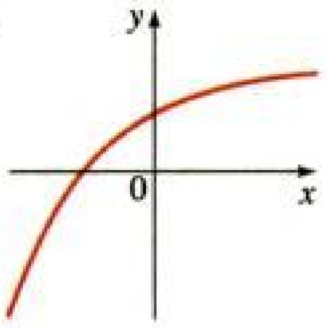
1.



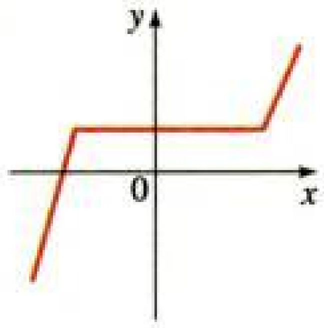
2.



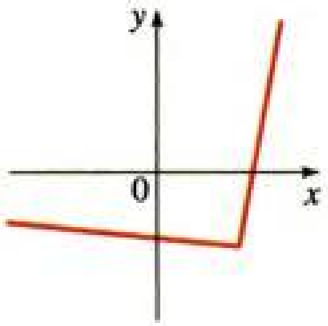
3.



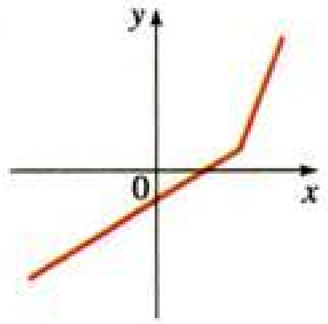
4.



5.



6.



7–16 ■ Determine si la función es uno a uno.

7. $f(x) = -2x + 4$ **8.** $f(x) = 3x - 2$

9. $g(x) = \sqrt{x}$ **10.** $g(x) = |x|$

11. $h(x) = x^2 - 2x$ **12.** $h(x) = x^3 + 8$

13. $f(x) = x^4 + 5$

14. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \leq x \leq 2$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

17–18 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

17. a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.
b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

18. a) Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.
b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

19. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

20. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \geq -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

21–30 ■ Use la propiedad de la función inversa para mostrar que f y g son inversas entre sí.

21. $f(x) = x - 6, \quad g(x) = x + 6$

22. $f(x) = 3x, \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

23. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

24. $f(x) = \dfrac{3-x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = x^5, \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

27. $f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0;$
$g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

28. $f(x) = x^3 + 1;\quad g(x) = (x - 1)^{1/3}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\quad x \neq 1;$

$g(x) = \dfrac{1}{x} + 1,\quad x \neq 0$

30. $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\quad 0 \le x \le 2;$

$g(x) = \sqrt{4 - x^2},\quad 0 \le x \le 2$

31–50 ■ Encuentre la función inversa de f.

31. $f(x) = 2x + 1$ **32.** $f(x) = 6 - x$

33. $f(x) = 4x + 7$ **34.** $f(x) = 3 - 5x$

35. $f(x) = \dfrac{x}{2}$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\quad x > 0$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **38.** $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

39. $f(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$ **40.** $f(x) = 5 - 4x^3$

41. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$ **42.** $f(x) = x^2 + x,\quad x \ge -\frac{1}{2}$

43. $f(x) = 4 - x^2,\quad x \ge 0$ **44.** $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

45. $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$ **46.** $f(x) = (2 - x^3)^5$

47. $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$

48. $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\quad 0 \le x \le 3$

49. $f(x) = x^4,\quad x \ge 0$ **50.** $f(x) = 1 - x^3$

51–54 ■ Se da una función f.

a) Bosqueje la gráfica de f.

b) Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre f^{-1}.

51. $f(x) = 3x - 6$ **52.** $f(x) = 16 - x^2,\quad x \ge 0$

53. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **54.** $f(x) = x^3 - 1$

55–60 ■ Trace una gráfica de f y empléela para determinar si la función es uno a uno.

55. $f(x) = x^3 - x$ **56.** $f(x) = x^3 + x$

57. $f(x) = \dfrac{x+12}{x-6}$ **58.** $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

59. $f(x) = |x| - |x - 6|$ **60.** $f(x) = x \cdot |x|$

61–64 ■ Se da una función uno a uno.

a) Encuentre la inversa de la función.

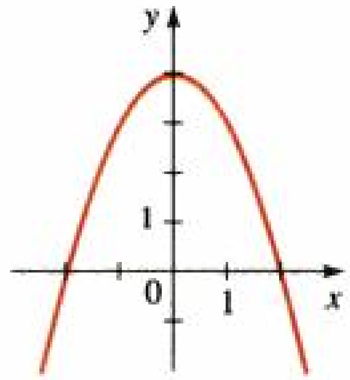
b) Grafique tanto la función como su inversa en la misma pantalla para comprobar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.

61. $f(x) = 2 + x$ **62.** $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

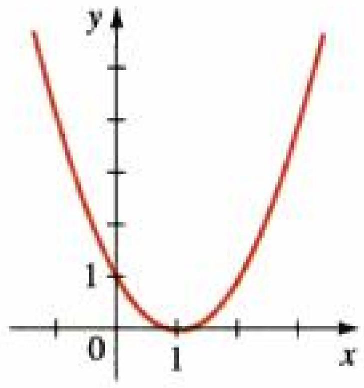
63. $g(x) = \sqrt{x + 3}$ **64.** $g(x) = x^2 + 1,\quad x \ge 0$

65–68 ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio de modo que la función resultante *sea* uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

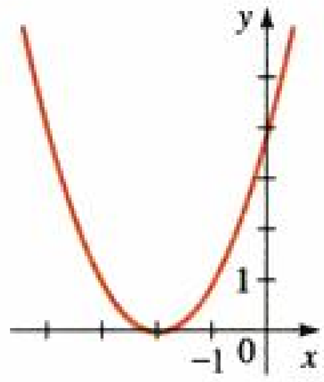
65. $f(x) = 4 - x^2$



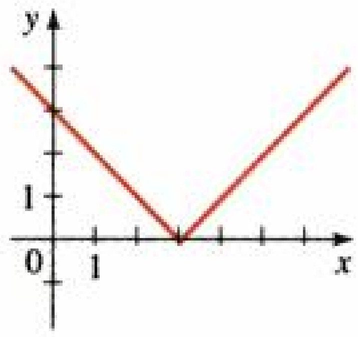
66. $g(x) = (x - 1)^2$



67. $h(x) = (x + 2)^2$

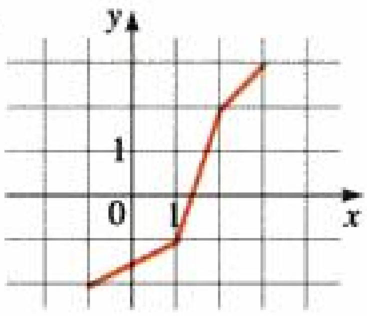


68. $k(x) = |x - 3|$

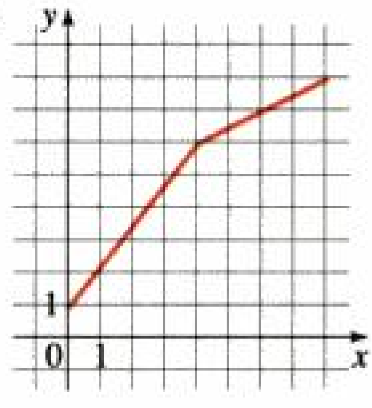


69–70 ■ Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

69.



70.



Aplicaciones

71. Cuota por servicio Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de \$500 más \$80 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

a) Halle una función f que modela la cuota del investigador como una función de x.

b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa su respuesta?