Ejemplo 5 Comparación de funciones exponenciales y de potencia

Compare las tasas de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de visión.

a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$ b) $[0, 6]$ por $[0, 25]$

c) $[0, 20]$ por $[0, 1000]$

Solución

a) En la figura 4(a) se muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza a, y se vuelve mayor que, la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

b) El rectángulo de visión más grande de la figura 4(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ sobrepasa a la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

c) En la figura 4(c) se da una visión más global y se muestra que, cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho más grande que $g(x) = x^2$.

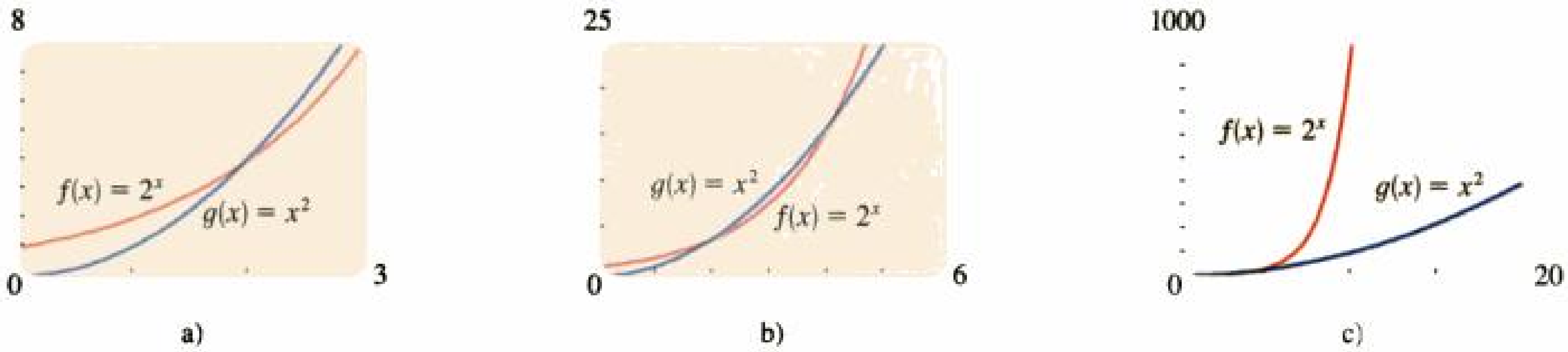


Figura 4

Función exponencial natural

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial, pero algunas bases se usan con más frecuencia que otras. Se verá en las secciones restantes de este capítulo que las bases 2 y 10 son convenientes para ciertas aplicaciones, pero la base más importante es el número denotado por la letra e.

El número e se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando n se vuelve grande. (En cálculo esta idea se hace más precisa por el concepto de límite. Véase el ejercicio 55.) En la tabla del margen se muestran los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores de n cada vez más grandes. Parece ser que, correcto hasta cinco cifras decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que e es un número racional, así que no se puede escribir su valor exacto en forma decimal.

La notación e la eligió Leonhard Euler (véase la página 288), probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.

¿Por qué usar una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer en primera instancia que es más fácil trabajar con una base como 10. Sin embargo, se verá que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. En esta sección se estudia cómo aparece e en la descripción del interés compuesto.

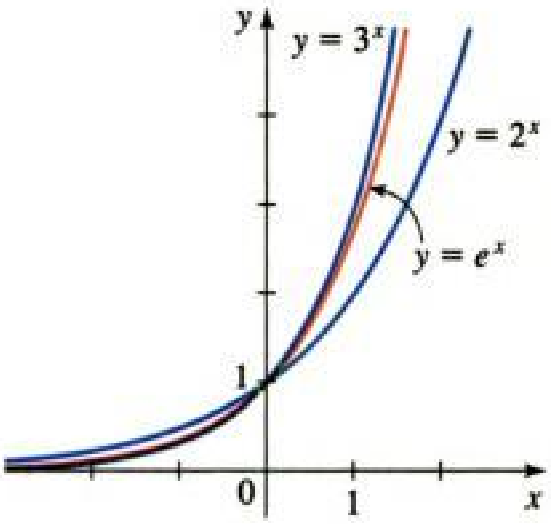


Figura 5
Gráfica de la función exponencial natural

La función exponencial natural

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

con base e. Es común referirse a ella como *la* función exponencial.

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura 5.

Las calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. En el ejemplo siguiente se usa esta tecla.

Ejemplo 6 Evaluar la función exponencial

Evalúe cada expresión correcta hasta cinco decimales.

a) e^3 b) $2e^{-0.53}$ c) $e^{4.8}$

Solución Se usa la tecla $\boxed{e^x}$ en una calculadora para evaluar la función exponencial.

a) $e^3 \approx 20.08554$

b) $2e^{-0.53} \approx 1.17721$

c) $e^{4.8} \approx 121.51042$ ■

Ejemplo 7 Transformaciones de la función exponencial

Bosqueje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = 3e^{0.5x}$

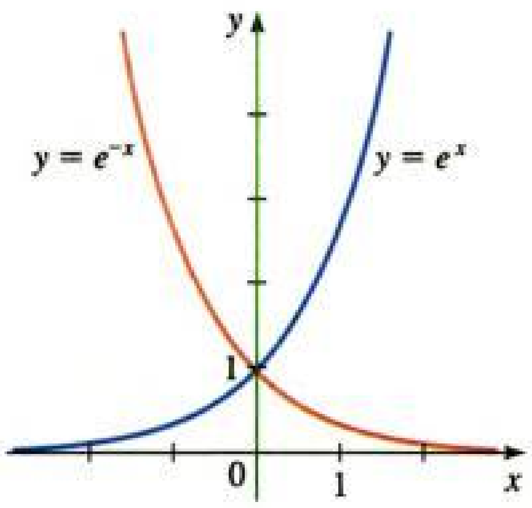


Figura 6

Solución

a) Se comienza con la gráfica de $y = e^x$ y se refleja en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la figura 6.

b) Se calculan varios valores, se grafican los puntos resultantes y se unen mediante una curva uniforme. La gráfica se muestra en la figura 7.

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

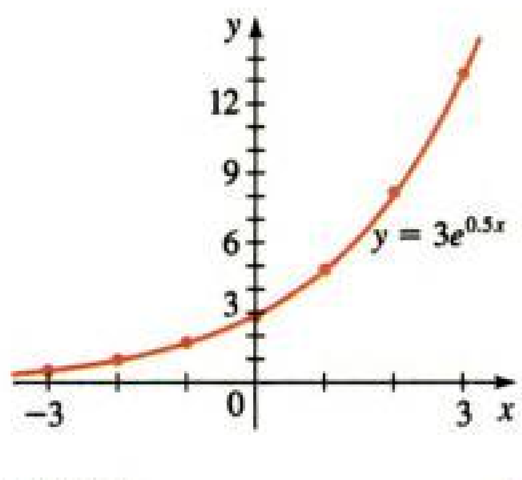


Figura 7 ■

Ejemplo 8 Un modelo exponencial para la diseminación de un virus

Una enfermedad infecciosa comienza a diseminarse en una ciudad pequeña con 10 000 habitantes. Después de t días, el número de personas que ha sucumbido al virus se modela mediante la función

$$v(t) = \frac{10\,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (en el tiempo $t = 0$)?

b) Calcule el número de personas infectas después de un día, dos días y cinco días.

c) Grafique la función v y describa su comportamiento.

Solución

a) Puesto que $v(0) = 10\,000/(5 + 1245e^0) = 10\,000/1250 = 8$, se concluye que 8 personas tienen inicialmente la enfermedad.

b) Utilice una calculadora para evaluar $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$, y después redondee para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

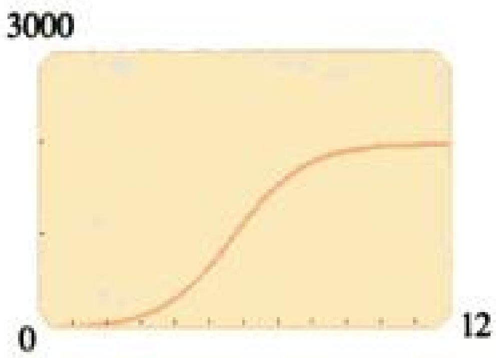


Figura 8
$v(t) = \dfrac{10\,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$

c) De la gráfica en la figura 8, se puede observar que el número de personas infectadas primero se eleva en forma lenta; luego aumenta con rapidez entre el día 3 y el día 8, y luego se estabiliza cuando están infectadas cerca de 2000 personas. ■

La gráfica de la figura 8 se llama *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como éstas ocurren con frecuencia en el estudio del crecimiento poblacional. (Véanse los ejercicios 69-72.)

Interés compuesto

Las funciones exponenciales aparecen en el cálculo del interés compuesto. Si la cantidad de dinero P, conocido como **principal**, se invierte a una tasa de interés i por periodo, entonces después de un periodo el interés es Pi, y la cantidad de dinero A es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si se reinvierte el interés, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro periodo es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. De manera similar, después de un tercer periodo la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k periodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Hay que observar que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se compone n veces por año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt periodos en t años. Esto conduce a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

Interés compuesto

El **interés compuesto** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde $A(t)$ = cantidad después de t años

P = principal

r = tasa de interés por año

n = número de veces que el interés de compone por año

t = número de años

r se conoce como la *tasa de interés anual nominal.*

Ejemplo 9 Cálculo del interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% anual. Calcule las cantidades en la cuenta después de tres años si el interés se compone anualmente, cada medio año, por trimestre, mensualmente o diario.

Solución Se usa la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$, y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semianual	2	$1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

■

Se puede observar del ejemplo 9 que el pago de interés se incrementa conforme crece el número n de periodos de capitalización. Veamos qué sucede cuando n se incrementa de forma indefinida. Si $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m crece, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número e. Así, la cantidad tiende a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se compone a "cada instante".

Interés compuesto en forma continua

El **interés compuesto en forma continua** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años

$P =$ principal

$r =$ tasa de interés por año

$t =$ número de años

Ejemplo 10 Calcular el interés compuesto de manera continua

Calcule la cantidad después de tres años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizados de forma continua.

Solución Se usa la fórmula del interés capitalizable en forma continua con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del ejemplo 9. ■

4.1 Ejercicios

1–4 ■ Use una calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $f(x) = 4^x$; $f(0.5), f(\sqrt{2}), f(\pi), f(\frac{1}{3})$

2. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5), f(\sqrt{3}), f(e), f(-\frac{5}{4})$

3. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$; $g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g(-\frac{1}{2})$

4. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7), g(\sqrt{7}/2), g(1/\pi), g(\frac{2}{3})$

5–10 ■ Bosqueje la gráfica de la función construyendo una tabla de valores. Use una calculadora si es necesario.

5. $f(x) = 2^x$

6. $g(x) = 8^x$

7. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

8. $h(x) = (1.1)^x$

9. $g(x) = 3e^x$

10. $h(x) = 2e^{-0.5x}$

11–14 ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

11. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

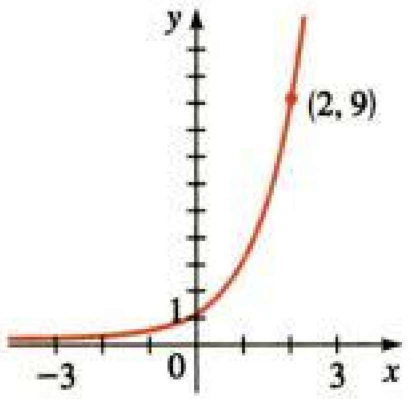
12. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

13. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

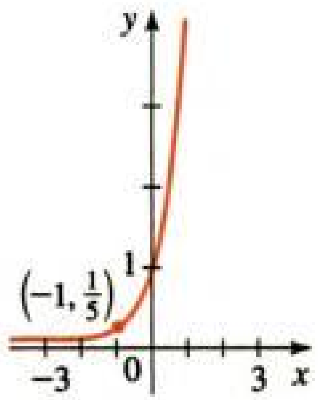
14. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

15–18 ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se muestra.

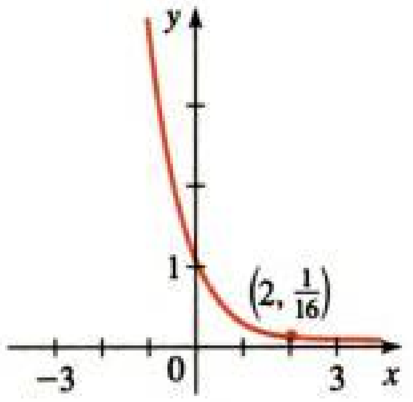
15.



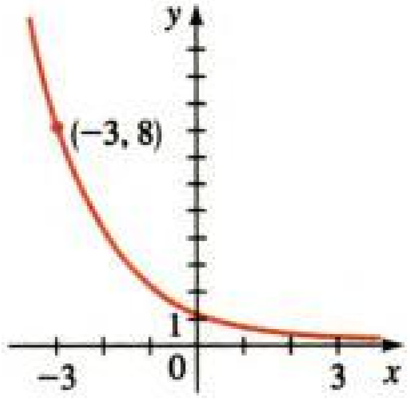
16.



17.



18.



19–24 ■ Compare la función exponencial con una de las gráficas marcadas I-VI.

19. $f(x) = 5^x$

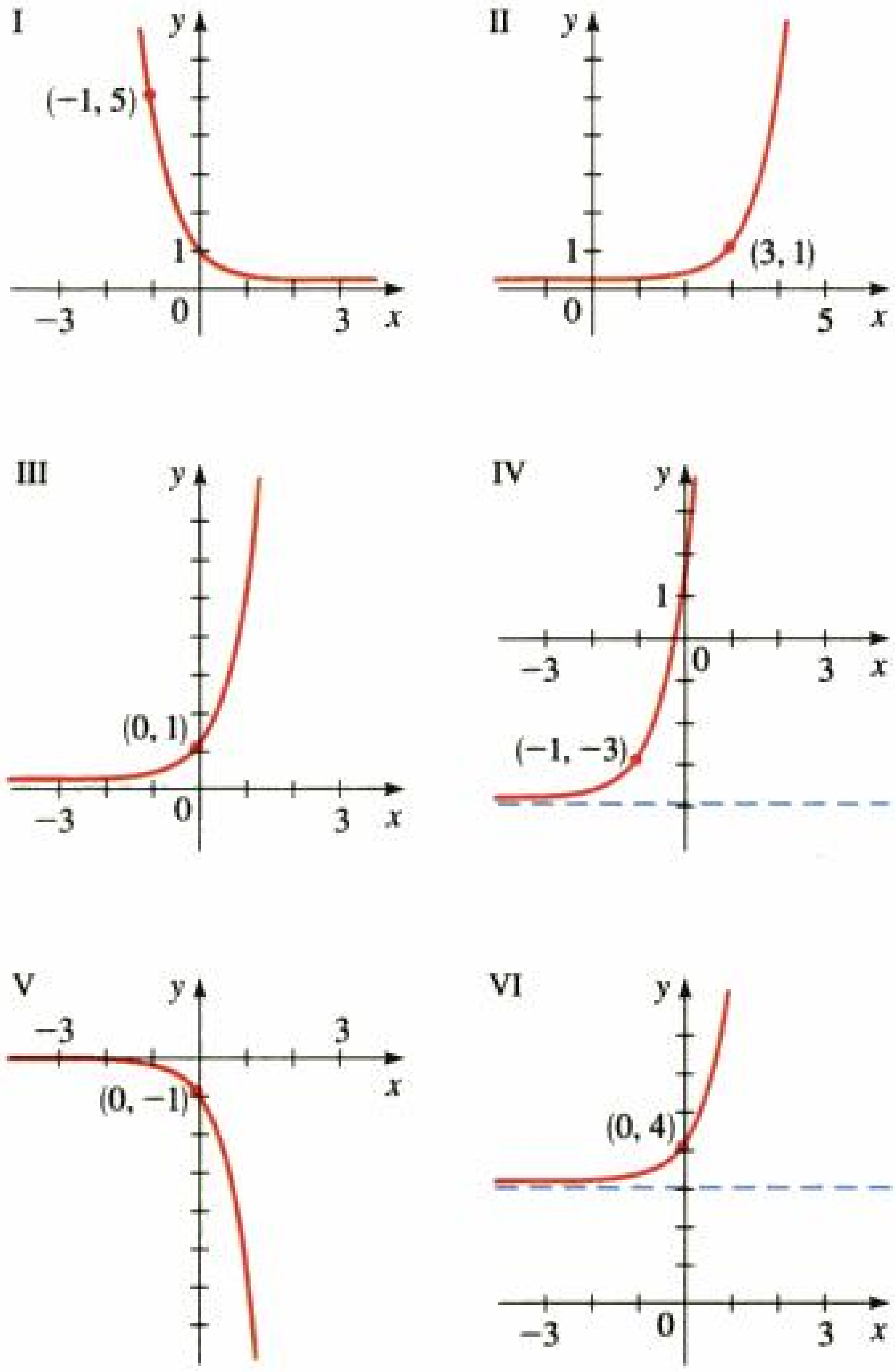
20. $f(x) = -5^x$

21. $f(x) = 5^{-x}$

22. $f(x) = 5^x + 3$

23. $f(x) = 5^{x-3}$

24. $f(x) = 5^{x+1} - 4$



25–38 ■ Grafique la función, no trace los puntos, sino más bien utilice las gráficas de las figuras 2 y 5. Exprese el dominio, rango y la asíntota.

25. $f(x) = -3^x$

26. $f(x) = 10^{-x}$

27. $g(x) = 2^x - 3$

28. $g(x) = 2^{x-3}$

29. $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

30. $h(x) = 6 - 3^x$

31. $f(x) = 10^{x+3}$

32. $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

33. $f(x) = -e^x$

34. $y = 1 - e^x$

35. $y = e^{-x} - 1$

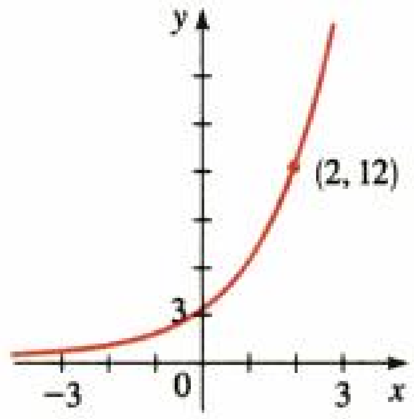
36. $f(x) = -e^{-x}$

37. $f(x) = e^{x-2}$

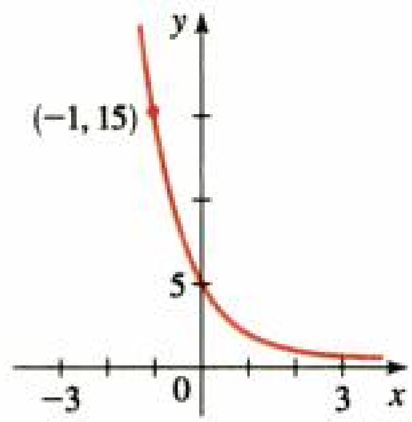
38. $y = e^{x-3} + 4$

39–40 ■ Encuentre la función de la forma $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica es la siguiente.

39.



40.



41. **a)** Bosqueje las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.

b) ¿Cómo se relacionan las gráficas?

42. **a)** Bosqueje las gráficas de $f(x) = 9^{x/2}$ y $g(x) = 3^x$.

b) Use las leyes de los exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

43. Si $f(x) = 10^x$, muestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right)$$

44. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ evaluando ambas para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$ y 20. Luego dibuje las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

45. La *función coseno hiperbólico* se define mediante

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Bosqueje las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y use la adición gráfica (véase la sección 2.7) para bosquejar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

46. La *función seno hiperbólico* se define como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dibuje la gráfica de esta función usando la adición gráfica como en el ejercicio 45.

47–50 ■ Use las definiciones de los ejercicios 45 y 46 para probar la identidad.

47. $\cosh(-x) = \cosh(x)$

48. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$

49. $[\cosh(x)]^2 - [\operatorname{senh}(x)]^2 = 1$

50. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

51. **a)** Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de división

i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$

ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$

iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$

b) Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, correctas hasta un decimal.

52. **a)** Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de visión:

i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$ ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$

iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$

b) Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = x^4$, correctas hasta dos decimales.

53–54 ■ Dibuje las gráficas de la familia de funciones para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

53. $f(x) = c2^x$ **54.** $f(x) = 2^{cx}$

55. Ilustre la definición del número e graficando la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visión $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

56. Investigue el comportamiento de la función

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

cuando $x \to \infty$ graficando f y la recta $y = 1/e$ en la misma pantalla con el rectángulo de visión $[0, 20]$ por $[0, 1]$.

57. **a)** Dibuje las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5, 1, 1.5$ y 2.

b) ¿Cómo afecta a la gráfica un valor más grande de a?

58–59 ■ Grafique la función y comente acerca de las asíntotas vertical y horizontal.

58. $y = 2^{1/x}$ **59.** $y = \dfrac{e^x}{x}$

60–61 ■ Encuentre los valores locales máximo y mínimo de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta hasta dos decimales.

60. $g(x) = x^x \quad (x > 0)$ **61.** $g(x) = e^x + e^{-3x}$

62–63 ■ Encuentre, correctos hasta dos decimales, los intervalos en los que la función crece o disminuye y b) el rango de la función.

62. $y = 10^{x-x^2}$ **63.** $y = xe^{-x}$

Aplicaciones

64. Fármacos Cuando se administró cierto fármaco a un paciente, el número de miligramos que permanecen en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas se modela mediante

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos del fármaco permanecen en el torrente sanguíneo del paciente después de tres horas?

65. Decaimiento radiactivo Una sustancia radiactiva se desintegra de tal manera que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

b) ¿Cuánta masa permanece después de 45 días?

66. Decaimiento radiactivo Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

b) ¿Cuánta masa queda después de 20 días?

67. Paracaidismo Un paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso del paracaidista en el tiempo t se expresa como

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

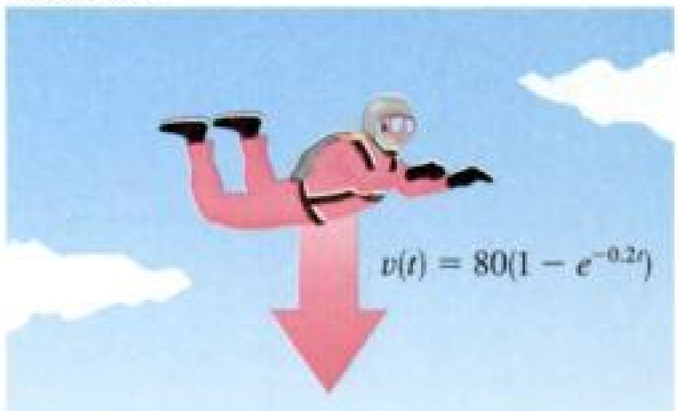
donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

a) Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.

b) Calcule la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

c) Dibuje la gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

d) La velocidad máxima de un objeto que cae con resistencia del viento se llama su *velocidad terminal*. De la gráfica del inciso c) encuentre la velocidad terminal de este paracaidista.



68. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo con agua pura. A continuación se bombea hacia el barril agua salada con una concentración de 0.3 lb/gal, y la mezcla resultante sale a la misma tasa. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t se determina mediante

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

a) ¿Cuánta sal está en el barril después de 5 min?

b) ¿Cuánta sal está en el barril después de 10 min?

c) Dibuje una gráfica de la función $Q(t)$.

d) Use la gráfica del inciso c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal en el barril cuando t se vuelve grande. ¿Es esto lo que esperaría?

$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$

69. Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimento. En tales condiciones la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*

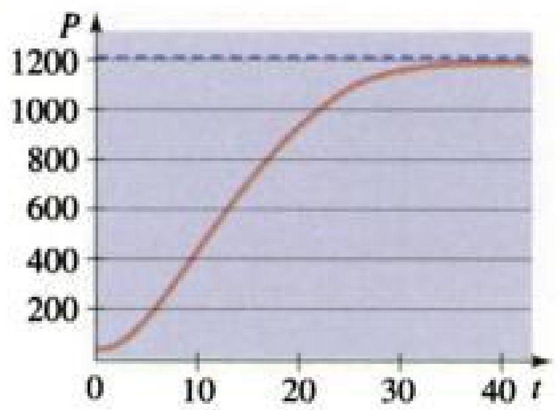
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces, en un pequeño estanque $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$, y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

a) ¿Cuántos peces se colocaron originalmente en el estanque?

b) Calcule la población después de 10, 20 y 30 años.

c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor tiende la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica mostrada confirma sus cálculos?



70. Población de aves La población de cierta especie de ave está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

dondee t se mide en años.

a) Encuentre la población inicial de aves.

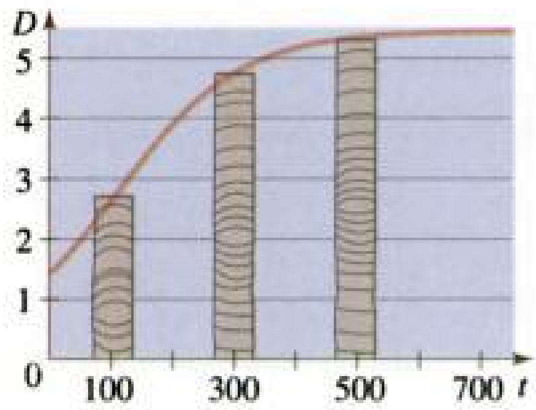
b) Dibuje la gráfica de la función $n(t)$.

c) ¿Qué tamaño tiene la población cuando el tiempo avanza?

71. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árbol el diámetro D (en pies) depende de la edad del árbol t (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Determine el diámetro de un árbol de 20 años.



72. Población de conejos Suponga que una población de conejos se comporta de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$n(t) = \frac{300}{0.05 + \left(\frac{300}{n_0} - 0.05\right)e^{-0.55t}}$$

donde n_0 es la población inicial de conejos.

a) Si la población inicial es 50 conejos, ¿cuál será la población después de 12 años?

b) Dibuje las gráficas de la función $n(t)$ para $n_0 = 50, 500, 2000, 8000$ y $12\,000$ en el rectángulo de visión $[0, 15]$ por $[0, 12\,000]$.

c) De las gráficas del inciso b), observe que, sin importar la población inicial, la población de conejos al parecer se aproxima a cierto número conforme el tiempo avanza. ¿Cuál es ese número? (Este es el número de conejos que puede soportar la isla.)

73–74 ■ Interés compuesto Una inversión de 5000 dólares se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla llenando las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o las tasas de interés.

73. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

74. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

75. Interés compuesto Si se invierten 10 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, capitalizable semianualmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.

a) 5 años
b) 10 años
c) 15 años

76. Interés compuesto Si se ahorran 4000 dólares a una tasa de interés de 16% por año, capitalizable trimestralmente, encuentre la cantidad debida al final del número de años dado

a) 4 años
b) 6 años
c) 8 años

77. Interés compuesto Si se invierten 3000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para los siguientes métodos de capitalización.

a) Anual
b) Semianual
c) Mensual
d) Semanal
e) Por día
f) Por hora
g) De manera continua

78. Interés compuesto Si se invierten 4000 dólares en una cuenta para la cual el interés se capitaliza trimestralmente, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para las siguientes tasas de interés.

a) 6% **b)** $6\frac{1}{2}\%$
c) 7% **d)** 8%

79. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y periodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?

i) $8\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizable cada medio año
ii) $8\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable trimestralmente
iii) 8% por año, capitalizable de forma continua

80. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y periodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?

i) $9\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable cada medio año
ii) 9% por año, capitalizable de forma continua

81. Valor presente El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que se debe invertir ahora, a una determinada tasa de interés, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

a) Encuentre el valor presente de 10 000 dólares si se paga interés a una tasa de 9% por año, capitalizable cada medio año, durante tres años.
b) Encuentre el valor presente de 100 000 dólares si se paga interés a una tasa de 8% por año, capitalizable mensualmente, durante 5 años.

82. Inversión Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, capitalizable cada medio año.

a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
b) Dibuje una gráfica de $A(t)$.
c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión llega a 25 000 dólares.

Descubrimiento • Debate

83. Crecimiento de una función exponencial Suponga que le ofrecen un empleo que dura un mes, y se le pagará muy bien. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago es más rentable para usted?

a) Un millón de dólares al final del mes.
b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día y, en general, 2^n centavos en el n-ésimo día.

84. Altura de la gráfica de una función exponencial Su profesor de matemáticas le pide trazar una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades para una pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Explosión exponencial

Como ayuda para entender cómo es el crecimiento exponencial explosivo, se probará un experimento mental.

Suponga que hoy coloca una moneda de un centavo de dólar en su alcancía, dos centavos mañana, cuatro centavos el siguiente día, etcétera, duplicando el número de monedas que agrega a la alcancía cada día (véase la tabla). ¿Cuántas monedas de un centavo habrá colocado en su alcancía en el día 30? La respuesta es 2^{30} centavos. Eso es simple, ¿pero puede adivinar cuántos dólares es esa cantidad? ¡2^{30} centavos son más de 10 millones de dólares!

Día	Centavos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
$\vdots$	$\vdots$
n	2^n
$\vdots$	$\vdots$

Como se puede observar, la función exponencial $f(x) = 2^x$ crece con extrema rapidez. Este es el principio detrás de las explosiones atómicas. Cuando un átomo se divide libera dos neutrones, que causan la división de dos átomos, y cada uno libera dos neutrones, que a su vez provocan la división de cuatro átomos, y así sucesivamente. En la n-ésima etapa se dividen 2^n átomos, ¡una explosión exponencial!

Las poblaciones también crecen de forma exponencial. Veamos qué significa esto para un tipo de bacteria que se divide cada minuto. Suponga que al mediodía una sola bacteria coloniza una lata de comida desechada. La bacteria y sus descendientes son felices, pero temen el momento cuando la lata esté completamente llena de bacterias, el Día del juicio final.

1. ¿Cuántas bacterias hay en la lata a las 12:05? ¿A las 12:10?
2. La lata está completamente llena de bacterias a la 1:00 P.M. ¿A qué hora la lata tenía la mitad de bacterias?
3. Cuando la lata tiene la mitad de bacterias, el presidente de la colonia asegura a sus ciudadanos que está lejos el día del juicio final; después de todo, queda tanto espacio en la lata como el que se ha usado en toda la historia previa de la colonia. ¿Está en lo correcto el presidente? ¿Cuánto tiempo queda antes del Día del juicio final?
4. Cuando la lata está llena a un cuarto, ¿cuánto resta para el Día del juicio final?
5. Una bacteria sabia decide empezar una nueva colonia en otra lata y reducir el tiempo de división a 2 minutos. ¿Cuánto tiempo tiene esta nueva colonia?

4.2 Funciones logarítmicas

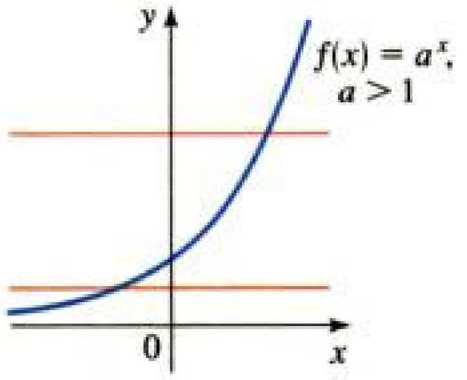


Figura 1
$f(x) = a^x$ es uno a uno

En esta sección se estudia la inversa de las funciones exponenciales.

Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función uno a uno por la prueba de la recta horizontal (véase la figura 1 para el caso $a > 1$) y, por lo tanto, tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se llama *función logarítmica con base a* y se denota por $\log_a$. Recuerde de la sección 2.8 que f^{-1} se define por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto conduce a la siguiente definición de la función logarítmica.

Definición de la función logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el *exponente* al que se debe elevar la base a para dar x.

El $\log_a x = y$ se lee como "el log base a de x es y".

Cuando se usa la definición de logaritmos para intercambiar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Por tradición, el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una sola letra. También, normalmente se omiten los paréntesis en la notación de función y se escribe

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

Ejemplo 1 Formas logarítmica y exponencial

Las formas logarítmica y exponencial son ecuaciones equivalentes, si una es cierta entonces la otra también lo es. Por lo tanto, se puede intercambiar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100\,000 = 5$	$10^5 = 100\,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

■

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los nú-

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

meros de la columna izquierda. Este es el caso para todas las bases, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Evaluar los logaritmos

a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$ ■

Propiedad de la función inversa:

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

Cuando se aplica la propiedad de la función inversa descrita en la página 227 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se obtiene

$$\log_a(a^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$$

Se listan ésta y otras propiedades de logaritmos analizadas en esta sección.

Propiedades de los logaritmos

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x.

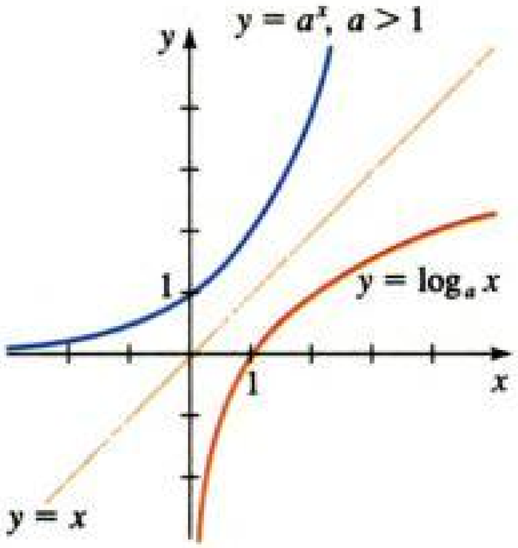


Figura 2
Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Ejemplo 3 Aplicar las propiedades de los logaritmos

Se ilustran las propiedades de los logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$ Propiedad 1 $\quad$ $\log_5 5 = 1$ Propiedad 2

$\log_5 5^8 = 8$ Propiedad 3 $\quad$ $5^{\log_5 12} = 12$ Propiedad 4 ■

Gráficas de funciones logarítmicas

Hay que recordar que si una función f uno a uno tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Puesto que la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, se concluye que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. En la figura 2 se muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función que crece muy rápido para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función que crece muy lento para $x > 1$ (véase el ejercicio 84).

La notación de flecha se explica en la página 301.

Puesto que $\log_a 1 = 0$, la intersección con el eje x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

Matemáticas en el mundo moderno

Bettmann/Corbis

Hulton/Deutch Collection/Corbis

Cumplimiento de la ley

Las matemáticas ayudan al cumplimiento de la ley en formas numerosas y sorprendentes, desde la reconstrucción de trayectorias de bala, determinar la hora de una muerte, hasta calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una determinada persona. Un uso interesante es en la investigación de personas extraviadas. Si una persona ha estado perdida durante varios años, esa persona podría tener un aspecto bastante distinto del de su fotografía más reciente disponible. Esto es particularmente cierto si la persona extraviada es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado cómo se vería 5, 10 o 15 años a partir de ahora?

Los investigadores han encontrado que diferentes partes del cuerpo crecen a distintas tasas. Por ejemplo, habrá notado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la de un adulto. Como otro ejemplo, la relación de largo del brazo a la altura es $\frac{1}{3}$ en un niño, pero cerca de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Mediante la recolección de datos y el análisis de gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Como en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan un papel crucial. Por ejemplo, la fórmula que relaciona el largo del brazo l con la altura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes.

(continúa)

Ejemplo 4 Graficación de una función logarítmica mediante el trazo de puntos

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

Solución Para construir una tabla de valores, se eligen los valores x como potencias de 2 de modo que pueda hallar con facilidad sus logaritmos. Se grafican estos puntos y se unen con una curva lisa como en la figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

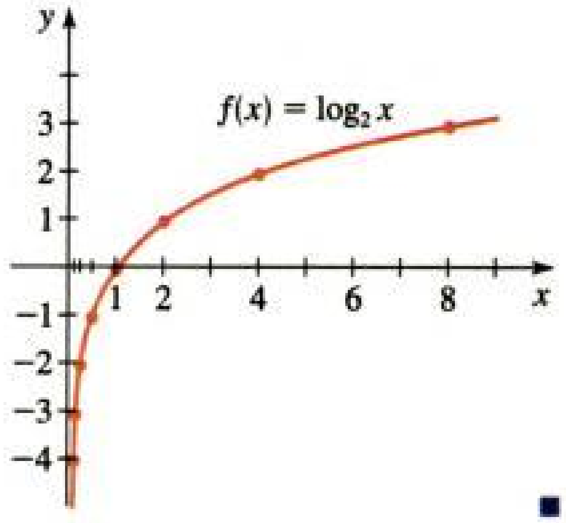


Figura 3 ■

En la figura 4 se muestran las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se dibujan reflejando las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (véase la figura 2 en la sección 4.1) en la línea $y = x$. Se pueden trazar también puntos como ayuda para bosquejar estas gráficas, como se ilustra en el ejemplo 4.

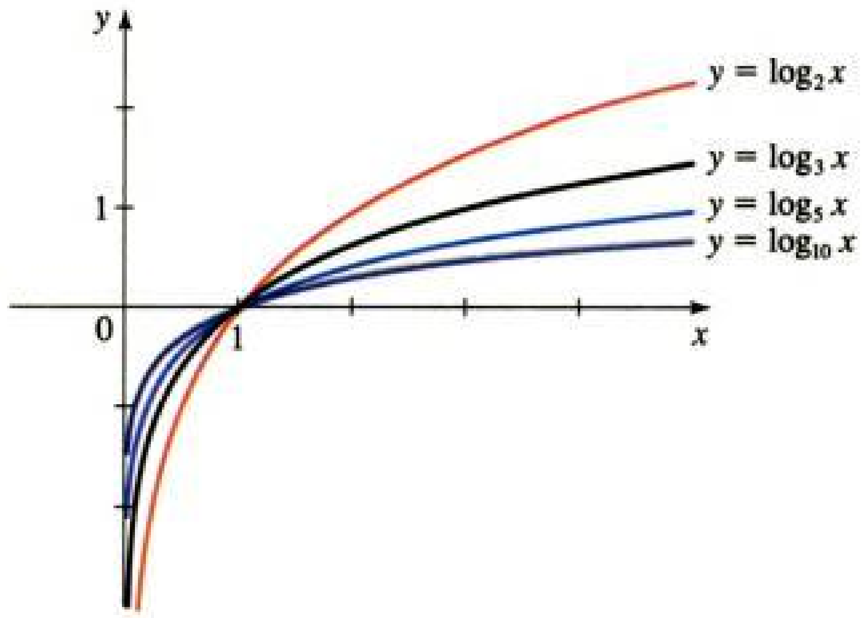


Figura 4
Una familia de funciones logarítmicas

En los dos ejemplos siguientes se grafican funciones logarítmicas comenzando con las gráficas básicas de la figura 4 y usando las transformaciones de la sección 2.4.

Al estudiar varias características físicas de una persona, los biólogos matemáticos modelan cada característica mediante una función que describe cómo cambia con el tiempo. Los modelos de características faciales se pueden programar en una computadora para dar una fotografía de cómo cambia la apariencia de una persona con el tiempo. Estas fotografías ayudan a las agencias encargadas de ejercer la ley para localizar a personas extraviadas.

Ejemplo 5 Reflexión de gráficas de funciones logarítmicas

Bosqueje la gráfica de cada función.

a) $g(x) = -\log_2 x$ b) $h(x) = \log_2(-x)$

Solución

a) Se comienza con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y se refleja en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la figura 5(a).

b) Se comienza con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y se refleja en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la figura 5(b).

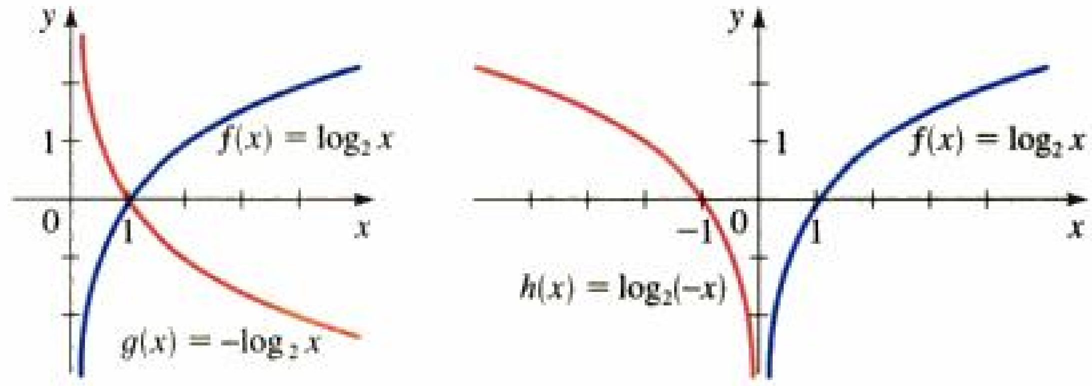


Figura 5 ■

Ejemplo 6 Desplazamiento de gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y bosqueje la gráfica.

a) $g(x) = 2 + \log_5 x$ b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

Solución

a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (figura 4) desplazándola dos unidades (véase figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

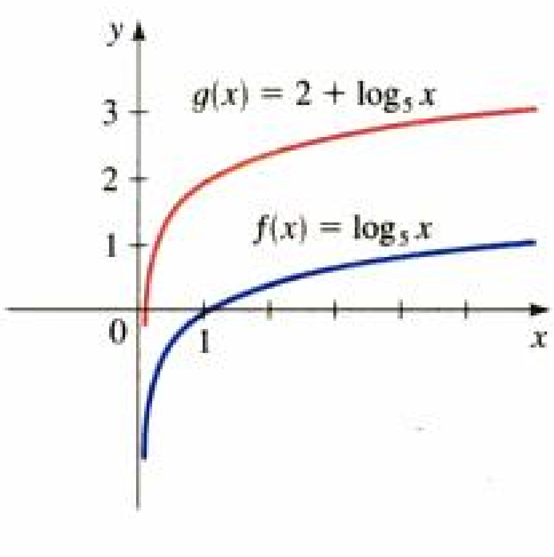
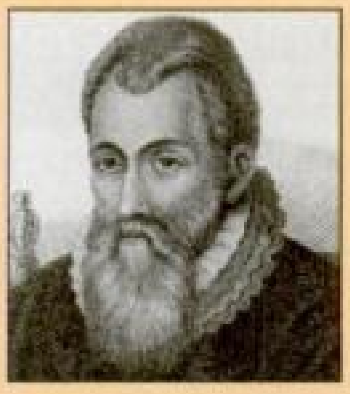


Figura 6

b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (figura 4) desplazándola a la derecha tres unidades (véase la figura 7 en la página siguiente). La



John Napier (1550-1617) fue un terrateniente escocés cuyo pasatiempo eran las matemáticas. Lo conocemos hoy día debido a su invento: los logaritmos, que publicó en 1614 bajo el título *Description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos se usaban exclusivamente para simplificar cálculos complicados. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes se escribirían como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261\,872\,564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (simplemente se suman sus exponentes). Napier produjo tablas extensas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde la llegada de las calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito. Sin embargo, las funciones logarítmicas han encontrado muchas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre muchos temas. Uno de sus trabajos más pintorescos es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predice que el mundo terminaría en el año 1700.

recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Puesto que $\log_{10} x$ se define sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

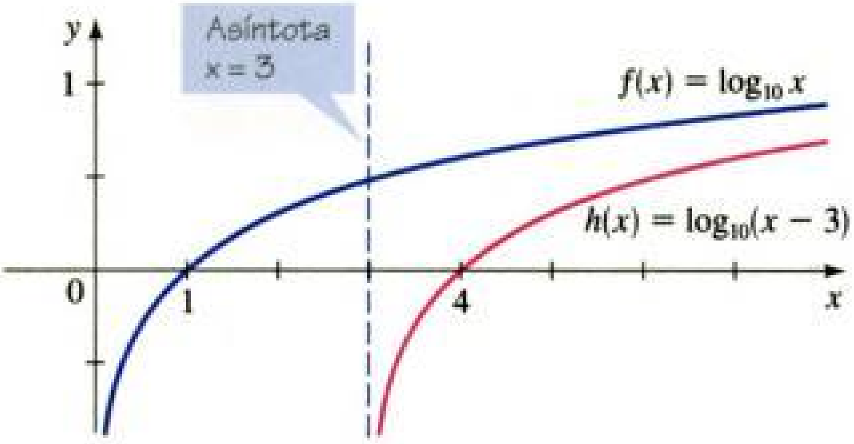


Figura 7

■

Logaritmos comunes

Ahora se estudian logaritmos con base 10.

Logaritmo común

El logaritmo con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos se puede encontrar fácilmente que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero, ¿cómo se calcula log 50? Se necesita hallar el exponente y tal que $10^y = 50$. Es evidente que 1 es muy pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto,

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, se puede intentar hallar una potencia de 10 más próxima a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que da de manera directa los valores de logaritmos comunes.

Ejemplo 7 Evaluación de logaritmos comunes

Use una calculadora para hallar los valores apropiados de $f(x) = \log x$ y use los valores para bosquejar la gráfica.

Solución Se construye una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en esos valores de x que no son potencias de 10. Se grafican esos puntos y se unen mediante una curva suave como en la figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

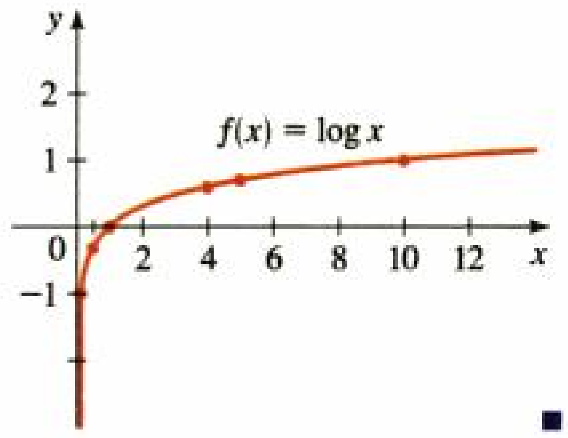
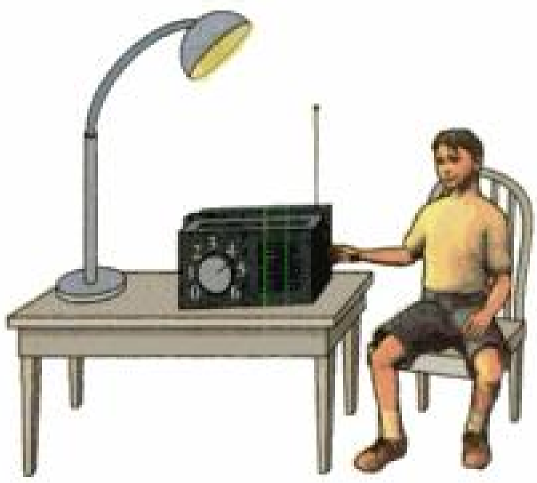


Figura 8 ■



La respuesta humana al sonido y a la intensidad luminosa es logarítmica

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (como sonido, luz o presión) por medio de funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido se debe incrementar muchas veces antes de percibir que la sonoridad se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa la intensidad física umbral y k es una constante que es diferente en cada estímulo sensorial.

Ejemplo 8 Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la sonoridad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

La escala de decibeles se estudia en la sección 4.5.

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (sonoridad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

Solución El nivel B de decibeles se encuentra usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancelar } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La sonoridad del sonido es 20 dB. ■

Logaritmos naturales

De las posibles bases a para logaritmos, resulta que la elección más conveniente para los propósitos de cálculo es el número e, que se definió en la sección 4.1.

La notación ln es una abreviatura para la palabra en latín *logarithmus naturalis.*

Logaritmo natural

El logaritmo con base e se llama **logaritmo natural** y se denota por **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Ambas funciones se grafican en la figura 9. Por la definición de funciones inversas, se tiene

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

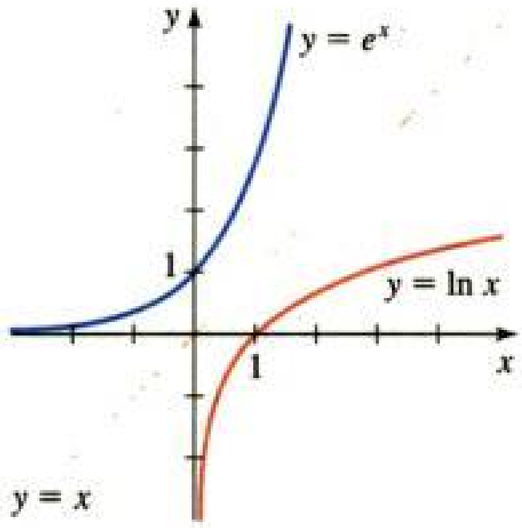


Figura 9
Gráfica de la función logarítmica natural

Si se sustituye $a = e$ y se escribe "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos mencionadas antes, se obtienen las siguientes propiedades de los logaritmos naturales.

Propiedades de los logaritmos naturales

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Se tiene que elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Se tiene que elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Se tiene que elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la cual e debe ser elevada para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla $\boxed{\text{LN}}$ que da de manera directa los valores de los logaritmos naturales.

Ejemplo 9 Evaluar la función logaritmo natural

a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla $\boxed{\text{LN}}$ en la calculadora ■

Ejemplo 10 Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Solución Como con cualquier función logarítmica, $\ln x$ se define cuando $x > 0$. Por lo tanto, el dominio de f es

$$\begin{aligned}\{x \mid 4 - x^2 > 0\} &= \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} \\ &= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)\end{aligned}$$

■

Ejemplo 11 Dibujar la gráfica de una función logarítmica

Dibuje la gráfica de la función $y = x\ln(4 - x^2)$ y empléela para hallar las asíntotas y valores locales máximo y mínimo.

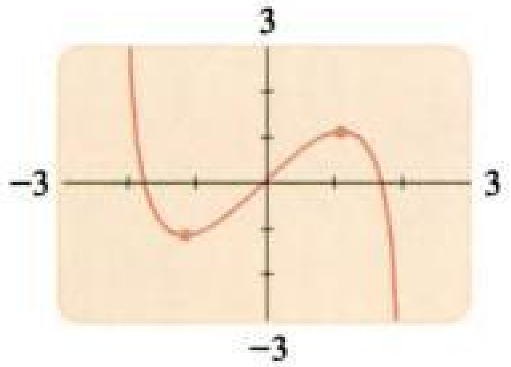


Figura 10
$y = x\ln(4 - x^2)$

Solución Como en el ejemplo 10 el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, así que se elige el rectángulo de visión $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la figura 10, y de ésta se ve que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer un acercamiento y seguir la gráfica con el cursor, se encuentra que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. De manera similar (o al observar que la función es impar), se encuentra que el valor mínimo local es casi -1.13, y ocurre cuando $x \approx -1.15$. ■

4.2 Ejercicios

1–2 ■ Complete la tabla con la forma exponencial logarítmica apropiada de la ecuación, como en el ejemplo 1.

1.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

2.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

3–8 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

3. **a)** $\log_5 25 = 2$ **b)** $\log_5 1 = 0$

4. **a)** $\log_{10} 0.1 = -1$ **b)** $\log_8 512 = 3$

5. **a)** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

6. **a)** $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

7. **a)** $\ln 5 = x$ **b)** $\ln y = 5$

8. **a)** $\ln(x + 1) = 2$ **b)** $\ln(x - 1) = 4$

9–14 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

9. **a)** $5^3 = 125$ **b)** $10^{-4} = 0.0001$

10. **a)** $10^3 = 1000$ **b)** $81^{1/2} = 9$

11. **a)** $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

12. **a)** $4^{-3/2} = 0.125$ **b)** $7^3 = 343$

13. **a)** $e^x = 2$ **b)** $e^3 = y$

14. **a)** $e^{x+1} = 0.5$ **b)** $e^{0.5x} = t$

15–24 ■ Evalúe la expresión.

15. **a)** $\log_3 3$ **b)** $\log_3 1$ **c)** $\log_3 3^2$

16. **a)** $\log_5 5^4$ **b)** $\log_4 64$ **c)** $\log_9 9$

17. **a)** $\log_6 36$ **b)** $\log_9 81$ **c)** $\log_7 7^{10}$

18. **a)** $\log_2 32$ **b)** $\log_8 8^{17}$ **c)** $\log_6 1$

19. **a)** $\log_3(\frac{1}{27})$ **b)** $\log_{10}\sqrt{10}$ **c)** $\log_5 0.2$

20. **a)** $\log_5 125$ **b)** $\log_{49} 7$ **c)** $\log_9\sqrt{3}$

21. **a)** $2^{\log_2 37}$ **b)** $3^{\log_3 8}$ **c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

22. **a)** $e^{\ln\pi}$ **b)** $10^{\log 5}$ **c)** $10^{\log 87}$

23. **a)** $\log_8 0.25$ **b)** $\ln e^4$ **c)** $\ln(1/e)$

24. **a)** $\log_4\sqrt{2}$ **b)** $\log_4(\frac{1}{2})$ **c)** $\log_4 8$

25–32 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

25. **a)** $\log_2 x = 5$ **b)** $\log_2 16 = x$

26. **a)** $\log_5 x = 4$ **b)** $\log_{10} 0.1 = x$

27. **a)** $\log_3 243 = x$ **b)** $\log_3 x = 3$

28. **a)** $\log_4 2 = x$ **b)** $\log_4 x = 2$

29. **a)** $\log_{10} x = 2$ **b)** $\log_5 x = 2$

30. **a)** $\log_x 1000 = 3$ **b)** $\log_x 25 = 2$

31. **a)** $\log_x 16 = 4$ **b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

32. **a)** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

33–36 ■ Use una calculadora para evaluar la expresión, correcta hasta cuatro decimales.

33. **a)** $\log 2$ **b)** $\log 35.2$ **c)** $\log(\frac{2}{3})$

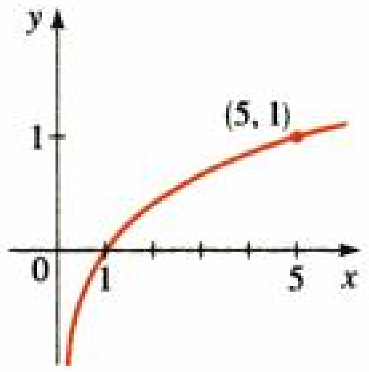
34. **a)** $\log 50$ **b)** $\log\sqrt{2}$ **c)** $\log(3\sqrt{2})$

35. **a)** $\ln 5$ **b)** $\ln 25.3$ **c)** $\ln(1+\sqrt{3})$

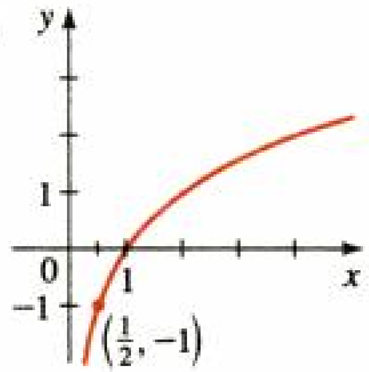
36. **a)** $\ln 27$ **b)** $\ln 7.39$ **c)** $\ln 54.6$

37–40 ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

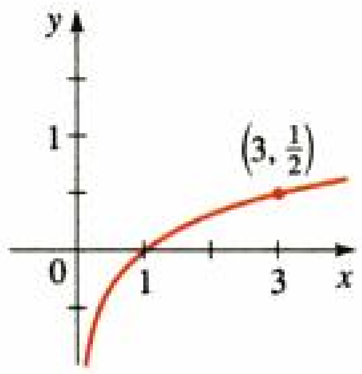
37.



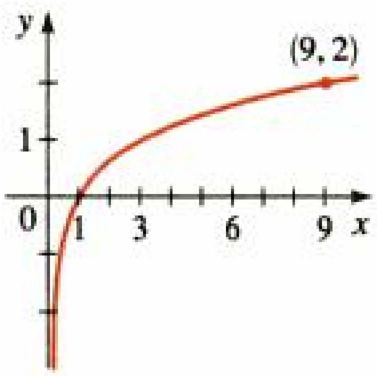
38.



39.



40.

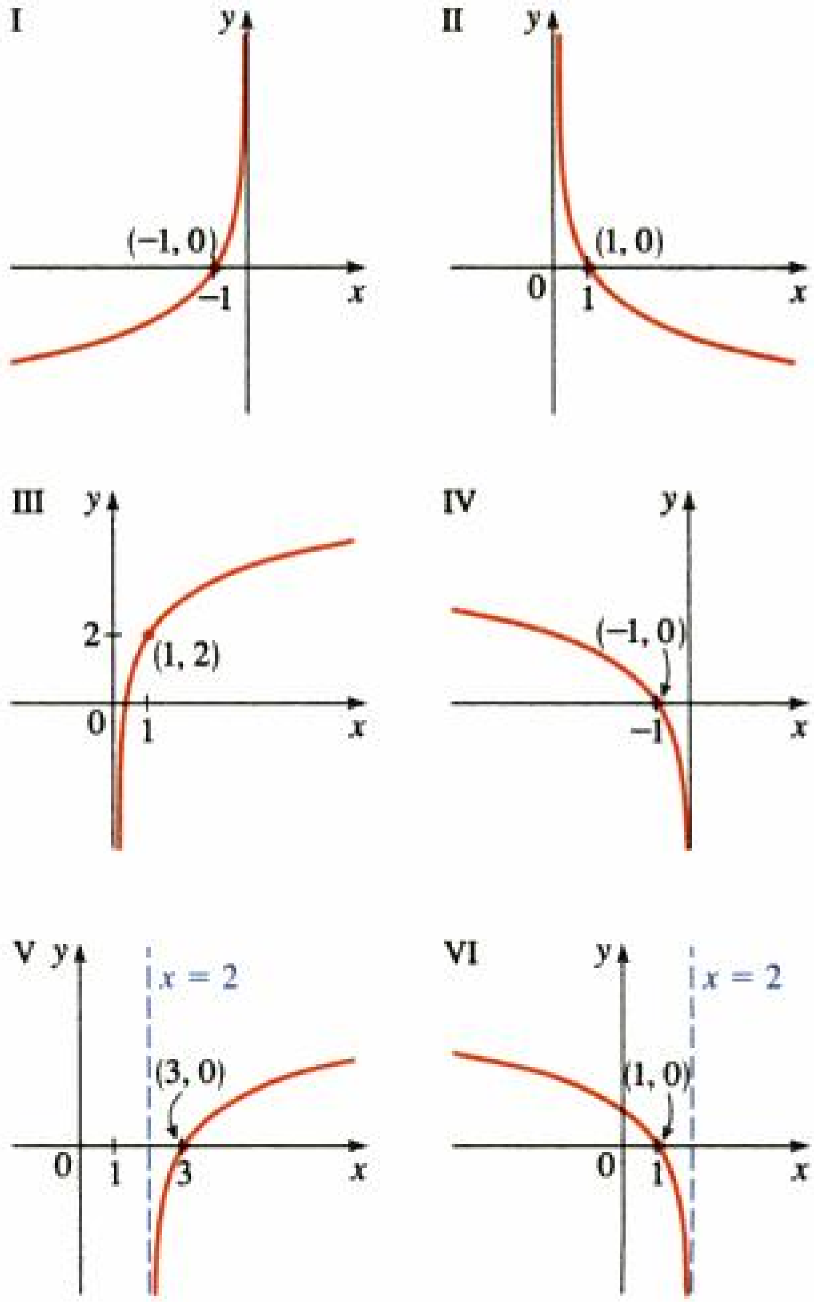


41–46 ■ Compare la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I-VI.

41. $f(x) = -\ln x$ **42.** $f(x) = \ln(x-2)$

43. $f(x) = 2 + \ln x$ **44.** $f(x) = \ln(-x)$

45. $f(x) = \ln(2-x)$ **46.** $f(x) = -\ln(-x)$



47. Dibuje la gráfica de $y = 4^x$, después utilícela para dibujar la gráfica de $y = \log_4 x$.

48. Dibuje la gráfica de $y = 3^x$, luego empléela para dibujar la gráfica de $y = \log_3 x$.

49–58 ■ Grafique la función sin trazar los puntos, sino a partir de las gráficas de las figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

49. $f(x) = \log_2(x-4)$ **50.** $f(x) = -\log_{10} x$

51. $g(x) = \log_5(-x)$ **52.** $g(x) = \ln(x+2)$

53. $y = 2 + \log_3 x$ **54.** $y = \log_3(x-1) - 2$

55. $y = 1 - \log_{10} x$ **56.** $y = 1 + \ln(-x)$

57. $y = |\ln x|$ **58.** $y = \ln|x|$

59–64 ■ Encuentre el dominio de la función.

59. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **60.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

61. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **62.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

63. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

64. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

65–70 ■ **Dibuje la gráfica de la función en un rectángulo de visión adecuado y empléela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores locales máximo y mínimo.**

65. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **66.** $y = \ln(x^2 - x)$

67. $y = x + \ln x$ **68.** $y = x(\ln x)^2$

69. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **70.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

71. Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ dibujando sus gráficas en una pantalla común en el rectángulo de visión $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

72. a) Dibujando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de visión adecuado, muestre que incluso cuando una función logarítmica comienza más alta que una función radical, en última instancia es alcanzada por la función radical.

b) Encuentre, correctas hasta dos decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

73–74 ■ Se da una familia de funciones.

a) Dibuje las gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4.

b) ¿Cómo están relacionadas las gráficas del inciso a)?

73. $f(x) = \log(cx)$ **74.** $f(x) = c \log x$

75–76 ■ Se da una función $f(x)$.

a) Encuentre el dominio de la función f.

b) Encuentre la función inversa de f.

75. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$

76. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

77. a) Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

Aplicaciones

78. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al irradiar una luz por ésta y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si se conoce la cantidad de luz absorbida, se puede calcular la concentración en la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles/litro) se encuentra por medio de la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad es I es 70% de I_0.

79. Fechado con carbono La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

80. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia comienza con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) requerido para que la colonia crezca a N bacterias se expresa como

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Calcule el tiempo requerido para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

81. Inversión El tiempo requerido para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés capitalizable de manera continua está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Determine el tiempo requerido para duplicar una inversión en 6 por ciento, 7 por ciento y 8 por ciento.

82. Carga de una batería La tasa a la que se carga una batería es más lenta si la batería está más cerca de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) requerido para cargar una batería descargada por completo hasta una carga C se expresa como

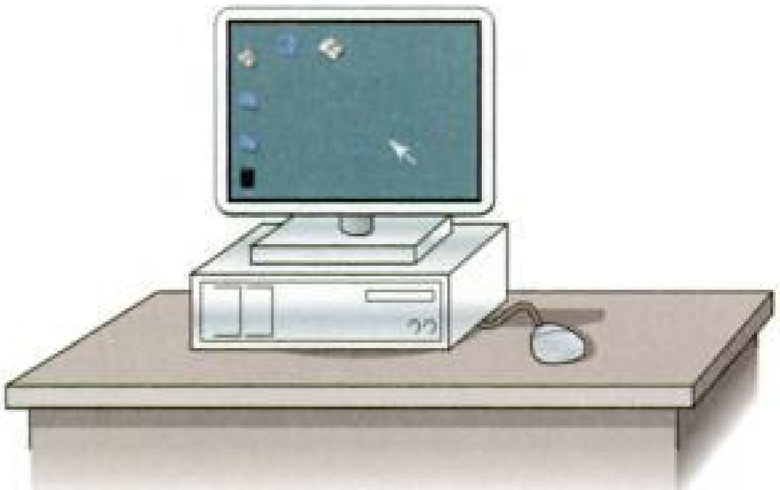
$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está totalmente sin carga, ¿cuánto tiempo tomará cargar hasta 90% de su carga máxima C_0?

83. **Dificultad de una tarea** La dificultad en "lograr un objetivo" (como usar el ratón para dar clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia al ob-jetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la ley de Fitts, el índice de dificultad (ID), está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de dar clic en un icono cuyo ancho es de 5 mm con la de dar clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.



Descubrimiento • Debate

84. **Altura de la gráfica de una función logarítmica** Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ se traza en un plano coordenado donde la unidad de medición es una pulgada.
   a) Muestre que a una distancia 2 pies a la derecha del origen la altura de la gráfica es aproximadamente 265 millas.
   b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿qué tan lejos a la derecha del origen se tiene que ir antes de que la altura de la curva alcance 2 pies?

85. **Googolplex** Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

86. **Comparación de logaritmos** ¿Qué es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

87. **Número de dígitos en un entero** Compare log 1000 con el número de dígitos en 1000. Haga lo mismo para 10 000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10 000? ¿Entre cuáles dos valores debe quedar el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos en cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la máxima función de enteros definida en la sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.3 Leyes de los logaritmos

En esta sección se estudian las propiedades de los logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como se verá en la sección 4.5.

Leyes de los logaritmos

Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sea A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

■ **Demostración** Se hace uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la sección 4.2.

Ley 1. Sea $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas ecuaciones se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Así
$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$
$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

Ley 2. Usando la ley 1, se tiene

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

por lo tanto,
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3. Sea $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo tanto

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A$$ ■

Ejemplo 1 Uso de las leyes de los logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe cada expresión.

a) $\log_4 2 + \log_4 32$ b) $\log_2 80 - \log_2 5$ c) $-\frac{1}{3}\log 8$

Solución

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ Porque $64 = 4^3$

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2(\frac{80}{5})$ Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ Porque $16 = 2^4$

c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$ Ley 3

$= \log(\frac{1}{2})$ Propiedad de exponentes negativos

≈ -0.301 Resultado de la calculadora ■

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las leyes de los logaritmos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, conocido como *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Expandir expresiones logarítmicas

Use las leyes de los logaritmos para expandir o desarrollar cada expresión.

a) $\log_2(6x)$ b) $\log_5(x^3y^6)$ c) $\ln\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

Solución

a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3 ■

Las leyes de los logaritmos permiten también invertir el proceso de expansión hecho en el ejemplo 2. Es decir, se pueden escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinación* de expresiones logarítmicas, se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$ en un solo logaritmo.

Solución

$$3\log x + \tfrac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{1/2} \qquad \text{Ley 3}$$

$$= \log(x^3(x+1)^{1/2}) \qquad \text{Ley 1}$$

■

Ejemplo 4 Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1)$ en un solo logaritmo.

Solución

$$3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) = \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 \qquad \text{Ley 3}$$

$$= \ln(s^3t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 \qquad \text{Ley 1}$$

$$= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) \qquad \text{Ley 2}$$

■

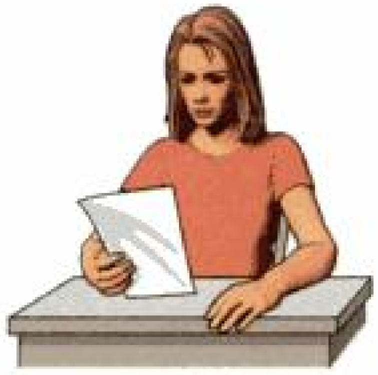
ADVERTENCIA Aunque las leyes de los logaritmos indican cómo calcular el logaritmo de un producto o cociente, *no hay regla de correspondencia para el logaritmo de una suma o diferencia*. Por ejemplo,

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, se sabe que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. También, no simplifique de manera inapropiada cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \neq 3\log_2 x$$

Los logaritmos que se emplean para modelar diversas situaciones tienen que ver con el comportamiento humano. Un tipo de comportamiento es qué tan rápido olvidamos las cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si se aprende álgebra a cierto nivel de desempeño (p. ej., 90% en una prueba) y después no se usa el álgebra durante un tiempo, ¿cuánto se retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el siguiente ejemplo.



Olvidar lo que se aprende es una función logarítmica de cuánto hace que se aprendió.

Ejemplo 5 **Ley del olvido**

La ley de Ebbinghaus del olvido establece que si se aprende una tarea a un nivel de desempeño P_0, entonces después de un intervalo de tiempo t el nivel de desempeño P satisface

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

a) Despeje P.

b) Si su puntuación en una prueba de historia es 90, ¿qué puntuación esperaría obtener en una prueba similar dos meses después? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

Solución

a) Primero se combina el miembro derecho.

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1) \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\log P = \log P_0 - \log(t+1)^c \qquad \text{Ley 3}$$

$$\log P = \log\frac{P_0}{(t+1)^c} \qquad \text{Ley 2}$$

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^c} \qquad \text{Porque log es uno a uno}$$

b) Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$, y t se mide en meses.

En dos meses: $t = 2$ y $P = \dfrac{90}{(2+1)^{0.2}} \approx 72$

En un año: $t = 12$ y $P = \dfrac{90}{(12+1)^{0.2}} \approx 54$

Se esperaría que las puntuaciones después de dos meses y un año sean 72 y 54, respectivamente. ■

Cambio de base

Para algunos propósitos, se encuentra que es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Se escribe esto en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$b^y = x \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$\log_a(b^y) = \log_a x \qquad \text{Tome el } \log_a \text{ de cada lado}$$

$$y\log_a b = \log_a x \qquad \text{Ley 3}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \text{Divida entre } \log_a b$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Se puede escribir la fórmula de cambio de base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Por consiguiente, $\log_b x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$.

Fórmula de cambio de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si $x = a$, entonces $\log_a a = 1$ y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora se puede evaluar un logaritmo para *cualquier* base usando la fórmula del cambio de base para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar una calculadora.

Ejemplo 6 Evaluar logaritmos con la fórmula de cambio de base

Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto hasta cinco decimales.

a) $\log_8 5$ b) $\log_9 20$

Solución

a) Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

Se obtiene la misma respuesta si se usa $\log_{10}$ o ln:

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.77398$$

b) Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

■

Ejemplo 7 Usar la fórmula de cambio de base para graficar una función logarítmica

Use una calculadora de graficación para graficar $f(x) = \log_6 x$.

Solución Las calculadoras no tienen una tecla para $\log_6$, así que se usa la fórmula de cambio de base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Puesto que las calculadoras tienen una tecla LN se puede introducir esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la figura 1. ■

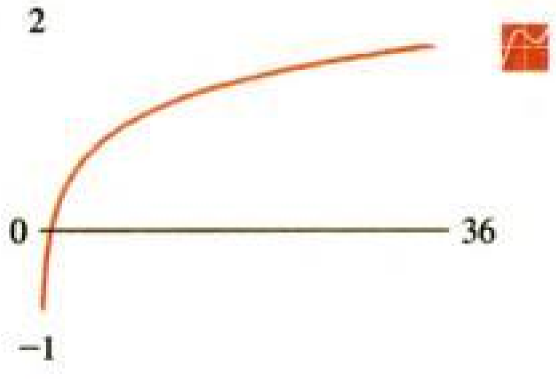


Figura 1

$f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

4.3 Ejercicios

1–12 ■ Evalúe la expresión.

1. $\log_3 \sqrt{27}$
2. $\log_2 160 - \log_2 5$
3. $\log 4 + \log 25$
4. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$
5. $\log_4 192 - \log_4 3$
6. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$
7. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
8. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

9. $\log_4 16^{100}$
10. $\log_2 8^{33}$
11. $\log(\log 10^{10\,000})$
12. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

13–38 ■ Use las leyes de los logaritmos para desarrollar la expresión.

13. $\log_2(2x)$
14. $\log_3(5y)$
15. $\log_2(x(x-1))$
16. $\log_5 \dfrac{x}{2}$
17. $\log 6^{10}$
18. $\ln \sqrt{z}$
19. $\log_2(AB^2)$
20. $\log_6 \sqrt[4]{17}$
21. $\log_3(x\sqrt{y})$
22. $\log_2(xy)^{10}$
23. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$
24. $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$
25. $\ln\sqrt{ab}$
26. $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$
27. $\log\left(\dfrac{x^3y^4}{z^6}\right)$
28. $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$
29. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
30. $\log_5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
31. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$
32. $\ln\dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$
33. $\log\sqrt[4]{x^2+y^2}$
34. $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$
35. $\log\sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$
36. $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$
37. $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$
38. $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

39–48 ■ Use las leyes de los logaritmos para combinar la expresión.

39. $\log_3 5 + 5\log_3 2$
40. $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$
41. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$
42. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$
43. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$
44. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$
45. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$
46. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$
47. $\frac{1}{3}\log(2x+1) + \frac{1}{2}[\log(x-4) - \log(x^4 - x^2 - 1)]$
48. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

49–56 ■ Use la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar el logaritmo, correcto hasta seis decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

49. $\log_2 5$
50. $\log_5 2$
51. $\log_3 16$
52. $\log_6 92$
53. $\log_7 2.61$
54. $\log_6 532$
55. $\log_4 125$
56. $\log_{12} 2.5$

57. Use la fórmula de cambio de base para mostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

Después use este hecho para dibujar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

58. Dibuje las gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2, e, 5$ y 10 en la misma pantalla, con el rectángulo de visión $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

59. Use la fórmula de cambio de base para mostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

60. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

61. Muestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Aplicaciones

62. **Olvido** Use la ley de Ebbinghaus del olvido (ejemplo 5) para estimar la puntuación de un alumno en una prueba de biología dos años después de que obtuvo una puntuación de 80 en una prueba que abarca el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

63. **Distribución de la riqueza** Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país la poseen algunos miembros de la población. El **principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k\log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas en la población que tiene esa cantidad de dinero.

a) Resuelva la ecuación para P.

b) Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$ y W se mide en millones de dólares. Use el inciso a) para hallar el número de personas que tienen dos millones o más. ¿Cuántas personas tienen 10 millones o más?

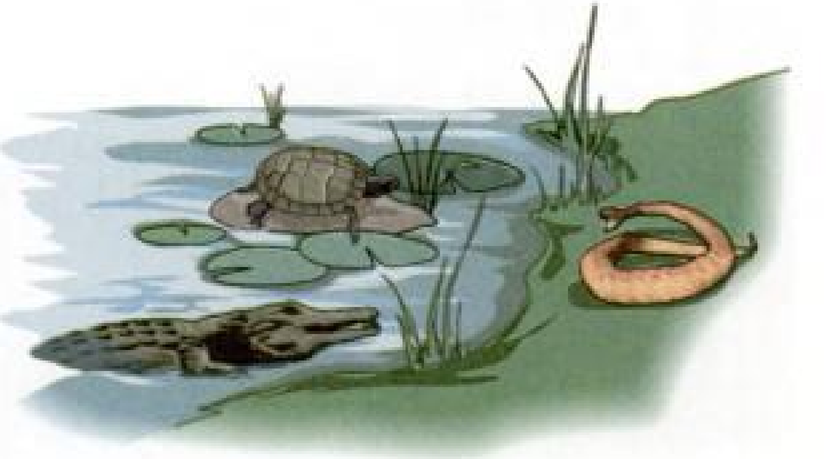
64. **Biodiversidad** Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (como una isla) mediante la relación especies-área

$$\log S = \log c + k\log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especies y el hábitat.

a) De la ecuación despeje S.

b) Use el inciso a) para mostrar que si $k = 3$ entonces duplicar el área incrementa el número de especies ocho veces.



65. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida de cuán brillante aparece una estrella para el ojo humano. Se define por

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

a) Desarrolle el lado derecho de la ecuación.

b) Use el inciso a) para mostrar que mientras más brillante es una estrella menor es su magnitud.

c) Betelgeuse es más o menos 100 veces más brillante que Albiero. Use el inciso a) para mostrar que Betelgeuse es cinco magnitudes menos que Albiero.

Descubrimiento • Debate

66. ¿Verdadero o falso? Analice cada ecuación y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore los valores de las variables para las que cualquier término no está definido.)

a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

d) $\log 2^z = z \log 2$

e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

g) $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

h) $\log_a a^a = a$

i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

67. Hallar el error ¿Qué es lo que no concuerda con el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2\log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

68. Desplazamiento, acortamiento y alargamiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Muestre que $f(2x) = 4f(x)$, y explique cómo esto muestra que acortar la gráfica de f horizontalmente tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. Después, use las identidades $e^{2+x} = e^2 e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para mostrar que para $g(x) = e^x$, un desplazamiento horizontal es lo mismo que un alargamiento vertical y que para $h(x) = \ln x$, un acortamiento horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección se resuelven ecuaciones relacionadas con funciones exponenciales y logarítmicas. Las técnicas que se desarrollan aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas de aplicación.

Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable ocurre en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para tratar con esta dificultad, se toma el logaritmo de cada lado y luego se usan las leyes de los logaritmos para "bajar a x" del exponente.

$2^x = 7$	Ecuación dada
$\ln 2^x = \ln 7$	Aplique el ln en cada miembro
$x \ln 2 = \ln 7$	Ley 3 (baje el exponente)
$x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$	Despeje x
≈ 2.807	Resultado de la calculadora

Recuerde que la ley 3 de las leyes de los logaritmos establece que $\log_a A^C = C \log_a A$.

El método que se usa para resolver $2^x = 7$ es representativo de cómo resolver ecuaciones exponenciales en general.

Normas para resolver ecuaciones exponenciales

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado, luego utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

Ejemplo 1 Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, correcta hasta seis decimales.

Solución Se toma el logaritmo común de cada lado y se usa la ley 3.

$3^{x+2} = 7$	Ecuación dada
$\log(3^{x+2}) = \log 7$	Tome el log de cada lado
$(x + 2)\log 3 = \log 7$	Ley 3 (baje el exponente)
$x + 2 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$	Divida entre 3
$x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$	Reste 2
≈ -0.228756	Resultado de la calculadora

■

Se podría haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, se obtiene

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

Compruebe su respuesta Al sustituir $x = -0.228756$ en la ecuación original y usar una calculadora, se obtiene

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✓$$

Fechar con carbono radiactivo es un método que emplean los arqueólogos para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera contiene siempre una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de casi 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que después pasa a los animales a través del alimento. Así, todas las criaturas vivas contienen las mismas proporciones fijas de ^{14}C a ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C, y la cantidad de ^{14}C en él comienza a disminuir en forma exponencial. Se puede determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo midiendo la cantidad de ^{14}C que queda en él.

Por ejemplo, si un hueso de burro contiene 73% de la cantidad de ^{14}C que contenía cuando el animal estaba vivo y si éste murió hace t años, entonces por la fórmula del decaimiento radiactivo (sección 4.5),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

De esta ecuación exponencial se encuentra que $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene aproximadamente 2600 años de antigüedad.

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

Solución Se divide primero entre 8 a fin de aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} 8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\ e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\ \ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tomar el ln de cada lado} \\ 2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\ x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Dividir entre 2} \\ &\approx 0.458 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

■

Compruebe su respuesta Al sustituir $x = 0.458$ en la ecuación original y usar una calculadora, se obtiene

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✓$$

Ejemplo 3 Resolver una ecuación exponencial en forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de forma algebraica y gráfica.

Solución 1: algebraica

Puesto que la base del término exponencial es e, se emplean logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$\begin{aligned} e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\ \ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome el ln de cada lado} \\ 3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\ 2x &= 3 - \ln 4 && \\ x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \end{aligned}$$

Se debe comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original.

Solución 2: gráfica

Se grafican las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de visión que el de la figura 1. Las soluciones ocurren donde se cruzan las gráficas. Al ampliar el punto de intersección de las dos gráficas, se ve que $x \approx 0.81$. ■

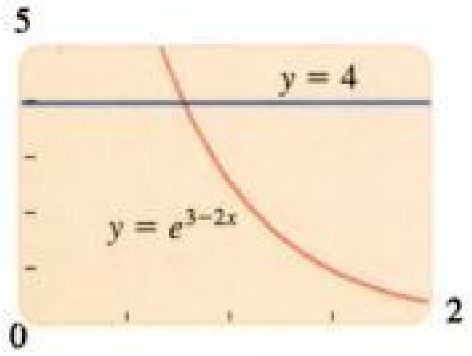


Figura 1

Ejemplo 4 Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

Solución Para aislar el término exponencial, se factoriza.

Si $w = e^x$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de los exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar (una forma cuadrática en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

La ecuación $e^x = 3$ conduce a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Así, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Se debe comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original. ■

Ejemplo 5 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

Solución Primero se factoriza el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorice los factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Divida entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$. ■

Compruebe sus respuestas

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✓

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✓

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que ocurre un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, se escribe la ecuación en forma exponencial.

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despejar } x$$

Otra forma de considerar el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Elevar 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de los logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despejar } x$$

El método empleado para resolver este problema es característico. Se resumen los pasos como sigue.

Normas para resolver ecuaciones logarítmicas

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; podría ser necesario combinar primero los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

Ejemplo 6 Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación despeje x.

a) $\ln x = 8$ b) $\log_2(25 - x) = 3$

Solución

a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

Este problema se puede resolver también de otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$
$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o elevar 2 a cada lado)}$$
$$25 - x = 8$$
$$x = 25 - 8 = 17$$

■

Compruebe su respuesta

Si $x = 17$, se obtiene

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✓

Ejemplo 7 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

Solución Se aísla primero el término logarítmico. Esto permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$4 + 3\log(2x) = 16 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$3\log(2x) = 12 \qquad \text{Reste 4}$$
$$\log(2x) = 4 \qquad \text{Divida entre 3}$$
$$2x = 10^4 \qquad \text{Forma exponencial (o eleva 10 a cada lado)}$$
$$x = 5000 \qquad \text{Divida entre 2}$$

■

Compruebe su respuesta

Si $x = 5000$, se obtiene

$$4 + 3\log 2(5000) = 4 + 3\log 10\,000$$
$$= 4 + 3(4)$$
$$= 16 \quad ✓$$

Ejemplo 8 Resolver una ecuación logarítmica de manera algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$ de forma algebraica y gráfica.

Solución 1: algebraica

Primero se combinan los términos logarítmicos usando las leyes de los logaritmos.

$$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1 \qquad \text{Ley 1}$$
$$(x + 2)(x - 1) = 10 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)}$$
$$x^2 + x - 2 = 10 \qquad \text{Desarrolle el lado izquierdo}$$
$$x^2 + x - 12 = 0 \qquad \text{Reste 10}$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Compruebe sus respuestas

$x = -4$:
$\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1)$
$= \log(-2) + \log(-5)$
indefinida ✗

$x = 3$:
$\log(3 + 2) + \log(3 - 1)$
$= \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2)$
$= \log 10 = 1$ ✓

Se comprueban estas posibles soluciones en la ecuación original y se encuentra que $x = -4$ no es una solución (porque no están definidos los logaritmos de números negativos), pero $x = 3$ es una solución. (Véase *Compruebe sus respuestas*.)

Solución 2: gráfica

Primero se mueven los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

Luego se grafica

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la figura 2. Las soluciones son las intersecciones con el eje x de la gráfica. Así, la única solución es $x \approx 3$.

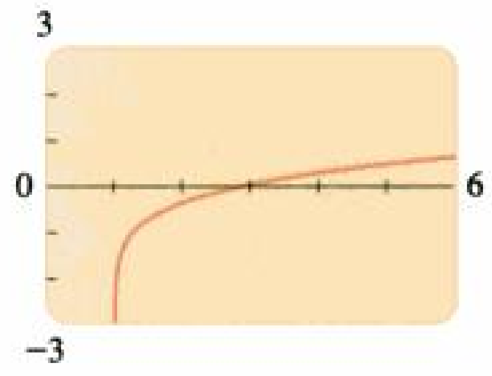


Figura 2 ■

Ejemplo 9 Resolver una ecuación logarítmica de manera gráfica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2 \ln(x + 2)$.

En el ejemplo 9, no es posible aislar x algebraicamente, así que se debe resolver la ecuación de manera gráfica.

Solución Primero se mueven todos los términos a un lado de la ecuación

$$x^2 - 2 \ln(x + 2) = 0$$

Luego se grafica

$$y = x^2 - 2 \ln(x + 2)$$

como en la figura 3. Las soluciones son las intersecciones con el eje x de la gráfica. Al ampliar las intersecciones, se ve que hay dos soluciones:

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

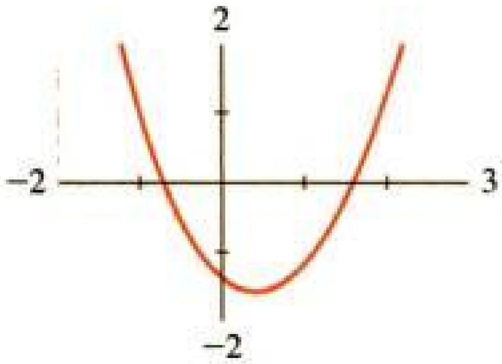
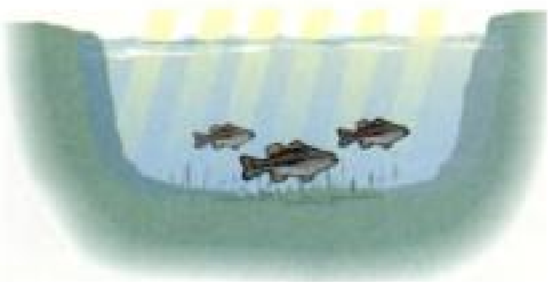


Figura 3

■



La intensidad de luz en un lago disminuye con la profundidad

Las ecuaciones logarítmicas se emplean para determinar la cantidad de luz que llega a varias profundidades en el lago. (Esta información ayuda a los biólogos a determinar el tipo de vida que puede soportar un lago.) Cuando la luz pasa por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), se absorbe parte de ella. Es fácil ver que mientras más turbia es el agua más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material se describe en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de la luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que viaja la luz en el material, entonces de acuerdo con la **ley de Beer-Lambert**

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

a) De la ecuación despeje I.

b) Para cierto lago $k = 0.025$ y la intensidad luminosa es $I_0 = 14$ lúmenes (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

Solución

a) Primero se aísla el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \qquad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0 e^{-kx} \qquad \text{Multiplique por } I_0$$

b) Se determina I por medio de la fórmula del inciso a).

$$I = I_0 e^{-kx} \qquad \text{Del inciso a)}$$

$$= 14e^{(-0.025)(20)} \qquad I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20$$

$$\approx 8.49 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es aproximadamente 8.5 lm. ■

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para el interés que se encontraron en la sección 4.1. Si se invierte un principal P a una tasa de interés r durante un periodo de t años, entonces la cantidad A de la inversión se expresa como

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (durante un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés compuesto } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizable de manera continua}$$

Se pueden usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en incrementarse hasta una determinada cantidad.

Ejemplo 11 Hallar el término para que se duplique una inversión

Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de 5% por año. Calcule el tiempo requerido para que se duplique el dinero si el interés se compone según el método siguiente.

a) Semianual b) Continuo

Solución

a) Se usa la fórmula para el interés compuesto con P = 5000 dólares, $A(t)$ = 10 000 dólares, $r = 0.05$, $n = 2$, y resuelva la ecuación exponencial resultante para t.

$$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10\,000 \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A$$

$$(1.025)^{2t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\log 1.025^{2t} = \log 2 \qquad \text{Tome el log de cada lado}$$

$$2t \log 1.025 = \log 2 \qquad \text{Ley 3 (baje el exponente)}$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.025} \qquad \text{Divida entre } 2 \log 1.025$$

$$t \approx 14.04 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

b) Use la fórmula para el interés capitalizable de forma continua con P = 5000 dólares, $A(t)$ = 10 000 dólares, $r = 0.05$, y despeje t de la ecuación exponencial resultante.

$$5000e^{0.05t} = 10\,000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.05t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\ln e^{0.05t} = \ln 2 \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

$$0.05t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05} \qquad \text{Divida entre 0.05}$$

$$t \approx 13.86 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años. ■

Ejemplo 12 Tiempo requerido para que crezca una inversión

Se invierte una suma de 1000 dólares a una tasa de interés de 4% anual. Encuentre el tiempo requerido para que la cantidad crezca a 4000 dólares si el interés se capitaliza de forma continua.

Solución Se usa la fórmula para el interés capitalizable en forma continua con $P = 1000$ dólares, $A(t) = 4000$ dólares, $r = 0.04$, y de la ecuación resultante despeje t.

$$1000e^{0.04t} = 4000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.04t} = 4 \qquad \text{Divida entre 1000}$$

$$0.04t = \ln 4 \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 4}{0.04} \qquad \text{Divida entre 0.04}$$

$$t \approx 34.66 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

La cantidad será 4000 dólares en casi 34 años y 8 meses. ■

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento porcentual anual** (RPA) es la tasa de interés *simple* que produce la misma cantidad al final de un año.

Ejemplo 13 Calcular el rendimiento porcentual anual

Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% anual, capitalizable diariamente.

Solución Después de un año, un principal P crecerá hasta la cantidad

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Al comparar se puede observar que $1 + r = 1.06183$, por lo tanto $r = 0.06183$. Así que el rendimiento porcentual anual es 6.183 por ciento. ■

4.4 Ejercicios

1–26 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, correcta hasta cuatro decimales.

1. $10^x = 25$
2. $10^{-x} = 4$
3. $e^{-2x} = 7$
4. $e^{3x} = 12$
5. $2^{1-x} = 3$
6. $3^{2x-1} = 5$
7. $3e^x = 10$
8. $2e^{12x} = 17$
9. $e^{1-4x} = 2$
10. $4(1 + 10^{5x}) = 9$
11. $4 + 3^{5x} = 8$
12. $2^{3x} = 34$
13. $8^{0.4x} = 5$
14. $3^{x/14} = 0.1$
15. $5^{-x/100} = 2$
16. $e^{3-5x} = 16$
17. $e^{2x+1} = 200$
18. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$
19. $5^x = 4^{x+1}$
20. $10^{1-x} = 6^x$
21. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$
22. $7^{x/2} = 5^{1-x}$
23. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$
24. $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$
25. $100(1.04)^{2t} = 300$
26. $(1.00625)^{12t} = 2$

27–34 ■ Resolver la ecuación.

27. $x^2 2^x - 2^x = 0$

28. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

29. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$

30. $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

31. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

32. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

33. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

34. $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

35–50 ■ Resolver la ecuación logarítmica para x.

35. $\ln x = 10$

36. $\ln(2 + x) = 1$

37. $\log x = -2$

38. $\log(x - 4) = 3$

39. $\log(3x + 5) = 2$

40. $\log_3(2 - x) = 3$

41. $2 - \ln(3 - x) = 0$

42. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

43. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

44. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

45. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

46. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

47. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

48. $\log x + \log(x - 3) = 1$

49. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

50. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

51. ¿Para qué valor de x se cumple lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

52. ¿Para qué valor de x se cumple que $(\log x)^3 = 3\log x$?

53. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

54. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

55–62 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones de la ecuación, correcta hasta dos decimales.

55. $\ln x = 3 - x$

56. $\log x = x^2 - 2$

57. $x^3 - x = \log(x + 1)$

58. $x = \ln(4 - x^2)$

59. $e^x = -x$

60. $2^{-x} = x - 1$

61. $4^{-x} = \sqrt{x}$

62. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

63–66 ■ Resuelva la desigualdad.

63. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

64. $3 \le \log_2 x \le 4$

65. $2 < 10^x < 5$

66. $x^2 e^x - 2e^x < 0$

Aplicaciones

67. Interés compuesto Una persona invierte 5000 dólares en una cuenta que paga 8.5% de interés anual, capitalizable cada trimestre.

a) Encuentre la cantidad después de tres años.

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que se duplique la inversión?

68. Interés compuesto Una persona invierte 6500 dólares en una cuenta que paga 6% de interés anual, capitalizable de forma continua.

a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea 8000 dólares?

69. Interés compuesto Calcule el tiempo requerido para que una inversión de 5000 dólares crezca a 8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizable cada trimestre.

70. Interés compuesto Nancy quiere invertir 4000 dólares en certificados de ahorro que producen una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizable cada medio año. ¿Cuán largo debe elegir el periodo a fin de ahorrar una cantidad de 5000 dólares?

71. Duplicar una inversión ¿En cuánto tiempo se duplica una inversión de 1000 dólares si la tasa de interés es 8.5% anual, capitalizable de manera continua?

72. Tasa de interés Una suma de 1000 dólares se invirtió durante cuatro años, y la tasa de interés se capitalizó cada medio año. Si esta suma asciende a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

73. Rendimiento porcentual anual Encuentre el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 8% anual, capitalizable mensualmente.

74. Rendimiento porcentual anual Encuentre el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}$% por año, capitalizable de manera continua.

75. Decaimiento radiactivo Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra de una manera que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$ donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días hay sólo 5 g restantes?

76. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar se expresa como $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos la velocidad es 70 pies/s?

77. Población de peces Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

a) Encuentre la población de peces después de tres años.

b) ¿Después de cuántos años la población de peces llega a 5000?

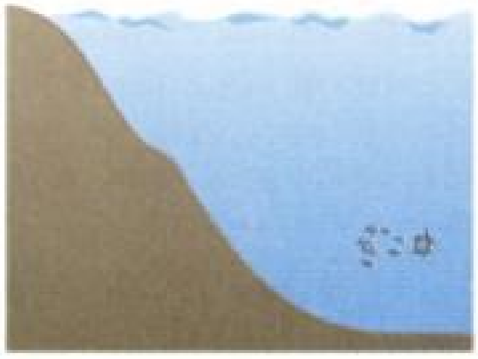
78. Transparencia de un lago Los científicos ambientales miden la intensidad de la luz a varias profundidades en un lago para determinar la transparencia del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población de macrófitas. En cierto lago la intensidad de la luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lúmenes y x en pies.

a) Determine la intensidad I a una profundidad de 30 pies.

b) ¿A qué profundidad la intensidad de la luz ha disminuido a $I = 5$?



79. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascales, kPa) a la altura h (en kilómetros, km) está gobernada por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.

a) Despeje P de la ecuación.

b) Use el inciso a) para calcular la presión P a una altitud de 4 km.

80. Enfriamiento de una máquina Suponga que conduce un automóvil en un frío día de invierno (20°F en el exterior) y la máquina se sobrecalienta (a cerca de 220°F). Cuando se estaciona, la máquina comienza a enfriarse. La temperatura T de la máquina t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T-20}{200}\right) = -0.11t$$

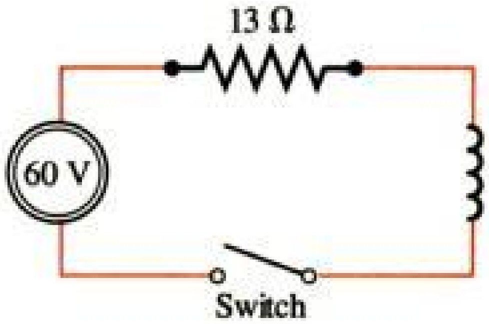
a) Despeje T de la ecuación.

b) Use el inciso a) para determinar la temperatura del motor después de 20 min ($t = 20$).

81. Circuitos electrónicos Un circuito electrónico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Por medio del cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de que se cierra el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.

a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como una función de la corriente I.

b) ¿Después de cuántos segundos la corriente es 2 A?



82. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de entrenamiento t. Al comienzo, la tasa de aprendizaje es rápida. Luego, conforme se incremente el desempeño y se aproxime a un valor máximo M, disminuye la tasa de aprendizaje. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para el aprendizaje.

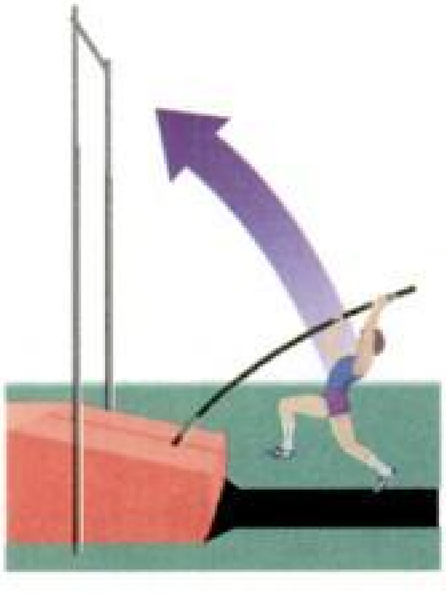
a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como una función del nivel de desempeño P.

b) Para un saltador con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que puede saltar después de t meses. ¿Después de cuántos meses puede saltar 12 pies?

c) Dibuje una gráfica de la curva de aprendizaje del inciso b).



Descubrimiento • Debate

83. Estimación de una solución Sin resolver en realidad la ecuación, encuentre dos números enteros entre los que debe quedar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo llegó a sus conclusiones.

84. Una ecuación sorprendente Tome los logaritmos para mostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k la ecuación

$$x^{1/\log x} = k$$

tiene una solución? ¿Qué indica lo anterior acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta por medio de un dispositivo de graficación.

85. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se pueden transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático al aplicar la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x-1)^{\log(x-1)} = 100(x-1)$ [Tome el log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie los logaritmos a la base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como una cuadrática en 2^x.]

4.5 Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

Muchos procesos que ocurren en la naturaleza, como el crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, difusión de calor y muchos otros, se pueden modelar por medio de funciones exponenciales. Las funciones logarítmicas se emplean en modelos para la sonoridad del sonido, la intensidad de terremotos y muchos otros fenómenos. En esta sección se estudian los modelos exponencial y logarítmico.

Modelos exponenciales de crecimiento poblacional

Los biólogos han observado que la población de una especie duplica su tamaño en un periodo fijo. Por ejemplo, en condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica en tamaño cada tres horas. Si el cultivo se inicia con 1000 bacterias, entonces después de tres horas habrá 2000 bacterias, después de otras tres horas habrá 4000, etcétera. Si $n = n(t)$ es el número de bacterias después de t horas, entonces

$$\begin{aligned} n(0) &= 1000 \\ n(3) &= 1000 \cdot 2 \\ n(6) &= (1000 \cdot 2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2 \\ n(9) &= (1000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^3 \\ n(12) &= (1000 \cdot 2^3) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

De este patrón parece que el número de bacterias después de t horas se modela mediante la función

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

En general, suponga que el tamaño inicial de una población es n_0 y el periodo de duplicación es a. Entonces el tamaño de la población en el tiempo t se modela mediante

$$n(t) = n_0 2^{ct}$$

donde $c = 1/a$. Si se conociera el tiempo de triplicación b, entonces la fórmula sería $n(t) = n_0 3^{ct}$ donde $c = 1/b$. Estas fórmulas indican que el crecimiento de bacterias se modela mediante una función exponencial. ¿Pero qué base se debe usar? La respuesta es e, porque entonces se puede demostrar (por medio del cálculo) que la población se modela mediante

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde r es la *tasa relativa de crecimiento de la población, expresada como una proporción de la población en cualquier tiempo*. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier instante t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el instante t.

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para el interés compuesto en forma continua. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por periodo es proporcional al tamaño de la población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1 000 000 se incrementará más en un año que una población de 1000; de la misma manera, una inversión de 1 000 000 dólares crecerá más en un año que una inversión de $1000.

Modelo de crecimiento exponencial

Una población que experimenta **crecimiento exponencial** crece según el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t) =$ población en el tiempo t

$n_0 =$ tamaño inicial de la población

$r =$ tasa relativa de crecimiento (expresada como una proporción de la población)

$t =$ tiempo

En los ejemplos siguientes se supone que las poblaciones crecen de forma exponencial.

Ejemplo 1 Predecir el tamaño de la población

La cuenta inicial de bacterias en un cultivo es 500. Más tarde un biólogo realiza una cuenta muestral de bacterias en el cultivo y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es 40% por hora.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

b) ¿Cuál es la cuenta estimada después de 10 horas?

c) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

Solución

a) Se usa el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

b) Por medio de la función del inciso a), se encuentra que la cuenta de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27\,300$$

c) La gráfica se muestra en la figura 1. ■

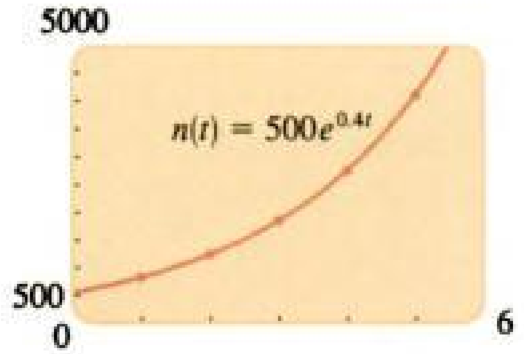


Figura 1

Ejemplo 2 Comparar diferentes tasas de crecimiento poblacional

En el año 2000 la población del mundo fue 6.1 miles de millones y la tasa relativa de crecimiento fue 1.4% por año. Se afirma que una tasa de 1% por año haría una diferencia importante en la población total en sólo unas décadas. Pruebe esta afirmación estimando la población del mundo en el año 2050 con una tasa relativa de crecimiento de a) 1.4% por año y b) 1.0% por año.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento en el mismo rectángulo de visión.

Solución

a) Por el modelo de crecimiento exponencial, se tiene

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años desde 2000. Debido a que el año 2050 es 50 años después de 2000, se encuentra

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es aproximadamente 12.3 miles de millones.

b) Se usa la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y se encuentra que $n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$

La población estimada en el año 2050 es aproximadamente 10.1 miles de millones.

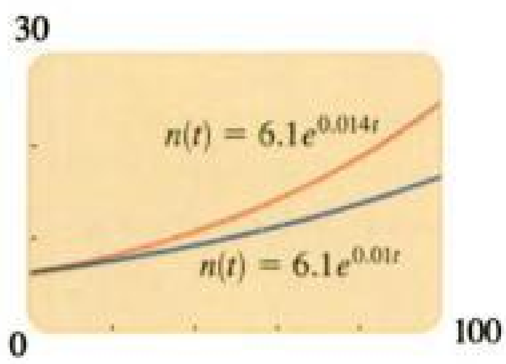
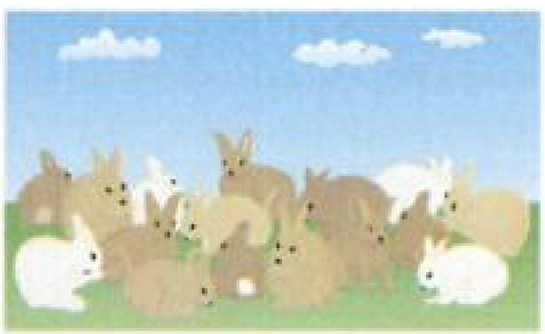


Figura 2

Las gráficas de la figura 2 muestran que un cambio pequeño en la tasa relativa de crecimiento, con el tiempo, hará una gran diferencia en el tamaño de la población. ■

Ejemplo 3 Hallar la población inicial



Cierta raza de conejos se introdujo en una pequeña isla hace unos ocho años. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100, con una tasa de crecimiento relativa de 55% por año.

a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

b) Estime la población 12 años a partir de ahora.

Solución

a) Del modelo de crecimiento exponencial, se tiene

$$n(t) = n_0e^{0.55t}$$

y se sabe que la población en el tiempo $t = 8$ es $n(8) = 4100$. Se sustituye lo que se conoce en la ecuación y se despeja n_0:

$$4100 = n_0e^{0.55(8)}$$

$$n_0 = \frac{4100}{e^{0.55(8)}} \approx \frac{4100}{81.45} \approx 50$$

Así, se estima que se introdujeron en la isla 50 conejos.

Otra forma de resolver el inciso b) es permitir que t sea el número de años a partir de ahora. En este caso, $n_0 = 4100$ (la población actual), y la población 12 años a partir de ahora será

$$n(12) = 4100e^{0.55(12)} \approx 3 \text{ millones}$$

b) Ahora que se conoce n_0, se puede escribir una fórmula para el crecimiento poblacional:

$$n(t) = 50e^{0.55t}$$

Doce años a partir de ahora, $t = 20$ y

$$n(20) = 50e^{0.55(20)} \approx 2\,993\,707$$

Se estima que la población de conejos en la isla, 12 años a partir de ahora será de alrededor de 3 millones. ■

¿En realidad puede alcanzar un número tan alto la población de conejos del ejemplo 3(b)? En realidad, cuando la isla tiene sobrepoblación de conejos, el crecimiento se reducirá debido a la escasez de alimento y otros factores. Un modelo que toma en cuenta esta clase de factores es el *modelo de crecimiento logístico* descrito en *Enfoque en el modelado*, página 392.

Espacio sólo para estar de pie

La población del mundo era más o menos de 6.1 miles de millones en 2000, y se incrementó en 1.4% por año. Asumiendo que cada persona ocupa un promedio de 4 pies^2 sobre la superficie de la Tierra, el modelo exponencial para el crecimiento poblacional proyecta que por el año 2801 ¡habrá espacio sólo para estar de pie! (El área de la superficie terrestre total del mundo es de alrededor de 1.8×10^{15} pies^2.)

Ejemplo 4 Proyecciones de población mundial

La población del mundo en 2000 fue de 6.1 miles de millones y la tasa de crecimiento relativo era de 1.4% por año. Si el crecimiento de la población continúa a este ritmo, ¿cuándo llegará a 122 000 millones?

Solución Se usa la función de crecimiento poblacional con $n_0 = 6.1$ miles de millones, $r = 0.014$, y $n(t) = 122$ miles de millones. Esto conduce a la ecuación exponencial, de la cual se despeja t.

$$
\begin{aligned}
6.1e^{0.014t} &= 122 && n_0e^{rt} = n(t)\\
e^{0.014t} &= 20 && \text{Divida entre 6.1}\\
\ln e^{0.014t} &= \ln 20 && \text{Tome el ln de cada lado}\\
0.014t &= \ln 20 && \text{Propiedad del ln}\\
t &= \frac{\ln 20}{0.014} && \text{Divida entre 0.014}\\
t &\approx 213.98 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}
$$

Así, la población llegará a 122 000 millones en aproximadamente 214 años, es decir, en el año 2000 + 214 = 2214. ■

Ejemplo 5 Número de bacterias en un cultivo

Un cultivo comienza con 10 000 bacterias, y el número se duplica cada 40 minutos.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias en el tiempo t.

b) Encuentre el número de bacterias después de una hora.

c) ¿Después de cuántos minutos habrá 50 000 bacterias?

d) Bosqueje una gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

Solución

a) Para hallar la función que modela el crecimiento de la población, es necesario hallar la tasa r. Para esto, se emplea la fórmula para el crecimiento poblacional con $n_0 = 10\,000$, $t = 40$ y $n(t) = 20\,000$, y luego se despeja r.

$$10\,000e^{r(40)} = 20\,000 \qquad n_0e^{rt} = n(t)$$
$$e^{40r} = 2 \qquad \text{Divida entre 10 000}$$
$$\ln e^{40r} = \ln 2 \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$
$$40r = \ln 2 \qquad \text{Propiedad del ln}$$
$$r = \frac{\ln 2}{40} \qquad \text{Divida entre 40}$$
$$r \approx 0.01733 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Ahora que se sabe que $r \approx 0.01733$, se puede escribir la función para el crecimiento poblacional:

$$n(t) = 10\,000e^{0.01733t}$$

b) Por medio de la función determinada en el inciso a) con $t = 60$ min (una hora), se obtiene

$$n(60) = 10\,000e^{0.01733(60)} \approx 28\,287$$

Así, el número de bacterias después de una hora es aproximadamente 28 000.

c) Se usa la función que se encontró en el inciso a) con $n(t) = 50\,000$ y de la ecuación resultante se despeja t.

$$10\,000e^{0.01733t} = 50\,000 \qquad n_0e^{rt} = n(t)$$
$$e^{0.01733t} = 5 \qquad \text{Divida entre 10 000}$$
$$\ln e^{0.01733t} = \ln 5 \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$
$$0.01733t = \ln 5 \qquad \text{Propiedad del ln}$$
$$t = \frac{\ln 5}{0.01733} \qquad \text{Divida entre 0.01733}$$
$$t \approx 92.9 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

La cuenta de bacterias llegará a 50 000 en aproximadamente 93 min.

d) La gráfica de la función $n(t) = 10\,000e^{0.01733t}$ se muestra en la figura 3. ■

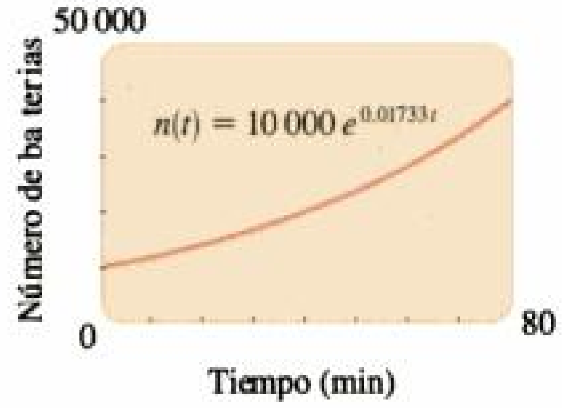


Figura 3

Las vidas medias de los **elementos radiactivos** varían de muy largas a muy cortas. A continuación se dan algunos ejemplos.

Elemento	Vida media
Torio 232	14.5 miles de millones de años
Uranio 235	4.5 miles de millones de años
Torio 230	80 000 años
Plutonio 239	24 360 años
Carbono 14	5 730 años
Radio 226	1 600 años
Cesio 137	30 años
Estroncio 90	28 años
Polonio 210	140 días
Torio 234	25 días
Yodo 135	8 días
Radón 222	3.8 días
Plomo 211	3.6 minutos
Kriptón 91	10 segundos

Decaimiento radiactivo

Las sustancias radiactivas decaen de manera espontánea al emitir radiación. La tasa de decaimiento es directamente proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional, excepto que la masa del material radiactivo *disminuye*. Se puede demostrar que la masa $m(t)$ que permanece en el tiempo t se modela mediante la función

$$m(t) = m_0e^{-rt}$$

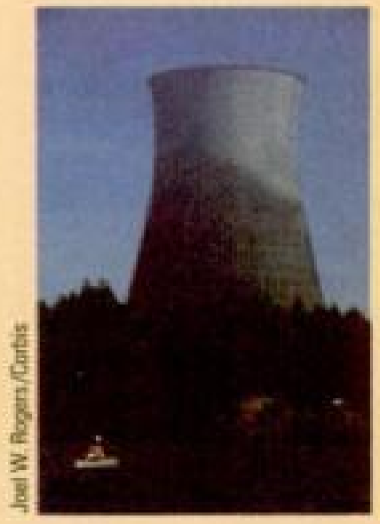
donde r es la tasa de decaimiento expresada como una proporción de la masa y m_0 es la masa inicial. Los físicos expresan la tasa de decaimiento en términos de la **vida media**, el tiempo requerido para que se desintegre la mitad de la masa. Se puede

Desechos radiactivos

Los isótopos radiactivos dañinos se producen siempre que ocurra una reacción nuclear, ya sea como resultado de una prueba de bomba atómica, un accidente nuclear como el de Chernobyl en 1986 o la producción de electricidad sin accidentes en una planta nuclear.

Un material radiactivo producido en bombas atómicas es el isótopo estroncio 90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como el calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros cánceres. Sin embargo, en las décadas desde que se detuvo la prueba atmosférica de armas nucleares, las concentraciones de ^{90}Sr en el ambiente han bajado a un nivel que ya no representa una amenaza para la salud.

Las plantas de energía nuclear producen plutonio 239 radiactivo (^{239}Pu), que tiene una vida media de 24 360 años. Como resultado de su larga vida media, el ^{239}Pu podría representar una amenaza para el ambiente durante miles de años. Por lo tanto, se debe tener mucho cuidado para desecharlo en forma apropiada. La dificultad de garantizar la seguridad de los desechos radiactivos eliminados es una razón de que haya controversia en cuanto a las plantas de energía nuclear.



obtener la tasa r a partir de esto como sigue. Si h es la vida media, entonces una masa de 1 unidad se convierte en $\frac{1}{2}$ unidad cuando $t = h$. Al sustituir esto en el modelo, se obtiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= 1 \cdot e^{-rh} && m(t) = m_0e^{-rt} \\ \ln(\tfrac{1}{2}) &= -rh && \text{Tome el ln de cada lado} \\ r &= -\frac{1}{h}\ln(2^{-1}) && \text{Despeje } r \\ r &= \frac{\ln 2}{h} && \ln 2^{-1} = -\ln 2 \text{ por la ley 3} \end{aligned}$$

Esta última ecuación permite hallar la tasa r a partir de la vida media h.

Modelo de decaimiento radiactivo

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t se modela mediante la función

$$m(t) = m_0e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

Ejemplo 6 Decaimiento radiactivo

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

a) Encuentre una función que modele la cantidad de la muestra que queda en el tiempo t.

b) Calcule la masa que queda después de un año.

c) ¿Cuánto tiempo tarda la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

d) Dibuje una gráfica de la masa de la muestra como una función del tiempo.

Solución

a) Usando el modelo para el decaimiento radiactivo con $m_0 = 300$ y $r = (\ln 2/140) \approx 0.00495$, se tiene

$$m(t) = 300e^{-0.00495t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 365$ (un año).

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Así, aproximadamente 49 mg de ^{210}Po permanecen después de un año.

c) Use la función determinada en el inciso a) con $m(t) = 200$ y despeje t de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} 300e^{-0.00495t} &= 200 && m(t) = m_0e^{-rt} \\ e^{-0.00495t} &= \tfrac{2}{3} && \text{Divida entre 300} \\ \ln e^{-0.00495t} &= \ln\tfrac{2}{3} && \text{Tome el ln de cada lado} \end{aligned}$$

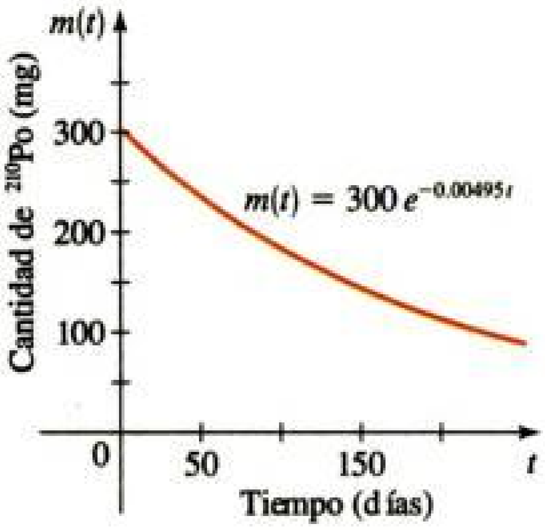


Figura 4

$$-0.00495t = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Propiedad del ln}$$

$$t = -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} \qquad \text{Divida entre } -0.00495$$

$$t \approx 81.9 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

El tiempo requerido para que la muestra disminuya a 200 mg es de alrededor de 82 días.

(d) En la figura 4 se muestra una gráfica de la función $m(t) = 300e^{-0.00495t}$. ■

Ley del enfriamiento de Newton

La ley de Newton del enfriamiento establece que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores, siempre que la diferencia no sea muy grande. Por medio del cálculo, de esta ley se puede deducir el siguiente modelo.

Ley del enfriamiento de Newton

Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y sus alrededores, y si sus alrededores tienen temperatura T_s, entonces la temperatura en el tiempo t se modela mediante la función

$$T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.

Ejemplo 7 Ley del enfriamiento de Newton

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70 °F. Después de 10 min la temperatura del café es 150°F.

a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el instante t.
b) Calcule la temperatura del café después de 15 min.
c) ¿En qué momento el café se habrá enfriado a 100°F?
d) Ilustre mediante el trazo de una gráfica la función de temperatura.

Solución

a) La temperatura del ambiente es $T_s = 70$ °F, y la diferencia de temperatura inicial es

$$D_0 = 200 - 70 = 130\text{°F}$$

Por lo tanto, por la ley del enfriamiento de Newton, la temperatura después de t minutos se modela mediante la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Se necesita hallar la constante k relacionada con esta taza de café. Para hacer esto, se usa el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura es $T(10) = 150$.

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-10k} &= 150 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t)\\
130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70}\\
e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130}\\
-10k &= \ln \tfrac{8}{13} && \text{Tome el ln de cada lado}\\
k &= -\tfrac{1}{10}\ln \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre } -10\\
k &\approx 0.04855 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}$$

Al sustituir este valor de k en la expresión para $T(t)$, se obtiene

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133\,°\mathrm{F}$$

c) Se usa la función encontrada en el inciso a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación resultante se despeja t.

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t)\\
130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70}\\
e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130}\\
-0.04855t &= \ln \tfrac{3}{13} && \text{Tome el ln de cada lado}\\
t &= \frac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855} && \text{Divida entre } -0.04855\\
t &\approx 30.2 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}$$

El café se habrá enfriado a 100°F después de casi media hora.

d) La gráfica de la función de temperatura se bosqueja en la figura 5. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?) ■

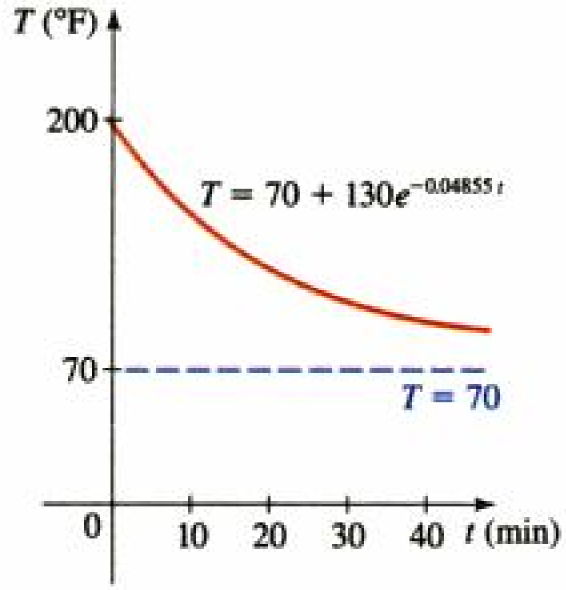


Figura 5

Temperatura del café después de t minutos

Escalas logarítmicas

Cuando una constante física varía en un intervalo muy grande, suele ser conveniente tomar su logaritmo a fin de tener un conjunto más manejable de números. Se analizan tres situaciones de este tipo: la escala de pH, que mide la acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de los terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de los sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad de luz, la capacidad de información y la radiación.

LA ESCALA DE pH Los químicos medían la acidez de una disolución dando su concentración de ion hidrógeno hasta que Sorensen, en 1909, propuso una medida más conveniente. Él definió

$$\boxed{\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]}$$

pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Sémola de maíz	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limas	1.3–2.0
Ácido de baterías	1.0

donde $[H^+]$ es la concentración de los iones hidrógeno medida en moles por litro (M). Él hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad [H^+] = 10^{-4}\,\text{M}, \qquad \text{entonces} \qquad \text{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las disoluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH < 7 son *ácidas* y las que tienen pH > 7 son *básicas*. Observe que cuando se incrementa el pH en una unidad, $[H^+]$ disminuye por un factor de 10.

Ejemplo 8 Escala de pH y concentración de ion hidrógeno

a) Se midió la concentración de ion hidrógeno de una muestra de sangre humana y se encontró que es $[H^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

b) La lluvia más ácida medida alguna vez ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue 2.4. Determine la concentración de ion hidrógeno.

Solución

a) Con una calculadora se obtiene

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Puesto que es mayor que 7, la sangre es básica.

b) Para hallar la concentración de ion hidrógeno, se necesita despejar $[H^+]$ en la ecuación logarítmica

$$\log[H^+] = -\text{pH}$$

Por lo tanto, se escribe en forma exponencial.

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

En este caso, pH $= 2.4$, por lo tanto

$$[H^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\,\text{M}$$

■

LA ESCALA RICHTER En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$\boxed{M = \log \frac{I}{S}}$$

donde I es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micra $= 10^{-4}$ cm). La magnitud del terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió muchos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala Richter y el más pequeño tuvo una magnitud de 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800 000 000, de modo

Terremotos más grandes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Alaska	1957	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Sumatra	2004	9.0
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Tíbet	1950	8.6
Kamchatka	1923	8.5
Indonesia	1938	8.5
Islas Kuril	1963	8.5

que la escala Richter proporciona números más razonables con los cuales trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

Ejemplo 9 Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador y su intensidad fue cuatro veces mayor. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Colombia y Ecuador en la escala Richter?

Solución Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces de la definición de magnitud se tiene

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto de Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

■

Ejemplo 10 Intensidad de terremotos

El terremoto de Loma Prieta en 1989 que sacudió a la ciudad de San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de 1906 (véase el ejemplo 9) que el de 1989?

Roger Ressmeyer/Corbis

Solución Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces se requiere hallar I_1/I_2. Para relacionar esto con la definición de magnitud, se divide numerador y denominador entre S.

$$\begin{aligned} \log \frac{I_1}{I_2} &= \log \frac{I_1/S}{I_2/S} && \text{Divida el numerador y el denominador entre } S \\ &= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} && \text{Ley 2 de los logaritmos} \\ &= 8.3 - 7.1 = 1.2 && \text{Definición de magnitud de terremoto} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 tuvo una intensidad de 16 veces el de 1989. ■

LA ESCALA DE DECIBELES El oído es sensible a una variedad extremadamente amplia de intensidades de sonido. Se toma como intensidad de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de audición). La sensación psicológica de sonoridad varía con el logaritmo de la intensidad (la ley de Weber-Fechner) y, por lo tanto, el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles (dB), se define como

$$\boxed{B = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

Los **niveles de intensidad de sonidos** que es posible escuchar varían desde muy fuertes hasta muy suaves. A continuación se dan algunos ejemplos de los niveles de decibeles de sonidos escuchados comúnmente.

Fuente de sonido	B (dB)
Despegue de un avión	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Tren subterráneo	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Murmullo de hojas	10–20
Umbral de audición	0

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Ejemplo 11 Intensidad sonora del despegue de un avión

Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de una turbina de avión durante el despegue si la intensidad se mide a 100 W/m^2.

Solución De la definición de nivel de intensidad se puede observar que

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB. ■

La tabla del margen lista los niveles de intensidad de decibeles para algunos sonidos comunes que varían del umbral de la audición humana al despegue de avión del ejemplo 11. El umbral de dolor es más o menos 120 dB.

4.5 Ejercicios

1–13 ■ En estos ejercicios se usa el modelo de crecimiento poblacional.

1. **Cultivo de bacterias** El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función

$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

donde t se mide en horas.

a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.

c) ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10 000?

2. **Población de peces** El número de cierta especie de peces se modela mediante la función

$$n(t) = 12e^{0.012t}$$

donde t se mide en años y $n(t)$ se mide en millones.

a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de peces? Exprese su respuesta como porcentaje.

b) ¿Cuál será la población de peces después de cinco años?

c) ¿Después de cuántos años la cantidad de peces llega a 30 millones?

d) Trace una gráfica de la función de población de peces $n(t)$.

3. **Población de zorras** La población de zorras en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2000 fue 18 000.

a) Encuentre una función que modele la población t años después del año 2000.

b) Use la función del inciso a) para estimar la población de zorras en el año 2008.

c) Trace una gráfica de la función de población de zorras para los años 2000-2008.

4. **Población de un país** La población de un país tiene una tasa de crecimiento relativa de 3% por año. El gobierno está intentando reducir la tasa de crecimiento a 2%. La población en 1995 fue aproximadamente 110 millones. Encuentre la población proyectada para el año 2020 para las condiciones siguientes.

a) La tasa de crecimiento relativa permanece en 3% por año.

b) La tasa de crecimiento relativa se reduce a 2% por año.

5. **Población de una ciudad** La población para cierta ciudad fue 112 000 en 1998, y la tasa de crecimiento relativa observada es 4% por año.

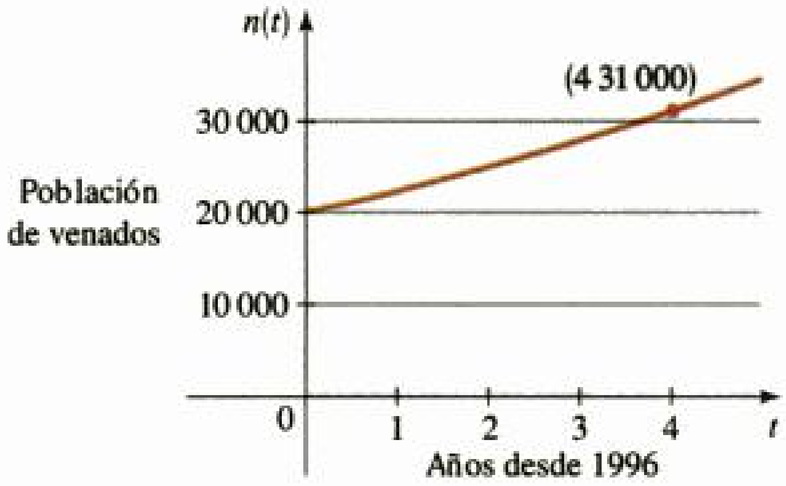
a) Encuentre una función que modele la población después de t años.

b) Encuentre la población proyectada en el año 2004.

c) ¿En qué año la población llega a 200 000?

6. **Población de ranas** La población de ranas en un estanque pequeño crece de forma exponencial. La población actual es de 85 ranas y la tasa de crecimiento relativa es 18% por año.
   a) Encuentre una función que modela la población después de t años.
   b) Encuentre la población proyectada después de tres años.
   c) Calcule el número de años requerido para que la población de ranas llegue a 600.

7. **Población de venados** En la gráfica se muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 1996 y 2000. Suponga que la población crece de forma exponencial
   a) ¿Cuál es la población de venados en 1996?
   b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 1996.
   c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2004?
   d) ¿En qué año la población de venados llega a 100 000?



8. **Cultivo de bacterias** Un cultivo contiene 1500 bacterias al inicio y se duplica cada 30 minutos.
   a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t minutos.
   b) Calcule el número de bacterias después de dos horas.
   c) ¿Después de cuántos minutos el cultivo contendrá 4000 bacterias?

9. **Cultivo de bacterias** Un cultivo comienza con 8600 bacterias. Después de una hora la cuenta es 10 000.
   a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
   b) Encuentre el número de bacterias después de dos horas.
   c) ¿Después de cuántas horas se duplica el número de bacterias?

10. **Cultivo de bacterias** La cuenta en un cultivo de bacterias fue 400 después de dos horas y 25 600 después de seis horas.
   a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.
   b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
   c) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
   d) Calcule el número de bacterias después de 4.5 horas.
   e) ¿Cuándo el número de bacterias será 50 000?

11. **Población mundial** La población del mundo fue 5.7 miles de millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativa observada fue 2% por año.
   a) ¿En qué año se habrá duplicado la población?
   b) ¿En qué año se habrá triplicado la población?

12. **Población de California** La población de California fue 10 586 223 en 1950 y 23 668 562 en 1980. Suponga que la población crece en forma exponencial.
   a) Encuentre una función que modele la población t años después de 1950.
   b) Determine el tiempo requerido para que se duplique la población.
   c) Use la función del inciso a) para predecir la población de California en el año 2000. Busque el dato de la población real de California en 2000 y compare.

13. **Bacterias infecciosas** Una cepa infecciosa de bacterias se incrementa a una tasa de crecimiento relativa de 200% por hora. Cuando cierta cantidad crítica de bacterias está presente en el torrente sanguíneo, una persona se enferma. Si una sola bacteria infecta a una persona, la concentración crítica se alcanza en 24 horas. ¿Cuánto tiempo toma alcanzar la concentración crítica si la persona es infectada con 10 bacterias?

14–22 ■ En estos ejercicios se emplea el modelo de decaimiento radiactivo.

14. **Radio radiactivo** La vida media del radio 226 son 1600 años. Suponga que tiene una muestra de 22 mg.
   a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años.
   b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 4000 años?
   c) ¿Después de cuánto tiempo quedan solamente 18 mg de muestra?

15. **Cesio radiactivo** La vida media del cesio 137 son 30 años. Suponga que se tiene una muestra de 10 g.
   a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años.
   b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 80 años?
   c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 18 mg de la muestra?

16. **Torio radiactivo** La masa $m(t)$ restante después de t días de una muestra de 40 g de torio 234 está dada por

$$m(t) = 40e^{-0.0277t}$$

   a) ¿Después de 60 días cuál es la cantidad de muestra restante?
   b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que sólo queden 10 g de la muestra?
   c) Calcule la vida media del torio 234.

17. **Estroncio radiactivo** La vida media del estroncio 90 son 28 años. ¿Cuánto tiempo tarda una muestra de 50 mg en desintegrarse a una masa de 32 mg?

18. Radio radiactivo El radio 221 tiene una vida media de 30 s. ¿Cuánto tiempo tarda en desintegrarse 95% de la muestra?

19. Hallar la vida media Si 250 mg de un elemento radiactivo disminuyen a 200 mg en 48 horas, calcule la vida media del elemento.

20. Radón radiactivo Después de 3 días una muestra de radón 222 ha disminuido a 58% de su cantidad original.

a) ¿Cuál es la vida media del radón 222?

b) ¿En cuánto tiempo la muestra disminuye a 20% de su cantidad original?

21. Fechado con carbono 14 Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% de carbono 14 que está presente en árboles vivos. ¿Hace cuánto tiempo fue hecho el artefacto? (La vida media del carbono 14 son 5730 años.)

22. Fechado con carbono 14 Se estima que la ropa de entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Hace cuánto tiempo fue enterrada la momia? (La vida media del carbono 14 es de 5730 años.)

23–26 ▪ En estos ejercicios se emplea la ley del enfriamiento de Newton.

23. Enfriamiento de la sopa En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente. Comienza a enfriarse según la ley del enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en el instante t se determina mediante

$$T(t) = 65 + 145e^{-0.05t}$$

donde t se mide en minutos y T se mide en °F.

a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 min?

c) ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100°F?

24. Hora de la muerte La ley del enfriamiento de Newton se emplea en investigaciones de homicidios para determinar la hora de la muerte. La temperatura corporal normal es de 98.6°F. Inmediatamente después de la muerte el cuerpo comienza a enfriarse. Se ha determinado de manera experimental que la constante en la ley de Newton del enfriamiento es aproximadamente $k = 0.1947$, asumiendo que el tiempo se mide en horas. Suponga que la temperatura del entorno es de 60°F.

a) Encuentre la función $T(t)$ que modela la temperatura t horas después de la muerte.

b) Si la temperatura del cuerpo es de 72°F, ¿hace cuánto tiempo fue la hora de la muerte?

25. Enfriamiento de un pavo Se saca del horno un pavo asado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca en una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75°F.

a) Si la temperatura del pavo es de 150°F después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 min?

b) ¿En cuánto tiempo el pavo se enfría a 100°F?

26. Agua en ebullición Una olla llena de agua se lleva a ebullición en una habitación con temperatura de 20°C. Después de 15 minutos la temperatura del agua ha disminuido de 100°C a 75°C. Calcule la temperatura después de 10 min. Ilustre graficando la función de temperatura.

27–41 ▪ Estos ejercicios tratan con escalas logarítmicas.

27. Hallar el pH Se da la concentración de ion hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.

a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M

b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M

c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M

28. Hallar el pH Una muestra desconocida tiene una concentración de ion hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

29. Concentración de iones Se da la lectura de pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones hidrógeno de la sustancia.

a) Vinagre: pH = 3.0

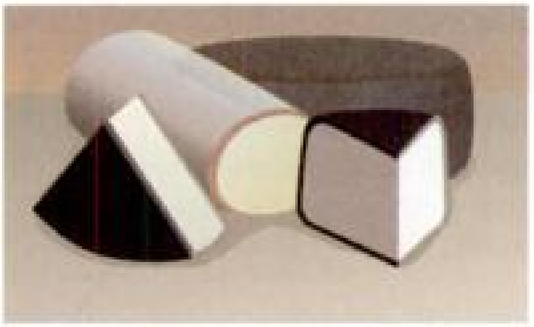
b) Leche: pH = 6.5

30. Concentración de iones Se da la lectura de pH de un vaso de líquido. Encuentre la concentración de iones hidrógeno del líquido.

a) Cerveza: pH = 4.6

b) Agua: pH = 7.3

31. Hallar el pH Las concentraciones de iones hidrógeno en quesos varía de 4.0×10^{-7} M a 1.6×10^{-5} M. Determine el intervalo correspondiente de lecturas de pH.



32. Concentración de iones en vino Las lecturas de pH para vinos varía de 2.8 a 3.8. Encuentre el intervalo correspondiente de concentraciones de iones hidrógeno..

33. Magnitudes de terremotos Si un terremoto es 20 veces la intensidad de otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala Richter?

34. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala Richter. Al mismo tiempo en Japón un terremoto con magnitud 4.9 causó sólo daños menores. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de San Francisco que el de Japón?