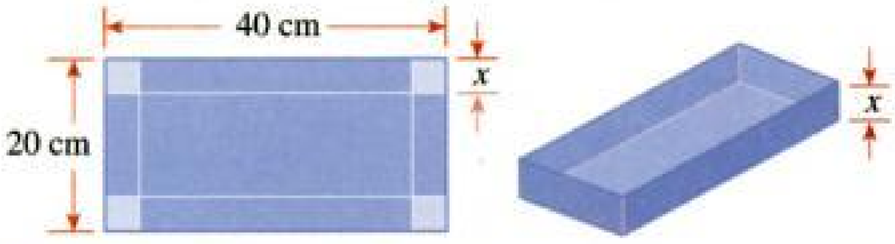
se puede hacer en dos formas distintas y encuentre las dimensiones exactas de la caja en cada caso.



97. Volumen de un cohete Un cohete consta de un cilindro circular recto de 20 m de alto rematado con un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser el radio (correcto hasta dos decimales) si el volumen total debe ser $500\pi/3$ m^3?

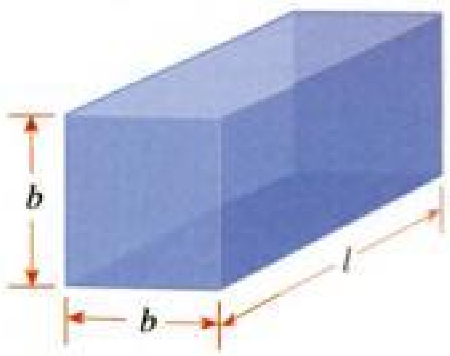
98. Volumen de una caja Una caja rectangular con un volumen de $2\sqrt{2}$ pies^3 tiene una base cuadrada como se muestra a continuación. La diagonal de la caja (entre un par de esquinas opuestas) es 1 pie más grande que cada lado de la base.

a) Si la base tiene lados de x pies de largo, muestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

b) Muestre que dos cajas diferentes satisfacen las condiciones dadas. Encuentre las dimensiones en cada caso, correctas hasta el centésimo más próximo de un pie.

99. Contorno de una caja Una caja con una base cuadrada tiene una longitud más perímetro de 108 pulg. (El contorno o perímetro es la distancia "alrededor" de la caja.) ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es 2200 pulg^3?



Descubrimiento • Debate

100. ¿Cuántos ceros reales puede tener un polinomio? Dé ejemplos de polinomios que tengan las siguientes propiedades, o explique por qué es imposible hallar tal polinomio.

a) Un polinomio de grado 3 que no tiene ceros reales.

b) Un polinomio de grado 4 que no tiene ceros reales.

c) Un polinomio de grado 3 que tiene tres ceros reales, sólo uno de los cuales es racional.

d) Un polinomio de grado 4 que tiene cuatro ceros reales, ninguno de los cuales es racional.

¿Qué debe ser cierto acerca del grado de un polinomio con coeficientes enteros si no tiene ceros reales?

101. Ecuación cúbica degradada La ecuación cúbica (tercer grado) más general con coeficientes racionales se puede escribir como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

a) Muestre que si se reemplaza x por $X - a/3$ y se simplifica, se tiene una ecuación sin término X^2, es decir, una ecuación de la forma

$$X^3 + pX + q = 0$$

Ésta se llama *ecuación cúbica degradada*, porque se ha "suprimido" el término cuadrático.

b) Use el procedimiento descrito en el inciso a) para degradar la ecuación $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

102. La fórmula cúbica La fórmula cuadrática se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática (o de segundo grado). Quizá se ha preguntado si existen fórmulas similares para las ecuaciones cúbicas (tercer grado), de cuarto grado o superiores. Para la ecuación cúbica degradada $x^3 + px + q = 0$, Cardano (página 296) encontró la fórmula siguiente para una solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En 1540 el matemático italiano Ferrari descubrió una fórmula para las ecuaciones de cuarto grado. En 1824, el matemático noruego Niels Henrik Abel demostró que es imposible escribir una fórmula para las ecuaciones de quinto grado. Por último, Galois (página 273) dio un criterio para determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver mediante una fórmula en la que intervienen radicales.

Use la fórmula cúbica para hallar una solución para las ecuaciones siguientes. Luego, resuelva las ecuaciones con los métodos que aprendió en esta sección. ¿Cuál método es más fácil?

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

b) $x^3 - 27x - 54 = 0$

c) $x^3 + 3x + 4 = 0$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Centrarse en un cero

Se ha visto cómo hallar los ceros de un polinomio de manera algebraica o gráfica. Se utiliza un **método numérico** para hallar los ceros. Con este método se puede hallar el valor de cualquier cero real hasta los decimales que se desee.

El teorema del valor intermedio establece: si P es un polinomio y si $P(a)$ y $P(b)$ son de signo opuesto, entonces P tiene un cero entre a y b. (véase la página 255). El teorema del valor intermedio es un ejemplo de un **teorema de existencia**: indica que existe un cero, no indica exactamente dónde está. Sin embargo, se puede usar el teorema para centrarse en el cero.

Por ejemplo, considere el polinomio $P(x) = x^3 + 8x - 30$. Observe que $P(2) < 0$ y $P(3) > 0$. Por el teorema del valor intermedio P debe tener un cero entre 2 y 3. Para "atrapar" el cero en un intervalo más pequeño, se evalúa P en décimos sucesivos entre 2 y 3 hasta que se encuentra el lugar donde P cambia de signo, como en la tabla 1. En la tabla se ve que el cero que se está buscando se ubica entre 2.2 y 2.3, como se muestra en la figura 1.

Tabla 1

x	$P(x)$	
2.1	−3.94	
2.2	−1.75	cambio de signo
2.3	0.57	

Tabla 2

x	$P(x)$	
2.26	−0.38	
2.27	−0.14	cambio de signo
2.28	0.09	

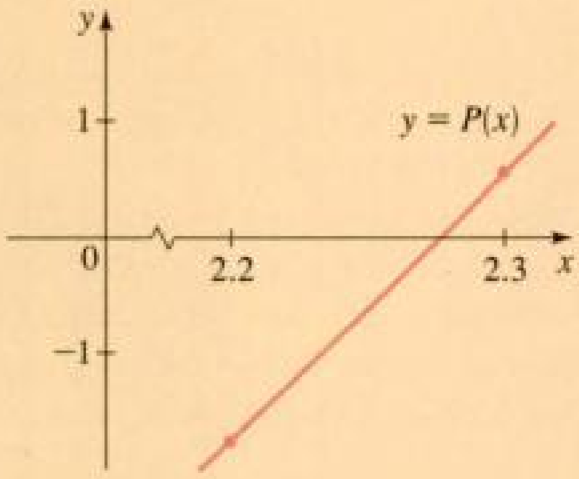


Figura 1

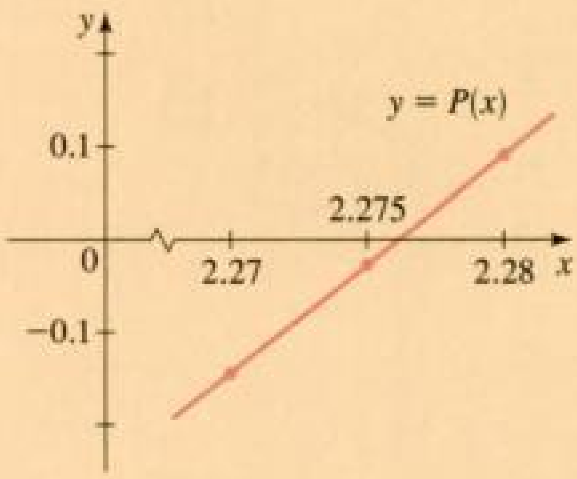


Figura 2

Se puede repetir este proceso evaluando P en centésimos sucesivos entre 2.2 y 2.3, como en la tabla 2. Si este proceso se repite una y otra vez, se puede obtener un valor numérico para el cero de forma tan exacta como se quiera. De la tabla 2 se ve que el cero está entre 2.27 y 2.28. Para ver si está más cerca de 2.27 o 2.28, se comprueba el valor de P a la mitad entre estos dos números: $P(2.275) \approx -0.03$. Puesto que este valor es negativo, el cero que se está buscando se ubica entre 2.275 y 2.28, como se ilustra en la figura 2. Correcto hasta el centésimo más próximo, el cero es 2.28.

1. a) Muestre que $P(x) = x^2 - 2$ tiene un cero entre 1 y 2.

b) Encuentre el cero de P hasta el décimo más próximo.

c) Encuentre el cero de P hasta el centésimo más próximo.

d) Explique por qué el cero que encontró es una aproximación a $\sqrt{2}$. Repita el proceso varias veces para obtener $\sqrt{2}$ correcto hasta tres decimales. Compare sus resultados para $\sqrt{2}$ obtenidos con una calculadora.

2. Encuentre un polinomio que tiene $\sqrt[3]{5}$ como un cero. Use el proceso descrito aquí para centrarse en $\sqrt[3]{5}$ hasta cuatro decimales.

3. Muestre que el polinomio tiene un cero entre los enteros dados, y luego céntrese en ese cero, correcto hasta dos decimales.

a) $P(x) = x^3 + x - 7$; entre 1 y 2

b) $P(x) = x^3 - x^2 - 5$; entre 2 y 3

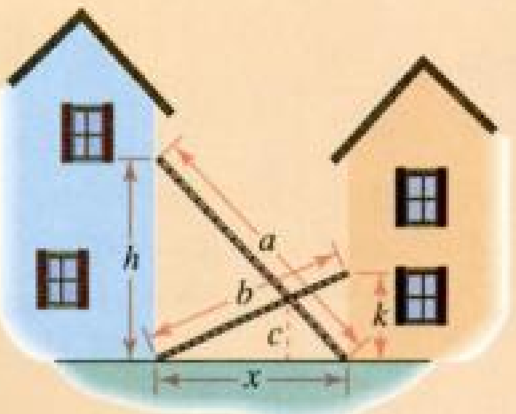
c) $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre 1 y 2

d) $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre -1 y 0

4. Encuentre el cero irracional indicado, correcto hasta dos decimales.

a) El cero positivo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

b) El cero negativo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$



5. En un pasillo entre dos edificios, dos escaleras se apoyan de la base de cada edificio hasta la pared del otro de modo que se cruzan, como se ilustra en la figura. Si las escaleras tienen longitudes $a = 3$ m y $b = 2$ m y el punto de cruce está a una altura $c = 1$ m, entonces se puede mostrar que la distancia x entre los edificios es una solución de la ecuación

$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$$

a) Esta ecuación tiene dos soluciones positivas, que se encuentran entre 1 y 2. Use la técnica de "centrarse en" para hallar ambas correctas hasta el décimo más próximo.

b) Dibuje dos diagramas a escala, como en la figura, uno para cada uno de los dos valores de x que encontró en el inciso a). Mida la altura del punto de cruce en cada uno. ¿Qué valor de x al parecer es el correcto?

c) A continuación se describe cómo obtener la ecuación anterior. Primero, use triángulos similares para mostrar que

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$$

Luego, use el teorema de Pitágoras para rescribir esto como

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

Sustituya $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$, luego simplifique para obtener la ecuación deseada. [Observe que hay que elevar al cuadrado dos veces en este proceso para eliminar ambas raíces cuadradas. Éste es el porqué se obtiene una solución extraña en el inciso a). (Véase la *Advertencia* en la página 53.)]

3.4 Números complejos

En la sección 1.5 se vio que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene solución real. Si se intenta resolver esta ecuación, se obtiene $x^2 = -4$, por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Así, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Para hacer posible que *todas* las ecuaciones cuadráticas tengan solución, los matemáticos inventaron un sistema de números desarrollado, llamado *sistema de números complejos.* Primero, definieron el número

Véase la nota sobre Cardano, página 296, para un ejemplo de cómo se emplean los números complejos para hallar soluciones reales de ecuaciones polinomiales.

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es entonces un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

Definición de números complejos

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Hay que observar que las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales.

Ejemplo 1 Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0

■

Un número como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro**. Un número real como -7 se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4 \qquad \text{y} \qquad (-2i)^2 = (-2)^2i^2 = 4(-1) = -4$$

Aunque se usa el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben ser considerados como algo menos "real" (en el sentido ordinario más que matemático de la palabra) que los números negativos o irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana, los números -1 y $\sqrt{2}$ así como el número i. Se estudian los números complejos porque completan, de un modo útil y elegante, el estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino en otras ciencias también. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

Operaciones matemáticas sobre números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen del mismo modo como se haría con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que se requiere tener en mente es $i^2 = -1$. Así, los cálculos siguientes son válidos.

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 \qquad \text{Multiplique y reúna los términos semejantes}$$

$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \qquad i^2 = -1$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{Combine las partes reales y las imaginarias}$$

Por lo tanto, se define la suma, diferencia y el producto de números complejos como sigue.

Sumar, restar y multiplicar números complejos

Definición	Descripción
Suma	
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos, sume las partes reales y las partes imaginarias.
Resta	
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos, reste las partes reales y las partes imaginarias.
Multiplicación	
$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Multiplique los números complejos como binomios, con $i^2 = -1$.

Las calculadoras para gráficas pueden efectuar operaciones aritméticas en números complejos.

```
(3+5i)+(4-2i)
              7+3i
(3+5i)*(4-2i)
            22+14i
```

Ejemplo 2 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ b) $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$ d) i^{23}

Solución

a) De acuerdo con la definición, se suman las partes reales y las partes imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

b) $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

c) $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

d) $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$ ■

Complejos Conjugados

Número	Conjugado
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

La división de números complejos es muy parecida a racionalizar el denominador de una expresión radical, que se consideró en la sección 1.2. Para el número complejo $z = a + bi$ se define su **complejo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Observe que

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Por consiguiente, el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Se usa esta propiedad para dividir números complejos.

División de números complejos

Para simplificar el cociente $\dfrac{a + bi}{c + di}$, se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

En vez de memorizar toda la fórmula, es más fácil recordar el primer paso y luego multiplicar el numerador y el denominador de la manera usual.

Ejemplo 3 Dividir números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

a) $\dfrac{3 + 5i}{1 - 2i}$ b) $\dfrac{7 + 3i}{4i}$

Solución Se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado complejo del denominador para hacer al nuevo denominador un número real.

a) El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$.

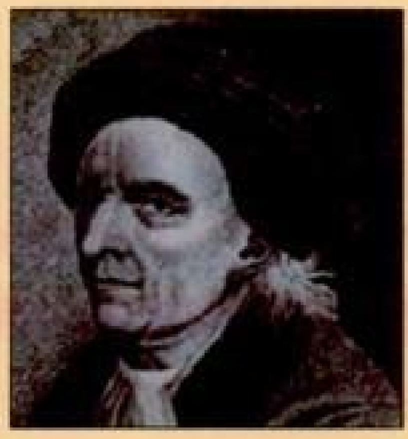
$$\frac{3 + 5i}{1 - 2i} = \left(\frac{3 + 5i}{1 - 2i}\right)\left(\frac{1 + 2i}{1 + 2i}\right) = \frac{-7 + 11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

b) El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto

$$\frac{7 + 3i}{4i} = \left(\frac{7 + 3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12 - 28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$ ■

Raíces cuadradas de números negativos

Así como todo número real positivo r tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo tiene dos raíces cuadradas también. Si $-r$ es un número negativo, entonces sus raíces cuadradas son $\pm i\sqrt{r}$, porque $(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r$ y $(-i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r$.



Leonhard Euler (1707-1783), hijo de un pastor, nació en Basel, Suiza. A la edad de 13 años su padre lo envió a la universidad en Basel para estudiar teología, pero Euler pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología estudió matemáticas, medicina, astronomía, física e idiomas asiáticos. Se dice que Euler podía calcular con el mismo esfuerzo que el "hombre respira o las águilas vuelan". Cien años antes que Euler, Fermat (véase la página 652) había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda n. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65537 y 4 294 967 297. Es fácil mostrar que los primeros cuatro son primos. Se consideraba que el cuarto también era primo hasta que Euler, con su capacidad fenomenal para realizar cálculos, mostró que es el producto de $641 \times 6\,700\,417$ y, por lo tanto, no es un número primo. Euler publicó más que cualquier otro matemático en la historia. Sus trabajos reunidos comprenden 75 volúmenes grandes. Aunque los últimos 17 años de su vida careció de la vista, continuó con su trabajo y publicaciones. En sus escritos popularizó el uso de los símbolos π, e y también i, que el lector encontrará en este texto. Una de las contribuciones más duraderas de Euler es su desarrollo de los números complejos.

Raíces cuadradas de número negativos

Si $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$.

Por lo común se escribe $i\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$.

Ejemplo 4 Raíces cuadradas de números negativos

a) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$

b) $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$

c) $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ ■

Se debe poner atención especial al efectuar los cálculos relacionados con raíces cuadradas de números negativos. Si bien $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando a y b son positivos, esto *no* se cumple cuando ambos son negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero $$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

por lo tanto $$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} \cancel{=} \sqrt{(-2)(-3)}$$

Al multiplicar radicales de números negativos, expréselos en la forma $i\sqrt{r}$ (donde $r > 0$) para evitar posibles errores de este tipo.

Ejemplo 5 Uso de raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y exprese en la forma $a + bi$.

Solución

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4})\\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i)\\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$ ■

Raíces complejas de ecuaciones cuadráticas

Ya se ha visto que, si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Pero en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones, porque los números negativos tienen raíces cuadradas en este entorno expandido.

Ejemplo 6 Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Resuelva cada ecuación.

a) $x^2 + 9 = 0$ b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Solución

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, por consiguiente

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por lo tanto $3i$ y $-3i$.

b) Por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i$$

Así, las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$. ■

Las dos soluciones de *cualquier* ecuación cuadrática que tiene coeficientes reales son complejos conjugados entre sí. Para entender por qué esto es cierto, considere el signo $\pm$ en la fórmula cuadrática.

Ejemplo 7 Complejos conjugados como soluciones de ecuaciones cuadráticas

Demuestra que las soluciones de la ecuación

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son complejos conjugados el uno del otro.

Solución Se usa la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Así, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y éstos son complejos conjugados. ■

3.4 Ejercicios

1–10 ■ Encuentre las partes real e imaginaria del número complejo.

1. $5 - 7i$

2. $-6 + 4i$

3. $\frac{-2 - 5i}{3}$

4. $\frac{4 + 7i}{2}$

5. 3

6. $-\frac{1}{2}$

7. $-\frac{2}{3}i$

8. $i\sqrt{3}$

9. $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$

10. $2 - \sqrt{-5}$

11–22 ■ Llevar a cabo la suma o resta y escribir el resultado en la forma $a + bi$.

11. $(2 - 5i) + (3 + 4i)$

12. $(2 + 5i) + (4 - 6i)$

13. $(-6 + 6i) + (9 - i)$

14. $(3 - 2i) + \left(-5 - \frac{1}{3}i\right)$

15. $3i + (6 - 4i)$

16. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i)$

17. $(7 - \frac{1}{2}i) - (5 + \frac{3}{2}i)$

18. $(-4 + i) - (2 - 5i)$

19. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$

20. $6i - (4 - i)$

21. $\frac{1}{3}i - (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}i)$

22. $(0.1 - 1.1i) - (1.2 - 3.6i)$

23–56 ■ Evaluar la expresión y escribir el resultado en la forma $a + bi$.

23. $4(-1 + 2i)$

24. $2i(\frac{1}{2} - i)$

25. $(7 - i)(4 + 2i)$

26. $(5 - 3i)(1 + i)$

27. $(3 - 4i)(5 - 12i)$

28. $(\frac{2}{3} + 12i)(\frac{1}{6} + 24i)$

29. $(6 + 5i)(2 - 3i)$

30. $(-2 + i)(3 - 7i)$

31. $\dfrac{1}{i}$

32. $\dfrac{1}{1 + i}$

33. $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$

34. $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

35. $\dfrac{26 + 39i}{2 - 3i}$

36. $\dfrac{25}{4 - 3i}$

37. $\dfrac{10i}{1 - 2i}$

38. $(2 - 3i)^{-1}$

39. $\dfrac{4 + 6i}{3i}$

40. $\dfrac{-3 + 5i}{15i}$

41. $\dfrac{1}{1 + i} - \dfrac{1}{1 - i}$

42. $\dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$

43. i^3

44. $(2i)^4$

45. i^{100}

46. i^{1002}

47. $\sqrt{-25}$

48. $\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$

49. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

50. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

51. $(3 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-1})$

52. $\dfrac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$

53. $\dfrac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$

54. $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

55. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

56. $\dfrac{\sqrt{-7}\sqrt{-49}}{\sqrt{28}}$

57–70 ■ Hallar las soluciones de la ecuación y expresarlas en la forma $a + bi$.

57. $x^2 + 9 = 0$

58. $9x^2 + 4 = 0$

59. $x^2 - 4x + 5 = 0$

60. $x^2 + 2x + 2 = 0$

61. $x^2 + x + 1 = 0$

62. $x^2 - 3x + 3 = 0$

63. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

64. $2x^2 + 3 = 2x$

65. $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$

66. $z + 4 + \dfrac{12}{z} = 0$

67. $6x^2 + 12x + 7 = 0$

68. $4x^2 - 16x + 19 = 0$

69. $\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 0$

70. $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

71–78 ■ Recuerde que el símbolo $\overline{z}$ representa el complejo conjugado de z. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, demuestra cada expresión.

71. $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$

72. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

73. $(\overline{z})^2 = \overline{z^2}$

74. $\overline{\overline{z}} = z$

75. $z + \overline{z}$ es un número real

76. $z - \overline{z}$ es un número imaginario puro

77. $z \cdot \overline{z}$ es un número real

78. $z = \overline{z}$ si y sólo si z es real

Descubrimiento • Debate

79. **Raíces complejas conjugadas** Suponga que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué las raíces deben ser complejos conjugados entre sí? (Piense cómo encontraría las raíces con la fórmula cuadrática.)

80. **Potencias de i** Calcule las primeras 12 potencias de i, es decir, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Observa un patrón? Explique cómo calcularía cualquier potencia de número entero de i, con el patrón que descubrió. Use este procedimiento para calcular i^{4446}.

81. **Radicales complejos** El número 8 tiene una raíz cúbica real, $\sqrt[3]{8} = 2$. Calcule $(-1 + i\sqrt{3})^3$ y $(-1 - i\sqrt{3})^3$ para comprobar que 8 tiene por lo menos otras dos raíces cúbicas complejas. ¿Puede hallar cuatro raíces cuartas de 16?

3.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra

Ya se ha visto que el polinomio de n-ésimo grado puede tener a lo sumo n ceros reales. En el sistema de números complejos un polinomio de n-ésimo grado tiene exactamente n ceros y, por lo tanto, se puede factorizar en exactamente n factores lineales. Este hecho es una consecuencia del teorema fundamental del álgebra, el cual fue probado por el matemático alemán C. F. Gauss en 1799 (véase la página 294).

Teorema fundamental del álgebra y factorización completa

El siguiente teorema es la base para gran parte del trabajo de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Debido a que cualquier número real es también un número complejo, el teorema se aplica también a polinomios con coeficientes reales.

El teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor muestran que un polinomio puede ser factorizado por completo en factores lineales, como se demuestra ahora.

Teorema de factorización completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tales que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

■ **Demostración** Por el teorema fundamental del álgebra, P tiene por lo menos un cero. Sea éste c_1. Por el teorema del factor, $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. Al aplicar el teorema fundamental al cociente $Q_1(x)$ se obtiene la factorización

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y c_2 es un cero de $Q_1(x)$. Si se continúa con este proceso para n pasos, se obtiene un cociente final $Q_n(x)$ de grado 0, una constante no cero que se llamará a. Esto significa que P ha sido factorizado como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n) \qquad ■$$

Para hallar en realidad los ceros complejos de un polinomio de n-ésimo grado, por lo general se factoriza primero tanto como sea posible, luego se usa la fórmula cuadrática en las partes que no se pueden factorizar más.

Ejemplo 1 Factorización completa de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Halle la factorización completa de P.

Solución

a) Se factoriza primero P como sigue.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 && \text{Dado} \\ &= x^2(x - 3) + (x - 3) && \text{Términos agrupados} \\ &= (x - 3)(x^2 + 1) && \text{Factor } x - 3 \end{aligned}$$

Se encuentran los ceros de P al igualar a cero cada factor 0:

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

Este factor es 0 cuando $x = 3$. Este factor es 0 cuando $x = i$ o $-i$.

Al hacer que $x - 3 = 0$, se ve que $x = 3$ es un cero. Con $x^2 + 1 = 0$, se obtiene $x^2 = -1$, por lo tanto $x = \pm i$. Así que los ceros de P son 3, i y $-i$.

b) Puesto que los ceros son 3, i y $-i$, por el teorema de factorización completa P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 3)(x - i)[x - (-i)] \\ &= (x - 3)(x - i)(x + i) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Factorización completa de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 2x + 4$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Halle la factorización completa de P.

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -0 & -2 & -4 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

a) Los posibles ceros racionales son los factores de 4, que son ± 1, ± 2, ± 4. Por medio de la división sintética (véase el margen) se encuentra que -2 es un cero, y el polinomio se factoriza como

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Este factor es 0 cuando $x = -2$.

Use la fórmula cuadrática para determinar cuándo este factor es 0

Para hallar los ceros, se iguala a cero cada factor. Por supuesto, $x + 2 = 0$ significa $x = -2$. Se usa la fórmula cuadrática para determinar cuándo el otro factor es cero.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad \text{Iguale a cero el factor}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 1 \pm i \qquad \text{Simplifique}$$

Por consiguiente, los ceros de P son -2, $1 + i$ y $1 - i$.

b) Puesto que los ceros son -2, $1 + i$ y $1 - i$, por el teorema de factorización completa P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (-2)][x - (1 + i)][x - (1 - i)] \\ &= (x + 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i) \end{aligned}$$

■

Ceros y sus multiplicidades

En el teorema de factorización completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de P. Estos ceros no necesariamente son todos diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces se dice que c es un cero de **multiplicidad** k (véase la página 259). Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

tiene los ceros siguientes:

1 (multiplicidad 3), -2 (multiplicidad 2), -3 (multiplicidad 5)

El polinomio P tiene el mismo número de ceros que su grado, tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre y cuando se cuenten sus multiplicidades. Esto es cierto para todos los polinomios, según se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema de ceros

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se cuente k veces.

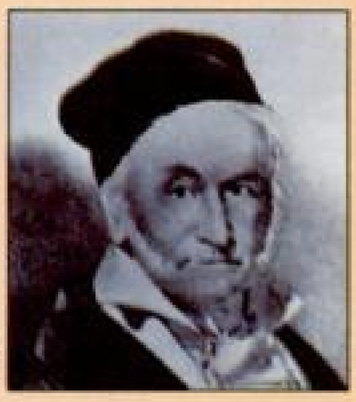
■ **Demostración** Sea P un polinomio de grado n. Por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Ahora suponga que c es un cero de P distinto de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Entonces

$$P(c) = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n) = 0$$

Así, por la propiedad del producto cero, uno de los factores $c - c_i$ debe ser 0, por lo tanto $c = c_i$ para alguna i. Se deduce que P tiene exactamente los n ceros $c_1, c_2, \ldots, c_n$. ■



Corbis

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) es considerado el matemático más grande de los tiempos modernos. Sus contemporáneos lo llamaron el "Príncipe de las matemáticas". Nació en una familia pobre; su padre se ganó la vida como albañil. Cuando era muy pequeño, Gauss encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre, el primero de muchos incidentes que dieron evidencia de su precocidad matemática. (Véase la página 834.) A los 19 años Gauss demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir con una regla y compás solamente. Esto fue notable porque, desde la época de Euclides, se pensaba que los únicos polígonos regulares que se podían construir de esta forma eran el triángulo y el pentágono. Como resultado de este descubrimiento Gauss decidió seguir una carrera en matemáticas en lugar de idiomas, su otra pasión. En su disertación doctoral, escrita a la edad de 22 años, Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces. Sus otros logros abarcan cada rama de las matemáticas, así como la física y la astronomía

Ejemplo 3 Factorización de un polinomio con ceros complejos

Encuentre la factorización completa de los cinco ceros del polinomio

$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

Solución Puesto que $3x$ es un factor común, se tiene

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este factor es 0 cuando $x = 0$.

Este factor es 0 cuando $x = 2i$ o $x = -2i$.

Para factorizar $x^2 + 4$, note que $2i$ y $-2i$ son ceros de este polinomio. Así $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)^2(x + 2i)^2 \end{aligned}$$

0 es un cero de multiplicidad 1.

$2i$ es un cero de multiplicidad 2.

$-2i$ es un cero de multiplicidad 2.

Los ceros de P son 0, $2i$ y $-2i$. Puesto que los factores $x - 2i$ y $x + 2i$ ocurren cada uno dos veces en la factorización completa de P, los ceros $2i$ y $-2i$ son de multiplicidad 2 (o ceros *dobles*). Así, se han hallado los cinco ceros. ■

En la tabla siguiente se dan ejemplos de polinomios con sus factorizaciones completas y ceros.

Grado	Polinomio	Cero(s)	Número de ceros
1	$P(x) = x - 4$	4	1
2	$P(x) = x^2 - 10x + 25$ $= (x - 5)(x - 5)$	5 (multiplicidad 2)	2
3	$P(x) = x^3 + x$ $= x(x - i)(x + i)$	$0, i, -i$	3
4	$P(x) = x^4 + 18x^2 + 81$ $= (x - 3i)^2(x + 3i)^2$	$3i$ (multiplicidad 2), $-3i$ (multiplicidad 2)	4
5	$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ $= x^3(x - 1)^2$	0 (multiplicidad 3), 1 (multiplicidad 2)	5

Ejemplo 4 Hallar polinomios con ceros especificados

a) Hallar un polinomio $P(x)$ de grado 4, con ceros i, $-i$, 2 y -2 y con $P(3) = 25$.

b) Encuentre un polinomio $Q(x)$ de grado 4, con ceros -2 y 0, donde -2 es un cero de multiplicidad 3.

Solución

a) El polinomio requerido tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (-2)) \\ &= a(x^2 + 1)(x^2 - 4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= a(x^4 - 3x^2 - 4) && \text{Multiplicar} \end{aligned}$$

Se sabe que $P(3) = a(3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, por lo tanto $a = \frac{1}{2}$. Así

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

b) Se requiere

$$\begin{aligned} Q(x) &= a[x - (-2)]^3(x - 0) \\ &= a(x + 2)^3 x \\ &= a(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x && \text{Fórmula de producto especial 4 (sección 1.3)} \\ &= a(x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \end{aligned}$$

Puesto que no se tiene información acerca de Q aparte de sus ceros y multiplicidad, se puede elegir cualquier número para a. Si se usa $a = 1$, se obtiene

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$ ■

Ejemplo 5 Hallar los ceros de un polinomio

Hallar los cuatro ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

Solución Con el teorema de ceros racionales de la sección 3.3, se obtiene la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Al comprobar éstos por medio de división sintética, se encuentra que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros, y se obtiene la siguiente factorización.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) && \text{Factor } x - 2 \\ &= (x - 2)(x + \tfrac{1}{3})(3x^2 + 3x + 6) && \text{Factor } x + \tfrac{1}{3} \\ &= 3(x - 2)(x + \tfrac{1}{3})(x^2 + x + 2) && \text{Factor 3} \end{aligned}$$

Los ceros del factor cuadrático son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

por lo tanto, los ceros de $P(x)$ son

$$2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$ ■

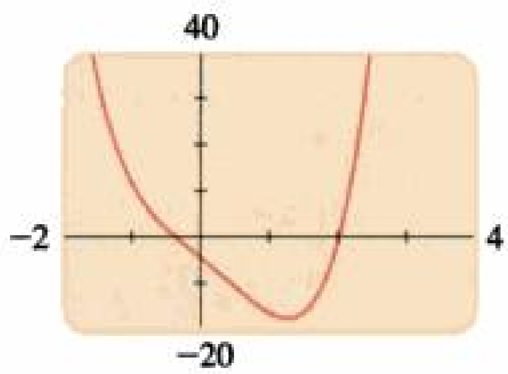


Figura 1
$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$

En la figura 1 se muestra la gráfica del polinomio P del ejemplo 5. Las intersecciones con x corresponden a los ceros reales de P. Los ceros imaginarios no se pueden determinar de la gráfica.

Gerolamo Cardano (1501-1576), es de hecho una de las figuras más coloridas en la historia de las matemáticas. Fue el físico más conocido de Europa en su época; sin embargo, toda su vida estuvo plagada de numerosos padecimientos, como fracturas, hemorroides y un temor irracional de encontrarse con perros rabiosos. Como padre, adoraba a sus hijos, aunque no fue correspondido. Su hijo preferido fue decapitado por asesinar a su propia esposa. Cardano fue también un jugador compulsivo; de hecho, este vicio pudo haberlo motivado a escribir el *Libro sobre juegos de probabilidad*, el primer estudio de probabilidad desde el punto de vista matemático.

En el trabajo matemático principal de Cardano *Ars Magna*, detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercero y cuarto grados. En el momento de su publicación, los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos, pero las fórmulas de Cardano prepararon el terreno para la aceptación no sólo de los números negativos, sino también de los números imaginarios, porque aparecían de manera natural en la solución de ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, para la ecuación cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

una de sus fórmulas da la solución

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(Véase la página 282, ejercicio 102). Este valor para x en realidad resulta ser el número entero 4; sin embargo, para encontrarlo Cardano tuvo que usar el número imaginario $\sqrt{-121} = 11i$.

Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Como quizá lo notó en los ejemplos dados hasta el momento, los ceros complejos de polinomios con coeficientes reales vienen en pares. Siempre que $a + bi$ sea un cero, su complejo conjugado $a - bi$ es también un cero.

Teorema de ceros conjugados

Si el polinomio P tiene coeficientes reales, y si el número complejo z es un cero de P, entonces su complejo conjugado $\overline{z}$ es también un cero de P.

■ **Demostración** Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada coeficiente es real. Suponga que $P(z) = 0$. Se debe probar que $P(\overline{z}) = 0$. Se usen los hechos de que el complejo conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados (véanse los ejercicios 71 y 72 en la sección 3.4).

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}) &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} && \text{Debido a que los coeficientes son reales} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\overline{z}$ es también un cero de $P(x)$, lo que prueba el teorema. ■

Ejemplo 6 Un polinomio con un cero complejo especificado

Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tiene coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

Solución Puesto que $3 - i$ es un cero, entonces también lo es $3 + i$ por el teorema de ceros conjugados. Esto significa que $P(x)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\
&= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupar} \\
&= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de diferencia de cuadrados} \\
&= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 6x + 10) && \text{Desarrollar} \\
&= a\left(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5\right) && \text{Desarrollar}
\end{aligned}$$

Para hacer los coeficientes enteros, se establece $a = 2$ y se obtiene

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otro polinomio que satisface los requerimientos dados debe ser un múltiplo entero de éste. ■

Ejemplo 7 Uso de la regla de Descartes para contar ceros reales y ceros imaginarios

Sin factorizar en realidad, determine cuántos ceros positivos reales, ceros reales negativos y ceros imaginarios podría tener el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 14x - 24$$

Solución Puesto que hay un cambio de signo, por la regla de los signos de Descartes, P tiene un cero real positivo. También, $P(-x) = x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 14x - 24$ tiene tres cambios de signo, por lo tanto hay tres ceros reales negativos o uno solo. Así que P tiene un total de cuatro o dos ceros reales. Puesto que P es de grado 4, tiene cuatro ceros en total, lo que da las siguientes posibilidades.

Ceros reales positivos	Ceros reales negativos	Ceros imaginarios
1	3	0
1	1	2

■

Factores cuadráticos y lineales

Se ha visto que un polinomio se factoriza por completo en factores lineales si se usan números complejos. Si no se emplean números complejos, entonces un polinomio con coeficientes reales se puede factorizar siempre en factores lineales y cuadráticos. Se usa esta propiedad en la sección 9.8 cuando se estudian fracciones parciales. Un polinomio cuadrático sin ceros reales se llama **irreducible** en los números reales. Esta clase de polinomio no se puede factorizar sin el uso de números complejos.

Teorema lineal y factores cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

■ **Demostración** Se observa primero que si $c = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned}(x - c)(x - \bar{c}) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= [(x - a) - bi][(x - a) + bi] \\ &= (x - a)^2 - (bi)^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

La última expresión es cuadrática con coeficientes *reales*.

Ahora, si P es un polinomio con coeficientes reales, entonces por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Puesto que las raíces complejas ocurren en pares conjugados, se pueden multiplicar los factores correspondientes a cada par para obtener un factor cuadrático con coeficientes reales. Esto da como resultado que P se factorice en factores lineales y cuadráticos irreducibles. ■

Ejemplo 8 Factorización de un polinomio en factores lineales y cuadráticos

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

a) Factorice a P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice a P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreducible puesto que sólo tiene los ceros imaginarios $\pm 2i$.

b) Para obtener la factorización completa, se factoriza el factor cuadrático restante.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

■

3.5 Ejercicios

1–12 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros de P, reales y complejos.

b) Factorice a P por completo.

1. $P(x) = x^4 + 4x^2$

2. $P(x) = x^5 + 9x^3$

3. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

4. $P(x) = x^3 + x^2 + x$

5. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

6. $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

7. $P(x) = x^4 - 16$

8. $P(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

9. $P(x) = x^3 + 8$

10. $P(x) = x^3 - 8$

11. $P(x) = x^6 - 1$

12. $P(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

13–30 ■ Factorice al polinomio por completo y halle sus ceros. Exprese la multiplicidad de cada cero.

13. $P(x) = x^2 + 25$

14. $P(x) = 4x^2 + 9$

15. $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

16. $Q(x) = x^2 - 8x + 17$

17. $P(x) = x^3 + 4x$

18. $P(x) = x^3 - x^2 + x$

19. $Q(x) = x^4 - 1$

20. $Q(x) = x^4 - 625$

21. $P(x) = 16x^4 - 81$

22. $P(x) = x^3 - 64$

23. $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$

24. $P(x) = x^6 - 729$

25. $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

26. $Q(x) = x^4 + 10x^2 + 25$

27. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

28. $P(x) = x^5 + 7x^3$

29. $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$

30. $P(x) = x^6 + 16x^3 + 64$

31–40 ■ Encuentre un polinomio con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

31. P tiene grado 2 y ceros $1 + i$ y $1 - i$.

32. P tiene grado 2 y ceros $1 + i\sqrt{2}$ y $1 - i\sqrt{2}$.

33. Q tiene grado 3 y ceros 3, $2i$ y $-2i$.

34. Q tiene grado 3 y ceros 0 e i.

35. P tiene grado 3 y ceros 2 e i.

36. Q tiene grado 3 y ceros -3 y $1 + i$.

37. R tiene grado 4 y ceros $1 - 2i$ y 1, con 1 como un cero de multiplicidad 2.

38. S tiene grado 4 y ceros $2i$ y $3i$.

39. T tiene grado 4 y ceros i y $1 + i$, y término constante 12.

40. U tiene grado 5, ceros $\frac{1}{2}$, -1 y $-i$, coeficiente principal 4; el cero -1 tiene multiplicidad 2.

41–58 ■ Encuentre los ceros del polinomio.

41. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

42. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$

43. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

44. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 18x + 18$

45. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

46. $P(x) = x^3 - x - 6$

47. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$

48. $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

49. $P(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

50. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

51. $P(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 12x - 12$

52. $P(x) = x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$ [*Sugerencia:* Factorice por agrupación de términos]

53. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36$

54. $P(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$

55. $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

56. $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

57. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 28x^2 + 27x - 9$

58. $P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

59–64 ■ Se da un polinomio P.

a) Factorice P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

59. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

60. $P(x) = x^3 - 2x - 4$

61. $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$

62. $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

63. $P(x) = x^6 - 64$

64. $P(x) = x^5 - 16x$

65. Por el teorema de ceros, toda ecuación polinomial de n-ésimo grado tiene exactamente n soluciones (incluso posiblemente algunas que son repetidas). Algunas de éstas pueden ser reales y algunas imaginarias. Use un dispositivo de graficación para determinar cuántas soluciones reales e imaginarias tiene cada ecuación.

a) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 40 = 0$

66–68 ■ Hasta aquí se ha trabajado sólo con polinomios que tienen coeficientes reales. Estos ejercicios tienen que ver con polinomios con coeficientes reales e imaginarios.

66. Encuentre las soluciones de la ecuación.

a) $2x + 4i = 1$

b) $x^2 - ix = 0$

c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$

d) $ix^2 - 2x + i = 0$

67. a) Muestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

b) Explique por qué el resultado del inciso a) no viola el teorema de ceros conjugados.

68. a) Encuentre el polinomio con coeficientes *reales* de grado más pequeño posible para el cual i y $1 + i$ son los ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

b) Encuentre un polinomio con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el cual $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

Descubrimiento • Debate

69. Polinomios de grado impar El teorema de ceros conjugados establece que los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales ocurre en pares complejos conjugados. Explique cómo este hecho demuestra que un polinomio con coeficientes reales y grado impar tiene por lo menos un cero real.

70. Raíces de la unidad Hay dos raíces cuadradas de 1, a saber, 1 y −1. Éstas son soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Determínelas. ¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay? Haga una conjetura acerca de las raíces n-ésimas de 1.

3.6 Funciones racionales

Una función racional tiene la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Se supone que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aunque las funciones racionales se construyen de polinomios, sus gráficas se ven bastante diferentes de las gráficas de funciones polinomiales.

Funciones racionales y asíntotas

Los dominios de expresiones racionales se estudian en la sección 1.4.

El *dominio* de una función racional consiste en los números reales x excepto aquellos para los que el denominador es cero. Al graficar una función racional, se debe poner atención especial al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores. Se comienza por graficar una función racional muy simple.

Ejemplo 1 Una función racional simple

Bosqueje una gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución La función f no está definida para $x = 0$. En las tablas siguientes se muestra que cuando x es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y mientras x se aproxime más a cero $|f(x)|$ se vuelve más grande.

Para números reales positivos,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{Número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100\,000$

Tiende a 0^- | Tiende a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100 000

Tiende a 0^+ | Tiende a ∞

Este comportamiento se describe en palabras y símbolos como sigue. En la primera tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ disminuyen sin límite. En símbolos,

$f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ "y atiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por la izquierda"

En la segunda tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ se incrementan sin límite. En símbolos,

$f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ "y atiende a infinito cuando x tiende a 0 por la derecha"

En las dos tablas siguientes se muestra cómo cambia $f(x)$ cuando $|x|$ se vuelve grande.

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100\,000$	-0.00001

Tiende a $-\infty$ | Tiende a 0

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
100 000	0.00001

Tiende a ∞ | Tiende a 0

En estas tablas de muestra que cuando $|x|$ se vuelve grande, el valor de $f(x)$ se aproxima cada vez más a cero. Se describe esta situación en símbolos escribiendo

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y graficando algunos puntos más, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 1.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

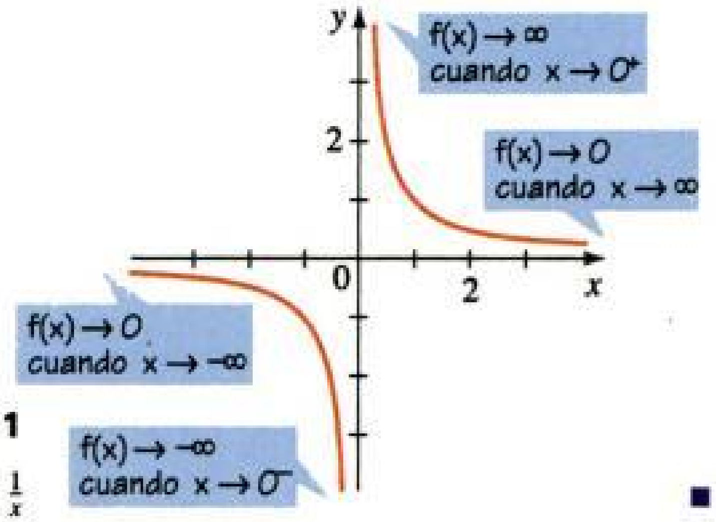


Figura 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

■

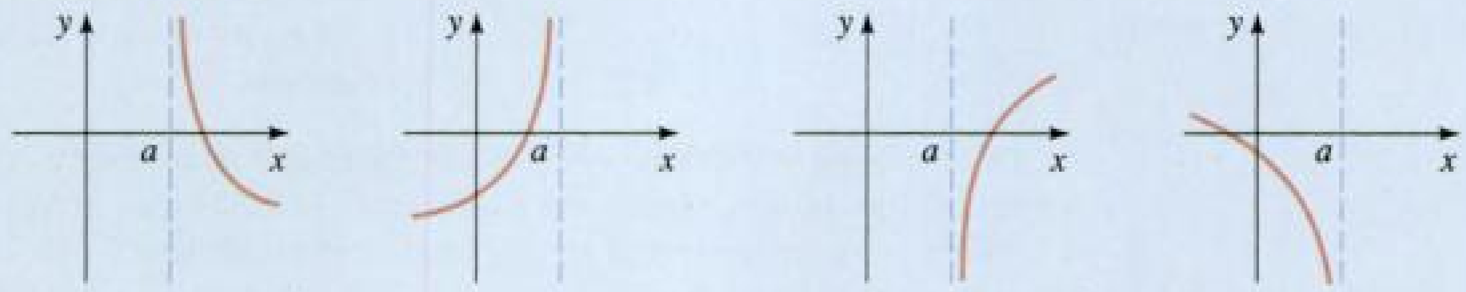
En el ejemplo 1 se usó la siguiente notación de flechas.

Símbolo	**Significa**
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \to -\infty$	x tiende a menos infinito; es decir, x disminuye sin cota
$x \to \infty$	x tiende a infinito; es decir, x se incrementa sin cota

La recta $x = 0$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica de la figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. En términos informales, una asíntota de una función es una línea a la que la gráfica de la función se aproxima cada vez más cuando se va a lo largo de esta línea.

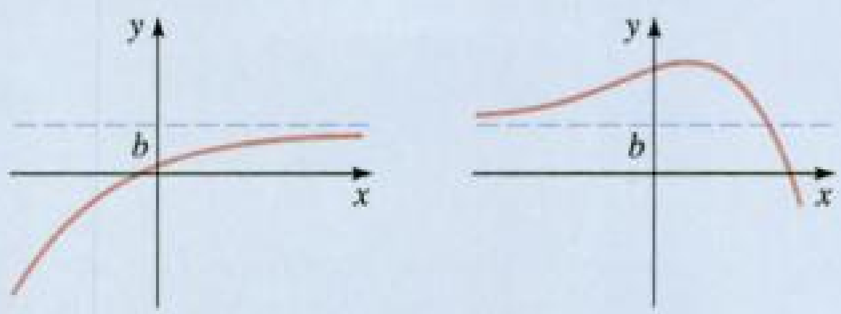
Definición de asíntotas verticales y horizontales

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a a por la derecha o la izquierda.



$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $\quad$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

Transformaciones de $y = \frac{1}{x}$

Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se puede graficar si se desplaza, alarga o refleja la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrada en la figura 1, usando las transformaciones estudiadas en la sección 2.4. (Tales funciones se llaman *transformaciones fraccionarias lineales*.)

Ejemplo 2 Uso de transformaciones para graficar funciones racionales

Bosqueje una gráfica de cada función racional.

a) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

b) $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

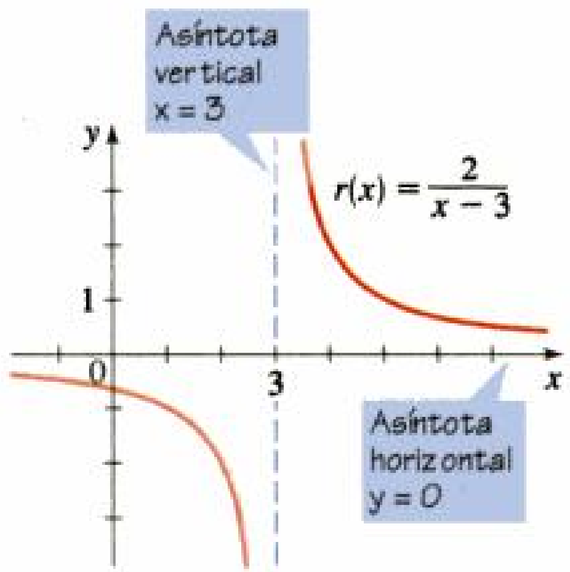


Figura 2

$$\begin{array}{r} 3 \\ x+2\overline{)3x+5} \\ \underline{3x+6} \\ -1 \end{array}$$

Solución

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces se puede expresar r en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{2}{x-3} \\ &= 2\left(\frac{1}{x-3}\right) && \text{Factor 2} \\ &= 2(f(x-3)) && \text{Puesto que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma se puede observar que la gráfica de r se obtiene de la gráfica de f desplazando 3 unidades a la derecha y alargando verticalmente por un factor de 2. Así, r tiene una asíntota vertical $x = 3$ y una asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de r se muestra en la figura 2.

b) Con la división larga (véase el margen), se obtiene $s(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$. Por lo tanto, se puede expresar s en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2} + 3 && \text{Reordene los términos} \\ &= -f(x+2) + 3 && \text{Puesto que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma se puede observar que la gráfica de s se obtiene de la gráfica de f al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x, y desplazar hacia arriba 3 unidades. Así, s tiene una asíntota vertical $x = -2$ y una asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de s se muestra en la figura 3.

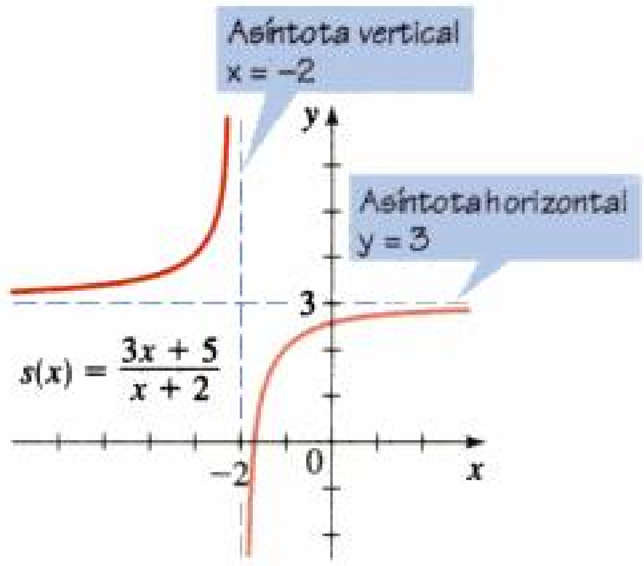


Figura 3

Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del ejemplo 2 funcionan sólo para funciones racionales simples. Para graficar funciones más complicadas, se necesita ver el comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas verticales y horizontales.

Ejemplo 3 Asíntotas de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$.

Solución

ASÍNTOTA VERTICAL: primero se factoriza el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

Para ver a qué se parece la gráfica de r cerca de la asíntota vertical, se construyen tablas de valores para valores de x a la izquierda y a la derecha de 1. De las tablas mostradas a continuación se ve que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

$x \to 1^-$

x	y
0	5
0.5	14
0.9	302
0.99	30 002

Tiende a 1^- Tiende a ∞

$x \to 1^+$

x	y
2	5
1.5	14
1.1	302
1.01	30 002

Tiende a 1^+ Tiende a ∞

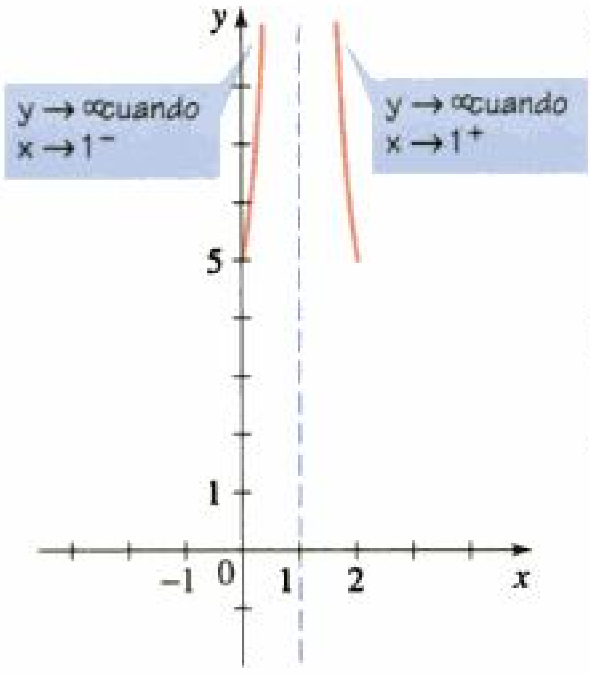


Figura 4

Así, cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de r tiene la forma mostrada en la figura 4.

ASÍNTOTA HORIZONTAL: la asíntota horizontal es el valor al que se aproxima y cuando $x \to \pm\infty$. Como ayuda para determinar este valor, se divide el numerador y el denominador entre x^2, la potencia más alta de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (véase el ejercicio 79, sección 1.1). Así que cuando $x \to \pm\infty$, se tiene

Estos términos tienden a 0.

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \quad \to \quad \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos tienden a 0.

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Puesto que la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, se puede completar como en la figura 5.

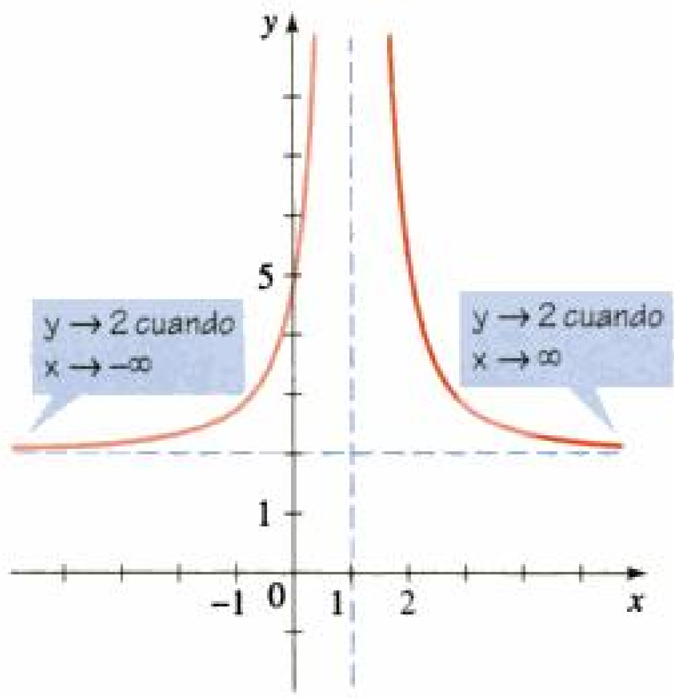


Figura 5

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$$

■

Del ejemplo 3 se puede observar que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y el denominador, puesto que después de dividir entre x^2 (la potencia más alta de x) los otros términos tienden a cero. En general, si $r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de P y Q son los mismos (ambos n, por ejemplo), entonces al dividir el numerador y el denominador entre x^n se muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el cuadro siguiente se resume el procedimiento para hallar asíntotas.

Asíntotas de funciones racionales

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.

2. a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 4 Asíntotas de una función racional

Encontrar las asíntotas verticales y horizontales de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

Solución

ASÍNTOTAS VERTICALES: Primero se factoriza

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x-1)(x+2)}$$

El factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$.

El factor es 0 cuando $x = -2$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Los grados del numerador y el denominador son los mismos y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{3}{2}$$

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar los resultados, se grafica r con una calculadora (véase la figura 6).

La gráfica se traza con el modo de punto para evitar líneas extrañas.

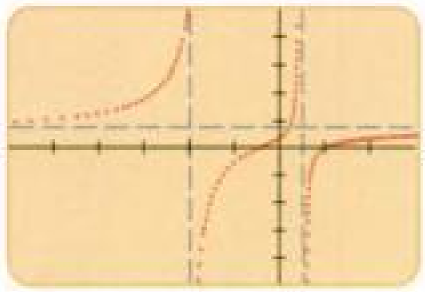


Figura 6

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

■

Graficación de funciones racionales

Se ha visto que las asíntotas son importantes cuando se grafican funciones racionales. En general, se usan las siguientes normas para graficar funciones racionales.

Trazo de gráficas de funciones racionales

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

1. **Factorizar.** Factorizar el numerador y el denominador.
2. **Intersecciones.** Hallar las intersecciones con el eje x determinando los ceros del numerador, y las intersecciones con el eje y del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Hallar las asíntotas verticales determinando los ceros del denominador, y luego ver si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical usando valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encontrar la asíntota horizontal (si existe) dividiendo numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador; luego, permita que $x \to \pm\infty$.
5. **Bosqueje la gráfica.** Grafique la información que se determinó en los cuatro primeros pasos. Luego, trace tantos puntos adicionales como sea necesario para llenar el resto de la gráfica de la función.

Ejemplo 5 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$.

Solución Se factoriza el numerador y el denominador, se determinan las intersecciones y asíntotas y se bosqueja la gráfica.

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

INTERSECCIONES CON EL EJE x: Las intersecciones x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

INTERSECCIONES CON EL EJE y: para hallar la intersección y, se sustituye $x = 0$ en la forma original de la función:

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La intersección y es 2.

ASÍNTOTAS VERTICALES: las asíntotas verticales ocurren donde el denominador es cero, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada se puede observar que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

COMPORTAMIENTO CERCA DE ASÍNTOTAS VERTICALES: se necesita saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores de x cerca de las asíntotas verticales, se usan valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, se usa un valor de prueba cerca y a la izquierda de $1 (x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$:

Al elegir los valores de prueba, se debe estar seguro de que no hay intersecto x entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Por consiguiente $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otro lado, cuando $x \to 1^+$, se usa un valor de prueba cerca y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Los otros elementos de la siguiente tabla se calculan de manera similar.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

ASÍNTOTA HORIZONTAL: los grados del numerador y el denominador son los mismos y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

VALORES ADICIONALES:

x	y
-6	0.93
-3	-1.75
-1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

GRÁFICA:

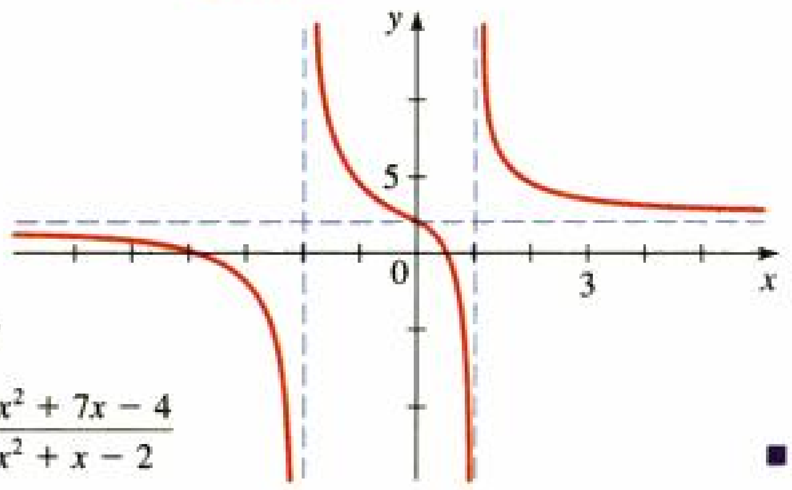


Figura 7

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

■

Matemáticas en el mundo moderno

Códigos indescifrables

Si lee novelas de espionaje, sabe acerca de códigos secretos y cómo el héroe descifra el código. En la actualidad, los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en las computadoras se codifica para evitar el uso no autorizado. Por ejemplo, sus registros de banco, médicos y escolares se codifican. Muchos teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie pueda escuchar la conversación. Por fortuna, debido a los avances recientes en matemáticas, los códigos de hoy día son "indescifrables".

Los códigos modernos se basan en un principio simple: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, intente multiplicar 78 por 93; ahora intente factorizar 9991. Toma tiempo factorizar 9991 porque es un producto de dos números primos 97 por 103, así que para factorizarlo se tuvo que hallar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número N que es el producto de dos números primos p y q, cada uno de unos 200 dígitos de largo. Incluso con las computadoras más rápidas tomaría muchos millones de años factorizar cada número. Pero a la misma computadora le tomaría menos de un segundo multiplicar dos números de este tipo. En 1970, Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman utilizaron este hecho para diseñar el código RSA. Su código emplea un número extremadamente grande para codificar un mensaje pero se requiere conocer sus factores para decodificarlo.

(continúa)

Ejemplo 6 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

INTERSECCIÓN CON x: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

INTERSECCIÓN CON y: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25} = \dfrac{21}{25}$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = -5$, de los ceros del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

VALORES ADICIONALES:

x	y
-15	-0.5
-10	-1.2
-3	1.5
-1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

GRÁFICA:

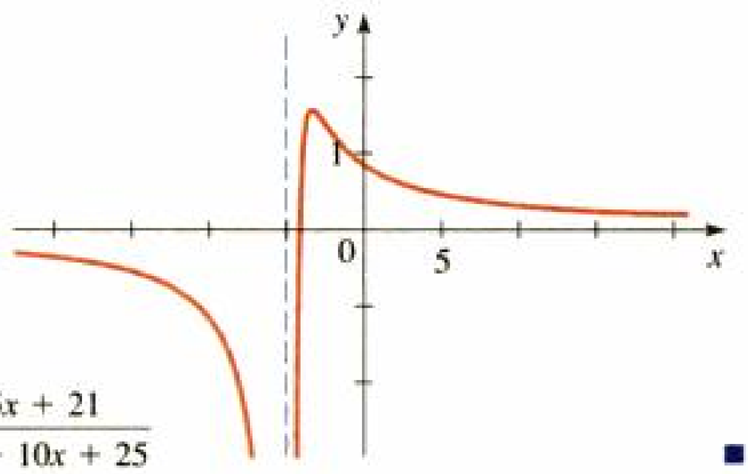


Figura 8

$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

■

De la gráfica de la figura 8 se puede observar que, en contra del concepto erróneo común, una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la figura 8 cruza el eje x (la asíntota horizontal) desde abajo, llega a un valor máximo cerca de $x = -3$, y luego se aproxima al eje x desde arriba cuando $x \to \infty$.

Como se puede observar tal código es casi indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de un código de "codificación de clave pública". En tales códigos, cualquiera puede codificar un mensaje por medio de un procedimiento conocido públicamente basado en N, pero para decodificar el mensaje se debe conocer p y q, los factores de N. Cuando se desarrolló el código RSA, se pensó que un número de 80 dígitos seleccionado de manera cuidadosa proveería un código indescifrable. Pero de un modo interesante, los avances recientes en el estudio de la factorización han hecho necesarios números mucho más grandes.

Ejemplo 7 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$

INTERSECCIONES CON x: -1 y 4, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

INTERSECCIONES CON y: ninguno, porque $r(0)$ no está definido

ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = 0$ y $x = -2$, no está definido de los ceros del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE ASÍNTOTAS VERTICALES:

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el denominador es el mismo y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

MÁS VALORES:

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

GRÁFICA:

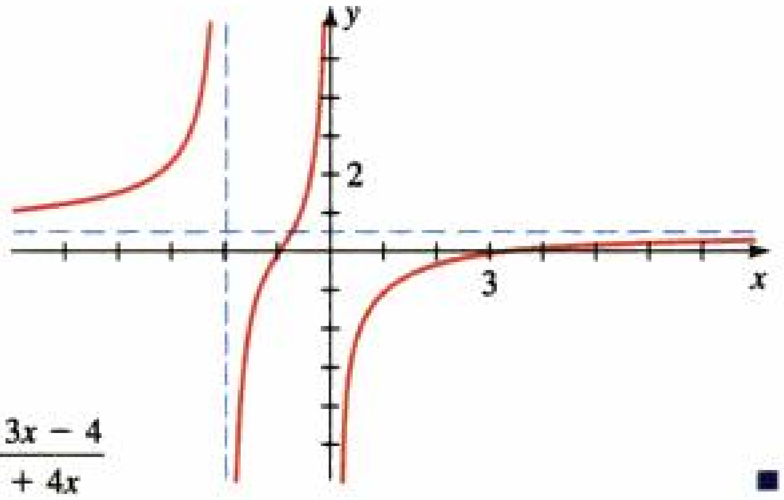


Figura 9

$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

■

Asíntotas inclinadas y comportamiento extremo

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, se puede usar el algoritmo de la división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el grado de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$, por lo tanto para valores grandes de $|x|$, la gráfica de

$y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de la recta $y = ax + b$. En esta situación se dice que $y = ax + b$ es una **asíntota inclinada**, o una **asíntota oblicua**.

Ejemplo 8 Una función racional con una asíntota inclinada

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$

INTERSECCIONES CON x: -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

INTERSECCIONES CON y: $\frac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4\cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 3$, del cero del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x } \\ -x - 5 \\ \underline{-x + 3} \\ -8 \end{array}$$

ASÍNTOTA INCLINADA: puesto que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota inclinada. Al dividir (véase el margen), se obtiene

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es la asíntota inclinada.

MÁS VALORES:

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

GRÁFICA:

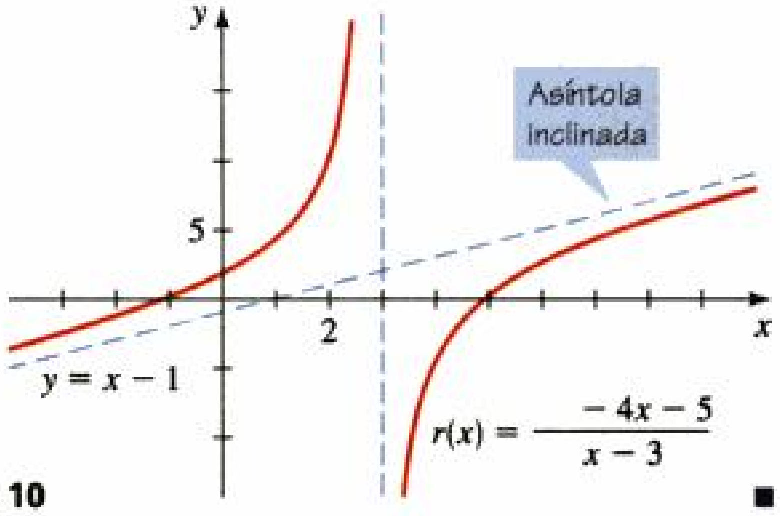


Figura 10

■

Hasta aquí se han considerado sólo las asíntotas horizontales e inclinadas como comportamientos extremos para funciones racionales. En el ejemplo siguiente se grafica una función cuyo comportamiento extremo es como el de una parábola.

Ejemplo 9 Comportamiento extremo de una función racional

Grafique la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

y describa su comportamiento extremo.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

INTERSECCIONES CON x: -1, de $x + 1 = 0$ (El otro factor en el numerador no tiene ceros reales.)

INTERSECCIONES CON y: $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 2$, del cero de denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL: $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

COMPORTAMIENTO EXTREMO: dividiendo (véase el margen), se obtiene

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x - 2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3 \end{array}$$

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

Esto muestra que el comportamiento extremo de r es parecido al de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x - 2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Es decir, $3/(x - 2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de r estará cerca de la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

GRÁFICA: en la figura 11(a) se grafica r en un rectángulo de visión pequeño; se pueden ver las intersecciones, las asíntotas verticales y el mínimo local. En la figura 11(b) se grafica r en un rectángulo de visión más grande; aquí la gráfica casi se asemeja a la de una parábola. En la figura 11(c) se grafican tanto $y = r(x)$ como $y = x^2$; estas gráficas están muy cerca entre sí excepto cerca de la asíntota vertical.

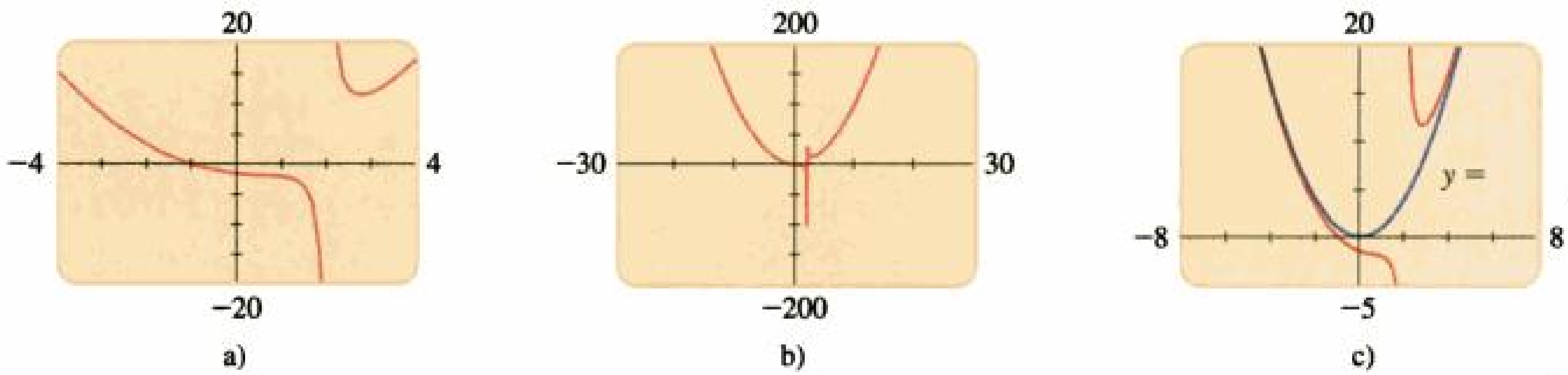


Figura 11

$r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$

■

Aplicaciones

Las funciones racionales ocurren con frecuencia en aplicaciones científicas de álgebra. En el siguiente ejemplo se analiza la gráfica de una función de la teoría de electricidad.

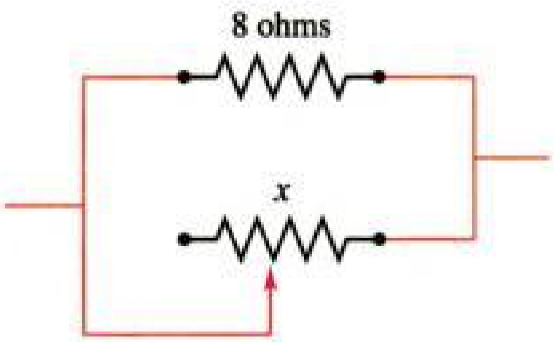


Figura 12

Ejemplo 10 Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms se conecta en paralelo con un resistor variable, como se muestra en la figura 12. Si la resistencia del resistor variable se denota por x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. Grafique R y dé una interpretación física de la gráfica.

Solución Al sustituir $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula, se obtiene la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Puesto que la resistencia no puede ser negativa, esta función tiene significado físico sólo cuando $x > 0$. La función se grafica en la figura 13(a) usando el rectángulo de visión $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando x está restringida a valores positivos. La resistencia combinada R se incrementa cuando aumenta la resistencia x. Si se amplía el rectángulo de visión a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, se obtiene la gráfica de la figura 13(b). Para x grande, se estabiliza la resistencia combinada R, y se aproxima más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. Sin importar cuán grande sea la resistencia variable x, la resistencia combinada nunca es mayor que 8 ohms.

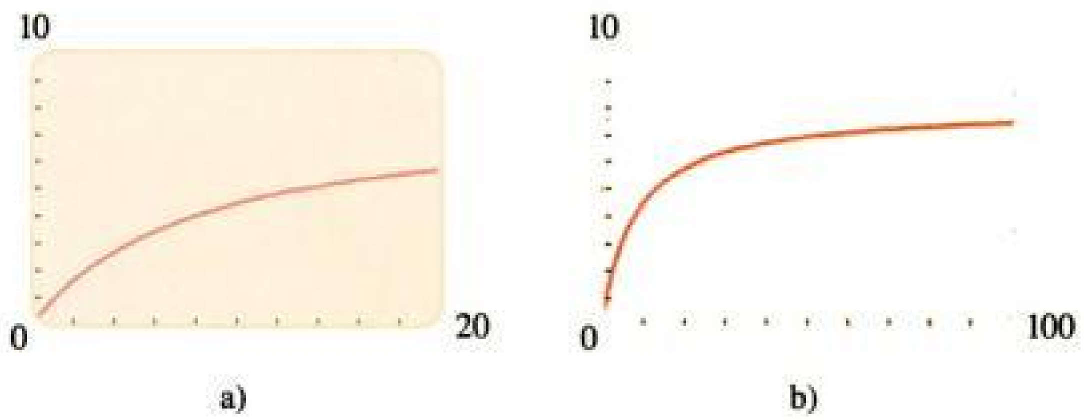


Figura 13
$R(x) = \dfrac{8x}{8 + x}$

■

3.6 Ejercicios

1–4 ■ Se da una función racional. **a)** Complete cada tabla para la función. **b)** Describa el comportamiento de la función cerca de su asíntota vertical, con base en las tablas 1 y 2. **c)** Determine la asíntota horizontal, con base en las tablas 3 y 4.

Tabla 1

x	$r(x)$
1.5	
1.9	
1.99	
1.999	

Tabla 2

x	$r(x)$
2.5	
2.1	
2.01	
2.001	

Tabla 3

x	$r(x)$
10	
50	
100	
1000	

Tabla 4

x	$r(x)$
−10	
−50	
−100	
−1000	

1. $r(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

2. $r(x) = \dfrac{4x + 1}{x - 2}$

3. $r(x) = \dfrac{3x - 10}{(x - 2)^2}$

4. $r(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{(x - 2)^2}$

5–10 ■ Encuentre las intersecciones x y y de la función racional.

5. $r(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

6. $s(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

7. $t(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-6}$

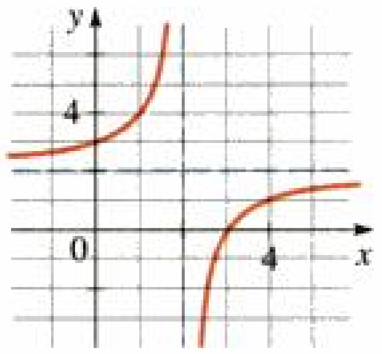
8. $r(x) = \dfrac{2}{x^2+3x-4}$

9. $r(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

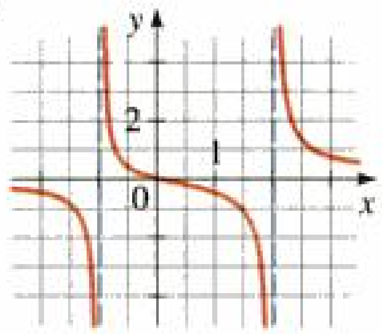
10. $r(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+4}$

11–14 ■ De la gráfica, determine las intersecciones x y y y las asíntotas vertical y horizontal.

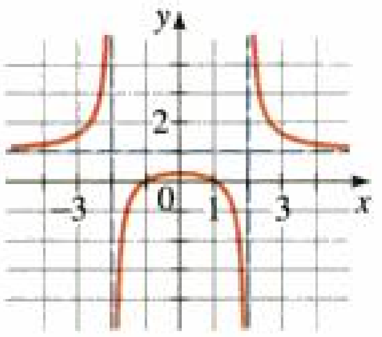
11.



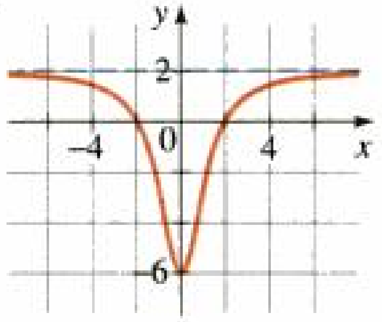
12.



13.



14.



15–24 ■ Encuentre las asíntotas horizontal y vertical (si existen).

15. $r(x) = \dfrac{3}{x+2}$

16. $s(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

17. $t(x) = \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$

18. $r(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+2x+1}$

19. $s(x) = \dfrac{6}{x^2+2}$

20. $t(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

21. $r(x) = \dfrac{6x-2}{x^2+5x-6}$

22. $s(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2x+5}$

23. $t(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

24. $r(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

25–32 ■ Use las transformaciones de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ para graficar la función racional, como en el ejemplo 2.

25. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$

26. $r(x) = \dfrac{1}{x+4}$

27. $s(x) = \dfrac{3}{x+1}$

28. $s(x) = \dfrac{-2}{x-2}$

29. $t(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$

30. $t(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$

31. $r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

32. $r(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$

33–56 ■ Encuentre las intersecciones y asíntotas, y luego bosqueje una gráfica de la función racional. Use un dispositivo de graficación para confirmar su respuesta.

33. $r(x) = \dfrac{4x-4}{x+2}$

34. $r(x) = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

35. $s(x) = \dfrac{4-3x}{x+7}$

36. $s(x) = \dfrac{1-2x}{2x+3}$

37. $r(x) = \dfrac{18}{(x-3)^2}$

38. $r(x) = \dfrac{x-2}{(x+1)^2}$

39. $s(x) = \dfrac{4x-8}{(x-4)(x+1)}$

40. $s(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-1)}$

41. $s(x) = \dfrac{6}{x^2-5x-6}$

42. $s(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+x-2}$

43. $t(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+2x-8}$

44. $t(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x}$

45. $r(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

46. $r(x) = \dfrac{2x(x+2)}{(x-1)(x-4)}$

47. $r(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

48. $r(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-2x-3}$

49. $r(x) = \dfrac{2x^2+10x-12}{x^2+x-6}$

50. $r(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$

51. $r(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x}$

52. $r(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$

53. $r(x) = \dfrac{3x^2+6}{x^2-2x-3}$

54. $r(x) = \dfrac{5x^2+5}{x^2+4x+4}$

55. $s(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2}$

56. $t(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^3-3x-2}$

57–64 ■ Encuentre la asíntota inclinada, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

57. $r(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

58. $r(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$

59. $r(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$

60. $r(x) = \dfrac{3x-x^2}{2x-2}$

61. $r(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x-3}$

62. $r(x) = \dfrac{x^3+4}{2x^2+x-1}$

63. $r(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$

64. $r(x) = \dfrac{2x^3+2x}{x^2-1}$

65–68 ■ Grafique la función racional f y determine las asíntotas verticales de su gráfica. Luego grafique f y g en un rectángulo de visión suficientemente grande para mostrar que tienen el mismo comportamiento extremo.

65. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x + 3}$, $g(x) = 2x$

66. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - 2x}$, $g(x) = -x + 4$

67. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 16}{x - 2}$, $g(x) = x^2$

68. $f(x) = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 2x}{(x - 1)^2}$, $g(x) = 1 - x^2$

69–74 ■ Grafique la función racional y encuentre las asíntotas verticales, las intersecciones, x y y, y los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo. Después use la división larga para encontrar un polinomio que tiene el mismo comportamiento extremo que la función racional, y grafique ambas funciones en un rectángulo de visión suficientemente grande para comprobar que los comportamientos extremos del polinomio y la función racional son los mismos.

69. $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$

70. $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

71. $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$

72. $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

73. $r(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x - 3}$

74. $r(x) = \dfrac{4 + x^2 - x^4}{x^2 - 1}$

Aplicaciones

75. Crecimiento poblacional Suponga que la población de conejos de la granja del señor Jenkins sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el comienzo del año.

a) Trace una gráfica de la población de conejos.

b) ¿Qué sucede finalmente con la población de conejos?

76. Concentración de fármacos Se administra un fármaco a un paciente y se monitorea la concentración c del fármaco en el torrente sanguíneo. En el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

a) Trace la gráfica de concentación del fármaco.

b) ¿Qué sucede eventualmente a la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo?

77. Concentración del fámaco Se monitorea la concentración de fármacos en el torrente sanguíneo de un paciente al que le fueron administrados fármacos en el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Indique la función c con un dispositivo de graficación.

a) ¿Cuál es la concentración más alta de fármaco que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?

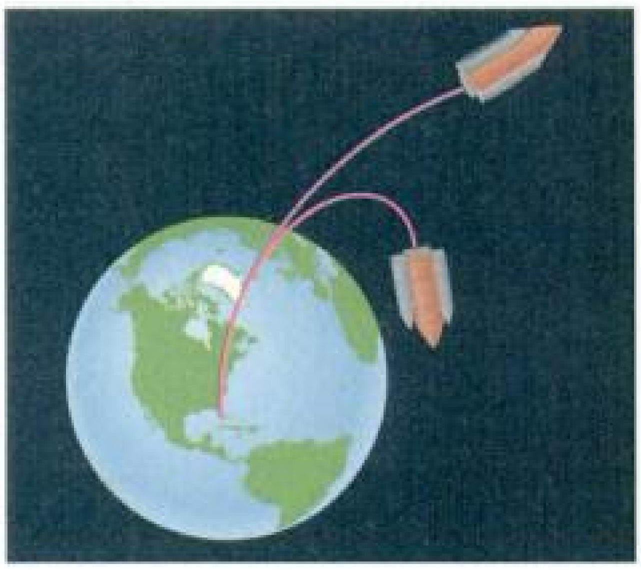
b) ¿Qué sucede con la concentración del fármaco después de un periodo largo?

c) ¿Cuánto le toma a la concentración disminuir debajo de 0.3 mg/L?

78. Vuelo de un cohete Suponga que se lanza un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v (medida en m/s). Entonces la altura máxima h (en metros) que alcanza el cohete se expresa mediante la función

$$h(v) = \frac{Rv^2}{2gR - v^2}$$

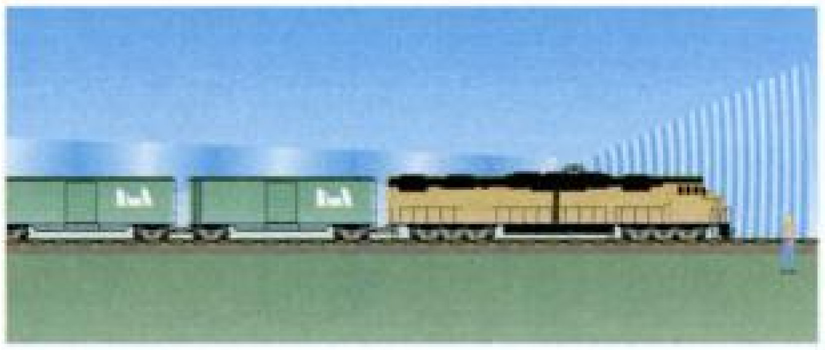
donde $R = 6.4 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra y $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración debida a la gravedad. Use un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la función h. (Note que h y v deben ser positivas, así que el rectángulo de visión no necesita contener valores negativos.) ¿Qué representa físicamente la asíntota vertical?



79. El efecto Doppler Cuando un tren se mueve hacia un observador (véase la figura), el tono de su silbato suena más alto para el observador que si el tren estuviera en reposo, porque las ondas sonoras están más cerca unas de otras. Este fenómeno se llama *efecto Doppler*. El tono P observado es una función de la velocidad v del tren y se expresa como

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

donde P_0 es el tono real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ es la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato establecido en $P_0 = 440$ Hz. Grafique la función $y = P(v)$ por medio de un dispositivo de graficación. ¿Cómo se puede interpretar físicamente la asíntota vertical de esta función?



80. Distancia de foco Para que una cámara con una lente de longitud focal fija F se enfoque en un objeto localizado a una distancia x de la lente, la película se debe colocar a una distancia y detrás de la lente, donde F, x y y se relacionan por

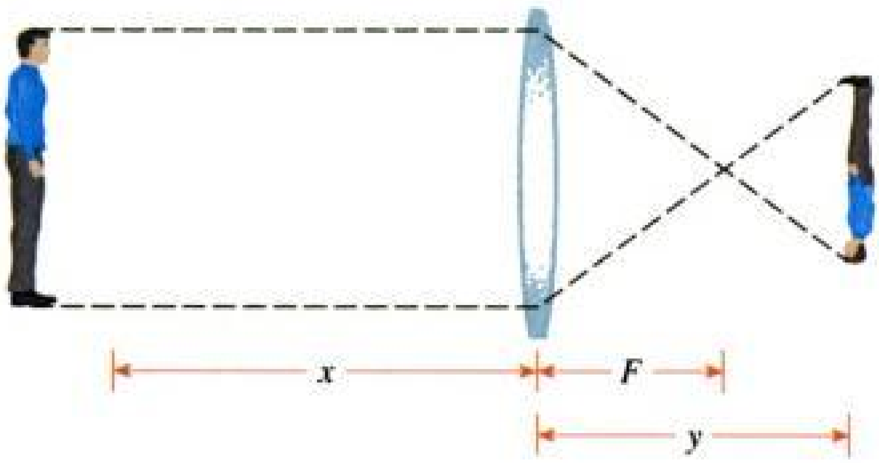
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

(Véase la figura.) Suponga que la cámara tiene una lente de 55 mm ($F = 55$).

a) Exprese a y como una función de x y grafique la función.

b) Qué sucede con la distancia de enfoque y cuando el objeto se aleja de la lente

c) ¿Qué sucede con la distancia de enfoque y cuando el objeto se acerca a la lente?



Descubrimiento • Debate

81. Construcción de una función racional a partir de sus asíntotas Dé un ejemplo de una función racional que tiene asíntota vertical $x = 3$. Ahora dé un ejemplo de una que tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 2$. Ahora dé un ejemplo de una función racional con asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$, e intersección con el eje x igual a 4.

82. Una función racional sin ninguna asíntota Explique cómo puede decir (sin graficarla) que la función

$$r(x) = \frac{x^6 + 10}{x^4 + 8x^2 + 15}$$

no tiene intersección con el eje x ni asíntota horizontal, vertical o inclinada. ¿Cuál es su comportamiento extremo?

83. Gráficas con discontinuidades En este capítulo se adoptó la convención de que en las funciones racionales, el numerador y el denominador no comparten un factor común. En este ejercicio se considera la gráfica de una función racional que no satisface esta regla.

a) Muestre que la gráfica de

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x - 2}$$

es la recta $y = 3x + 3$ con el punto (2, 9) eliminado. [*Sugerencia:* Factorice. ¿Cuál es el dominio de r?]

b) Grafique las funciones racionales:

$$s(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$$

$$t(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$u(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$$

84. Transformaciones de $y = 1/x^2$ En el ejemplo 2 se vio que algunas funciones racionales simples se pueden graficar desplazando, alargando o reflejando la gráfica de $y = 1/x$. En este ejercicio se consideran funciones racionales que se pueden graficar transformando la gráfica de $y = 1/x^2$, mostrada en la página siguiente.

a) Grafique la función

$$r(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

transformando la gráfica de $y = 1/x^2$.

b) Use la división larga y factorización para mostrar que la función

$$s(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 1}$$

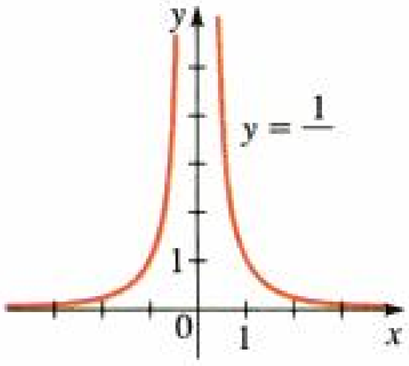
se puede escribir como

$$s(x) = 2 + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

Luego, grafique s transformando la gráfica de $y = 1/x^2$.

c) Una de las siguientes funciones se puede graficar transformando la gráfica de $y = 1/x^2$; la otra no. Use transformaciones para trazar la función de la que sí se puede graficar y explique por qué este método no funciona para la otra.

$$p(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4} \qquad q(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$



3 Repaso

Comprobación de conceptos

1. a) Escriba la ecuación de definición para un polinomio P de grado n.

b) ¿Qué significa decir que c es un cero de P?

2. Bosqueje las gráficas que muestran los posibles comportamientos extremos de los polinomios de grado impar y grado par.

3. ¿Qué pasos seguiría para graficar un polinomio a mano?

4. a) ¿Qué se entiende por punto máximo local o punto mínimo local de un polinomio?

b) ¿Cuántos extremos locales puede tener un polinomio de grado n?

5. Exprese el algoritmo de la división e identifique el dividendo, divisor, cociente y residuo.

6. ¿Cómo funciona la división sintética?

7. a) Enuncie el teorema del residuo.

b) Exprese el teorema del factor.

8. a) Exprese el teorema de los ceros racionales.

b) ¿Qué pasos llevaría a cabo para hallar los ceros racionales de un polinomio?

9. Enuncie la regla de los signos de Descartes

10. a) ¿Qué significa decir que a es una cota inferior y b es una cota superior para los ceros de un polinomio?

b) Exprese el teorema de las cotas superior e inferior.

11. a) ¿Qué es un número complejo?

b) ¿Cuáles son las partes real e imaginaria de un número complejo?

c) ¿Cuál es el complejo conjugado de un número complejo?

d) ¿Cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos?

12. a) Exprese el teorema fundamental del álgebra.

b) Enuncie el teorema de factorización completa.

c) ¿Qué significa decir que c es un cero de multiplicidad k de un polinomio P?

d) Exprese el teorema de los ceros.

e) Enuncie el teorema de los ceros conjugados.

13. a) ¿Qué es una función racional?

b) ¿Qué significa decir que $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$?

c) ¿Cómo localiza una asíntota vertical?

d) ¿Qué significa decir que $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$?

e) ¿Cómo localiza una asíntota vertical?

f) ¿Qué pasos sigue para bosquejar a mano la gráfica de una función racional?

g) ¿En qué circunstancias una función racional tiene una asíntota inclinada? Si ésta existe, ¿cómo la determina?

h) ¿Cómo determina el comportamiento extremo de una función racional?

Ejercicios

1–6 ■ Grafique el polinomio transformando una grafica apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre con claridad todos los intersectos x y y.

1. $P(x) = -x^3 + 64$ **2.** $P(x) = 2x^3 - 16$

3. $P(x) = 2(x + 1)^4 - 32$ **4.** $P(x) = 81 - (x - 3)^4$

5. $P(x) = 32 + (x - 1)^5$ **6.** $P(x) = -3(x + 2)^5 + 96$

7–10 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar el polinomio. Encuentre las intersecciones x y y y las coordenadas de los extremos locales correctas hasta el décimo más próximo. Des-criba el comportamiento final del polinomio.

7. $P(x) = x^3 - 4x + 1$ **8.** $P(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$

9. $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 10x - 1$

10. $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x + 3$

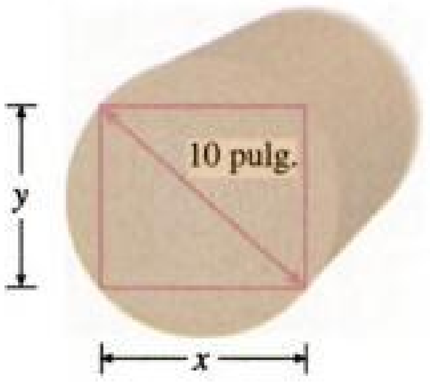
11. La resistencia S de una viga de madera de ancho x y profundidad y se expresa mediante la fórmula $S = 13.8xy^2$. Se cortará una viga de un tronco de diámetro 10 pulg., como se muestra en la figura.

a) Exprese la resistencia S de esta viga como una función de x solamente.

b) ¿Cuál es el dominio de la función S?

c) Dibuje una gráfica de S.

d) ¿Qué ancho hace que la viga tenga la mayor resistencia?

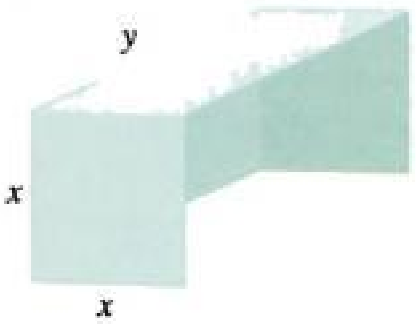


12. Se construirá un pequeño cobertizo para plantas delicadas con un plástico delgado. Tendrá extremos cuadrados y las partes superior y posterior serán rectangulares, con el frente y el fondo abiertos, como se muestra en la figura. El área total de los cuatro lados de plástico será de 1200 pulg^2.

a) Exprese el volumen V del cobertizo como una función de la profundidad x.

b) Dibuje una gráfica de V.

c) ¿Qué dimensiones maximizarán el volumen del cobertizo?



13–20 ■ Encuentre el cociente y el residuo.

13. $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ **14.** $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

15. $\dfrac{x^3 - x^2 + 11x + 2}{x - 4}$ **16.** $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 10}{x + 3}$

17. $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 2x + 7}{x + 5}$ **18.** $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 12}{x + 4}$

19. $\dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 1}$ **20.** $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - x + 3}$

21–22 ■ Halle el valor indicado del polinomio por medio del teorema del residuo.

21. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$; encuentre $P(5)$

22. $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$; determine $Q(-3)$

23. Muestre que $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$

24. Use el teorema del factor para mostrar que $x + 4$ es un factor del polinomio

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 23x + 12$$

25. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio

$$P(x) = x^{500} + 6x^{201} - x^2 - 2x + 4$$

se divide entre $x - 1$?

26. ¿Cuál es el residuo cuando $x^{101} - x^4 + 2$ se divide entre $x + 1$?

27–28 ■ Se da un polinomio P.

a) Liste los posibles ceros racionales (sin probar si en realidad son ceros).

b) Determine el número posible de ceros positivos y negativos usando la regla de los signos de Descartes.

27. $P(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 + 2x + 18$

28. $P(x) = 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 4$

29–36 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros de P y sus multiplicidades.

b) Bosqueje la gráfica de P.

29. $P(x) = x^3 - 16x$ **30.** $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

31. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ **32.** $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

33. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

34. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

35. $P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

36. $P(x) = 9x^5 - 21x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

37–46 ■ Evalúe la expresión y escríbala en la forma $a + bi$.

37. $(2 - 3i) + (1 + 4i)$

38. $(3 - 6i) - (6 - 4i)$

39. $(2 + i)(3 - 2i)$

40. $4i(2 - \frac{1}{2}i)$

41. $\dfrac{4 + 2i}{2 - i}$

42. $\dfrac{8 + 3i}{4 + 3i}$

43. i^{25}

44. $(1 + i)^3$

45. $(1 - \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})$

46. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-40}$

47. Encuentre un polinomio de grado 3 con coeficiente constante 12 y ceros $-\frac{1}{2}$, 2 y 3.

48. Encuentre un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros y ceros $3i$ y 4, con 4 un cero doble.

49. ¿Existe un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros que tenga ceros i, $2i$, $3i$ y $4i$? En caso afirmativo, encuéntrelo. Si no, explique por qué.

50. Pruebe que la ecuación $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ no tiene raíz real.

51–60 ■ Encuentre los ceros racionales, irracionales y complejos (y exprese sus multiplicidades). Use la regla de los signos de Descartes, el teorema de las cotas superior e inferior, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización como medio de ayuda siempre que sea posible.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

52. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

53. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 28x + 20$

54. $P(x) = x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20$

55. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

56. $P(x) = x^4 - 81$

57. $P(x) = x^6 - 64$

58. $P(x) = 18x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

59. $P(x) = 6x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 30x + 36$

60. $P(x) = x^4 + 15x^2 + 54$

61–64 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones reales de la ecuación.

61. $2x^2 = 5x + 3$

62. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

63. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0$

64. $x^5 = x + 3$

65–70 ■ Grafique la función racional. Muestre de manera clara las intersecciones x y y y las asíntotas.

65. $r(x) = \dfrac{3x - 12}{x + 1}$

66. $r(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

67. $r(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 8}$

68. $r(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 7}{x - 4}$

69. $r(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 1}$

70. $r(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 4}$

71–74 ■ Use un dispositivo de graficación para analizar la gráfica de la función racional. Encuentre las intersecciones x y y; y las asíntotas verticales, horizontales e inclinadas. Si la función no tiene asíntota horizontal o inclinada, encuentre un polinomio que tiene el mismo comportamiento extremo que la función racional.

71. $r(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 6}$

72. $r(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 + 9}$

73. $r(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - x - 2}$

74. $r(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x + 1}$

75. Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de

$$y = x^4 + x^2 + 24x \qquad \text{y} \qquad y = 6x^3 + 20$$

3 Evaluación

1. Grafique el polinomio $P(x) = -(x + 2)^3 + 27$, mostrando con claridad las intersecciones x y y.
2. a) Use la división sintética para hallar el cociente y el residuo cuando $x^4 - 4x^2 + 2x + 5$ se divide entre $x - 2$.
   b) Use la división larga para hallar el cociente y el residuo cuando $2x^5 + 4x^4 - x^3 - x^2 + 7$ se divide entre $2x^2 - 1$.
3. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.
   a) Liste los posibles ceros racionales de P.
   b) Encuentre la factorización completa de P.
   c) Determine los ceros de P.
   d) Bosqueje la gráfica de P.
4. Lleve a cabo la operación indicada y escriba el resultado en la forma $a + bi$.
   a) $(3 - 2i) + (4 + 3i)$
   b) $(3 - 2i) - (4 + 3i)$
   c) $(3 - 2i)(4 + 3i)$
   d) $\dfrac{3 - 2i}{4 + 3i}$
   e) i^{48}
   f) $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})(\sqrt{8} + \sqrt{-2})$
5. Encuentre los ceros reales y complejos de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$.
6. Encuentre la factorización completa de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.
7. Encuentre un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros que tiene ceros $3i$ y -1, con -1 un cero de multiplicidad 2.
8. Sea $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 - 18x + 3$.
   a) Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener.
   b) Muestre que 4 es una cota superior y -1 una cota inferior para los ceros reales de P.
   c) Trace una gráfica de P y utilícela para estimar los ceros de P, correctos hasta dos decimales.
   d) Encuentre las coordenadas de los extremos locales de P, correctos hasta dos decimales.
9. Considere las siguientes funciones racionales:

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad s(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4} \qquad t(x) = \frac{x^3 - 9x}{x + 2} \qquad u(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25}$$

   a) ¿Cuál de estas funciones racionales tiene una asíntota horizontal?
   b) ¿Cuál de estas funciones tiene una asíntota inclinada?
   c) ¿Cuál de estas funciones no tiene asíntota vertical?
   d) Grafique $y = u(x)$, muestre con claridad cualquier asíntota y los intersectos x y y que pueda tener la función.
   e) Use la división larga para hallar un polinomio P que tiene el mismo comportamiento que t. Grafique P y t en la misma pantalla para comprobar que tienen el mismo comportamiento extremo.

Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas polinomiales a datos

Se ha aprendido cómo ajustar una línea a datos (véase *Enfoque en el modelado*, página 239). La recta modela la tendencia creciente o decreciente en los datos. Si los datos exhiben más variabilidad, un incremento seguido de una disminución, entonces para modelar los datos es necesario usar una curva en vez de una recta. En la figura 1 se muestra un diagrama de dispersión con tres posibles modelos que al parecer se ajustan a los datos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?

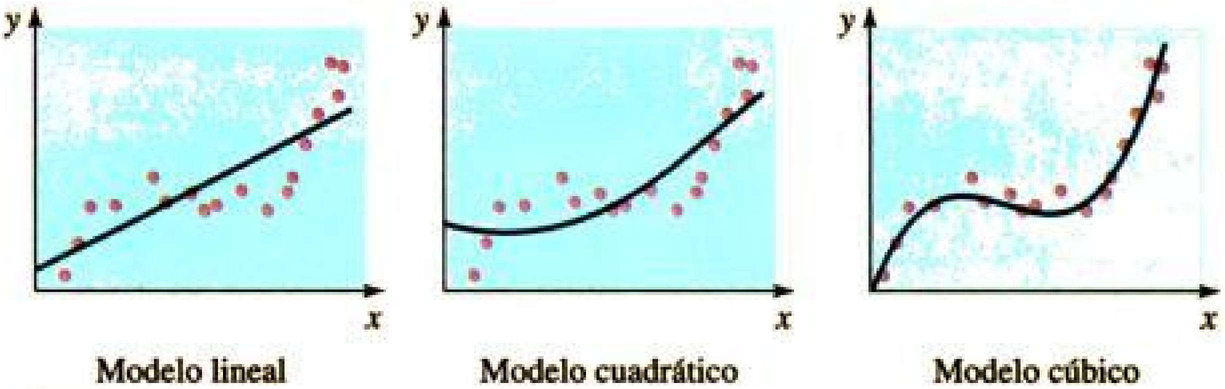


Figura 1

Funciones polinomiales como modelos

Las funciones polinomiales son ideales para modelar datos donde el diagrama de dispersión tiene picos o valles (es decir, máximos o mínimos locales). Por ejemplo, si los datos tienen un solo pico como en la figura 2(a), entonces podría ser apropiado usar un polinomio cuadrático para modelar los datos. Mientras más picos o valles exhiban los datos, mayor es el grado del polinomio necesario para modelar los datos (véase la figura 2).

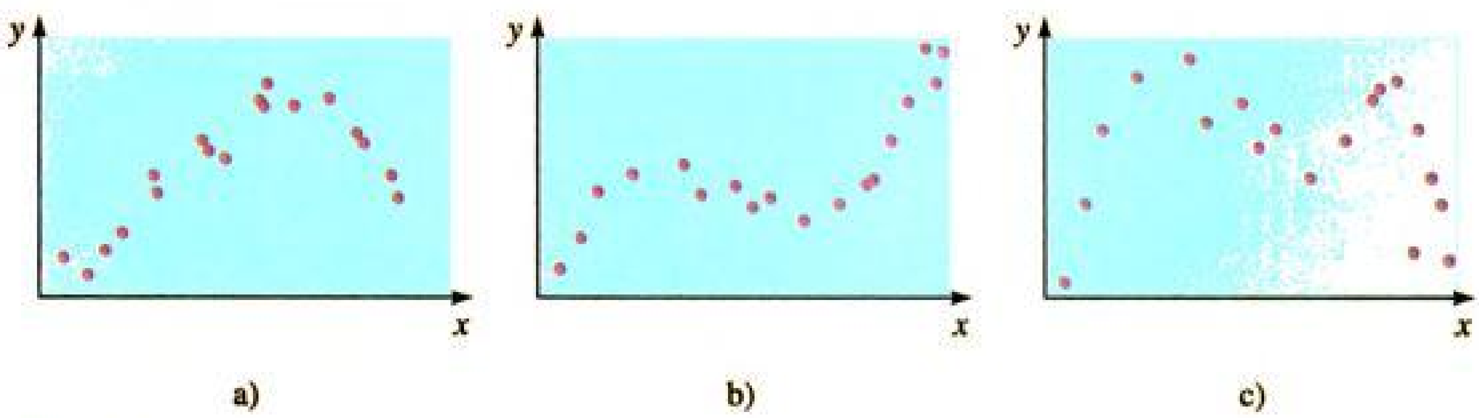


Figura 2

Las calculadoras de graficación están programadas para hallar el **polinomio del mejor ajuste** de un grado especificado. Como en el caso de las rectas (véanse las páginas 239-240), un polinomio de un grado dado se ajusta a los datos *mejor* si se reduce al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias entre la gráfica del polinomio y los puntos de datos.

Ejemplo 1 Lluvia y rendimiento del cultivo

Ted Wood/The Image Bank/Getty Images

La lluvia es esencial para que crezcan los cultivos, pero demasiada lluvia puede disminuir el rendimiento. Los datos proporcionan la cantidad de lluvia y el rendimiento de algodón por acre durante varias estaciones en cierto país.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos. ¿Qué grado polinomial al parecer es apropiado para modelar los datos?
b) Use una calculadora de graficación para hallar el polinomio del mejor ajuste. Grafique el polinomio en el diagrama de dispersión.
c) Use el modelo que encontró para estimar el rendimiento si hay 25 pulg de lluvia.

Estación	Lluvia (pulg)	Rendimiento (kg/acre)
1	23.3	5311
2	20.1	4382
3	18.1	3950
4	12.5	3137
5	30.9	5113
6	33.6	4814
7	35.8	3540
8	15.5	3850
9	27.6	5071
10	34.5	3881

Solución

a) El diagrama de dispersión se muestra en la figura 3. Al parecer los datos tienen un pico, así que es apropiado modelar los datos mediante un polinomio cuadrático (grado 2).

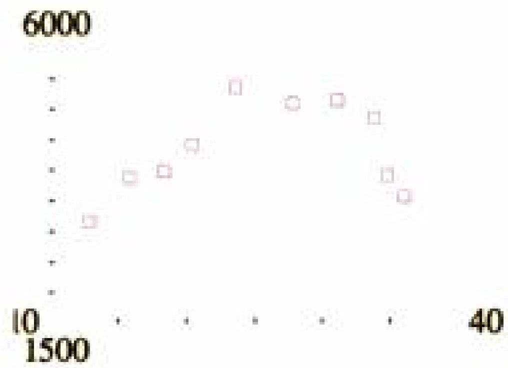


Figura 3

Diagrama de dispersión de los datos de rendimiento contra lluvia

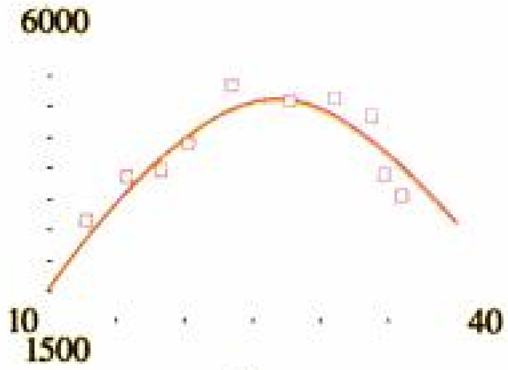
b) Con una calculadora para gráficas, se encuentra que el polinomio de segundo grado de mejor ajuste es

$$y = -12.6x^2 + 651.5x - 3283.2$$

El resultado de la calculadora y el diagrama de dispersión, junto con la gráfica del modelo cuadrático, se muestran en la figura 4.

```
QuadReg
 y=ax²+bx+c
 a=-12.6271745
 b=651.5470392
 c=-3283.15741
```

a)



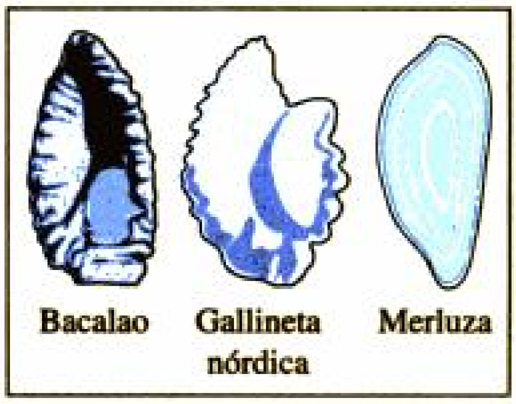
b)

Figura 4

c) Usando el modelo con $x = 25$, se obtiene

$$y = -12.6(25)^2 + 651.5(25) - 3283.2 \approx 5129.3$$

Se estima que la producción será de alrededor de 5130 kg por acre. ■



Otolitos para varias especies de peces.

Ejemplo 2 Datos de longitud y edad para peces

Los otolitos ("cálculos en el oído") son pequeñas estructuras encontradas en las cabezas de los peces. Los anillos de crecimiento microscópico en los otolitos, al igual que los anillos de crecimiento en un árbol, registran la edad de un pez. En la tabla se dan las longitudes de base de roca de diferentes edades, según se determina mediante los otolitos. Los científicos ha propuesto un polinomio cúbico para modelar estos datos.

a) Use una calculadora de graficación para hallar el polinomio cúbico del mejor ajuste para estos datos.

b) Elabore un diagrama de dispersión de los datos y grafique el polinomio del inciso a).

c) Un pescador captura un róbalo de 20 pulgadas de largo. Use el modelo para estimar su edad.

Edad (años)	Longitud (pulg)	Edad (años)	Longitud (pulg)
1	4.8	9	18.2
2	8.8	9	17.1
2	8.0	10	18.8
3	7.9	10	19.5
4	11.9	11	18.9
5	14.4	12	21.7
6	14.1	12	21.9
6	15.8	13	23.8
7	15.6	14	26.9
8	17.8	14	25.1

Solución

a) Con una calculadora para gráficas (véase figura 5(a)), se encuentra el polinomio cúbico de mejor ajuste

$$y = 0.0155x^3 - 0.372x^2 + 3.95x + 1.21$$

b) El diagrama de dispersión de los datos y el polinomio cúbico se grafican en la figura 5(b).

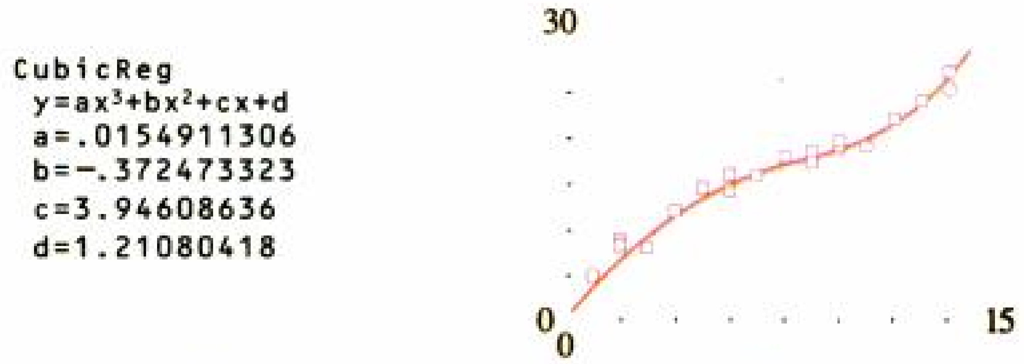


Figura 5 a) b)

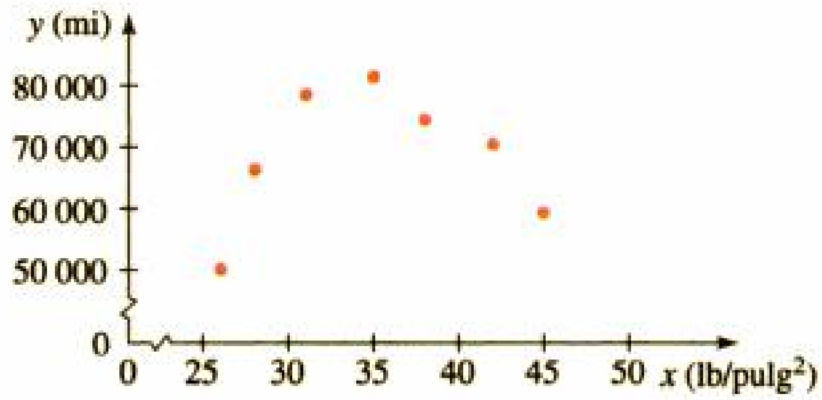
c) Al mover el cursor a lo largo de la gráfica del polinomio, se encuentra que $y = 20$ cuando $x \approx 10.8$. Así, el pez tiene cerca de 11 años de edad. ■

Problemas

Presión (lb/pulg²)	Duración de la llanta (millas)
26	50 000
28	66 000
31	78 000
35	81 000
38	74 000
42	70 000
45	59 000

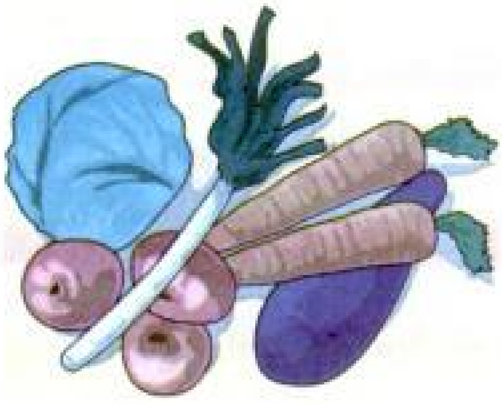
1. **Inflado de la llanta y desgaste** Las llantas de automóvil necesitan ser infladas de manera adecuada. El desgaste prematuro de la llanta se debe a que se infla demás o le falta aire. Los datos y el diagrama de dispersión muestran la duración de la llanta para distintos valores de inflado para cierto tipo de llanta.
   a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor ajusta los datos.
   b) Dibuje una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.
   c) Use el resultado del inciso b) para estimar la presión que da la duración más prolongada de la llanta.

2. **¿Demasiadas plantas de maíz por acre?** Mientras más plantas por acre siembre un campesino, mayor es la producción que puede esperar, pero sólo hasta cierto punto.



Densidad (plantas por acre)	Rendimiento del cultivo (bushels/acre)
15 000	43
20 000	98
25 000	118
30 000	140
35 000	142
40 000	122
45 000	93
50 000	67

Demasiadas plantas por acre pueden causar sobrepoblación y reducir la producción. Los datos dan el rendimiento del cultivo por acre para varias densidades de plantaciones de maíz, según los hallazgos de investigadores en una granja de prueba de la universidad.
   a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor ajusta los datos.
   b) Dibuje una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.
   c) Use el resultado del inciso b) para estimar la producción para 37 000 plantas por acre.



3. **¿Qué tan rápido puede listar sus cosas favoritas?** Si se le pide hacer una lista de objetos en cierta categoría, la rapidez para listarlos sigue un patrón predecible. Por ejemplo, si intenta nombrar tantas verduras como pueda, es probable que piense en varias de inmediato, por ejemplo, zanahorias, chícharos, ejotes, elote, etcétera. Luego, después de una pausa puede pensar en las que come con menos frecuencia, quizá calabacín, berenjena y espárragos. Por último, podrían venir a la mente algunas verduras más exóticas, alcachofas, jícama, col china, etcétera. Un psicólogo efectúa este experimento en varios individuos. En la tabla siguiente se da el número promedio de verduras que los individuos nombraron en un determinado número de segundos.
   a) Encuentre un polinomio cúbico que mejor se ajuste a los datos.
   b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con el diagrama de dispersión de los datos.
   c) Use el resultado del incico b) para estimar el número de verduras que los individuos podrían nombrar en 40 segundos.
   d) De acuerdo con el modelo, ¿cuánto (hasta el 0.1 s más próximo) le tomaría a una persona nombrar cinco verduras?

Segundos	Número de verduras
1	2
2	6
5	10
10	12
15	14
20	15
25	18
30	21

4. **Las ventas de ropa son de temporada** Las ventas de ropa tienden a variar por temporada con más ropa vendida en primavera y otoño. En la tabla se dan las cifras de ventas para cada mes en cierta tienda de ropa.
   a) Encuentre el polinomio de cuarto grado que mejor se ajusta a los datos.
   b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

Mes	Ventas (dólares)
Enero	8 000
Febrero	18 000
Marzo	22 000
Abril	31 000
Mayo	29 000
Junio	21 000
Julio	22 000
Agosto	26 000
Septiembre	38 000
Octubre	40 000
Noviembre	27 000
Diciembre	15 000

c) ¿Considera que un polinomio de cuarto grado es un buen modelo para estos datos? Explique.

5. **Altura de una pelota de béisbol** Se lanza hacia arriba una pelota de béisbol y se mide su altura a intervalos de 0.5 segundos por medio de una luz estroboscópica. Los datos resultantes se dan en la tabla.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. ¿Cuál es el grado del polinomio apropiado para modelar los datos?

b) Encuentre un modelo polinomial que mejor ajuste los datos y grafíquelo en un diagrama de dispersión.

c) Determine los tiempos cuando la bola está 20 pies arriba del suelo.

d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

Tiempo (s)	Altura (pies)
0	4.2
0.5	26.1
1.0	40.1
1.5	46.0
2.0	43.9
2.5	33.7
3.0	15.8

6. **Ley de Torricelli** El agua de un recipiente saldrá por un orificio en el fondo más rápido cuando el recipiente está casi lleno que cuando está casi vacío. De acuerdo con la ley de Torricelli, la altura $h(t)$ del agua remanente en el tiempo t es una función cuadrática de t.

Cierto recipiente se llena con agua y se deja que ésta fluya. La altura del agua se mide en diferentes tiempos como se muestra en la tabla.

a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor se ajusta a los datos.

b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Use la gráfica del inciso b) para estimar en cuánto tiempo se vacía el recipiente.

Tiempo (min)	Altura (pies)
0	5.0
4	3.1
8	1.9
12	0.8
16	0.2

4 Funciones exponenciales y logarítmicas

4.1 Funciones exponenciales

4.2 Funciones logarítmicas

4.3 Leyes de los logaritmos

4.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

4.5 Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

Esquema del capítulo

En este capítulo se estudia una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales.* Por ejemplo,

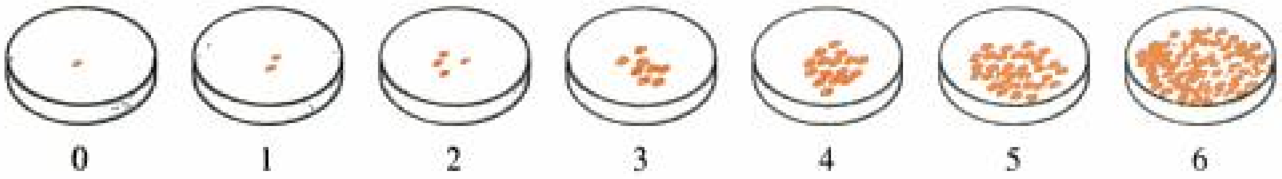
$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que crecen los valores de esta función:

$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$f(10) = 2^{10} = 1024$$
$$f(30) = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. La cuestión es, cuando la variable está en el exponente, incluso un cambio pequeño en la variable puede causar un cambio radical en el valor de la función.

A pesar de este incomprensiblemente enorme crecimiento, las funciones exponenciales son apropiadas para modelar el crecimiento poblacional para los seres vivos, desde bacterias hasta elefantes. Para entender cómo crece una población, considere el caso de una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora se tendrían dos bacterias, después de dos horas 2^2 o 4 bacterias, después de tres horas 2^3 u 8 bacterias, etcétera. Después de x horas se tendrían 2^x bacterias. Esto da lugar a modelar la población de bacterias mediante la función $f(x) = 2^x$.



El principio que gobierna el crecimiento poblacional es el siguiente: mientras más grande sea la población, mayor es el número de descendientes. Este mismo principio está presente en muchas otras situaciones de la vida real. Por ejemplo, mientras más grande sea su cuenta de banco, más intereses obtiene. En consecuencia, las funciones exponenciales se usan también para calcular el interés compuesto.

Se usan *funciones logarítmicas*, que son el inverso de las funciones exponenciales, como ayuda para contestar preguntas como, ¿cuándo mi inversión crecerá a la cantidad de $100 000? En *Enfoque en el modelado* (página 386) se explora cómo ajustar modelos exponenciales y logarítmicos a datos.

4.1 Funciones exponenciales

Hasta el momento, se han estudiado las funciones polinomiales y racionales. Ahora se estudia una de las funciones más importantes en matemáticas, la *función exponencial*. Esta función se emplea para modelar procesos naturales como el crecimiento poblacional y el decaimiento radiactivo.

Funciones exponenciales

En la sección 1.2 se definió a^x para $a > 0$ y x un número racional, pero no se han definido aún las potencias irracionales. Por lo tanto, ¿qué se quiere dar a entender con $5^{\sqrt{3}}$ o 2^{π}? Para definir a^x cuando x es irracional, se aproxima a x mediante números racionales. Por ejemplo, puesto que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, se aproxima de manera exitosa $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

De forma intuitiva, se puede ver que estas potencias racionales de a se aproximan cada vez más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar por medio de matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que se aproximan estas potencias. Se define a $a^{\sqrt{3}}$ como este número.

Por ejemplo, usando una calculadora se encuentra

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt{3}} &\approx 5^{1.732} \\ &\approx 16.2411\ldots \end{aligned}$$

Mientras más decimales de $\sqrt{3}$ se usen en el cálculo, mejor es la aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

Las leyes de los exponentes se listan en la página 14.

Se puede demostrar que las *leyes de los exponentes aún son válidas cuando los exponentes son números reales.*

Funciones exponenciales

La **función exponencial con base a** se define para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se supone que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es sólo una función constante. A continuación se dan algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 3^x \qquad h(x) = 10^x$$

Base 2 Base 3 Base 10

Ejemplo 1 Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

a) $f(2)$ b) $f(-\frac{2}{3})$ c) $f(\pi)$ d) $f(\sqrt{2})$

Solución Se usa una calculadora para obtener los valores de f.

	Teclas de la calculadora	Resultado
a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

■

Gráficas de funciones exponenciales

Se grafican primero las funciones exponenciales al trazar los puntos. Se verá que las gráficas de tales funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

Ejemplo 2 Graficación de funciones exponenciales y logarítmicas mediante el trazo de puntos

Dibuje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

Solución Se calculan valores de $f(x)$ y $g(x)$ y se trazan los puntos para bosquejar las gráficas de la figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

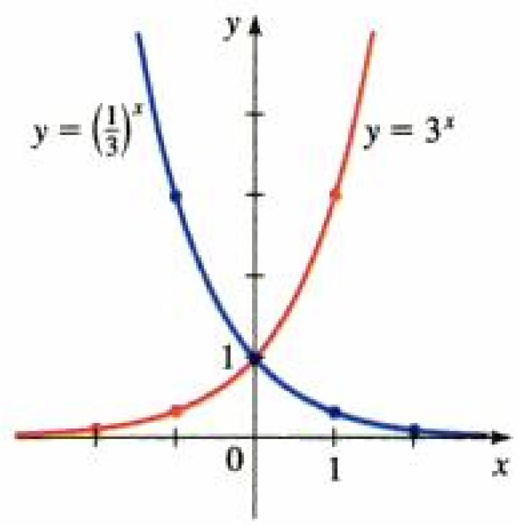


Figura 1

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

La reflexión de gráficas se explicó en la sección 2.4.

y, por lo tanto, se podría haber obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f mediante la reflexión en el eje y. ■

Para ver qué tan rápido crece $f(x) = 2^x$ se efectúa el siguiente experimento mental. Suponga que se empieza con una pieza de papel cuyo espesor es un milésimo de pulgada, y se dobla a la mitad 50 veces. Cada vez que se dobla el papel, se duplica el espesor de la pila de papel, así que el espesor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Qué espesor considera que es? ¡Resulta que son más de 17 millones de millas!

En la figura 2 se muestran las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para varios valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Se puede ver de la figura 2 que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial disminuye con rapidez. Si $a > 1$, la función se incrementa rápidamente (véase la nota al margen).

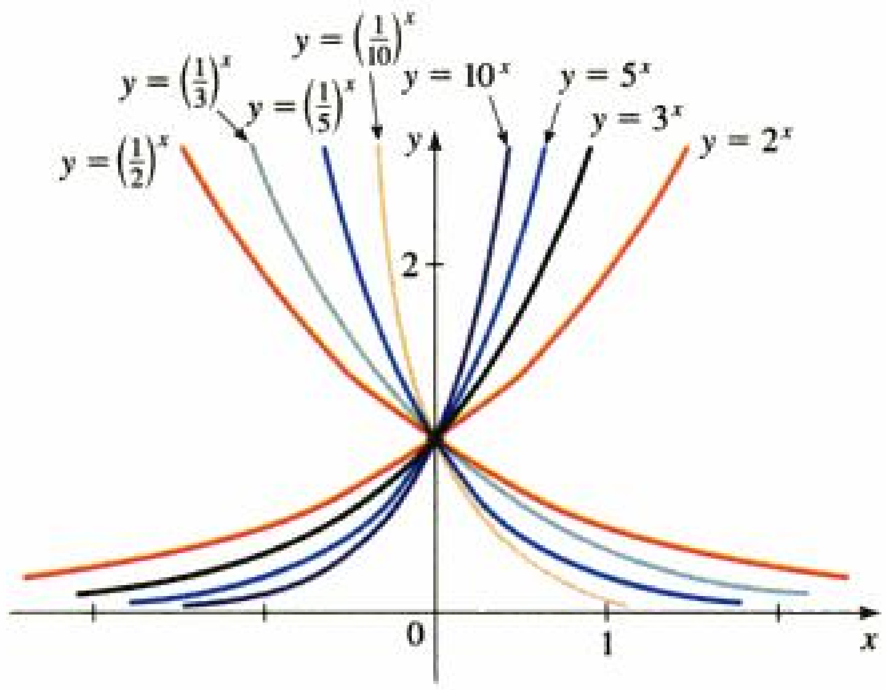


Figura 2

Una familia de funciones exponenciales

Véase la sección 3.6, página 301, donde se explica la notación de flecha usada aquí.

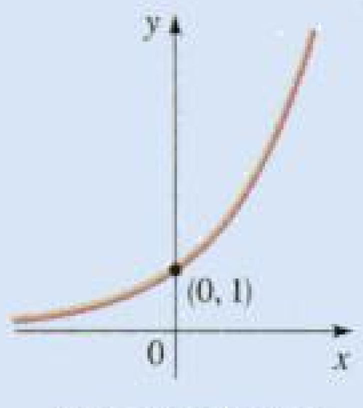
El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (véase la figura 2). Asimismo, $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, así que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

Funciones exponenciales de las gráficas

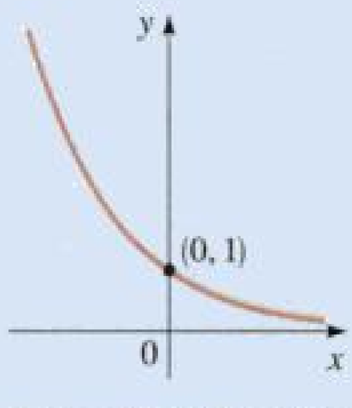
La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las formas siguientes.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Garry McMichael/Photo Researchers Inc.

El **arco Gateway** en San Luis Missouri, tiene la forma de la grafica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer en primera instancia). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

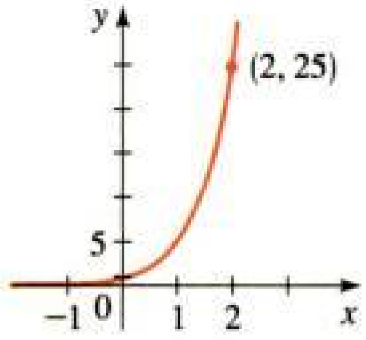
$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(véase el ejercicio 57). Se eligió esta forma porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Las cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes de teléfono) cuelgan en la forma de una catenaria.

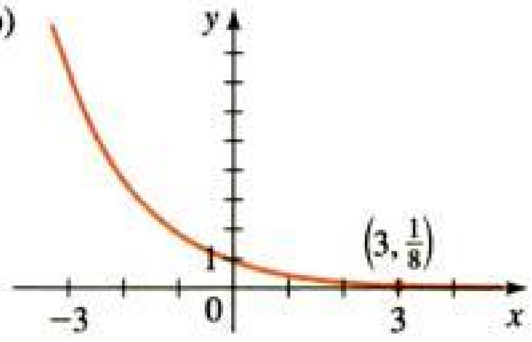
Ejemplo 3 Identificación de gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

a)



b)



Solución

a) Puesto que $f(2) = a^2 = 25$, se ve que la base es $a = 5$. Por lo tanto, $f(x) = 5^x$.

b) Puesto que $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, se ve que la base es $a = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ■

En el ejemplo siguiente se ve cómo graficar ciertas funciones, no mediante el trazo de puntos, sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la figura 2 y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la sección 2.4.

Ejemplo 4 Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para bosquejar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 1 + 2^x$ b) $h(x) = -2^x$ c) $k(x) = 2^{x-1}$

Solución

a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y se desplaza 1 unidad hacia arriba. Observe de la figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

b) De nuevo se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí se refleja en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ mostrada en la figura 3(b).

c) Esta vez se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y se desplaza a la derecha en 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ mostrada en la figura 3(c).

En la sección 2.4 se explicó el desplazamiento y la reflexión de gráficas.

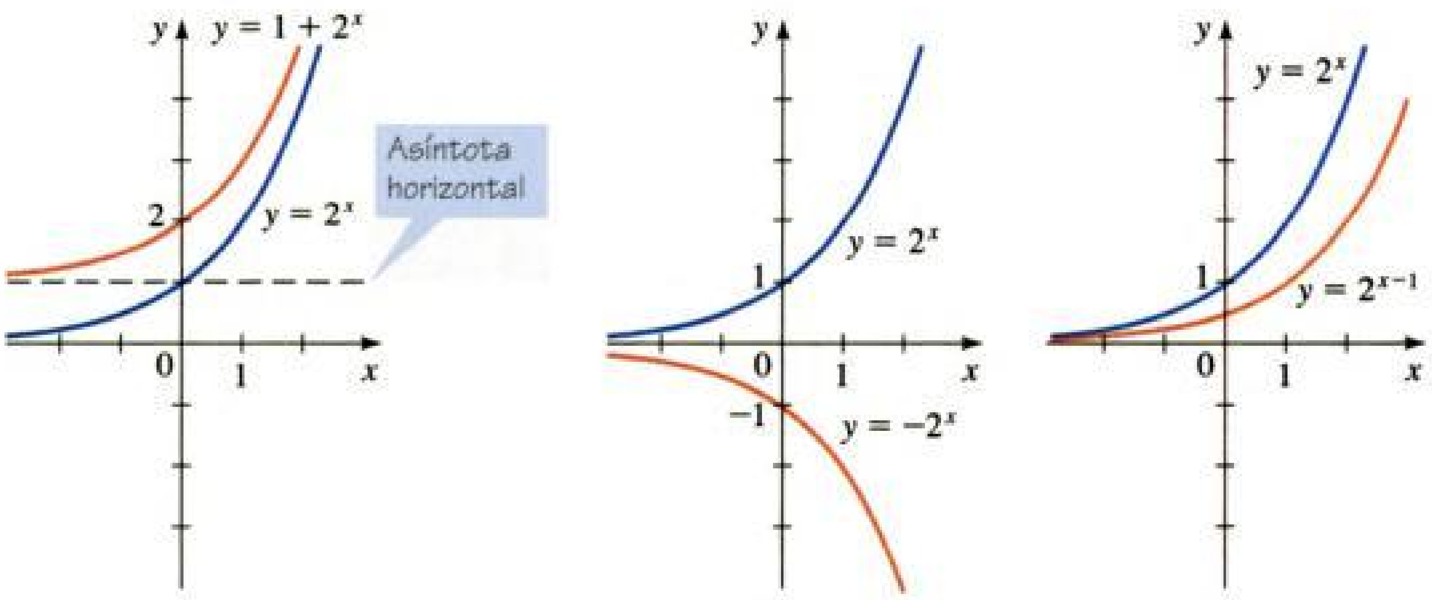


Figura 3 a) b) c) ■