72. Ley de Torricelli Un recipiente contiene 100 galones de agua, que salen de una fuga en el fondo, lo que causa que el recipiente se vacíe en 40 minutos. La ley de Torricelli proporciona el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos como

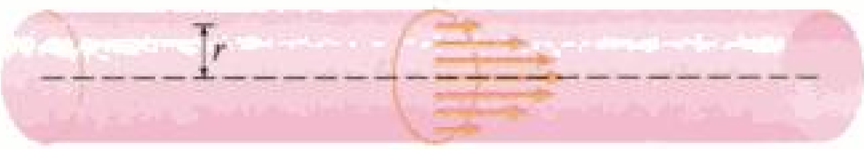
$$V(t) = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

a) Encuentre V^{-1}. ¿Qué representa V^{-1}?
b) Determine $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa su respuesta?

73. Flujo de sangre Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). Para una arteria con radio 0.5 cm, v está dada como una función de r por

$$v(r) = 18\,500(0.25 - r^2)$$

a) Encuentre v^{-1}. ¿Qué representa v^{-1}?
b) Determine $v^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?



74. Función de demanda La cantidad vendida de un artículo se llama *demanda* del artículo. La demanda D para cierto artículo es una función del precio dada por

$$D(p) = -3p + 150$$

a) Encuentre D^{-1}. ¿Qué representa D^{-1}?
b) Determine $D^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?

75. Escalas de temperatura La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) esta dada por

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

a) Encuentre F^{-1}. ¿Qué representa F^{-1}?
b) Determine $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa su respuesta?

76. Tasas de intercambio El valor relativo de las monedas circulantes fluctúa día con día. Cuando se escribió este problema, un dólar canadiense valía 0.8159 de dólar estadounidense.

a) Encuentre una función f que proporciona el valor $f(x)$ en dólares estadounidenses de x dólares canadienses.
b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?
c) ¿Cuánto serían 12 250 dólares canadienses en moneda estadounidense actual?

77. Impuesto Sobre la Renta. En cierto país, el impuesto por ingresos menores o iguales que 20 000 euros es 10%. Para ingresos de más de 20 000 euros, el impuesto es 2000 euros más 20% de la cantidad sobre 20 000 euros.

a) Encuentre una función f que proporciona el Impuesto Sobre la Renta por un ingreso x. Exprese f como una función definida por partes.
b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?
c) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de 10 000 euros?

78. Descuentos múltiples Un vendedor de automóviles anuncia un descuento de 15% en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece una rebaja de $1000 en la compra de un automóvil nuevo. Sea x el precio de venta del automóvil.

a) Suponga que sólo se aplica el 15% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta x.
b) Suponga que sólo se aplica una rebaja de $1000. Encuentre una función g que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta x.
c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.
d) Encuentre H^{-1}. ¿Qué representa H^{-1}?
e) Determine $H^{-1}(13\,000)$. ¿Qué representa su respuesta?

79. Costo de una pizza Marcello's Pizza fijó como precio base de la pizza grande $7 más $2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

Descubrimiento • Debate

80. Determinar cuándo una función lineal tiene una inversa Para la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? En caso afirmativo, ¿cuál es su pendiente?

81. Hallar una inversa "en su cabeza" En las notas del margen de esta sección se señaló que la inversa de una función se puede encontrar revirtiendo las operaciones que constituyen la función. Por ejemplo, en el ejemplo 6 se vio que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \qquad \text{es} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

porque el "inverso" de "multiplicar por 3 y restar 2" es "sumar 2 y dividir entre 3". Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{5}$ b) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$
c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ d) $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? En caso afirmativo, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil esta tarea.

82. La función identidad La función $I(x) = x$ se llama **función identidad**. Muestre que para cualquier función f se tiene $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que la función identidad I se comporta para funciones y composición de la misma forma que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

83. Solución de una ecuación para una función desconocida En el ejercicio 65 de la sección 2.7 se pidió resolver la ecuación en la que las incógnitas fueron funciones. Ahora que se sabe acerca de las inversas y la función identidad (véase el ejercicio 82), se puede usar álgebra para resolver tales ecuaciones. Por ejemplo, para resolver $f \circ g = h$ para la función desconocida f, se efectúan los pasos siguientes:

$f \circ g = h$	Problema: despejar f
$f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$	Componer con g^{-1} a la derecha
$f \circ I = h \circ g^{-1}$	$g \circ g^{-1} = I$
$f = h \circ g^{-1}$	$f \circ I = f$

Por lo tanto, la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para resolver la ecuación $f \circ g = h$ para la función desconocida indicada.

a) Resuelva para f, donde $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$

b) Resuelva para g, donde $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$

2 Repaso

Comprobación de conceptos

1. Defina cada concepto en sus propias palabras. (Compruebe refiriéndose a la definición en el texto.)

a) Función
b) Dominio y rango de una función
c) Gráfica de una función
d) Variables independiente y dependiente

2. Dé un ejemplo de cada tipo de función.

a) Función constante.
b) Función lineal
c) Función cuadrática

3. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = x$ **b)** $g(x) = x^2$
c) $h(x) = x^3$ **d)** $j(x) = x^4$

4. a) Exprese la prueba de la recta vertical
b) Exprese la prueba de la recta horizontal.

5. ¿Cómo se define la tasa promedio de cambio de la función f entre dos puntos?

6. Defina cada concepto en sus propias palabras.

a) Función creciente
b) Función decreciente
c) Función constante

7. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtiene de la gráfica de f como sigue.

a) Desplace 3 unidades hacia arriba
b) Desplace 3 unidades hacia abajo
c) Desplace 3 unidades a la derecha
d) Desplace 3 unidades a la izquierda
e) Refleje en el eje x
f) Refleje en el eje y
g) Alargue verticalmente por un factor de 3
h) Acorte verticalmente por un factor de $\frac{1}{3}$
i) Alargue horizontalmente por un factor de 2
j) Acorte horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$

8. a) ¿Qué es una función par? ¿Qué simetría posee su gráfica? Dé un ejemplo de una función par.
b) ¿Qué es una función impar? ¿Qué simetría posee su gráfica? Dé un ejemplo de una función impar.

9. Escriba la forma estándar de una función cuadrática.

10. ¿Qué significa decir $f(3)$ es un valor máximo local de f?

11. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.

a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
b) ¿Cuál es el dominio de fg?
c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

12. ¿Cómo está definida la función compuesta $f \circ g$?

13. a) ¿Qué es una función uno a uno?

b) ¿Cómo se puede decir si la gráfica de una función es uno a uno?

c) Suponga que f es una función uno a uno con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?

d) Si se tiene una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?

e) Si se tiene la gráfica de f, ¿cómo encontraría la gráfica de f^{-1}?

Ejercicios

1. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, encuentre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(x + 1)$, $f(2x)$ y $2f(x) - 2$.

2. Si $f(x) = 4 - \sqrt{3x - 6}$ encuentre $f(5)$, $f(9)$, $f(a + 2)$, $f(-x)$, $f(x^2)$, y $[f(x)]^2$.

3. Se da la gráfica de una función f.

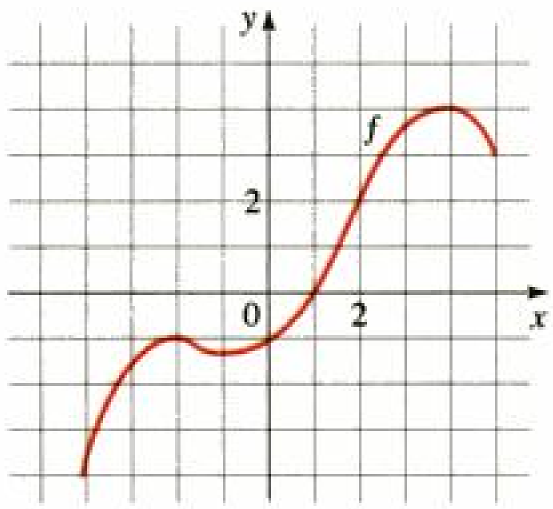
a) Encuentre $f(-2)$ y $f(2)$.

b) Determine el dominio de f.

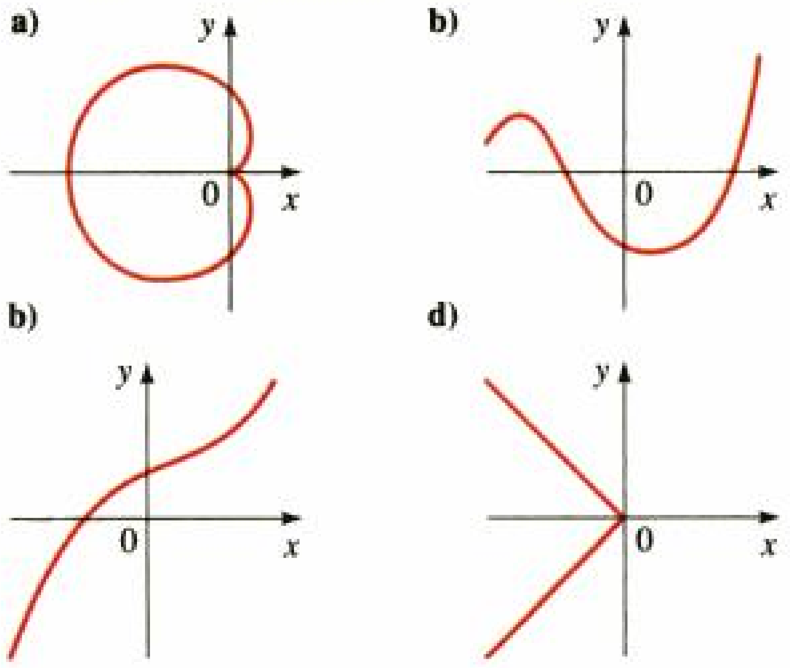
c) Encuentre el rango de f.

d) ¿En qué intervalos f es creciente? ¿En qué intervalos f es decreciente?

e) ¿f es uno a uno?



4. ¿Cuáles de las siguientes figuras son gráficas de funciones? ¿Cuál de las funciones son uno a uno?



5–6 ■ Encuentre el dominio y el rango de la función.

5. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

6. $F(t) = t^2 + 2t + 5$

7–14 ■ Encuentre el dominio de la función.

7. $f(x) = 7x + 15$

8. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

9. $f(x) = \sqrt{x + 4}$

10. $f(x) = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2}$

12. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

13. $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt[3]{2x} + 2}$

15–32 ■ Bosqueje la gráfica de la función.

15. $f(x) = 1 - 2x$

16. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5),\ 2 \le x \le 8$

17. $f(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$

18. $g(t) = t^2 - 2t$

19. $f(x) = x^2 - 6x + 6$

20. $f(x) = 3 - 8x - 2x^2$

21. $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

22. $g(x) = -|x|$

23. $h(x) = \frac{1}{2}x^3$

24. $h(x) = \sqrt{x + 3}$

25. $h(x) = \sqrt[3]{x}$

26. $H(x) = x^3 - 3x^2$

27. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

28. $G(x) = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

33. Determine cuál de los rectángulos de visión producen la gráfica más apropiada de la función
$f(x) = 6x^3 - 15x^2 + 4x - 1$.

(i) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (ii) $[-8, 8]$ por $[-8, 8]$

(iii) $[-4, 4]$ por $[-12, 12]$ (iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

34. Determine cuál rectángulo de visión produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = \sqrt{100 - x^3}$.

i) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

ii) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

iii) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$

iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

35–38 ■ Dibuje la gráfica de la función en un rectángulo de visión apropiado.

35. $f(x) = x^2 + 25x + 173$

36. $f(x) = 1.1x^3 - 9.6x^2 - 1.4x + 3.2$

37. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

38. $f(x) = |x(x + 2)(x + 4)|$

39. Encuentre, aproximadamente, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$.

40. Determine en forma aproximada el rango de la función $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6$.

41–44 ■ Encuentre la tasa de cambio promedio de la función entre los puntos dados.

41. $f(x) = x^2 + 3x$; $x = 0, x = 2$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $x = 4, x = 8$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = 3, x = 3 + h$

44. $f(x) = (x + 1)^2$; $x = a, x = a + h$

45–46 ■ Dibuje la gráfica de la función f, y determine los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

45. $f(x) = x^3 - 4x^2$

46. $f(x) = |x^4 - 16|$

47. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de f.

a) $y = f(x) + 8$ **b)** $y = f(x + 8)$

c) $y = 1 + 2f(x)$ **d)** $y = f(x - 2) - 2$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(-x)$

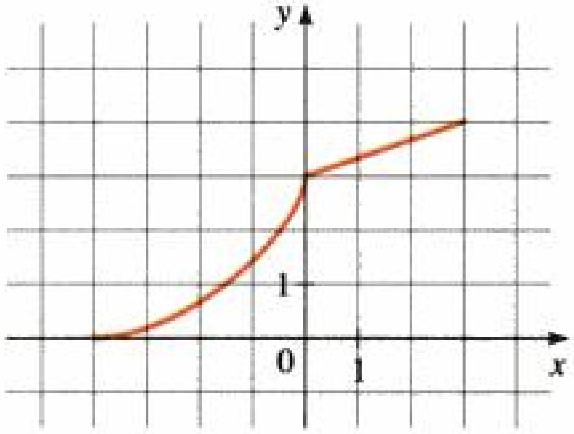
g) $y = -f(x)$ **h)** $y = f^{-1}(x)$

48. Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = -f(x)$

c) $y = 3 - f(x)$ **d)** $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

e) $y = f^{-1}(x)$ **f)** $y = f(-x)$

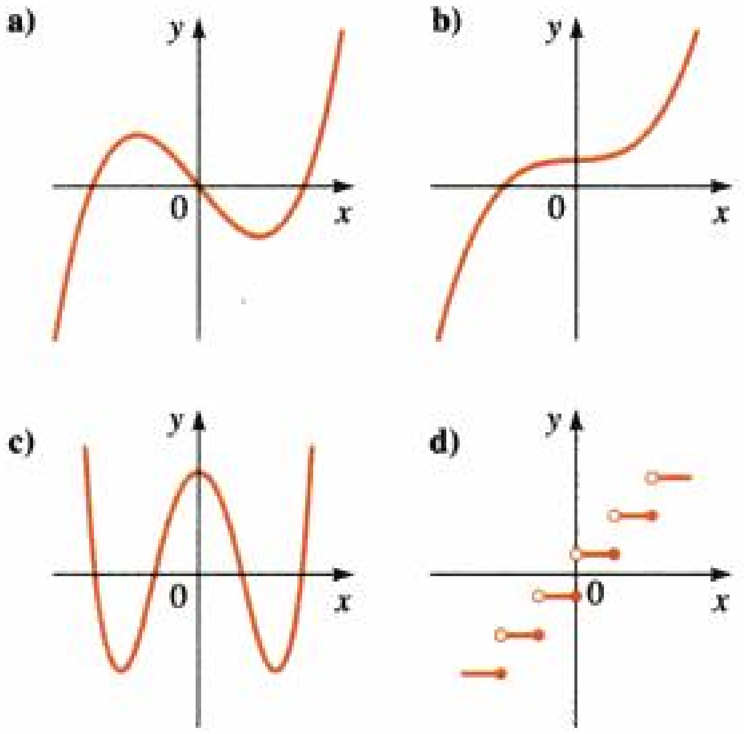


49. Determine si f es par, impar o ninguna.

a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - x^7$

c) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

50. Determine si la función de la figura es par, impar o ninguna.



51. Exprese la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en la forma estándar.

52. Exprese la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 12x + 12$ en la forma estándar.

53. Encuentre el valor mínimo de la función $g(x) = 2x^2 + 4x - 5$.

54. Determine el valor máximo de la función $f(x) = 1 - x - x^2$.

55. Se lanza una piedra hacia arriba desde la parte superior de un edificio. Su altura (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 48t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

56. La ganancia P (en dólares) que se genera al vender x unidades de cierto artículo está dada por

$$P(x) = -1500 + 12x - 0.0004x^2$$

¿Cuál es la ganancia máxima, y cuántas unidades se deben vender para generarla?

57–58 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y los valores de x en los que ocurren. Exprese cada respuesta correcta hasta dos lugares decimales.

57. $f(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

58. $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

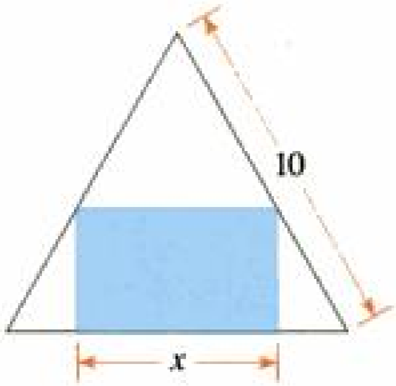
59. El número de acondicionadores de aire que vende una tienda de aparatos depende de la época del año. Bosqueje una gráfica aproximada del número de unidades A/C vendidas como una función de la época del año.

60. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Exprese el área A del triángulo como una función de la longitud b de la base del triángulo.

61. Un rectángulo está inscrito en un triángulo equilátero con un perímetro de 30 cm como en la figura.

a) Exprese el área A del rectángulo como una función de la longitud x mostrada en la figura.

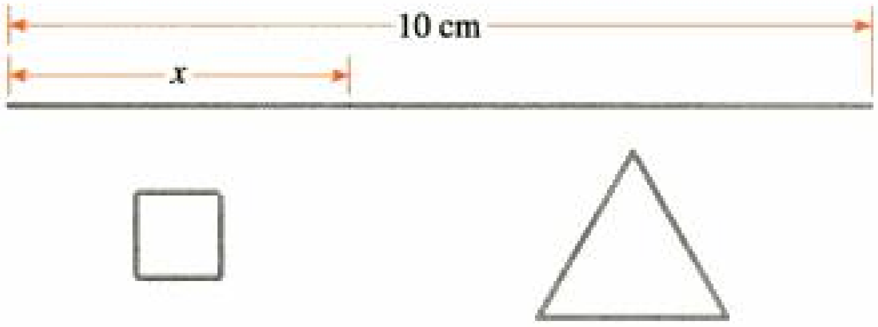
b) Encuentre las dimensiones del rectángulo con el área más grande.



62. Una pieza de alambre de 10 m de largo se corta en dos piezas. Una de longitud x, se dobla en la forma de un cuadrado. La otra pieza se dobla en la forma de un triángulo equilátero.

a) Exprese el área total encerrada como una función de x.

b) ¿Para qué valor de x el área total es un mínimo?



63. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = 4 - 3x$, encuentre las siguientes funciones.

a) $f + g$ **b)** $f - g$ **c)** fg
d) f/g **e)** $f \circ g$ **f)** $g \circ f$

64. Si $f(x) = 1 + x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, encuentre lo siguiente.

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $(f \circ g)(2)$
d) $(f \circ f)(2)$ **e)** $f \circ g \circ f$ **f)** $g \circ f \circ g$

65–66 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

65. $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x - x^2$

66. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

67. Encuentre $f \circ g \circ h$, donde $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = 1 - x^2$, y $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

68. Si $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, encuentre funciones f, g y h tales que $f \circ g \circ h = T$.

69–74 ■ Determine si la función es uno a uno.

69. $f(x) = 3 + x^3$

70. $g(x) = 2 - 2x + x^2$

71. $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

72. $r(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$

73. $p(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

74. $q(x) = 3.3 + 1.6x + 2.5x^3$

75–78 ■ Encuentre la inversa de la función.

75. $f(x) = 3x - 2$

76. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

77. $f(x) = (x + 1)^3$

78. $f(x) = 1 + \sqrt[5]{x - 2}$

79. **a)** Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0$$

b) Use el inciso a) para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

80. **a)** Muestre que la función $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$ es uno a uno.

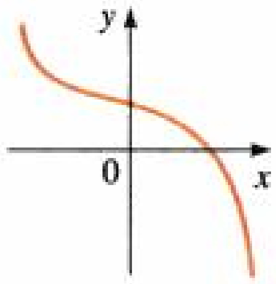
b) Bosqueje la gráfica de f.

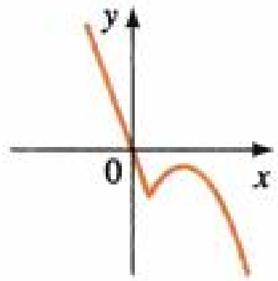
c) Use el inciso b) para trazar la gráfica de f^{-1}.

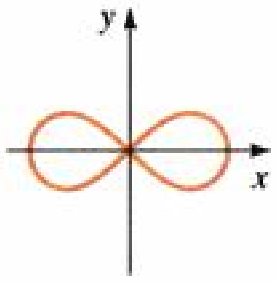
d) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

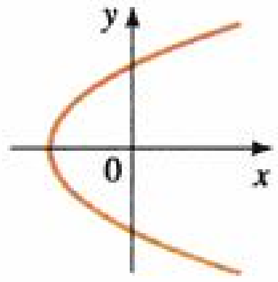
2 Evaluación

1. ¿Cuáles de las siguientes son gráficas de funciones? Si la gráfica corresponde a la de una función, ¿Es uno a uno?

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

(a) Evalúe $f(3)$, $f(5)$ y $f(a - 1)$.

(b) Encuentre el dominio de f.

3. Determine la tasa promedio de cambio para la función $f(t) = t^2 - 2t$ entre $t = 2$ y $t = 5$.

4. **a)** Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

b) Use el inciso a) para graficar la función $g(x) = (x - 1)^3 - 2$.

5. **a)** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(x - 3) + 2$ a partir de la gráfica de f?

b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(-x)$ a partir de la gráfica de f?

6. **a)** Escriba la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 8x + 13$ en la forma estándar.

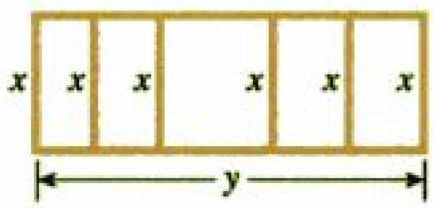
b) Bosqueje una gráfica de f.

c) ¿Cuál es el valor mínimo de f?

7. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.

b) Bosqueje la gráfica de f.



8. **a)** Si 1800 pies de cerca están disponibles para construir cinco corrales adyacentes, como se ilustra en el diagrama de la izquierda, exprese el área total de los corrales como una función de x.

b) ¿Qué valor de x maximizará el área total?

9. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$, encuentre lo siguiente.

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$

c) $f(g(2))$ **d)** $g(f(2))$

e) $g \circ g \circ g$

10. **a)** Si $f(x) = \sqrt{3 - x}$, encuentre la función inversa f^{-1}.

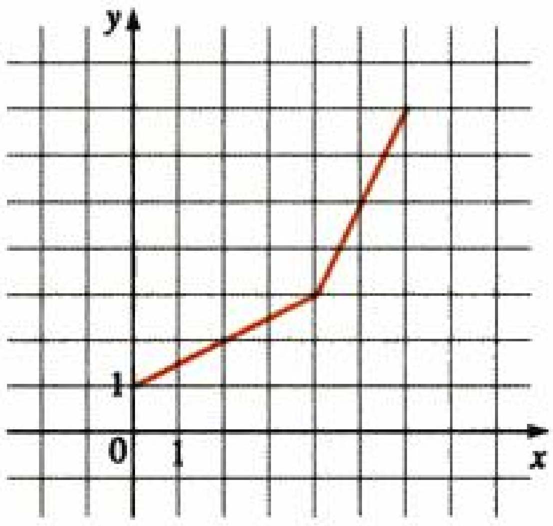
b) Bosqueje las gráficas de f y f^{-1} en los mismos ejes de coordenadas.

11. Se da la gráfica de una función f.

a) Encuentre el dominio y el rango de f.

b) Bosqueje la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre la tasa de cambio promedio de f entre $x = 2$ y $x = 6$.



12. Sea $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$.

a) Dibuje la gráfica de f en un rectángulo de visión apropiado.

b) ¿Es f uno a uno?

c) Encuentre los valores locales máximo y mínimo de f y los valores de x en los que ocurren. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

d) Use la gráfica para determinar el rango de f.

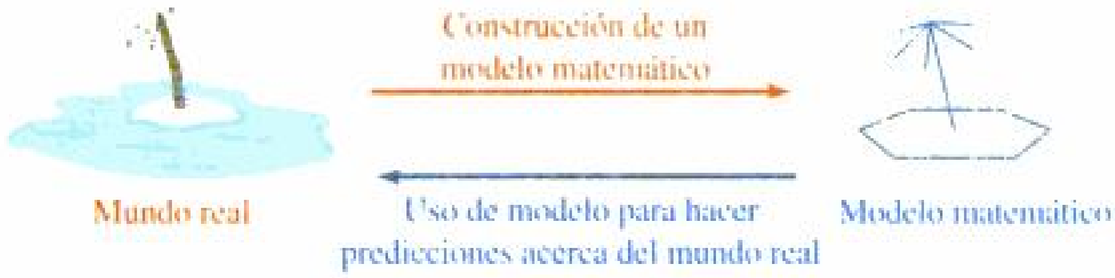
e) Encuentre los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

Enfoque en el modelado

Ajuste de líneas a datos

Un modelo es una representación de un objeto o proceso. Por ejemplo, un juguete Ferrari es un *modelo* del automóvil real; un mapa urbano es un modelo de las calles y autopistas de una ciudad. Un modelo representa por lo común sólo un aspecto del objeto original. El juguete Ferrari no es un automóvil real, pero representa lo que se parece a un Ferrari real; un mapa de carreteras no contiene las calles reales de una ciudad, pero representa la relación de las calles entre sí.

Un **modelo matemático** es una representación matemática de un objeto o proceso. Con frecuencia un modelo matemático es una función que describe cierto fenómeno. En el ejemplo 12 de la sección 1.10 se encontró que la función $T = -10h + 20$ modela la temperatura atmosférica T a la altura h. Después se utilizó esta función para predecir la temperatura a cierta altura. En la figura siguiente se ilustra el proceso de modelado matemático.



Los modelos matemáticos son útiles porque permiten aislar aspectos críticos del objeto bajo estudio y predecir cómo se comportará. Los modelos se emplean de forma extensa en ingeniería, industria y manufactura. Por ejemplo, los ingenieros emplean modelos de computadora de rascacielos para predecir su resistencia y cómo se comportarían en un terremoto. Los fabricantes de aviones usan elaborados modelos matemáticos para predecir las propiedades aerodinámicas de un nuevo diseño *antes* de construir en realidad el avión.

¿Cómo se desarrollan los modelos matemáticos? ¿Cómo se usan para predecir el comportamiento de un proceso? En las páginas siguientes y en las secciones posteriores de *Enfoque en el modelado*, se explica cómo se pueden construir los modelos matemáticos a partir de datos del mundo real, y se describen algunas de sus aplicaciones.

Ecuaciones lineales como modelos

Los datos de la tabla 1 se obtuvieron midiendo la presión a varias profundidades en el océano. En la tabla se observa que la presión se incrementa con la profundidad. Para ver mejor esta tendencia, se construye una **gráfica de dispersión** como en la figura 1. Al parecer los datos yacen más o menos a lo largo de una recta. Se puede intentar ajustar una recta en forma visual para aproximar los puntos en la gráfica de dis-

Tabla 1

Profundidad (pies)	Presión ($lb/pulg^2$)
5	15.5
8	20.3
12	20.7
15	20.8
18	23.2
22	23.8
25	24.9
30	29.3

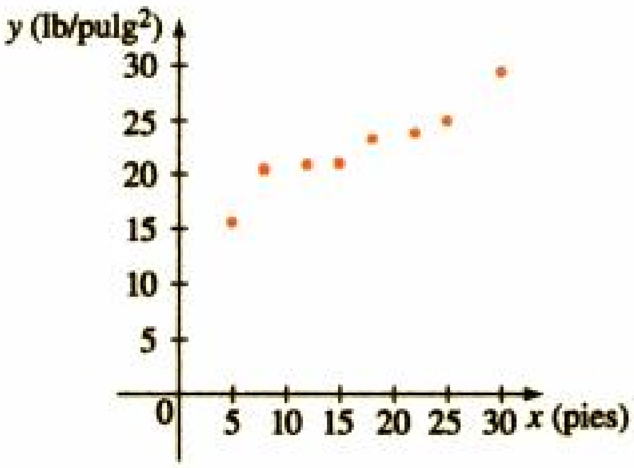


Figura 1
Diagrama de dispersión

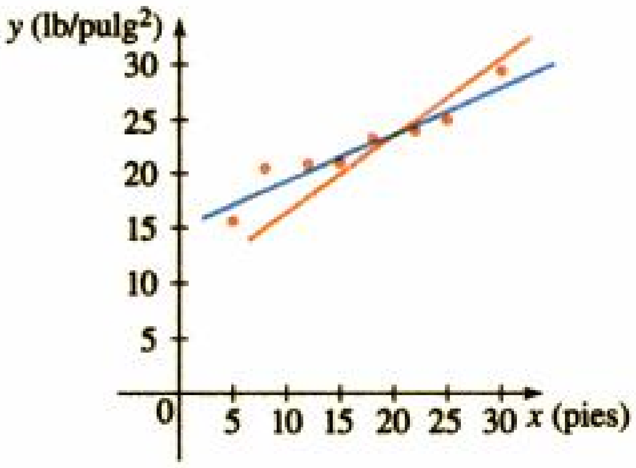


Figura 2
Intentos para ajustar de manera visual la recta a los datos

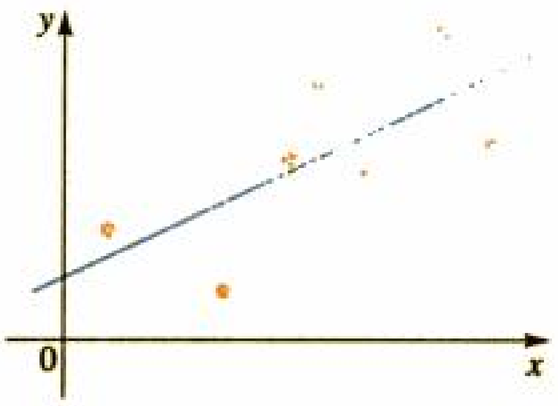


Figura 3
Distancias desde los puntos a la recta

persión (véase fiura 2), pero este método no es exacto. Así que, ¿cómo se encuentra la recta que ajusta los datos lo mejor posible?

Parece razonable elegir la recta que se acerca lo más posible a todos los puntos. Esta es la recta para la cual la suma de las distancias desde los puntos de datos a la recta es tan pequeña como sea posible (véase figura 3). Por razones técnicas es mejor hallar la recta donde la suma de los cuadrados de estas distancias es la más pequeña. La recta resultante se llama **recta de regresión**. La fórmula para la recta de regresión se encuentra por medio del cálculo. Por fortuna, esta fórmula se programa en la mayor parte de las calculadoras de graficación. Con una calculadora (véase figura 4(a)), se encuentra que la recta de regresión para los datos de profundidad-presión en la tabla 1 es

$$P = 0.45d + 14.7$$

La recta de regresión y el diagrama de dispersión se grafican en la figura 4(b).

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.4500365586
 b=14.71813307
```

Figura 4
Regresión lineal en una calculadora de graficación

a) Resultado del comando `LinReg` en una calculadora TI-83

b) Diagrama de dispersión y recta de regresión para los datos de profundidad-presión

Ejemplo 1 Salto olímpico con pértiga

En la tabla 2 se dan los registros de salto olímpico con pértiga para varones hasta 2004.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Elabore una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo adecuado para los datos?

c) Use el modelo para predecir la altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008.

Tabla 2

Año	Medallista de oro	Altura (m)	Año	Medallista de oro	Altura (m)
1896	William Hoyt, USA	3.30	1956	Robert Richards, USA	4.56
1900	Irving Baxter, USA	3.30	1960	Don Bragg, USA	4.70
1904	Charles Dvorak, USA	3.50	1964	Fred Hansen, USA	5.10
1906	Fernand Gonder, Francia	3.50	1968	Bob Seagren, USA	5.40
1908	A. Gilbert, E. Cook, USA	3.71	1972	W. Nordwig, E. Alemania	5.64
1912	Harry Babcock, USA	3.95	1976	Tadeusz Slusarski, Polonia	5.64
1920	Frank Foss, USA	4.09	1980	W. Kozakiewicz, Polonia	5.78
1924	Lee Barnes, USA	3.95	1984	Pierre Quinon, Francia	5.75
1928	Sabin Carr, USA	4.20	1988	Sergei Bubka, USSR	5.90
1932	William Miller, USA	4.31	1992	M. Tarassob, Equipo unificado	5.87
1936	Earle Meadows, USA	4.35	1996	Jean Jalfione, Francia	5.92
1948	Guinn Smith, USA	4.30	2000	Nick Hysong, USA	5.90
1952	Robert Richards, USA	4.55	2004	Timothy Mack, USA	5.95

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.0265652857
 b=3.400989881
```

Resultado de la función `LinReg` la TI-83 Plus

Alexandr Satinsky/AFP/Getty Images

Solución

a) Sea x = año – 1900, de modo que 1896 corresponde a $x = -4$, 1900 a $x = 0$, etcétera. Con una calculadora, encuentre la recta de regresión:

$$y = 0.0266x + 3.40$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se muestran en la figura 5. La recta de regresión parece ser un buen modelo para los datos.

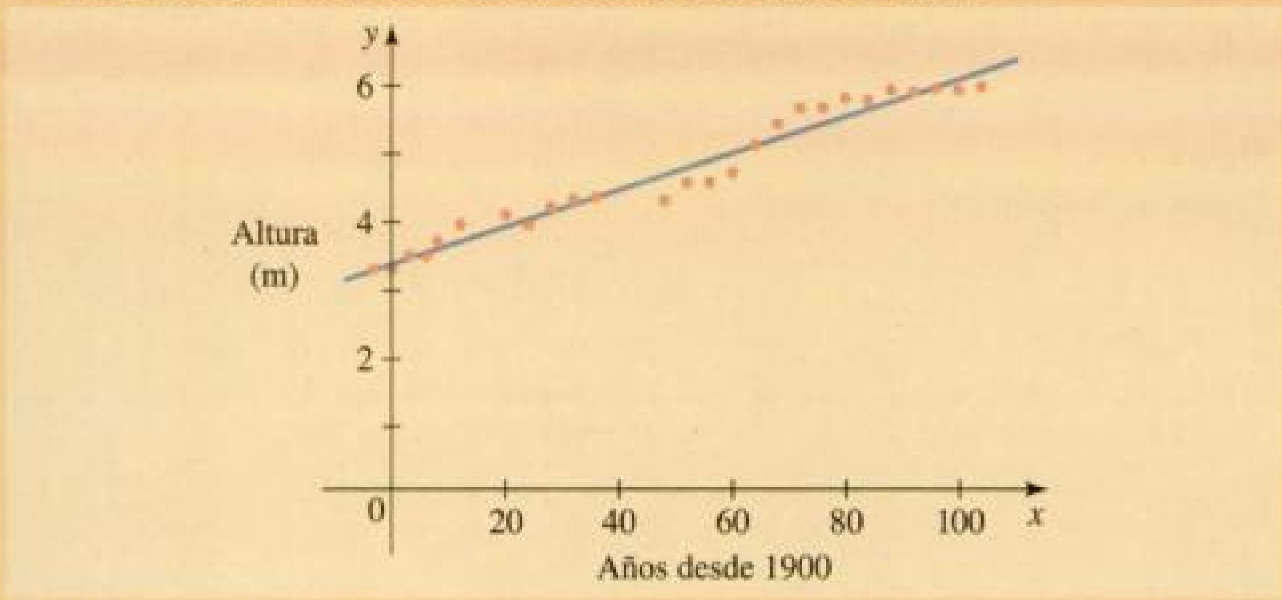


Figura 5

Diagrama de dispersión y recta de regresión para los datos de salto con pértiga.

c) El año 2008 corresponde a $x = 108$ en el modelo. El modelo da

$$y = 0.0266(108) + 3.40 \approx 6.27 \text{ m}$$

■

Si al momento de leer esto ya pasaron los Juegos Olímpicos de 2008, busque el registro real para 2008 y compare con esta predicción. Esta clase de predicciones son razonables para puntos cercanos a los datos medidos, pero no se pueden hacer predicciones muy apartadas respecto de los datos medidos. ¿Es razonable usar este modelo para predecir el registro 100 años a partir de ahora?

Ejemplo 2 Fibras de asbesto y cáncer

Cuando las ratas de laboratorio se exponen a fibras de asbesto, en algunas de ellas se forman tumores pulmonares. En la tabla 3 se listan los resultados de varios experimentos realizados por varios científicos.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Construya una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo adecuado para los datos?

Tabla 3

Exposición a asbestos (fibras/mL)	Porcentaje que desarrolla tumores pulmonares
50	2
400	6
500	5
900	10
1100	26
1600	42
1800	37
2000	28
3000	50

Eric & David Hosking/Corbis

Solución

a) Con una calculadora, se encuentra la recta de regresión (véase figura 6(a)):

$$y = 0.0177x + 0.5405$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se muestran en la figura 6(b). La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos.

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.0177212141
 b=.5404689256
```

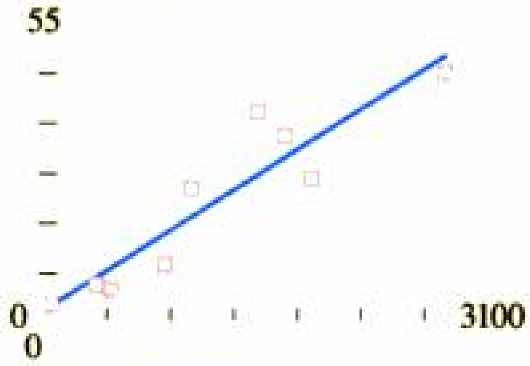


Figura 6
Regresión lineal para los datos de asbestos-tumor

a) Resultado del comando LinReg en una calculadora TI-83

b) Diagrama de dispersión y recta de regresión

¿Qué tan bueno es el ajuste?

Para cualquier conjunto dado de datos siempre es posible encontrar la recta de regresión, incluso si los datos no tienden a encontrarse a lo largo de una recta. Considere las tres gráficas de dispersión de la figura 7.

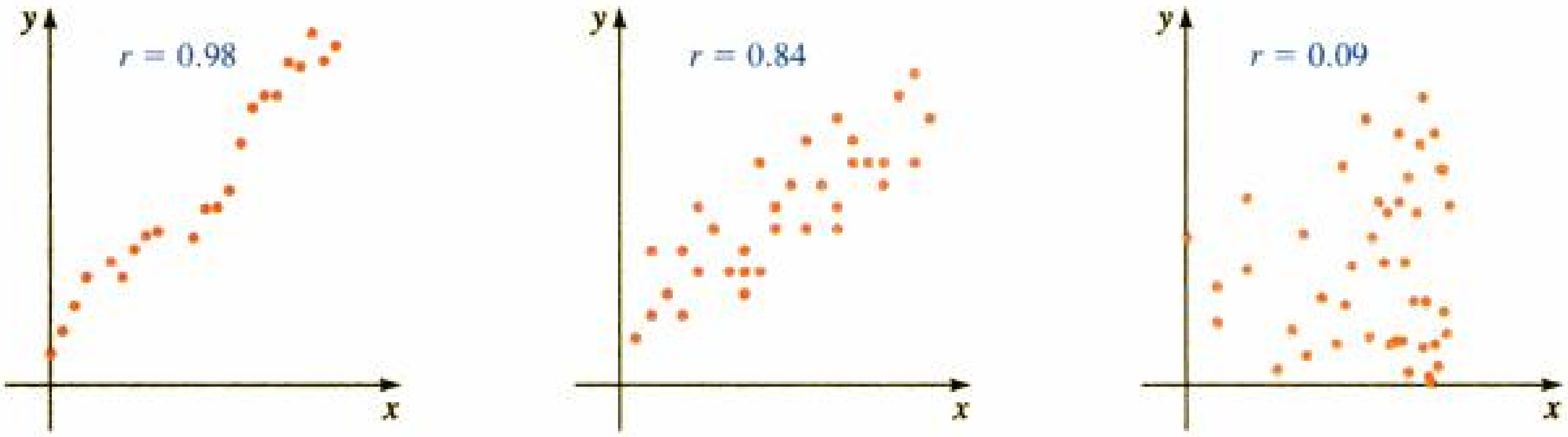


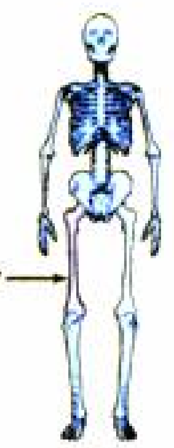
Figura 7

Los datos de la primera gráfica de dispersión al parecer se encuentran a lo largo de una recta. En la segunda gráfica también parecen mostrar una tendencia lineal, pero se ve más dispersa. La tercera no tiene una tendencia discernible. Se pueden hallar con facilidad las rectas de regresión para cada gráfica de dispersión con una calculadora para gráficas. ¿Pero qué tan bien representan estas líneas los datos? La calculadora proporciona un **coeficiente de correlación** r, que es una medida estadística de cuán bien se ajustan los datos a la recta de regresión, o cuán bien se **correlacionan** dos variables. El coeficiente de correlación es un número entre -1 y 1. Un coeficiente de correlación r cercano a 1 o -1 indica correlación fuerte y un coeficiente cercano a 0 indica muy poca correlación; la pendiente de la recta determina si el coeficiente de correlación es positivo o negativo. También, mientras más datos se tengan, más significativo será el coeficiente de correlación. Por medio de una calculadora se encuentra que el coeficiente de correlación entre fibras de asbestos y tumores pulmonares en las ratas del ejemplo 2 es $r = 0.92$. Se puede concluir de manera razonable que están relacionados la presencia de asbestos y el riesgo de tumores pulmonares en las ratas. ¿Se concluye que los asbestos *causan* tumores pulmonares en las ratas?

Si dos variables están correlacionadas, no necesariamente significa que un cambio en una variable *causa* un cambio en la otra. Por ejemplo, el matemático John Allen Paulos señala que el tamaño del zapato está relacionado de manera estrecha con las calificaciones de matemáticas entre los escolares. ¿Esto significa que por tener los pies grandes se obtienen altas calificaciones en matemáticas? De hecho no, tanto el tamaño del zapato como las habilidades matemáticas se incrementan de manera independiente conforme crecen los niños. Por lo tanto, es importante no adelantar conclusiones: la correlación y la causa no son lo mismo. La correlación es una herramienta útil para sacar a la luz relaciones importantes de causa y efecto, pero para probar la causa, se debe explicar el mecanismo mediante el cual una variable afecta a la otra. Por ejemplo, el vínculo entre fumar y el cáncer pulmonar se observó como una correlación mucho antes de que la ciencia encontrara el mecanismo por el que fumar causa cáncer pulmonar.

Problemas

1. **Longitud del fémur y estatura** Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur con la estatura. El modelo permite a un antropólogo determinar la estatura de un individuo cuando sólo se encuentra un esqueleto parcial (incluso el fémur). En este problema se encuentra el modelo analizando los datos de la longitud del fémur y la estatura para los ocho varones dados en la tabla.
   a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
   b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.
   c) Un antropólogo encuentra un fémur de 59 cm de longitud. ¿Qué tan alta era la persona?

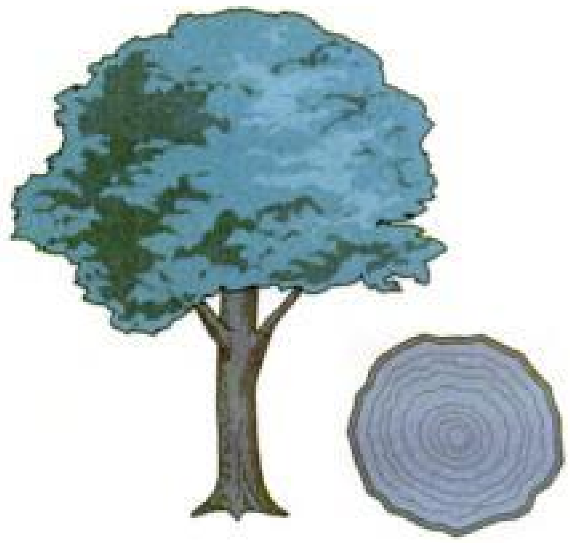


Longitud del fémur (cm)	Estatura (cm)
50.1	178.5
48.3	173.6
45.2	164.8
44.7	163.7
44.5	168.3
42.7	165.0
39.5	155.4
38.0	155.8

2. **Demanda de bebidas carbonatadas** Un administrador de tiendas de abarrotes observa que las ventas de bebidas carbonatadas son mucho más altas en días cálidos, así que reúne los datos de la tabla.
   a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
   b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.
   c) Use el modelo para predecir ventas de bebidas carbonatadas si la temperatura es 95°F.

Temperatura alta (°F)	Número de latas vendidas
55	340
58	335
64	410
68	460
70	450
75	610
80	735
84	780

3. **Diámetro de un árbol y su edad** Para estimar las edades de los árboles, los guardabosques emplean un modelo lineal que relaciona el diámetro del árbol con la edad. El modelo es útil porque es mucho más fácil medir el diámetro del árbol que su



edad (lo cual requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para encontrar el modelo, use los datos de la tabla reunidos para cierta variedad de robles.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

c) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 18 pulgadas.

Diámetro (pulg.)	Edad (años)
2.5	15
4.0	24
6.0	32
8.0	56
9.0	49
9.5	76
12.5	90
15.5	89

Año	Concentración de CO_2 (ppm)
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.5
2000	369.4

4. **Concentraciones de dióxido de carbono** En la tabla se listan las concentraciones de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera, medidas en partes por millón (ppm) en el observatorio Mauna Loa de 1984 a 2000.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la concentración de CO_2 en la atmósfera en 2001. Compare su respuesta con la concentración real de CO_2 de 371.1 medida en 2001.

5. **Temperatura y grillos chirreadores** Los biólogos han observado que la tasa de chirrido de ciertas especies parece estar relacionada con la temperatura. En la tabla se muestran las tasas de chirrido para varias temperaturas.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa de chirrido a 100 °F.

Temperatura (°F)	Tasa de chirrido (chirridos/min)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

Ingreso	Tasa de úlcera
$4 000	14.1
$6 000	13.0
$8 000	13.4
$12 000	12.4
$16 000	12.0
$20 000	12.5
$30 000	10.5
$45 000	9.4
$60 000	8.2

6. **Tasas de úlcera** En la tabla del margen se muestran las tasas de úlcera péptica (por cada 100 personas) para varios ingresos familiares según el informe de 1989 de la Nacional Health Interview Survey.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

Matemáticas en el mundo moderno

Ed Kashi/Corbis

Aviones modelo

Cuando se considera la palabra "modelo", con frecuencia se piensa en un modelo de automóvil o un modelo de aeroplano. De hecho, este uso cotidiano de la palabra *modelo* corresponde a su uso en matemáticas. Un modelo representa por lo general cierto aspecto del objeto original. Así, un modelo de avión representa el aspecto real del avión. Antes de 1980 los fabricantes de aviones construían maquetas a escala completa de nuevos diseños de aviones para probar sus propiedades aerodinámicas. En la actualidad, los fabricantes "construyen" modelos matemáticos de aviones, que son almacenados en la memoria de las computadoras. Las propiedades aerodinámicas de los "aeroplanos matemáticos" corresponden a las de los aviones reales, pero los aviones matemáticos se pueden volar y probar sin salir de la memoria de la computadora.

c) Estime la tasa de úlcera péptica para un nivel de ingreso de $25 000 de acuerdo con el modelo lineal del inciso b).

d) Calcule la tasa de úlcera péptica para un nivel de ingresos de $80 000 de acuerdo con el modelo lineal del inciso b).

7. Preponderancia del mosquito En la tabla se muestra la abundancia relativa de mosquitos (medida por la tasa de preponderancia del mosquito) contra el caudal (medido como un porcentaje del caudal máximo) de redes de canales en la ciudad de Saga, Japón.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa positiva de mosquitos si el caudal de canal es 70% del máximo.

Caudal (%)	Tasa positiva de mosquitos (%)
0	22
10	16
40	12
60	11
90	6
100	2

8. Ruido e inteligibilidad Los audiólogos estudian la inteligibilidad de los enunciados hablados en diferentes condiciones de ruido. La inteligibilidad, la puntuación MRT, se mide como el por ciento de un enunciado hablado que la persona que escucha puede descifrar a cierto nivel de ruido en decibeles (dB). En la tabla se muestran los resultados de una de estas pruebas.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Encuentre el coeficiente de correlación. ¿Es apropiado un modelo lineal?

d) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la inteligibilidad de un enunciado a un nivel de ruido de 94 dB.

Nivel de ruido (dB)	Puntuación MRT(%)
80	99
84	91
88	84
92	70
96	47
100	23
104	11

9. Esperanza de vida La esperanza de vida promedio en Estados Unidos ha estado subiendo de forma permanente en las últimas décadas, como se muestra en la tabla.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal que encontró en el inciso b) para predecir la esperanza de vida en el año 2004.

d) Busque en Internet o en la biblioteca la esperanza de vida promedio de 2004. Compare con su respuesta del inciso c).

Año	Esperanza de vida
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	76.9


Phil Shemeister/Corbis

10. **Alturas de edificios altos** En la tabla se dan las alturas y el número de pisos de 11 edificios altos.
   a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
   b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
   c) ¿Cuál es la pendiente de su recta de regresión? ¿Qué indica su valor?

Edificio	Altura (pies)	Pisos
Empire State Building, Nueva York	1250	102
One Liberty Place, Filadelfia	945	61
Canada Trust Tower, Toronto	863	51
Bank of America Tower, Seattle	943	76
Sears Tower, Chicago	1450	110
Petronas Tower I, Malasia	1483	88
Commerzbank Tower, Alemania	850	60
Palace of Culture and Science, Polonia	758	42
Republic Plaza, Singapur	919	66
Transamerica Pyramid, San Francisco	853	48
Taipei 101 Building, Taiwán	1679	101

11. **Registros de nado olímpico** En la tabla se dan los tiempos de medalla de oro en el evento de nado olímpico de 100 m estilo libre para varones y mujeres.
   a) Encuentre las rectas de regresión para los datos de varones y los datos de mujeres.
   b) Bosqueje ambas rectas de regresión en la misma gráfica. ¿Cuándo estas rectas predicen que las mujeres vencerán a los varones en el evento? ¿Esta conclusión parece ser razonable?

VARONES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1908	C. Daniels, USA	65.6
1912	D. Kahanamoku, USA	63.4
1920	D. Kahanamoku, USA	61.4
1924	J. Weissmuller, USA	59.0
1928	J. Weissmuller, USA	58.6
1932	Y. Miyazaki, Japón	58.2
1936	F. Csik, Hungría	57.6
1948	W. Ris, USA	57.3
1952	C. Scholes, USA	57.4
1956	J. Henricks, Australia	55.4
1960	J. Devitt, Australia	55.2
1964	D. Schollander, USA	53.4
1968	M. Wenden, Australia	52.2
1972	M. Spitz, USA	51.22
1976	J. Montgomery, USA	49.99
1980	J. Woithe, E. Alemania	50.40
1984	R. Gaines, USA	49.80
1988	M. Biondi, USA	48.63
1992	A. Popov, Russia	49.02
1996	A. Popov, Russia	48.74
2000	P. van den Hoogenband, Países bajos	48.30
2004	P. van den Hoogenband, Países bajos	48.17

MUJERES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1912	F. Durack, Australia	82.2
1920	E. Bleibtrey, USA	73.6
1924	E. Lackie, USA	72.4
1928	A. Osipowich, USA	71.0
1932	H. Madison, USA	66.8
1936	H. Mastenbroek, Holanda	65.9
1948	G. Andersen, Dinamarca	66.3
1952	K. Szoke, Hungría	66.8
1956	D. Fraser, Australia	62.0
1960	D. Fraser, Australia	61.2
1964	D. Fraser, Australia	59.5
1968	J. Henne, USA	60.0
1972	S. Nielson, USA	58.59
1976	K. Ender, E. Alemania	55.65
1980	B. Krause, E. Alemania	54.79
1984	(Tie) C. Steinseifer, USA	55.92
	N. Hogshead, USA	55.92
1988	K. Otto, E. Alemania	54.93
1992	Z. Yong, China	54.64
1996	L. Jingyi, China	54.50
2000	I. DeBruijn, Holanda	53.83
2004	J. Henry, Australia	53.84

12. Estatura de los padres y estatura de sus hijos En 1885, Sir Francis Galton comparó la estatura de los hijos con la de sus padres. Su estudio es considerado uno de los primeros usos de la regresión. En la tabla se prorpocionan algunos de los datos originales de Galton. El término "estatura promedio de los padres" significa el promedio de estaturas del padre y de la madre.

a) Encuentre una ecuación lineal que modele los datos.

b) ¿Qué tan bien predice el modelo su propia estatura (con base en las estaturas de sus padres)?

Estatura promedio de los padres (pulg.)	Estatura de los hijos (pulg.)
64.5	66.2
65.5	66.2
66.5	67.2
67.5	69.2
68.5	67.2
68.5	69.2
69.5	71.2
69.5	70.2
70.5	69.2
70.5	70.2
72.5	72.2
73.5	73.2

13. Medida del zapato y estatura ¿Considera que están relacionadas la medida del zapato y la estatura? Investigue mediante una encuesta acerca de la medida del zapato y la estatura de los integrantes de su grupo de clases. (Por supuesto, los datos para los varones deben ir aparte de los de las mujeres.) Encuentre el coeficiente de correlación.

14. Demanda de caramelos En este problema se determinará una ecuación de demanda lineal que describe la demanda de caramelos en su grupo de clases. Encueste a sus compañeros para determinar qué precio estarían dispuestos a pagar por cada caramelo. La forma de su encuesta podría asemejarse a la que se muestra a la izquierda.

a) Construya una tabla del número de encuestados que responden "sí" en cada nivel de precio.

b) Construya una gráfica de dispersión de sus datos.

c) Encuentre y grafique la recta de regresión $y = mp + b$, que proporcione el número de encuestados y que comprarían un caramelo si el precio fuera p centavos. Esta es la *ecuación de demanda*. ¿Por qué es negativa la pendiente m?

d) ¿Cuál es el intersecto p de la ecuación de demanda? ¿Qué indica el interfecto acerca el precio de los caramelos?

¿Compraría un caramelo de la máquina del pasillo si el precio es el que se indica?

Precio	Sí o no
30¢	
40¢	
50¢	
60¢	
70¢	
80¢	
90¢	
\$1.00	
\$1.10	
\$1.20	

3 Funciones polinomiales y racionales

3.1 Funciones polinomiales y sus gráficas
3.2 División de polinomios
3.3 Ceros reales de polinomios
3.4 Números complejos
3.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra
3.6 Funciones racionales

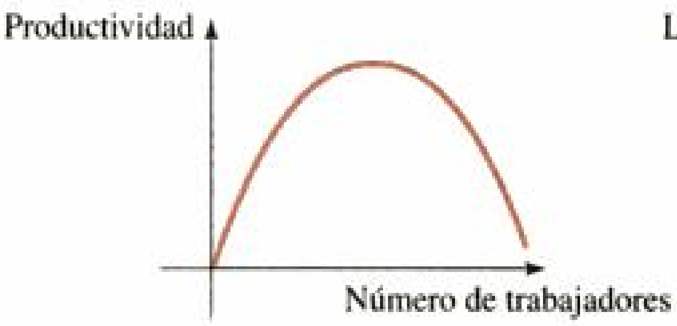
Esquema del capítulo

Las funciones definidas por expresiones polinomiales se llaman funciones polinomiales. Por ejemplo,

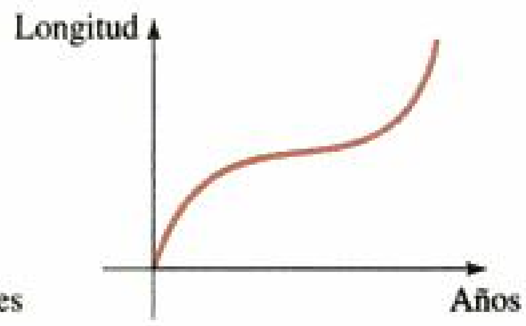
$$P(x) = 2x^3 - x + 1$$

es una función polinomial. Las funciones polinomiales son fáciles de evaluar porque están definidas con sólo suma, resta y multiplicación. Esta propiedad hace que sean las funciones más útiles en matemáticas.

Las gráficas de funciones polinomiales pueden aumentar y disminuir varias veces. Por esta razón son útiles para modelar muchas situaciones del mundo real. Por ejemplo, el dueño de una fábrica nota que si incrementa el número de trabajadores, se incrementa la productividad, pero si hay demasiados trabajadores, la productividad comienza a disminuir. Esta situación se modela mediante una función polinomial de grado 2 (un polinomio cuadrático). En muchas especies animales los jóvenes experimentan un crecimiento acelerado inicial, seguido de un periodo de crecimiento lento, seguido de otro crecimiento acelerado. Este fenómeno se modela mediante una función polinomial de grado 3 (un polinomio cúbico).

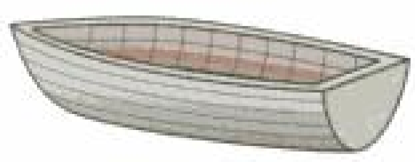


La productividad se modela mediante un polinomio de grado 2.



El crecimiento se modela mediante un polinomio de grado 3.

Las gráficas de funciones polinomiales son hermosas curvas lisas que se emplean en procesos de diseño. Por ejemplo, los constructores de botes juntan porciones de gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas splines cúbicos) con el fin de diseñar las curvas naturales para el casco del bote.



J. L. Amos/SuperStock

En este capítulo se estudian funciones racionales, que son cocientes de funciones polinomiales. Se verá que las funciones racionales también tienen muchas aplicaciones útiles.

3.1 Funciones polinomiales y sus gráficas

Antes de trabajar con funciones polinomiales, se debe acordar acerca de cierta terminología.

Funciones polinomiales

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la potencia más alta, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Es común referirse a las funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3 | Grado 5 | Coeficiente constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$ | Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

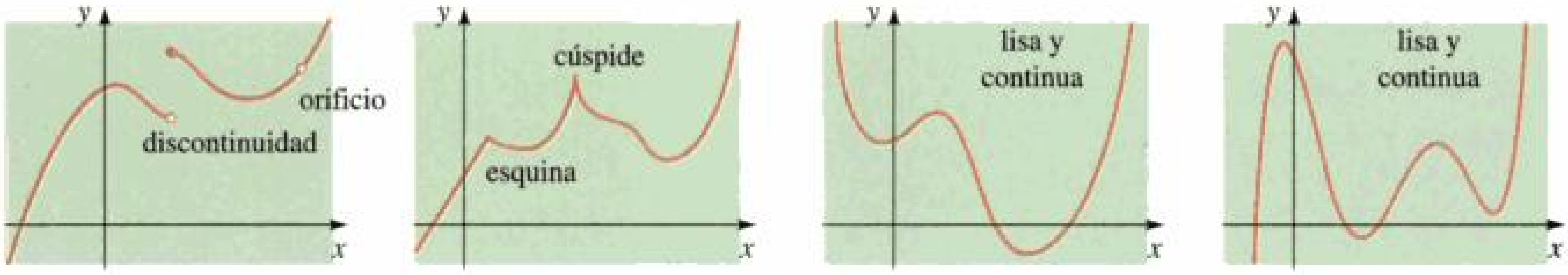
Aquí hay algunos ejemplos más de polinomios.

$P(x) = 3$	Grado 0
$Q(x) = 4x - 7$	Grado 1
$R(x) = x^2 + x$	Grado 2
$S(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10$	Grado 3

Si un polinomio consta de un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

Gráficas de polinomios

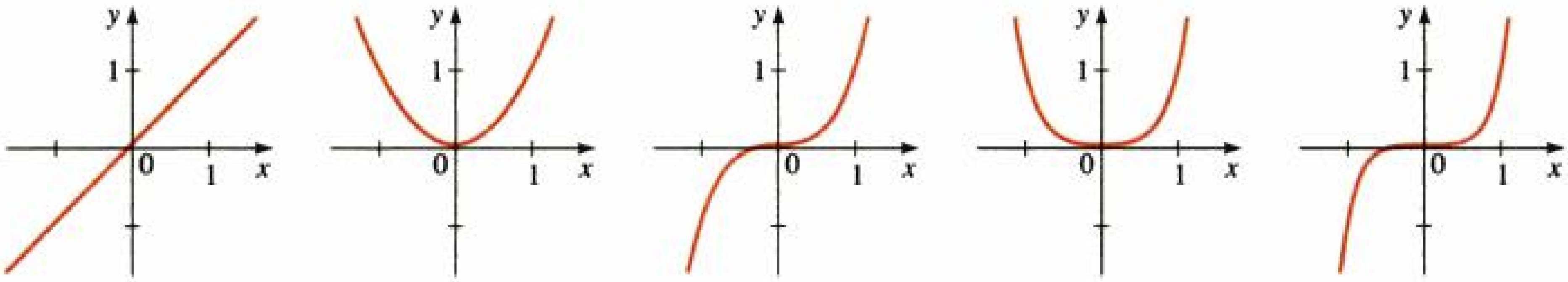
Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (sección 1.10), y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (sección 2.5). Mientras mayor sea el grado del polinomio, más complicada será la gráfica. Sin embargo, la gráfica de una función polinomial es siempre una curva lisa; es decir, no tiene discontinuidades en las esquinas (véase figura 1). La demostración de este hecho requiere cálculo.



No es la gráfica de una función polinomial — No es la gráfica de una función polinomial — Gráfica de una función polinomial — Gráfica de una función polinomial

Figura 1

Las funciones polinomiales más simples son los polinomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se muestran en la figura 2. Según indica la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que, $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, a medida que el grado n es más grande, las gráficas se vuelven más planas respecto al origen y más inclinadas en otra parte.



a) $y = x$ b) $y =$ c) $y = x^3$ d) $y = x^4$ e) $y = x$

Figura 2
Gráficas de monomios

Ejemplo 1 Transformaciones de monomios

Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $P(x) = -x^3$ b) $Q(x) = (x - 2)^4$

c) $R(x) = -2x^5 + 4$

Solución Se usan las gráficas de la figura 2 y se transforman con las técnicas de la sección 2.4.

a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje x, como se muestra en la figura 3(a) en la página siguiente.

Matemáticas en el mundo moderno

Curvígrafos (splines)

Un curvígrafo es una tira larga de madera que se curva mientras se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado, los constructores de buques empleaban curvígrafos para crear la forma curvada del casco de un barco. Los curvígrafos se empleaban también para hacer las curvas de un piano, violín o el pico de una tetera.

Los matemáticos descubrieron que las formas de los curvígrafos se obtienen al juntar partes de polinomios. Por ejemplo, la gráfica de un polinomio cúbico se puede hacer para ajustar puntos especificados ajustando los coeficientes de los polinomios (véase el ejemplo 10, página 261). Las curvas obtenidas de esta manera se llaman splines cúbicos. En los modernos programas de diseño por computadora, como Adobe Illustrator o Microsoft Paint, una curva se puede trazar fijando dos puntos, luego, se usa el ratón para arrastrar uno o más puntos de anclaje. Mover los puntos de anclaje equivale a ajustar los coeficientes polinomiales de un polinomio cúbico.

b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada a la derecha 2 unidades, como se muestra en la figura 3(b).

c) Se comienza con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene alargando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje x (véase la gráfica azul discontinua en la figura 3(c)). Por último la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene por un desplazamiento hacia arriba de 4 unidades (véase la gráfica en rojo de la figura 3(c)).

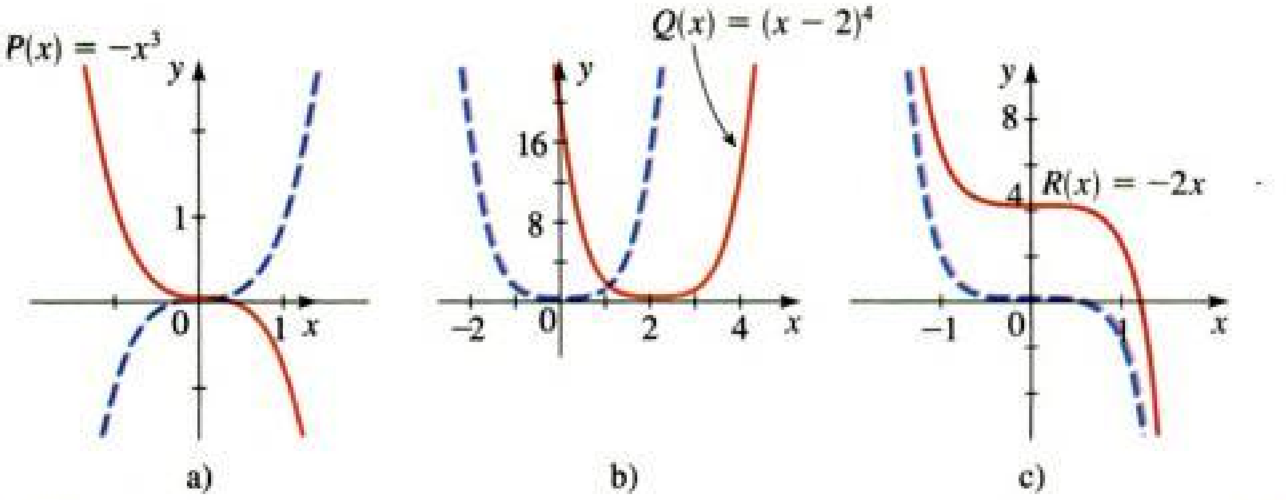


Figura 3

Comportamiento extremo y el término principal

El **comportamiento extremo** de un polinomio es una descripción de lo que sucede cuando x se vuelve grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento extremo, se usa la siguiente notación:

$x \to \infty$	significa	"x se hace grande en la dirección positiva"
$x \to -\infty$	significa	"x se hace grande en la dirección negativa"

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la figura 2(b) tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

El monomio $y = x^3$ en la figura 2(c) tiene el comportamiento extremo

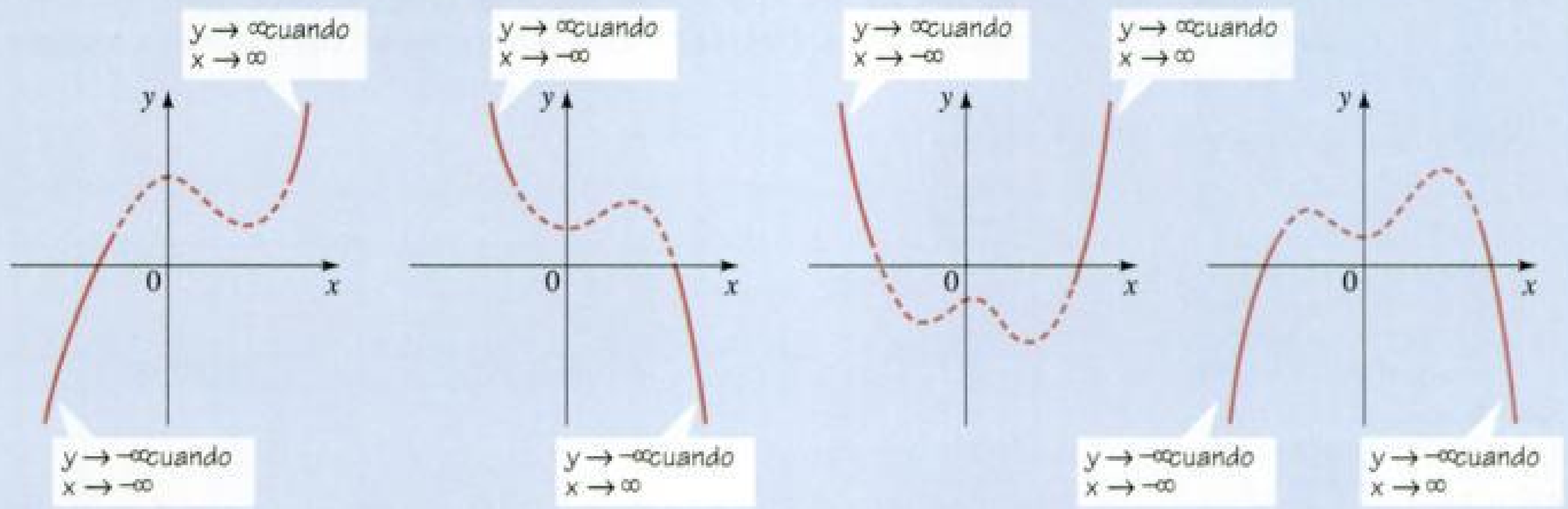
$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier polinomio, *el comportamiento extremo está determinado por el término que contiene la potencia más alta de x*, porque cuando x es grande, los otros términos son de tamaño relativamente insignificante. En el cuadro siguiente se muestran los cuatro tipos posibles de comportamiento extremo, con base en la potencia más alta y el signo de su coeficiente.

Comportamiento extremo de polinomios

El comportamiento extremo del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se determina por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las siguientes gráficas.

P tiene grado impar | *P* tiene grado par



Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo | Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo

Ejemplo 2 Comportamiento extremo de un polinomio

Determine el comportamiento final del polinomio

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

Solución El polinomio *P* tiene grado 4 y coeficiente principal -2. Así, *P* tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo* de modo que tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

En la gráfica de la figura 4 se ilustra el comportamiento extremo de *P*.

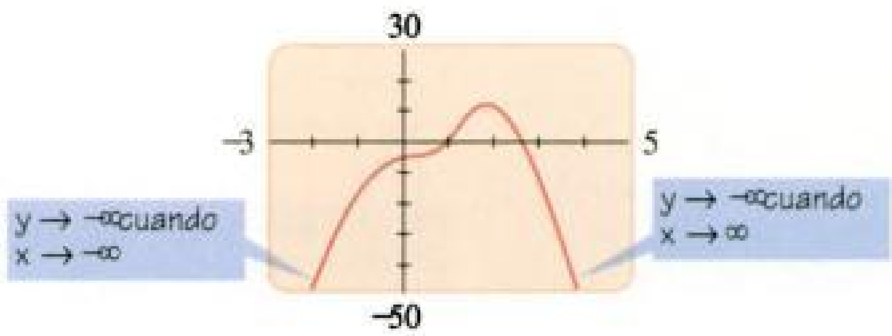


Figura 4
$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

■

Ejemplo 3 Comportamiento extremo de un polinomio

a) Determine el comportamiento extremo del polinomio $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

b) Confirme que *P* y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tiene el mismo comportamiento extremo graficándolos juntos.

Solución

a) Puesto que P tiene grado impar y coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

b) En la figura 5 se muestran las gráficas de P y Q en rectángulos de visión cada vez más grandes. Mientras más grande sea el rectángulo de visión, más se parecen las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento extremo.

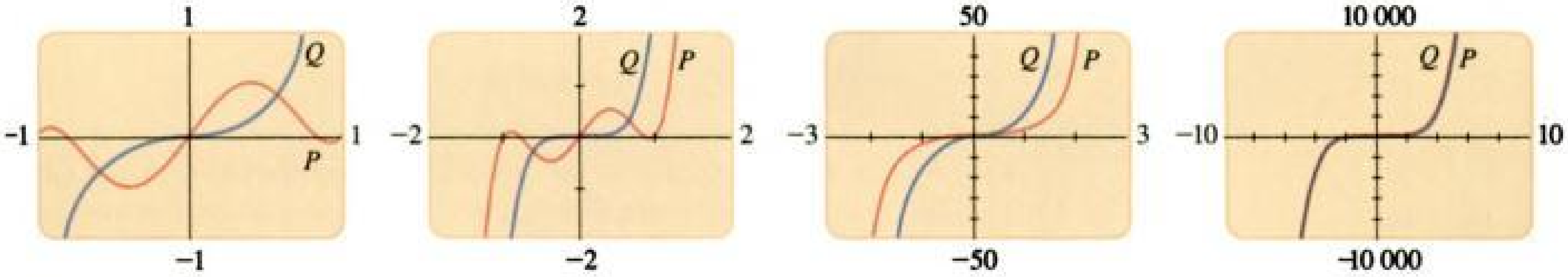


Figura 5
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

■

Para ver de forma algebraica por qué P y Q en el ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento extremo, factorice a P como sigue y compare con Q.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad\qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/3x^2$ y $2/3x^4$ se aproximan a 0 (véase el ejercicio 79 en la página 12). Por lo tanto para x grande, se tiene

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2 261 280	2 278 125
30	72 765 060	72 900 000
50	936 875 100	937 500 000

Así, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. Se puede observar esto también en forma numérica mediante la construcción de una tabla como la que se presenta al margen.

Por el mismo razonamiento se puede mostrar que el comportamiento extremo de cualquier polinomio se determina por su término principal.

Uso de ceros para graficar polinomios

Si P es una función polinomial, entonces c se llama un **cero** de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Hay que observar que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene una intersección con el eje x en $x = c$, así que las intersecciones en x de la gráfica son los ceros de la función.

Ceros reales de polinomios

Si P es un polinomio y c es un número real, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.

1. c es un cero de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. $x = c$ es una intersección en x de la gráfica de P.

Para hallar los ceros de un polinomio P, se factoriza y luego se usa la propiedad del producto nulo (véase la página 47). Por ejemplo, para hallar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, se factoriza P para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

De esta forma factorizada se puede observar fácilmente que

1. 2 es un cero de P.
2. $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
3. $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
4. $x = 2$ es una intersección en x de la gráfica de P.

Los mismos hechos son ciertos para el otro cero, -3.

El siguiente teorema tiene muchas consecuencias importantes. (Véase, por ejemplo, el Proyecto de descubrimiento de la página 283.) Aquí se emplea como ayuda para graficar funciones polinomiales.

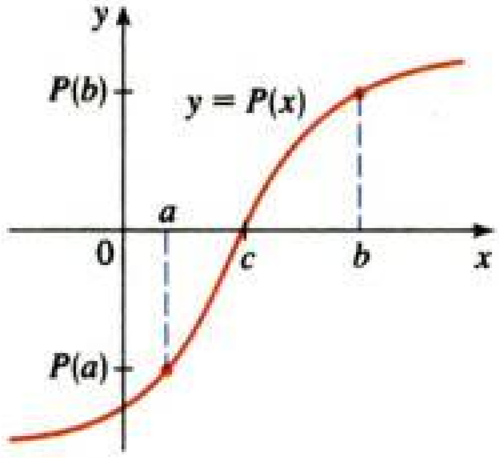


Figura 6

Teorema del valor intermedio para polinomios

Si P es una función polinomial y $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe por lo menos un valor c entre a y b para el cual $P(c) = 0$.

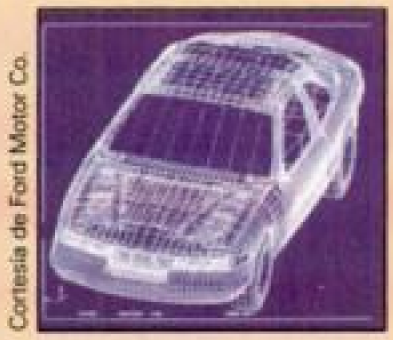
No se demostrará este teorema, pero en la figura 6 se muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que entre dos ceros sucesivos cualesquiera, los valores de un polinomio son todos positivos o negativos. Es decir, entre dos ceros sucesivos la gráfica de un polinomio yace *por completo arriba* o *abajo* del eje x. Para ver por qué, suponga que c_1 y c_2 son ceros sucesivos de P. Si P tiene ambos valores positivos y negativos entre c_1 y c_2, entonces por el teorema del valor intermedio P debe tener un cero entre c_1 y c_2. Pero eso no es posible porque c_1 y c_2 son ceros sucesivos. Esta observación permite usar las siguientes normas para graficar polinomios.

Normas para graficar funciones polinomiales

1. **Ceros.** Factorizar el polinomio para hallar todos sus ceros reales; estos son las intersecciones con el eje x de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Construir una tabla de valores para el polinomio. Incluir los puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio yace arriba o abajo del eje x en los intervalos determinados por ceros. Incluya la intersección y en la tabla.
3. **Comportamiento extremo.** Determine el comportamiento extremo del polinomio.
4. **Gráfica.** Trace las intersecciones y otros puntos que encontró en la tabla. Bosqueje una curva lisa que pase por estos puntos y exhiba el comportamiento extremo requerido

Matemáticas en el mundo moderno



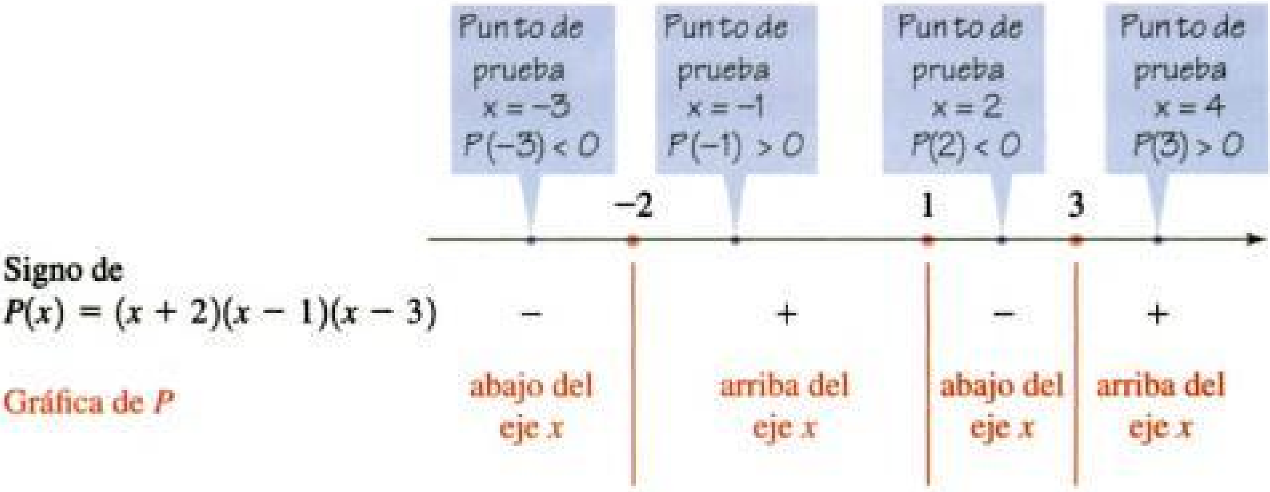
Diseño automotriz

El diseño auxiliado por computadora (DAC) ha cambiado por completo la forma en que las compañías diseñan y fabrican automóviles. Antes de 1980 los ingenieros automotrices construirían un modelo "esencial" a escala completa de un nuevo automóvil propuesto; ésta era en realidad la única forma para decidir si el diseño era factible. Los ingenieros automotrices de hoy día construyen un modelo matemático, uno que existe sólo en la memoria de una computadora. El modelo incorpora todas las características principales de diseño del automóvil. Ciertas curvas polinomiales, llamadas *splines*, se emplean para dar forma al cuerpo del automóvil. El "automóvil matemático" resultante se puede probar para estabilidad estructural, manejo, aerodinámica, respuesta de la suspensión y más. Todas estas pruebas se hacen antes de que sea construido un prototipo. Como puede imaginar, el DAC ahorra a los fabricantes millones de dólares cada año. Lo que es más importante, el DAC da a los ingenieros automotrices mucha más flexibilidad en el diseño; los cambios deseados pueden ser creados y probados en segundos. Con la ayuda de gráficas de computadora, los diseñadores pueden ver qué tan bien se ve el "automóvil matemático" antes de que construyan el real. Además, el automóvil matemático se puede examinar desde cualquier perspectiva; puede ser movido, girado o visto desde el interior. Estas manipulaciones del automóvil en el monitor de la computadora se traducen matemáticamente al resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 4 Uso de ceros para graficar una función polinomial

Bosqueje la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

Solución Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Éstos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Si se emplean estos puntos de prueba en estos intervalos, se obtiene la información del siguiente diagrama de signos (véase la sección 1.7).



Graficar algunos puntos adicionales y conectarlos con una curva uniforme ayuda a completar la gráfica de la figura 7.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	−3	−24
	−2	0
Punto de prueba →	−1	8
	0	6
	1	0
Punto de prueba →	2	−4
	3	0
Punto de prueba →	4	18

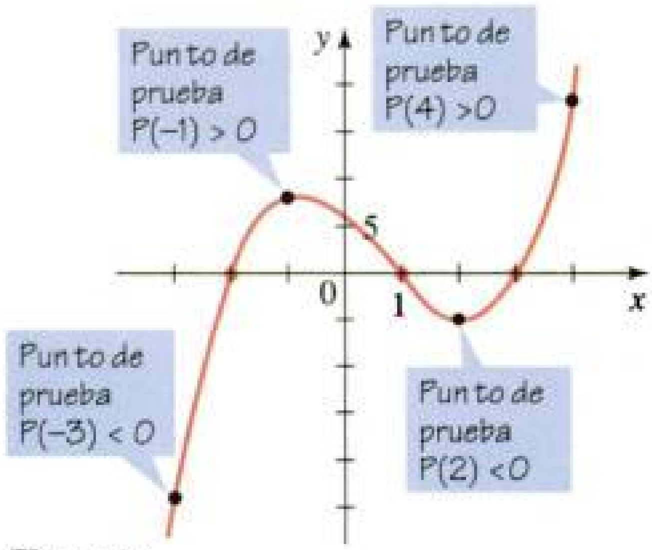


Figura 7
$P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ ■

Ejemplo 5 Localización de ceros y graficación de una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

a) Encuentre los ceros de P. b) Bosqueje la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros, se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ &= x(x^2 - 2x - 3) && \text{Factorizar } x \\ &= x(x - 3)(x + 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los ceros son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$.

b) Las intersecciones en x son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$. La intersección en y es $P(0) = 0$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$, asegurándose de elegir puntos de prueba entre (y a la derecha e izquierda de) ceros sucesivos.

Puesto que P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se grafican los puntos de la tabla y se unen mediante una curva uniforme para completar la gráfica, como se muestra en la figura 8.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	-2	-10
	-1	0
Punto de prueba →	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
	0	0
Punto de prueba →	1	-4
	2	-6
	3	0
Punto de prueba →	4	20

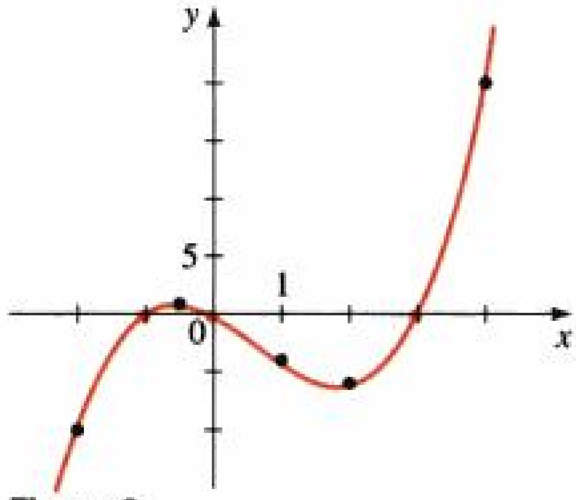


Figura 8
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

■

Ejemplo 6 Localización de ceros y graficación de una función polinomial

Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

a) Encuentre los ceros de P. b) Bosquejar la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros, se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\ &= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar } -x^2 \\ &= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

b) Las intersecciones en x son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. La intersección en y es $P(0) = 0$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$, asegurándose de elegir puntos de prueba entre (y a la derecha e izquierda de) ceros sucesivos.

Puesto que P es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se grafican los puntos de la tabla y se unen mediante una curva uniforme para completar la gráfica, como se muestra en la figura 9.

La tabla de valores se calcula con más facilidad si se emplea una calculadora programable o una calculadora para gráficas.

x	$P(x)$
-2	-12
-1.5	0
-1	2
-0.5	0.75
0	0
0.5	0.5
1	0
1.5	-6.75

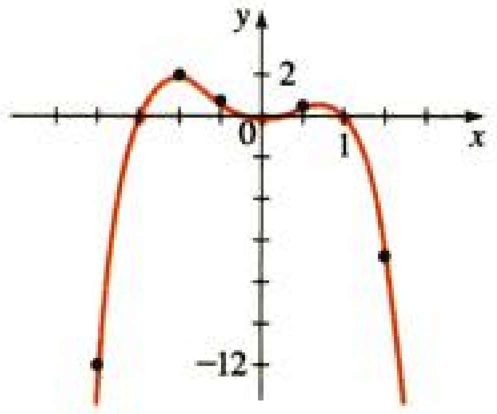


Figura 9
$P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$ ■

Ejemplo 7 Hallar los ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$.

a) Hallar los ceros de P. b) Bosquejar la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^2(x-2) - 4(x-2) && \text{Agrupe y factorice} \\ &= (x^2-4)(x-2) && \text{Factorice } x-2 \\ &= (x+2)(x-2)(x-2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x+2)(x-2)^2 && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros son $x = -2$ y $x = 2$.

b) Las intersecciones en x son $x = -2$ y $x = 2$. La intersección en y es $P(0) = 8$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$.

Puesto que P es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se unen los puntos mediante una curva uniforme para completar la gráfica de la figura 10.

x	$P(x)$
-3	-25
-2	0
-1	9
0	8
1	3
2	0
3	5

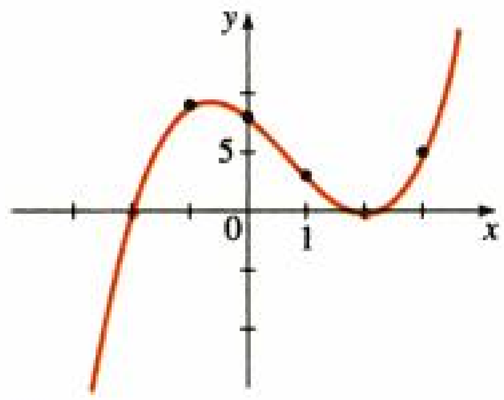


Figura 10
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ ■

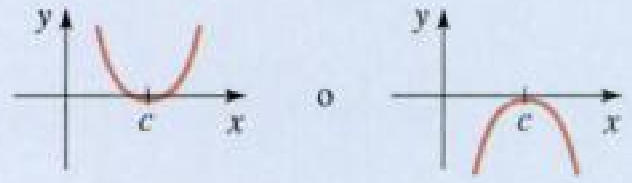
Forma de la gráfica cerca de un cero

Aunque $x = 2$ es un cero del polinomio del ejemplo 7, la gráfica no cruza el eje x en la intersección con el eje x en $x = 2$. Esto es porque el factor $(x - 2)^2$ que corresponde a ese cero está elevado a una potencia, así que no cambia de signo cuando se prueban los puntos en cualquier lado de 2. En la misma forma, la gráfica no cruza el eje x en $x = 0$ en el ejemplo 6.

En general, si c es un cero de P y el factor correspondiente $x - c$ ocurre exactamente m veces en la factorización de P entonces se dice que c es un **cero de multiplicidad m**. Al considerar puntos de prueba en cualquier lado del cruzamiento $x = c$, se concluye que la gráfica cruza el eje x en c si la multiplicidad m es impar o no cruza el eje x si m es par. Además, se puede demostrar por medio del cálculo que cerca de $x = c$ la gráfica tiene la misma forma general que $A(x - c)^m$.

Forma de la gráfica cerca de un cero de multiplicidad m

Suponga que c es un cero de P de multiplicidad m. Entonces la forma de la gráfica de P cerca de c es como sigue.

Multiplicidad de c	Forma de la gráfica de P cerca de la intersección con el eje x en $x = c$
m impar, $m > 1$	
m par, $m > 1$	

Ejemplo 8 Graficación de una función polinomial usando sus ceros

Grafique el polinomio $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.

Solución Los ceros de P son -1, 0 y 2, con multiplicidades 2, 4 y 3, respectivamente.

0 es un cero de multiplicidad 4.

2 es un cero de multiplicidad 3.

-1 es un cero de multiplicidad 2.

$$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$$

El cero 2 tiene multiplicidad *impar*, así que la gráfica cruza el eje x en la intersección en $x = 2$. Pero los ceros 0 y -1 tienen multiplicidad *par*, así que la gráfica no cruza el eje x en las intersecciones en $x = 0$ y en $x = -1$.

Puesto que P es un polinomio de grado 9 y tiene coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Con esta información y una tabla de valores, se bosqueja la gráfica en la figura 11.

x	$P(x)$
-1.3	-9.2
-1	0
-0.5	-3.9
0	0
1	-4
2	0
2.3	8.2

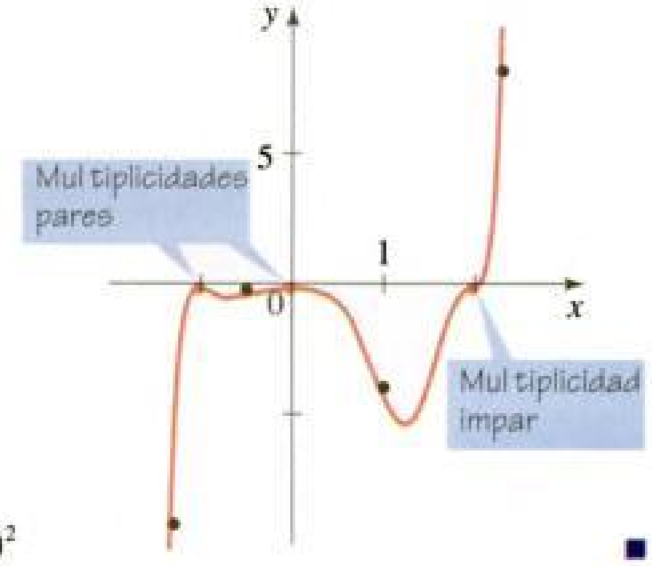


Figura 11
$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$

Máximos y mínimos locales de polinomios

Recuerde de la sección 2.5 que si el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f dentro del rectángulo de visión, entonces $f(a)$ es un valor máximo local de f, y si $(b, f(b))$ es el punto mínimo en la gráfica de f dentro de un rectángulo de visión, entonces $f(b)$ es un valor mínimo local (véase la figura 12). Se dice que tal punto $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** en la gráfica y que $(b, f(b))$ es un **punto mínimo local**. El conjunto de todos los puntos locales máximos y mínimos sobre la gráfica de una función se conocen como sus **extremos locales**.

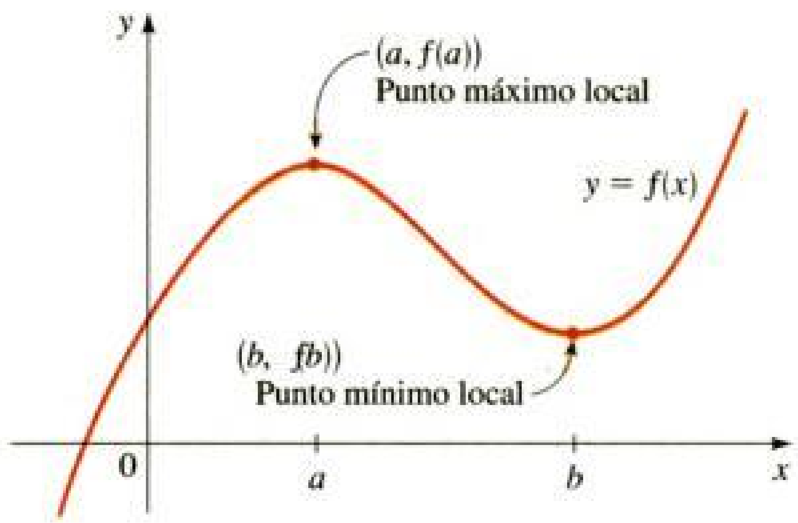


Figura 12

Para una función polinomial el número de extremos locales debe ser menor que el grado, como indica el siguiente principio. (Una demostración de este principio requiere cálculo.)

Extremos locales de polinomios

Si $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene a lo sumo $n - 1$ extremos locales.

Un polinomio de grado n puede tener de hecho menos de $n - 1$ extremos locales. Por ejemplo, $P(x) = x^5$ (graficada en la figura 2) *no* tiene extremos locales, aun cuando es de grado 5. El principio precedente indica sólo que un polinomio de grado n puede tener no más de $n - 1$ extremos locales.

Ejemplo 9 Número de extremos locales

Determine cuántos extremos locales tiene cada polinomio.

a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

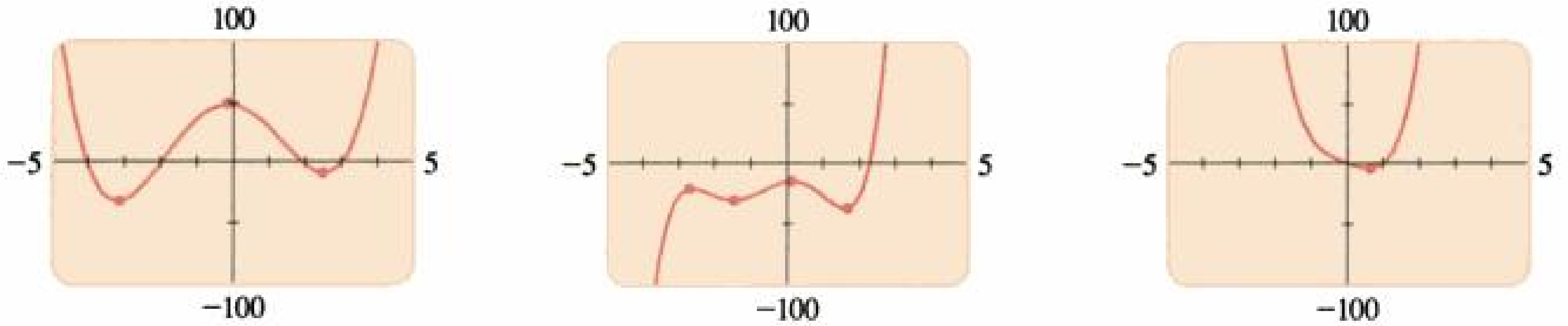
b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$ c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

Solución Las gráficas se muestran en la figura 13.

a) P_1 tiene dos puntos mínimos locales y un punto máximo local, para un total de tres extremos locales.

b) P_2 tiene dos puntos mínimos locales y dos puntos máximos locales, para un total de cuatro extremos locales.

c) P_3 tiene sólo un extremo local, un mínimo local.



a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16 \quad - 4x + 48$

b) $P_2(x) = x \quad + 3x - 5x^3 - 15 \quad + 4x - 15$

c) $P_3(x) = 7x^4 + 3 \quad - 10x$

Figura 13 ■

Con una calculadora para gráficas se pueden trazar rápidamente las gráficas de muchas funciones a la vez, en la misma pantalla de visión. Esto permite ver cómo cambiar un valor en la definición de las funciones, afecta la forma de su gráfica. En el ejemplo siguiente se aplica el principio a una familia de polinomios de tercer grado.

Ejemplo 10 Una familia de polinomios

Bosqueje la familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y 3. ¿Cómo afecta a la gráfica cambiar el valor de c?

Solución Los polinomios

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$

$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

se grafican en la figura 14. Se puede observar que incrementar el valor de c ocasiona que la gráfica desarrolle un "valle" cada vez más profundo a la derecha del eje y, lo cual crea un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el cuadrante IV. Este mínimo local se mueve hacia abajo y a la derecha a medida que se incrementa c. Para ver por qué sucede esto, factorice a $P(x) = x^2(x - c)$. El polinomio P tiene ceros en 0 y c, y más a la derecha estará el mínimo entre 0 y c y mientras más grande sea c más a la derecha estará el mínimo entre 0 y c. ■

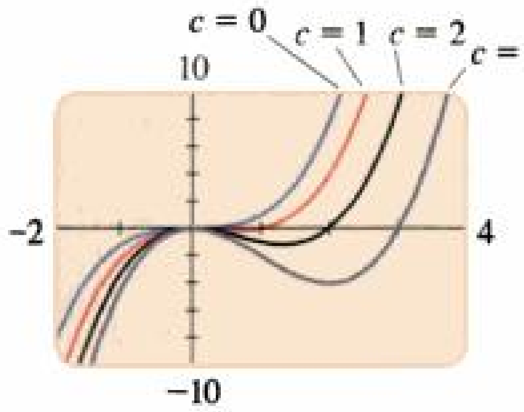


Figura 14
Una familia de polinomios
$P(x) = x^3 - cx^2$

3.1 Ejercicios

1–4 ■ Bosqueje la gráfica de cada función transformando la gráfica de una función apropiada de la forma $y = x^n$ de la figura 2. Indique las intersecciones con los ejes x y y en cada gráfica.

1. **a)** $P(x) = x^2 - 4$ **b)** $Q(x) = (x - 4)^2$
c) $R(x) = 2x^2 - 2$ **d)** $S(x) = 2(x - 2)^2$

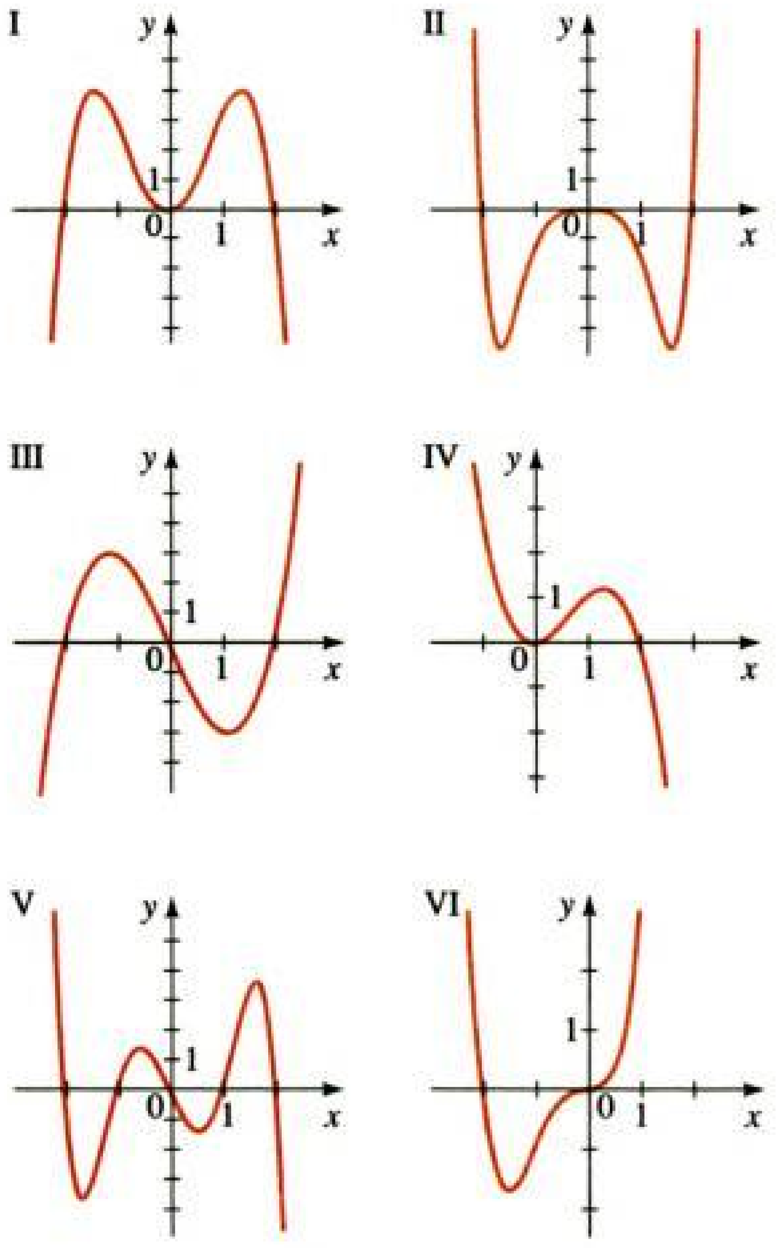
2. **a)** $P(x) = x^4 - 16$ **b)** $Q(x) = (x + 2)^4$
c) $R(x) = (x + 2)^4 - 16$ **d)** $S(x) = -2(x + 2)^4$

3. **a)** $P(x) = x^3 - 8$ **b)** $Q(x) = -x^3 + 27$
c) $R(x) = -(x + 2)^3$ **d)** $S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

4. **a)** $P(x) = (x + 3)^5$ **b)** $Q(x) = 2(x + 3)^5 - 64$
c) $R(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5$ **d)** $S(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5 + 16$

5–10 ■ Compare la función polinomial con una de las gráficas I-VI. Dé razones para su elección.

5. $P(x) = x(x^2 - 4)$ **6.** $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$
7. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$ **8.** $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$
9. $T(x) = x^4 + 2x^3$ **10.** $U(x) = -x^3 + 2x^2$



11–22 ■ Bosqueje la gráfica de la función polinomial. Asegúrese de que su gráfica muestre las intersecciones con los ejes y exhiba el comportamiento extremo apropiado.

11. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

12. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

13. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

14. $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

15. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

16. $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

17. $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

18. $P(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

19. $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$

20. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

21. $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$

22. $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

23–36 ■ Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. Luego, bosqueje la gráfica.

23. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$

24. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

25. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$

26. $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

27. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

28. $P(x) = x^5 - 9x^3$

29. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

30. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

31. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

32. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

33. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

34. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

35. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

36. $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

37–42 ■ Determine el comportamiento extremo de P. Compare las gráficas de P y Q en rectángulos de visión grandes y pequeños, como en el ejemplo 3(b).

37. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$; $Q(x) = 3x^3$

38. $P(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x$; $Q(x) = -\frac{1}{8}x^3$

39. $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x + 5;\quad Q(x) = x^4$

40. $P(x) = -x^5 + 2x^2 + x;\quad Q(x) = -x^5$

41. $P(x) = x^{11} - 9x^9;\quad Q(x) = x^{11}$

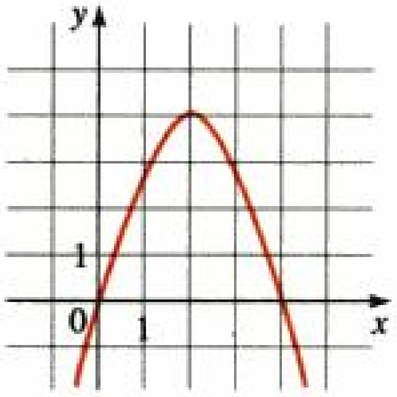
42. $P(x) = 2x^2 - x^{12};\quad Q(x) = -x^{12}$

43–46 ■ Se da la gráfica de una función polinomial. De la gráfica, encuentre

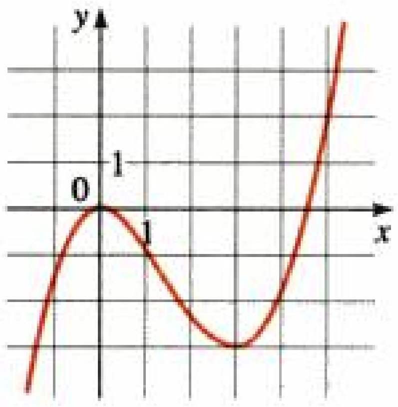
a) las intersecciones con los ejes x y y

b) las coordenadas de los extremos locales

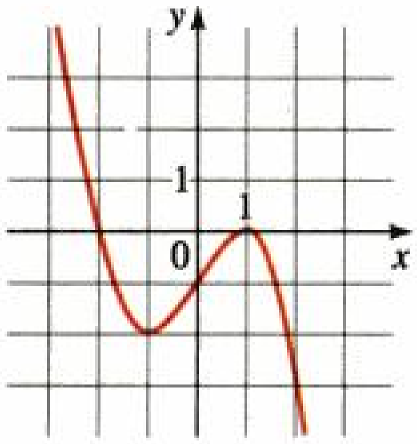
43. $P(x) = -x^2 + 4x$



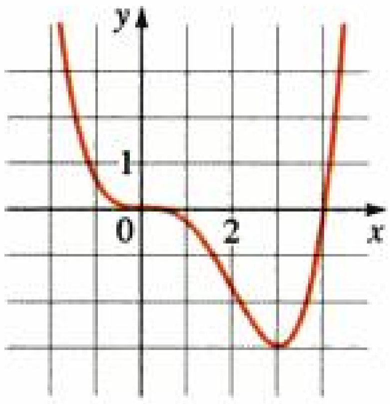
44. $P(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2$



45. $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$



46. $P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$



47–54 ■ Grafique el polinomio en el rectángulo de visión dado. Encuentre las coordenadas de los extremos locales. Exprese cada respuesta correcta hasta dos lugares decimales.

47. $y = -x^2 + 8x,\quad [-4, 12]$ por $[-50, 30]$

48. $y = x^3 - 3x^2,\quad [-2, 5]$ por $[-10, 10]$

49. $y = x^3 - 12x + 9,\quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

50. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32,\quad [-5, 5]$ por $[-60, 30]$

51. $y = x^4 + 4x^3,\quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

52. $y = x^4 - 18x^2 + 32,\quad [-5, 5]$ por $[-100, 100]$

53. $y = 3x^5 - 5x^3 + 3,\quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

54. $y = x^5 - 5x^2 + 6,\quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

55–64 ■ Grafique el polinomio y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

55. $y = -2x^2 + 3x + 5$

56. $y = x^3 + 12x$

57. $y = x^3 - x^2 - x$

58. $y = 6x^3 + 3x + 1$

59. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

60. $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

61. $y = (x - 2)^5 + 32$

62. $y = (x^2 - 2)^3$

63. $y = x^8 - 3x^4 + x$

64. $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

65–70 ■ Grafique la familia de polinomios en el mismo rectángulo de visión, con los valores dados de c. Explique cómo el hecho de cambiar el valor de c afecta la gráfica.

65. $P(x) = cx^3;\quad c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

66. $P(x) = (x - c)^4;\quad c = -1, 0, 1, 2$

67. $P(x) = x^4 + c;\quad c = -1, 0, 1, 2$

68. $P(x) = x^3 + cx;\quad c = 2, 0, -2, -4$

69. $P(x) = x^4 - cx;\quad c = 0, 1, 8, 27$

70. $P(x) = x^c;\quad c = 1, 3, 5, 7$

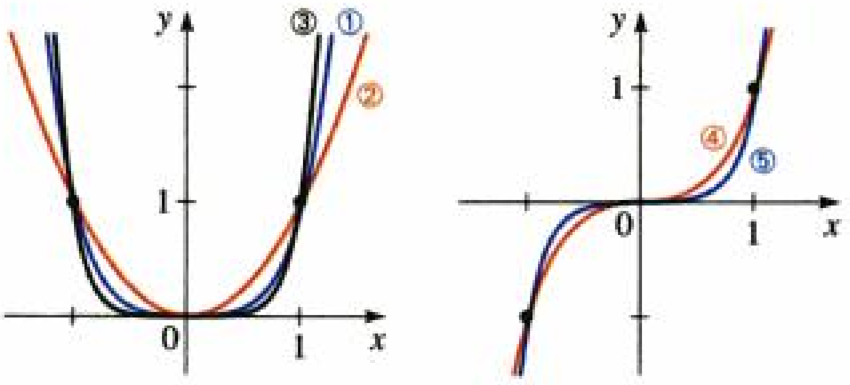
71. a) En los mismos ejes coordenados, bosqueje las gráficas (lo más exacto posible) de las funciones

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 + 5x + 2$$

b) Con base en su dibujo del inciso a), ¿en cuántos puntos al parecer cruza la gráfica?

c) Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección.

72. Las porciones de las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ y $y = x^6$ se grafican en las figuras. Determine qué función pertenece a cada gráfica.



73. Recuerde que una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x.

a) Muestre que un polinomio $P(x)$ que contiene sólo potencias impares de x es una función impar.

b) Muestre que un polinomio $P(x)$ que contiene sólo potencias pares de x es una función par.

c) Muestre que si un polinomio $P(x)$ contiene potencias impares y pares de x, entonces no es una función impar ni par.

d) Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

como la suma de una función impar y una función par.

74. a) Grafique la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y encuentre los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo.

b) Grafique la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y utilice sus respuestas del inciso a) para hallar los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo.

75. a) Grafique la función $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ y determine cuántos extremos locales tiene.

b) Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

76. a) ¿Cuantas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $P(x) = x^3 - 4x$?

b) ¿Cuántas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $Q(x) = x^3 + 4x$?

c) Si $a > 0$, ¿cuantas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene cada uno de los polinomios $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

Aplicaciones

77. Investigación de mercado Un analista de mercado que trabaja para un fabricante de aparatos pequeños encuentra que si la empresa produce y vende x licuadoras anualmente, la ganancia total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Grafique la función P en un rectángulo de visión apropiado y emplee la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

a) Cuando se fabrican sólo algunas licuadoras, la empresa pierde dinero (ganancia negativa). (Por ejemplo, $P(10) = -263.3$, así que la empresa pierde \$263.30 si produce y vende sólo 10 licuadoras.) ¿Cuántas licuadoras debe producir la empresa para terminar sin pérdidas?

b) ¿La ganancia se incrementa de manera indefinida cuando se producen o venden más licuadoras? Si no, ¿cuál es la ganancia más grande posible que podría tener la empresa?

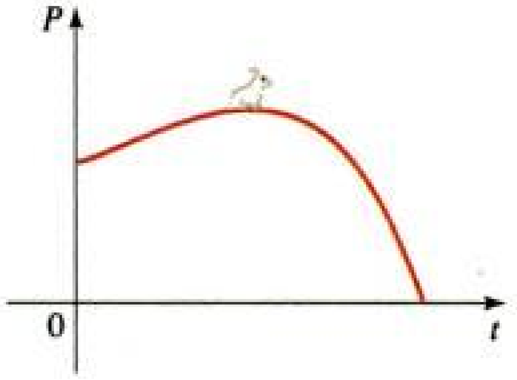
78. Cambio de población Se observa que la población de conejos en una isla pequeña está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

donde t es el tiempo (en meses) desde que comenzaron las observaciones en la isla.

a) ¿Cuándo se obtiene la máxima población, y cuál es esa población máxima?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

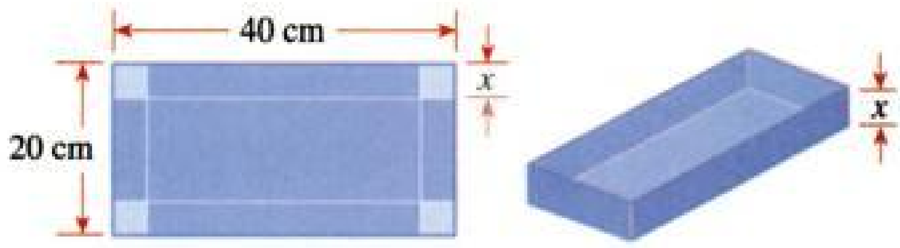


79. Volumen de una caja Se construye una caja abierta de una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm cortando cuadrados de longitud lateral x de cada esquina y doblando hacia arriba los lados, como se muestra en la figura.

a) Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el hecho de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

c) Dibuje una gráfica de la función V y empléela para estimar el volumen máximo para tal caja.

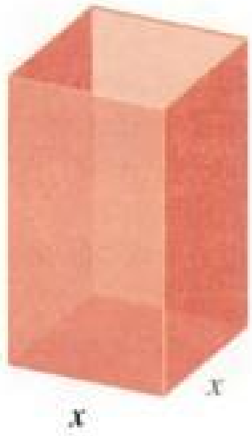


80. Volumen de una caja Una caja de cartón tiene una base cuadrada. Cada lado de la base tiene x pulgadas de longitud, como se muestra en la figura. La longitud total de los 12 lados de la caja es 144 pulgadas.

a) Muestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el hecho de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

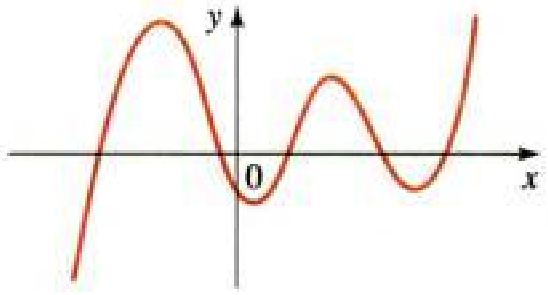
c) Dibuje la gráfica de la función V y utilícela para estimar el volumen máximo para tal caja.



Descubrimiento • Debate

81. Gráficas de potencias grandes Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \leq x \leq 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿A qué se asemejaría la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se podría decir acerca de $y = x^{101}$? Construya una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

82. Número máximo de extremos locales ¿Cuál es el grado más pequeño que el polinomio cuya gráfica se muestra? Explique.



83. Número posible de extremos locales ¿Es posible que un polinomio de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Un polinomio de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener los polinomios de tercero, cuarto, quinto y sexto grado? (Considere el comportamiento extremo de tales polinomios.) Ahora dé un ejemplo de un polinomio que tiene seis extremos locales.

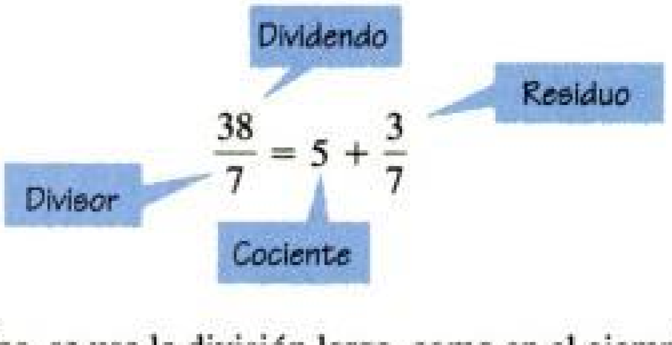
84. ¿Situación imposible? ¿Es posible que un polinomio tenga dos máximos locales y ningún mínimo local? Explique.

3.2 División de polinomios

Hasta aquí en este capítulo se han estado estudiando de manera *gráfica* funciones polinomiales. En esta sección se comienza a estudiar los polinomios en forma *algebraica*. La mayor parte del trabajo será en relación con la factorización de polinomios, y para factorizar, se requiere saber cómo dividir polinomios.

División larga de polinomios

La división de polinomios es similar al proceso familiar de dividir números. Cuando se divide 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Se escribe



$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}$$

Para dividir polinomios, se usa la división larga, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1 División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

Solución El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Se comienza por disponerlos como sigue:

$$x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación divida el término principal en el dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. Luego, multiplique el divisor entre $6x$ reste el resultado del dividendo.

$$\begin{array}{rll} & 6x & \text{Divida los términos principales: } \dfrac{6x^2}{x} = 6x \\ x - 4\,\big) & \overline{6x^2 - 26x + 12} & \\ & \underline{6x^2 - 24x} & \text{Multiplicar: } 6x(x - 4) = 6x^2 - 24x \\ & -2x + 12 & \text{Reste y "baje" el 12} \end{array}$$

Se repite el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{rll} & 6x - 2 & \text{Divida los términos principales: } \dfrac{-2x}{x} = -2 \\ x - 4\,\big) & \overline{6x^2 - 26x + 12} & \\ & \underline{6x^2 - 24x} & \\ & -2x + 12 & \\ & \underline{-2x + 8} & \text{Multiplicar: } -2(x - 4) = -2x + 8 \\ & 4 & \text{Reste} \end{array}$$

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. Entonces el último renglón contiene el *residuo*, y el renglón superior contiene el *cociente*. El resultado de la división se puede interpretar en cualquiera de dos formas.

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} = 6x - 2 + \frac{4}{x - 4}$$

o bien

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(6x - 2)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{4}_{\text{Residuo}}$$

■

Se resume el proceso de la división larga en el siguiente teorema.

Algoritmo de la división

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor que el grado de $D(x)$, tal que

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

Para escribir de otra forma el algoritmo de la división, divida entre $D(x)$:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Ejemplo 2 División larga de polinomios

Sea $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tal que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Solución Se usa la división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas se alineen correctamente.

$$
\begin{array}{rlll}
 & 4x^2 + 2x & & \\
2x^2 - x + 2 & \overline{)\,8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} & & \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} & & \text{Multiplicar el divisor por } 4x^2 \\
 & \qquad\quad 4x^3 - 2x^2 - 3x & & \text{Restar} \\
 & \qquad\quad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} & & \text{Multiplicar el divisor por } 2x \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -7x + 1 & & \text{Restar}
\end{array}
$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga anterior se ve que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, por lo tanto

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$ ■

División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor está en la forma $x - c$. En la división sintética se escriben sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que se divide $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$. (En el ejemplo 3 se explicará cómo llevar a cabo la división sintética.)

División larga

$$
\begin{array}{rll}
 & 2x^2 - x - 3 & \leftarrow \text{Cociente} \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} & \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} & \\
 & \qquad -x^2 + 0x & \\
 & \qquad \underline{-x^2 + 3x} & \\
 & \qquad\qquad -3x + 5 & \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x + 9} & \\
 & \qquad\qquad\qquad -4 & \leftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

División sintética

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}
$$

Observe que en la división sintética se abrevia $2x^3 - 7x^2 + 5$ escribiendo sólo los coeficientes: 2 -7 0 5, y, en lugar de $x - 3$, se escribe simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de -3 permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de los números que aparecen en los cuadros dorados.)

En el ejemplo siguiente se muestra la división sintética efectuada.

Ejemplo 3 División sintética

Use la división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

Solución Se comienza por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

Divisor $x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Dividendo $2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$

Se baja el 2, se multiplica $3 \cdot 2 = 6$, y se escribe el resultado en el renglón de en medio:
Luego se suma:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array}$$

Multiplicar: $3 \cdot 2 = 6$

Sumar: $-7 + 6 = -1$

Se repite este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array}$$

Multiplicar: $3(-1) = -3$

Sumar: $0 + (-3) = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array}$$

Multiplicar: $3(-3) = 9$

Sumar: $5 + (-9) = -4$

Cociente $2x^2 - x - 3$

Residuo -4

De la última línea de la división sintética, se puede observar que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por consiguiente

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

■

Teoremas del residuo y del factor

El siguiente teorema muestra cómo se puede usar la división sintética para evaluar polinomios fácilmente.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

■ **Demostración** Si el divisor en el algoritmo de la división es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser una constante (puesto que el grado del residuo es menor que el grado del divisor.) Si a esta constante se le denomina r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Si se establece $x = c$ en esta ecuación, se obtiene
$P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, es decir, $P(c)$ es el residuo r. ■

Ejemplo 4 Uso del teorema del residuo para hallar el valor de un polinomio

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

a) Encuentre el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

b) Use el teorema del residuo para hallar $P(-2)$.

Solución

a) Puesto que $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$.

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y el residuo es 5.

b) Por el teorema del residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. Del inciso a) el residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$. ■

El teorema siguiente establece que los *ceros* de polinomios corresponden a *factores*; se utilizó este hecho en la sección 3.1 para graficar polinomios.

Teorema del factor

c es un cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

■ **Demostración** Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

A la inversa, si $P(c) = 0$, entonces por el teorema del residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

por lo tanto $x - c$ es un factor de $P(x)$. ■

Ejemplo 5 Factorización de un polinomio por medio del teorema del factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Muestre que $P(1) = 0$, y use este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Solución Sustituyendo, se ve que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el teorema del factor, esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando la división sintética

$$\begin{array}{r}
x^2 + x - 6 \\
x - 1 \overline{\smash{)}\, x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\
\underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad \\
x^2 - 7x \qquad \\
\underline{x^2 - x} \qquad \\
-6x + 6 \\
\underline{-6x + 6} \\
0
\end{array}$$

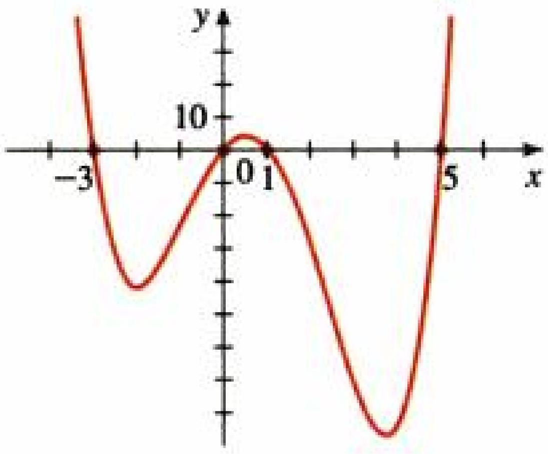


Figura 1
$P(x) = (x + 3)x(x - 1)(x - 5)$ tiene ceros $-3, 0, 1$ y 5.

o la división larga (mostrada en el margen), se ve que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) && \text{Véase el margen} \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) && \text{Factor cuadrático } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6 Hallar un polinomio con ceros especificados

Hallar un polinomio de grado 4 que tiene ceros $-3, 0, 1$ y 5.

Solución Por el teorema del factor, $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben ser factores del polinomio deseado, así que

$$P(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 1)(x - 5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $P(x)$ es de grado 4 es una solución del problema. Cualquier otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, ya que sólo la multiplicación por una constante no cambia el grado. ■

El polinomio P del ejemplo 6 se grafica en la figura 1. Hay que observar que los ceros de P corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica.

3.2 Ejercicios

1–6 ■ Se dan dos polinomios P y D. Use la división sintética o la división larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese P en la forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

1. $P(x) = 3x^2 + 5x - 4$, $D(x) = x + 3$
2. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1$, $D(x) = x - 1$
3. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$, $D(x) = 2x - 3$
4. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9$, $D(x) = 2x + 1$
5. $P(x) = x^4 - x^3 + 4x + 2$, $D(x) = x^2 + 3$
6. $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3$, $D(x) = x^2 - 2$

7–12 ■ Se dan dos polinomios P y D. Use la división sintética o la división larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

7. $P(x) = x^2 + 4x - 8$, $D(x) = x + 3$
8. $P(x) = x^3 + 6x + 5$, $D(x) = x - 4$
9. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7$, $D(x) = 2x - 1$
10. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5$, $D(x) = 3x - 4$
11. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2$, $D(x) = x^2 + 4$
12. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1$, $D(x) = x^2 + x - 1$

13–22 ■ Encontrar el cociente y el residuo usando la división larga.

13. $\dfrac{x^2 - 6x - 8}{x - 4}$
14. $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 6}{x - 2}$
15. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$
16. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$
17. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$
18. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$
19. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$
20. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$
21. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$
22. $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

23–36 ■ Encontrar el cociente y el residuo usando la división sintética.

23. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$
24. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$
25. $\dfrac{3x^2 + 5x}{x - 6}$
26. $\dfrac{4x^2 - 3}{x + 5}$
27. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$
28. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$
29. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$
30. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

31. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$ **32.** $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

33. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

34. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

35. $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ **36.** $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

37–49 ■ Use la división sintética y el teorema del residuo para evaluar $P(c)$.

37. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

38. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

39. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

40. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

41. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

42. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

43. $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

44. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

45. $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

46. $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

47. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

48. $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

49. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

50. Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ **a)** con la división sintética y **b)** sustituyendo $x = 7$ en el polinomio y evaluando de manera directa.

51–54 ■ Use el teorema del factor para mostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para valores dados de c.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

52. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

53. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

54. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

55–56 ■ Mostrar que los valores dados para c son ceros de $P(x)$, hallar los otros ceros de $P(x)$.

55. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

56. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

57–60 ■ Encuentre un polinomio de grado especificado que tenga los ceros dados.

57. Grado 3; ceros $-1, 1, 3$

58. Grado 4; ceros $-2, 0, 2, 4$

59. Grado 4; ceros $-1, 1, 3, 5$

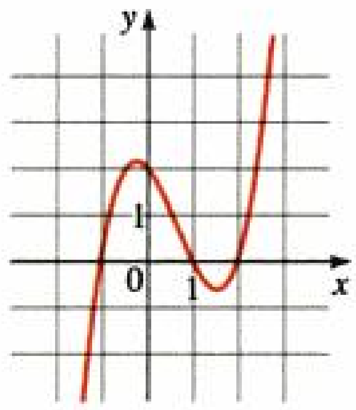
60. Grado 5; ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

61. Encuentre un polinomio de grado 3 que tenga ceros $1, -2$ y 3, y en el cual el coeficiente de x^2 sea 3.

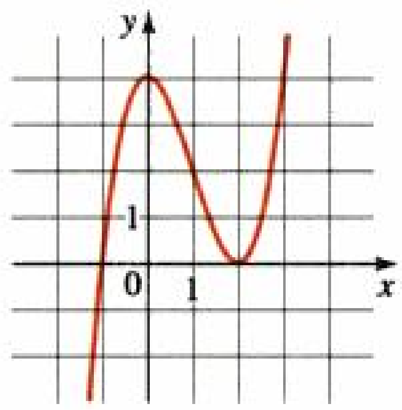
62. Encuentre un polinomio de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $1, -1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

63–66 ■ Encuentre un polinomio de grado especificado cuya gráfica se muestra.

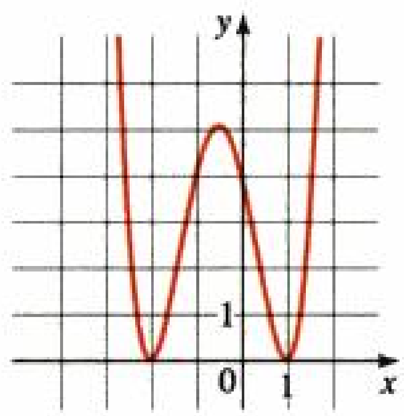
63. Grado 3



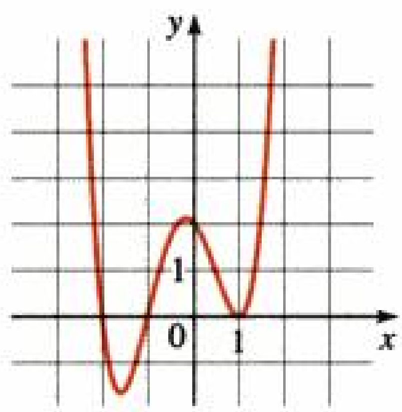
64. Grado 3



65. Grado 4



66. Grado 4



Descubrimiento • Debate

67. ¿División imposible? Suponga que se le pidió resolver los dos problemas siguientes en una prueba:

A. Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

B. ¿$x - 1$ es un factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas dividiendo, porque los polinomios son de grado grande. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* dividir en realidad.

68. Forma anidada de un polinomio Desarrolle Q para probar que los polinomios P y Q son los mismos.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Intente evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ en su cabeza, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba el polinomio $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como el polinomio Q. Use la forma anidada para determinar $R(3)$ en su cabeza.

¿Vea cómo calcular con la forma anidada sigue los mismos pasos aritméticos que calcular el valor de un polinomio con la división sintética?

3.3 Ceros reales de polinomios

El teorema del factor indica que hallar los ceros de un polinomio es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección se estudian algunos métodos algebraicos que ayudan a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por lo tanto, a factorizar el polinomio. Se comienza con los ceros *racionales* de un polinomio.

Ceros racionales de polinomios

Para entender este teorema, considérese el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)(x+4) && \text{Forma factorizada} \\ &= x^3 - x^2 - 14x + 24 && \text{Forma desarrollada} \end{aligned}$$

De la forma factorizada se puede observar que los ceros de P son 2, 3 y -4. Cuando se desarrolla el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros de un polinomio son factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

Teorema de ceros racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0
y q es un factor del coeficiente principal a_n.

■ **Demostración** Si p/q es un cero racional, en términos mínimos, del polinomio P, entonces se tiene

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0q^n \text{ y factorice el miembro izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, así que también debe ser un factor del lado derecho. Puesto que p/q está en términos mínimos, p y q no tienen factor común y, por lo tanto, p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n. ■

Se puede observar del teorema de ceros racionales que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

Evariste Galois (1811-1832) es uno de los pocos matemáticos que tiene una teoría nombrada en su honor. Aún no cumplía los 21 años cuando murió, pero estableció por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación polinomial se puede resolver mediante operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos del mundo en ese entonces, aunque sólo él lo sabía. En repetidas ocasiones envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes perdieron sus cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo conciso e incluía pocos detalles, lo cual probablemente influyó en su fracaso para pasar el examen de admisión a la Escuela Politécnica de París. Como político radical, Galois, pasó varios meses en prisión por sus actividades revolucionarias. Su breve vida tuvo un trágico fin cuando murió en un duelo por una cuestión amorosa. La noche antes del duelo, con el temor de morir, Galois escribió la esencia de sus ideas y las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "... habrá, espero, personas que sabrán aprovechar el descifrar todo este enredo". Esto lo hizo 14 años después el matemático Camille Jordan.

Ejemplo 1 Hallar ceros racionales (coeficiente principal 1)

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solución Puesto que el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Por consiguiente, los posibles ceros racionales son ± 1 y ± 2. Se prueba cada una de estas posibilidades.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4 \\ P(2) &= (2)^3 - 3(2) + 2 = 4 \\ P(-2) &= (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0 \end{aligned}$$

Los ceros racionales de P son 1 y -2. ■

Ejemplo 2 Uso del teorema de ceros racionales para factorizar un polinomio

Factorice el polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

Solución Por el teorema de ceros racionales, los ceros racionales de P son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factores del término constante}}{\text{factores del coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, por lo tanto

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factores de 6}}{\text{factores de 2}}$$

Los factores de 6 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 y los factores de 2 son ± 1, ± 2. Así, los posibles ceros racionales de P son

$$\pm\frac{1}{1},\quad \pm\frac{2}{1},\quad \pm\frac{3}{1},\quad \pm\frac{6}{1},\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{2}{2},\quad \pm\frac{3}{2},\quad \pm\frac{6}{2}$$

Si se simplifican las fracciones y se eliminan duplicados, se obtiene la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3,\quad \pm 6,\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuáles de estos *posibles* ceros *son* en realidad ceros, es necesario evaluar P en cada uno de estos números. Una forma eficaz de hacer esto es usar la división sintética

Prueba de si 1 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 2 & 3 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -10 & -4 \end{array}$$

El residuo *no es* 0, así que 1 *no es* un cero.

Prueba de si 2 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo *es* 0, por lo tanto 2 *es* un cero.

De la última división sintética se puede observar que 2 es un cero de P y que P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\ &= (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x - 2)(2x - 1)(x + 3) \qquad \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

■

En el cuadro siguiente se explica cómo usar el teorema de los ceros racionales con la división sintética para factorizar un polinomio.

Encontrar los ceros racionales de un polinomio

1. **Listar los posibles ceros.** Liste los posibles ceros racionales usando el teorema de ceros racionales.
2. **Dividir.** Use la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el paso 1. Cuando el residuo es 0, observe el cociente que obtuvo.
3. **Repetir.** Repita los pasos 1 y 2 para el cociente. Pare cuando llegue al cociente que es cuadrático o se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para hallar los demás ceros

Ejemplo 3 Uso del teorema de ceros racionales y la fórmula cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Bosqueje la gráfica de P.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & -5 & -23 & -10 \\ & & 1 & -4 & -9 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & -9 & 14 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 2 & -6 & -22 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -11 & 1 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 5 & 0 & -25 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

Solución

a) El coeficiente principal de P es 1, así que los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Por consiguiente, los candidatos posibles son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Con la división sintética (véase al margen) se encuentra que 1 y 2 no son ceros, pero que 5 es un cero y que P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x - 5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora se intenta factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus ceros posibles son los divisores de -2, a saber,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

Puesto que se sabe que 1 y 2 no son ceros del polinomio original P, no se requiere probarlos de nuevo. Al comprobar los demás candidatos -1 y -2, se ve que -2 es un cero (véase al margen), y que P se factoriza como

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x - 5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x - 5)(x + 2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

Ahora se usa la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son $5, -2, 1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.

b) Ahora que se conocen los ceros de P, se pueden usar los métodos de la sección 3.1 para trazar la gráfica. Si en cambio se quiere usar una calculadora para gráficas, conocer los ceros permite elegir un rectángulo de visión apropiado, uno que sea lo suficientemente ancho para contener las intersecciones con el eje x de P. Las aproximaciones numéricas a los ceros de P son

$$5, \quad -2, \quad 2.4 \quad \text{y} \quad -0.4$$

Por lo tanto, en este caso se elige el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y se traza la gráfica mostrada en la figura 1. ■

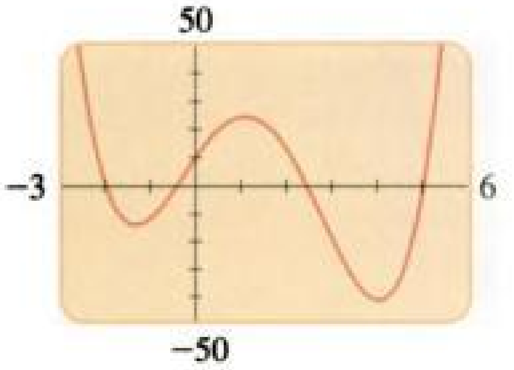


Figura 1
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

Regla de Descartes de los signos y límites superiores e inferiores para raíces

En algunos casos, la siguiente regla, descubierta por el filósofo francés y matemático René Descartes alrededor de 1637 (véase la página 112), es útil para eliminar los candidatos de listas largas de posibles raíces racionales. Para escribir esta regla, se necesita el concepto de *variación de signo*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de x (y omitiendo las potencias con coeficiente 0), entonces una **variación de signo** ocurre siempre que los coeficientes adyacentes tengan signos opuestos. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones de signo.

Polinomio	Variación de signo
$x^2 + 4x + 1$	0
$2x^3 + x - 6$	1
$x^4 - 3x^2 - x + 4$	2

Regla de los signos de Descartes

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o menor que eso por un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o es menor que eso por número entero par.

Ejemplo 4 Uso de la regla de Descartes

Use la regla de Descartes de los signos para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

Solución El polinomio tiene una variación de signo y, por lo tanto, tiene un cero positivo. Ahora bien

$$P(-x) = 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3$$
$$= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3$$

Así, $P(-x)$ tiene tres variaciones de signo. Por lo tanto, $P(x)$ tiene tres ceros o un cero negativo, lo que hace un total de dos o cuatro ceros reales. ■

Se dice que a es una **cota inferior** y b es una **cota superior** para los ceros de un polinomio si todo cero real c del polinomio satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema ayuda a encontrar tales cotas para los ceros de un polinomio.

Teorema de las cotas superior e inferior

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son elementos no negativos, entonces b es una cota superior para los ceros reales de P.
2. Si se divide $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene elementos que son alternativamente no positivos y no negativos entonces a es una cota inferior para los ceros reales de P.

En el ejercicio 91 se sugiere una demostración de este teorema. La frase "alternativamente no positivos y no negativos" significa que se alternan los signos de los números, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.

Ejemplo 5 Cotas superiores e inferiores para ceros de un polinomio

Demuestre que los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre -3 y 2.

Solución Se divide $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ por medio de la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Los elementos son positivos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & -3 & 9 & -18 & 48 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -16 & 43 \end{array}$$

Los elementos alternan en signo

Por el teorema de las cotas superiores e inferiores, -3 es una cota inferior y 2 es una cota superior para los ceros. Puesto que ni -3 ni 2 son un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división), los ceros reales se ubican entre estos números. ■

Ejemplo 6 Factorización de un polinomio de quinto grado

Factorice por completo el polinomio

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

Solución Los posibles ceros racionales de P son $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, \pm\frac{9}{2}$ y ± 9. Primero se comprueban los candidatos positivos, comenzando con el más pequeño.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 1 & 3 & -\frac{5}{2} & -\frac{33}{4} & -\frac{9}{8} \\ \hline & 2 & 6 & -5 & -\frac{33}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{63}{8} \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ no es un cero

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 & 0 \end{array}$$

$P(1) = 0$

Así que 1 es un cero y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Se continúa factorizando el cociente. Aún se tiene la misma lista de ceros posibles excepto que $\frac{1}{2}$ ha sido eliminado.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 2 & 9 & 8 & -7 \\ \hline & 2 & 9 & 8 & -7 & -16 \end{array}$$

1 no es un cero.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 3 & 15 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 10 & 14 & 6 & 0 \end{array}$$

$P(\frac{3}{2}) = 0$, todos los elementos son no negativos

Se puede observar que $\frac{3}{2}$ es un cero y una cota superior para los ceros de $P(x)$, así que no se necesita comprobar nada más para ceros positivos, porque los candidatos restantes son mayores que $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^3 + 10x^2 + 14x + 6) \\ &= (x - 1)(2x - 3)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

Factorice 2 del último factor, multiplique en el segundo factor

Por la regla de los signos de Descartes, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene ceros positivos, por lo tanto sus únicos ceros racionales posibles son -1 y -3.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$P(-1) = 0$

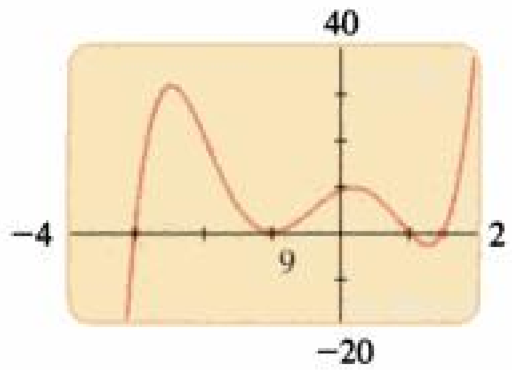


Figura 2
$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3)$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3) \end{aligned}$$

Factor cuadrático

Esto significa que los ceros de P son 1, $\frac{3}{2}$, -1 y -3. La gráfica del polinomio se muestra en la figura 2. ■

Uso de álgebra y dispositivos de graficación para resolver ecuaciones polinomiales

En la sección 1.9 se emplearon dispositivos de graficación para resolver ecuaciones en modo gráfico. Ahora se pueden usar las técnicas algebraicas aprendidas para seleccionar un rectángulo de visión apropiado al resolver de modo gráfico una ecuación polinomial.

Ejemplo 7 Resolver de modo gráfico una ecuación de cuarto grado

Encuentre las soluciones reales de la siguiente ecuación, correctas hasta el décimo más próximo.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución Para resolver la ecuación de manera gráfica, se traza

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Se emplea el teorema de las cotas superior e inferior para ver dónde se pueden hallar las raíces.

Primero se usa el teorema de las cotas superior e inferior para hallar dos números entre los cuales deben estar las soluciones. Esto permite elegir un rectángulo de visión que con seguridad contiene todas las intersecciones con el eje x de P. Se usa la división sintética y se procede por prueba y error.

Para hallar una cota superior, se prueban los números enteros 1, 2, 3,. . . como posibles candidatos. Se ve que 2 es una cota superior para las raíces.

2	3	4	−7	−2	−3
		6	20	26	48
	3	10	13	24	45

Todos positivos

Ahora se busca una cota inferior, y se prueban los números -1, -2 y -3 como posibles candidatos. Se ve que -3 es una cota inferior para las raíces.

−3	3	4	−7	−2	−3
		−9	15	−24	78
	3	−5	8	−26	75

Los elementos alternan signo.

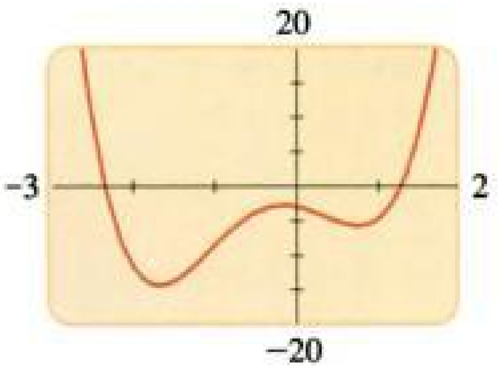


Figura 3
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Así, las raíces están entre -3 y 2. Por lo tanto, el rectángulo de visión $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene las intersecciones con el eje x de P. La gráfica de la figura 3 tiene intersecciones con x, uno entre -3 y -2 y el otro entre 1 y 2. Al hacer un acercamiento se encuentra que las soluciones de la ecuación, hasta el décimo más próximo, son -2.3 y 1.3. ■

Ejemplo 8 Determinar el tamaño de un recipiente de combustible

Un depósito de combustible consta de una sección central cilíndrica de 4 pies de largo y dos secciones extremas semiesféricas, como se ilustra en la figura 4. Si el recipiente tiene un volumen de 100 pies^3, ¿cuál es el radio r, mostrado en la figura, correcto hasta el centésimo más próximo de un pie?

Figura 4

Solución Si se emplea la fórmula del volumen listada en la segunda de forros de este libro, se ve que el volumen de la sección cilíndrica del depósito es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Debido a que el volumen total del depósito es 100 pies^3, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución se puede comprobar que $r = 3$ origina un depósito con más de 226 pies^3 de volumen, mucho más grande que los 100 pies^3 requeridos. Así, se sabe que el radio correcto se encuentra en alguna parte entre 0 y 3 pies y, por lo tanto, se usa un rec-

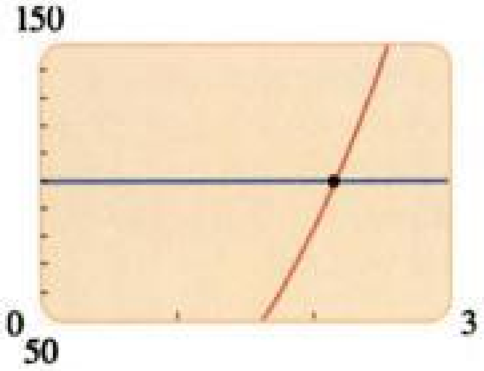


Figura 5
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

tángulo de visión de [0, 3] por [50, 150] para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se muestra en la figura 5. Puesto que se desea que el valor de esta función sea 100, se grafica también la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de visión. El radio correcto será la coordenada x del punto de intersección de la curva y la recta. Con el cursor y el acercamiento, se ve que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, correcto hasta dos decimales. Así, el depósito tiene un radio de casi 2.5 pies. ■

Hay que observar que se podría haber resuelto la ecuación del ejemplo 8 escribiéndola primero como

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y después hallar la intersección con x de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

3.3 Ejercicios

1–6 ■ Liste los posibles ceros racionales dados por el teorema de ceros racionales (no compruebe cuáles en realidad son ceros).

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

2. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$

3. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$

4. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$

5. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$

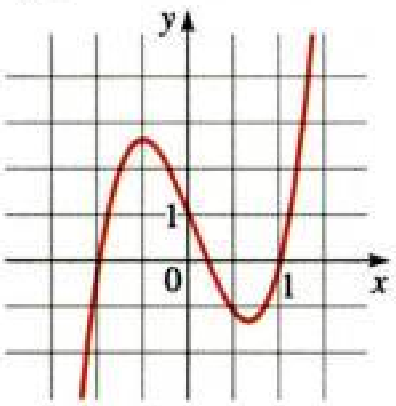
6. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

7–10 ■ Se dan una función polinomial y su gráfica.

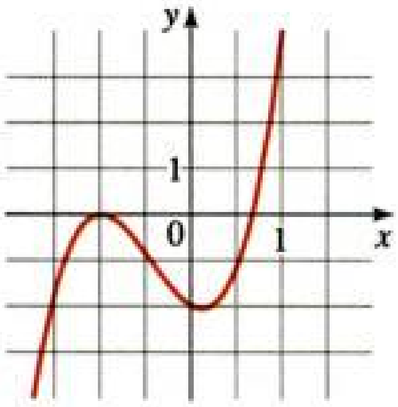
a) Liste los posibles ceros racionales de P dados por el teorema de los ceros racionales.

b) De la gráfica, determine cuáles de los posibles ceros racionales resultan ser en realidad ceros.

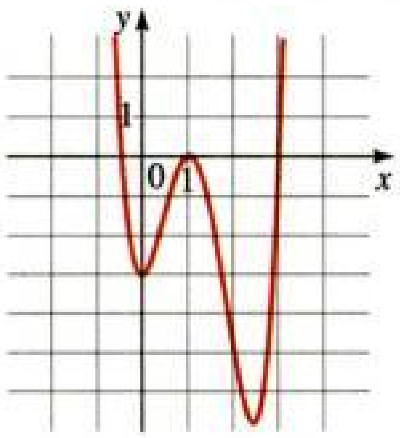
7. $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$



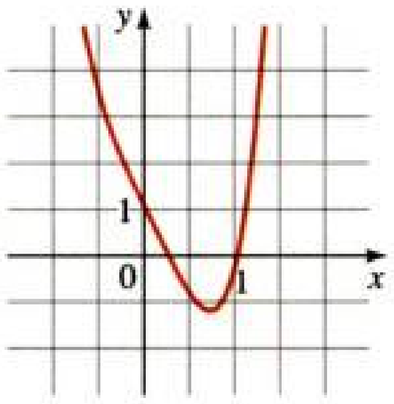
8. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$



9. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$



10. $P(x) = 4x^4 - x^3 - 4x + 1$



11–40 ■ Encuentre los ceros racionales del polinomio.

11. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

12. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

13. $P(x) = x^3 - 3x - 2$

14. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

15. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

16. $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

17. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

18. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

19. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$

20. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
21. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
22. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$
23. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$
24. $P(x) = x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90$
25. $P(x) = 4x^4 - 25x^2 + 36$
26. $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$
27. $P(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
28. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$
29. $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$
30. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$
31. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$
32. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - x - 3$
33. $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x - 15$
34. $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$
35. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$
36. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$
37. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 31x^2 + 36$
38. $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24$
39. $P(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$
40. $P(x) = 2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

41–50 ■ Encuentre los ceros reales del polinomio. Use la fórmula cuadrática si es necesario, como en el ejemplo 3(a).

41. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$
42. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$
43. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$
44. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$
45. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$
46. $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 2x - 4$
47. $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$
48. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8x - 2$
49. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x - 1$
50. $P(x) = 4x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 91x^2 - 60x + 9$

51–58 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros reales de P.
b) Bosqueje la gráfica de P.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
52. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$
53. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$
54. $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$
55. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
56. $P(x) = -x^4 + 10x^2 + 8x - 8$
57. $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$
58. $P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$

59–64 ■ Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener el polinomio.

59. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 3$
60. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$
61. $P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$
62. $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$
63. $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$
64. $P(x) = x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

65–68 ■ Muestre que los valores dados para a y b son las cotas interior y superior para los ceros reales del polinomio.

65. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$; $a = -3, b = 1$
66. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$; $a = -3, b = 5$
67. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9$; $a = -3, b = 2$
68. $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1$; $a = 0, b = 6$

69–72 ■ Encuentre los enteros que son las cotas superior e inferior para los ceros reales del polinomio.

69. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
70. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$
71. $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$
72. $P(x) = x^5 - x^4 + 1$

73–78 ■ Encuentre los ceros racionales del polinomio y después los ceros irracionales, si existen. Siempre que sea apropiado, use el teorema de los ceros racionales, el teorema de las cotas superior e inferior, la regla de los signos de Descartes, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización.

73. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
74. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4$
75. $P(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$
76. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x$
77. $P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$
78. $P(x) = 8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6$

79–82 ■ Muestre que el polinomio no tiene ningún cero racional.

79. $P(x) = x^3 - x - 2$

80. $P(x) = 2x^4 - x^3 + x + 2$

81. $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 12$

82. $P(x) = x^{50} - 5x^{25} + x^2 - 1$

83–86 ■ Las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Liste las posibles raíces racionales por medio del teorema de ceros racionales y luego grafique el polinomio en el rectángulo de visión dado para determinar qué valores son en realidad soluciones. (Todas las soluciones se pueden ver en el rectángulo de visión dado.)

83. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

84. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-30, 30]$

85. $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$; $[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

86. $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

87–90 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones reales de la ecuación, correctas hasta dos decimales.

87. $x^4 - x - 4 = 0$

88. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

89. $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

90. $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

91. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales y sea $b > 0$. Use el algoritmo de división para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geq 0$ y que los coeficientes en $Q(x)$ son no negativos. Sea $z > b$.

a) Demuestre que $P(z) > 0$.

b) Demuestre la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior.

c) Use la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior para demostrar la segunda parte. [*Sugerencia:* demuestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

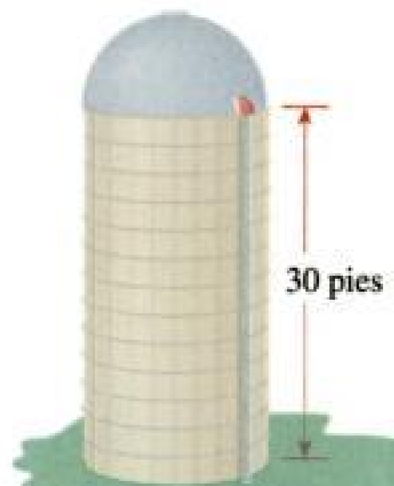
92. Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

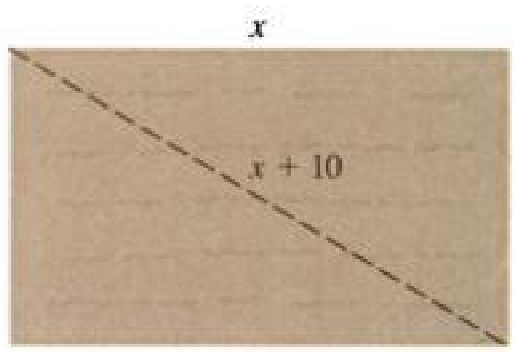
tiene exactamente una raíz racional; luego, demuestre que debe tener dos o cuatro raíces irracionales.

Aplicaciones

93. Volumen de un silo Un silo de granos consta de una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (inclusive la parte interior de la sección del techo) es 15 000 pies^3 y la parte cilíndrica tiene 30 pies de alto, ¿cuál es el radio del silo, correcto hasta la décima de pie más próxima?



94. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 5000 pies^2. Una diagonal entre esquinas opuestas mide 10 pies más que un lado de la parcela. ¿Cuáles son las dimensiones de la tierra, correctas hasta el pie más próximo?



95. Profundidad de la nieve A mediodía del domingo comenzó a caer nieve. La cantidad de nieve en el suelo en cierto lugar en el instante t se determina mediante la función

$$h(t) = 11.60t - 12.41t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

donde t se mide en días desde el momento en que comienza a caer nieve y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y empléela para contestar las siguientes preguntas

a) ¿Qué sucedió poco después del mediodía del martes?

b) ¿Había más de 5 pulgadas de nieve en el suelo? En caso afirmativo, ¿en qué día o días?

c) ¿En qué día y a qué hora (hasta la hora más próxima) la nieve desapareció por completo?

96. Volumen de una caja Una caja abierta con un volumen de 1500 cm^3 se construirá con una pieza de cartón de 20 por 40 cm, cortando cuadros de longitud lateral x cm en cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Muestre que esto