35. **Magnitudes de terremotos** El sismo de Alaska de 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue éste que el de San Francisco en 1906? (Véase el ejercicio 34.)

36. **Magnitudes de terremotos** El sismo de 1994 en Northridge, California, tuvo una magnitud de 6.8 en la escala Richter. Un año después, un sismo de magnitud 7.2 golpeó a Kobe, Japón. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de Kobe que el de Northridge?

37. **Magnitudes de terremotos** El sismo de 1985 en la Ciudad de México tuvo una magnitud de 8.1 en la escala Richter. El sismo de 1976 en Tangshan, China, tuvo una intensidad de 1.26 veces el de la Ciudad de México. ¿Cuál es la magnitud del sismo de Tangshan?

38. **Ruido de tránsito** La intensidad del sonido del tránsito en una intersección ocupada se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Determine el nivel de intensidad en decibeles.

39. **Ruido del metro** La intensidad del sonido de un tren subterráneo se midió en 98 dB. Calcule la intensidad en W/m^2.

40. **Comparación de niveles de decibeles** El ruido de una cegadora mecánica se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de rock se midió en 120 dB. Encuentre la relación de la intensidad de la música de rock a la de la cegadora mecánica.

41. **Ley cuadrada inversa para el sonido** Una ley de la física establece que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente: $I = k/d^2$.

   a) Use este modelo y la ecuación

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

   (descrita en esta sección) para mostrar que los niveles de decibeles B_1 y B_2 a distancias d_1 y d_2 desde una fuente de sonido se relacionan mediante la ecuación

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

   b) El nivel de intensidad en un concierto de rock es 120 dB a una distancia de 2 m desde las bocinas. Determine el nivel de intensidad a una distancia de 10 m.

4 Repaso

Comprobación de conceptos

1. **a)** Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base a.
   b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   c) ¿Cuál es el rango de esta función?
   d) Bosqueje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada caso.
   i) $a > 1$ ii) $0 < a < 1$

2. Si x es grande, ¿qué función crece más rápido, $y = 2^x$ o $y = x^2$?

3. **a)** ¿Cómo se define el número e?
   b) ¿Cuál es la función exponencial natural?

4. **a)** ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
   b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   c) ¿Cuál es el rango de esta función?
   d) Bosqueje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.
   e) ¿Qué es el logaritmo natural?
   f) ¿Qué es el logaritmo común?

5. Exprese las tres leyes de los logaritmos.

6. Enuncie la fórmula de cambio de base

7. **a)** ¿Cómo resuelve una ecuación exponencial?
   b) ¿Cómo resuelve una ecuación logarítmica?

8. Suponga que se invierte una cantidad P a una tasa de interés r y A es la cantidad después de t años.
   a) Escriba una expresión para A si el interés es compuesto n veces por año.
   b) Escriba una expresión para A si el interés se compone de manera continua.

9. Si el tamaño inicial de una población es n_0 y la población crece en forma exponencial con tasa de crecimiento relativa r, escriba una expresión para la población $n(t)$ en el tiempo t.

10. **a)** ¿Qué es la vida media de una sustancia radiactiva?
    b) Si una sustancia radiactiva tiene masa inicial m_0 y vida media h, escriba una expresión para la masa $m(t)$ que permanece en el tiempo t.

11. ¿Qué dice la ley de Newton del enfriamiento?

12. ¿Qué tienen en común la escala de pH, la escala Richter y la escala de decibeles? ¿Qué miden?

Ejercicios

1–12 ■ Bosqueje la gráfica de la función. Exprese el dominio, el rango y la asíntota.

1. $f(x) = 2^{-x+1}$ **2.** $f(x) = 3^{x-2}$

3. $g(x) = 3 + 2^x$ **4.** $g(x) = 5^{-x} - 5$

5. $f(x) = \log_3(x - 1)$ **6.** $g(x) = \log(-x)$

7. $f(x) = 2 - \log_2 x$ **8.** $f(x) = 3 + \log_5(x + 4)$

9. $F(x) = e^x - 1$ **10.** $G(x) = \frac{1}{2}e^{x-1}$

11. $g(x) = 2\ln x$ **12.** $g(x) = \ln(x^2)$

13–16 ■ Encuentre el dominio de la función.

13. $f(x) = 10^{x^2} + \log(1 - 2x)$ **14.** $g(x) = \ln(2 + x - x^2)$

15. $h(x) = \ln(x^2 - 4)$ **16.** $k(x) = \ln|x|$

17–20 ■ Escriba la ecuación en forma exponencial.

17. $\log_2 1024 = 10$ **18.** $\log_6 37 = x$

19. $\log x = y$ **20.** $\ln c = 17$

21–24 ■ Escriba la ecuación en forma logarítmica.

21. $2^6 = 64$ **22.** $49^{-1/2} = \frac{1}{7}$

23. $10^x = 74$ **24.** $e^k = m$

25–40 ■ Evalúe la expresión sin usar una calculadora.

25. $\log_2 128$ **26.** $\log_8 1$

27. $10^{\log 45}$ **28.** $\log 0.000001$

29. $\ln(e^6)$ **30.** $\log_4 8$

31. $\log_3(\frac{1}{27})$ **32.** $2^{\log_2 13}$

33. $\log_5 \sqrt{5}$ **34.** $e^{2\ln 7}$

35. $\log 25 + \log 4$ **36.** $\log_3 \sqrt{243}$

37. $\log_2 16^{23}$ **38.** $\log_5 250 - \log_5 2$

39. $\log_8 6 - \log_8 3 + \log_8 2$ **40.** $\log\log 10^{100}$

41–46 ■ Desarrolle la expresión logarítmica.

41. $\log(AB^2C^3)$ **42.** $\log_2(x\sqrt{x^2 + 1})$

43. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ **44.** $\log\left(\dfrac{4x^3}{y^2(x - 1)^5}\right)$

45. $\log_5\left(\dfrac{x^2(1 - 5x)^{3/2}}{\sqrt{x^3 - x}}\right)$ **46.** $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 12}}{(x + 16)\sqrt{x - 3}}\right)$

47–52 ■ Combine en un solo logaritmo.

47. $\log 6 + 4\log 2$ **48.** $\log x + \log(x^2y) + 3\log y$

49. $\frac{3}{2}\log_2(x - y) - 2\log_2(x^2 + y^2)$

50. $\log_5 2 + \log_5(x + 1) - \frac{1}{3}\log_5(3x + 7)$

51. $\log(x - 2) + \log(x + 2) - \frac{1}{2}\log(x^2 + 4)$

52. $\frac{1}{2}[\ln(x - 4) + 5\ln(x^2 + 4x)]$

53–62 ■ Resuelva la ecuación. Encuentre la solución exacta si es posible; de lo contrario aproxime hasta dos decimales.

53. $\log_2(1 - x) = 4$ **54.** $2^{3x-5} = 7$

55. $5^{5-3x} = 26$ **56.** $\ln(2x - 3) = 14$

57. $e^{3x/4} = 10$ **58.** $2^{1-x} = 3^{2x+5}$

59. $\log x + \log(x + 1) = \log 12$

60. $\log_8(x + 5) - \log_8(x - 2) = 1$

61. $x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 8e^{2x}$ **62.** $2^{3^x} = 5$

63–66 ■ Use una calculadora para hallar la solución de la ecuación, correcta hasta seis decimales.

63. $5^{-2x/3} = 0.63$ **64.** $2^{3x-5} = 7$

65. $5^{2x+1} = 3^{4x-1}$ **66.** $e^{-15k} = 10\,000$

67–70 ■ Dibuje una gráfica de la función y empléela para determinar las asíntotas y los valores locales máximo y mínimo.

67. $y = e^{x/(x+2)}$ **68.** $y = 2x^2 - \ln x$

69. $y = \log(x^3 - x)$ **70.** $y = 10^x - 5^x$

71–72 ■ Encuentre las soluciones de la ecuación, correctas hasta dos decimales.

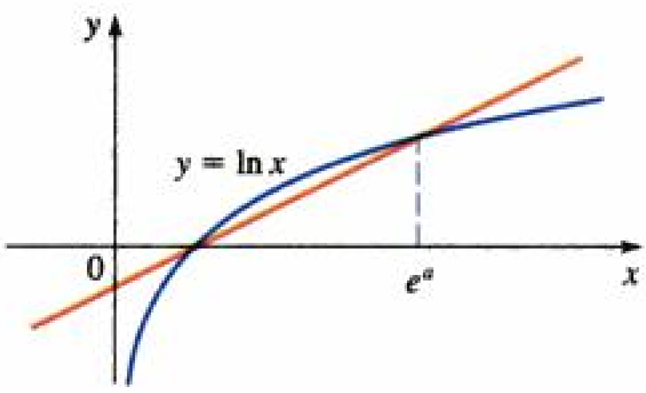
71. $3\log x = 6 - 2x$ **72.** $4 - x^2 = e^{-2x}$

73–74 ■ Resuelva la desigualdad en forma gráfica.

73. $\ln x > x - 2$ **74.** $e^x < 4x^2$

75. Use una gráfica de $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$ para encontrar, aproximadamente, los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

76. Encuentre una ecuación de la recta mostrada en la figura.



77. Evalúe $\log_4 15$, correcto hasta seis decimales.

78. Resuelva la desigualdad: $0.2 \leq \log x < 2$.

79. ¿Cuál es más grande, $\log_4 258$ o $\log_5 620$?

80. Encuentre el inverso de la función $f(x) = 2^{3^x}$ y exprese su dominio y rango.

81. Si se invierten 12 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de tres años para cada método de capitalización.

a) Semianual **b)** Mensual
c) Diario **d)** Continuo

82. Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de $8\frac{1}{2}$% por año, capitalizable cada medio año.

a) Encuentre la cantidad de la inversión después de un año y medio.

b) ¿Después de qué periodo la inversión llega a 7000 dólares?

83. La población de gatos callejeros en un pueblo pequeño crece de manera exponencial. En 1999, el pueblo tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% anual.

a) Encuentre una función que modele la población de gatos callejeros $n(t)$ después de t años.

b) Determine la población proyectada después de 4 años.

c) Calcule el número de años requerido para que la población de gatos callejeros llegue a 500.

84. Un cultivo contiene al inicio 10 000 bacterias. Después de una hora la cuenta de bacterias es 25 000.

a) Determine el periodo de duplicación.

b) Calcule el número de bacterias después de tres horas.

85. El uranio 234 tiene una vida media de 2.7×10^5 años.

a) Determine la cantidad restante de una muestra de 10 mg después de mil años.

b) ¿Cuánto tarda en descomponerse esta muestra hasta que su masa es de 7 mg?

86. Una muestra de bismuto 210 se descompone a 33% de su masa original después de ocho días.

a) Calcule la vida media de este elemento.

b) Determine la masa restante después de 12 días.

87. La vida media del radio 226 es 1590 años.

a) Si una muestra tiene una masa de 150 mg, encuentre una función que modele la masa que permanece después de t años.

b) Determine la masa que queda después de 1000 años.

c) ¿Después de cuántos años sólo quedan 50 mg?

88. La vida media del paladio 100 es cuatro días. Después de 20 días una muestra ha sido reducida a una masa de 0.375g.

a) ¿Cuál es la masa inicial de la muestra?

b) Encuentre una función que modele la masa restante después de t días.

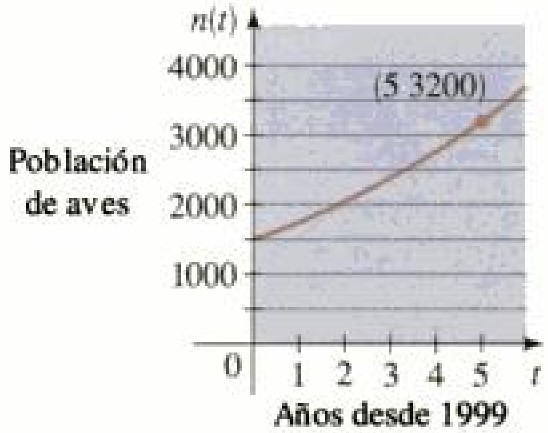
c) ¿Cuál es la masa después de tres días?

d) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 0.15 g?

89. La gráfica muestra la población de una rara especie de ave, donde t representa años desde 1999 y $n(t)$ se mide en miles.

a) Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo t en la forma $n(t) = n_0 e^{rt}$.

b) ¿Cuál se espera que sea la población de aves en el año 2010?



90. Un motor de automóvil corre a una temperatura de 190°F. Cuando se apaga el motor, se enfría de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton con constante $k = 0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 90°F si la temperatura circundante es 60°F.

91. La concentración de iones hidrógeno de claras de huevo frescas se midió como

$$[H^+] = 1.3 \times 10^{-8}\,M$$

Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

92. El pH del jugo de limón es 1.9. Calcule la concentración del ion hidrógeno.

93. Si un sismo tiene una magnitud de 6.5 en la escala Richter, ¿cuál es la magnitud de otro sismo cuya intensidad es 35 veces mayor?

94. El ruido que produce un martillo neumático al taladrar se midió en 132 dB. El sonido del susurro se midió en 28 dB. Encuentre la relación de intensidades entre el taladrado y el susurro.

4 Evaluación

1. Grafique las funciones $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ en los mismos ejes.

2. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = \log(x + 1)$ y exprese el dominio, rango y asíntota.

3. Evalúe cada expresión logarítmica.

a) $\log_3 \sqrt{27}$ b) $\log_2 80 - \log_2 10$

c) $\log_8 4$ d) $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Use las leyes de los logaritmos para desarrollar la expresión.

$$\log \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x^4(x^2 + 4)}}$$

5. Combine en un solo logaritmo: $\ln x - 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(3 - x^4)$

6. Encuentre la solución de la ecuación, correcta hasta dos decimales.

a) $2^{x-1} = 10$ b) $5\ln(3 - x) = 4$

c) $10^{x+3} = 6^{2x}$ d) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacterias es 1000. Después de una hora la cuenta de bacterias es 8000.

a) Encuentre una función que modele la población después de t horas.

b) Calcule la población después de 1.5 horas.

c) ¿Cuándo la población llega a 15 000?

d) Bosqueje la gráfica de la función de población.

8. Suponga que se invierten 12 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga 5.6% de interés anual.

a) Escriba una fórmula para la cantidad en la cuenta después de t años si el interés se capitaliza cada mes.

b) Determine la cantidad en la cuenta después de tres años si el interés se compone cada día.

c) ¿Cuánto tiempo tarda la cantidad en la cuenta en crecer a 20 000 dólares si el interés se compone cada medio año?

9. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$.

a) Grafique f en un rectángulo de visión apropiado.

b) Exprese las asíntotas de f.

c) Encuentre, correcto hasta dos decimales, el valor local mínimo de f y el valor de x en el que ocurre.

d) Encuentre el rango de f.

e) Resuelva la ecuación $\dfrac{e^x}{x^3} = 2x + 1$. Exprese cada solución correcta hasta dos decimales.

Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas exponenciales y de potencia a datos

En *Enfoque en el modelado* (página 320) se aprendió que la forma de un diagrama de dispersión ayuda a elegir el tipo de curva a usar en el modelado de datos. En la primera gráfica de la figura 1 se puede observar con claridad que se ajusta a una recta y la segunda a un polinomio cúbico. Para la tercera gráfica se podría usar un polinomio de segundo grado. Pero, ¿qué pasa si se ajusta mejor a una curva exponencial? ¿Cómo se decide esto? En esta sección se aprenderá cómo ajustar curvas exponenciales y de potencia a datos y cómo decidir qué tipo de curva se ajusta mejor a los datos. Se aprenderá también que para gráficas de dispersión como las de las dos últimas gráficas de la figura 1, los datos se pueden modelar mediante funciones logarítmicas o logísticas.

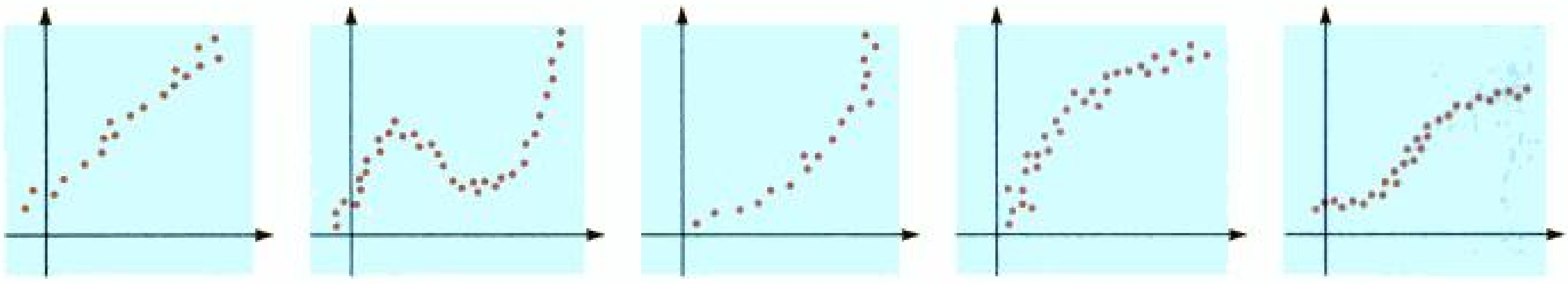


Figura 1

Modelado con funciones exponenciales

Si un diagrama de dispersión muestra que los datos se incrementan con rapidez, es posible que se desee modelar los datos por medio de un *modelo exponencial*, es decir, una función de la forma

$$\boxed{f(x) = Ce^{kx}}$$

donde C y k son constantes. En el primer ejemplo se modela la población mundial mediante un modelo exponencial. Recuerde de la sección 4.5 que la población tiende a incrementarse de manera exponencial.

Tabla 1 Población mundial

Año (t)	Población mundial (P en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
2000	6060

Ejemplo 1 Un modelo exponencial para la población mundial

En la tabla 1 se da la población del mundo en el siglo XX.

a) Trace un diagrama de dispersión y note que un modelo lineal no es apropiado.

b) Encuentre una función exponencial que modele el crecimiento de la población.

c) Dibuje una gráfica de la función que encontró junto con el diagrama de dispersión. ¿Cómo se ajusta el modelo a los datos?

d) Use el modelo que encontró para predecir la población mundial en el año 2020.

Solución

a) El diagrama de dispersión se muestra en la figura 2. Los puntos graficados al parecer no quedan sobre una recta, así que el modelo lineal es inapropiado.

Chabruken / The Image Bank / Getty Images

La población del mundo se incrementa en forma exponencial

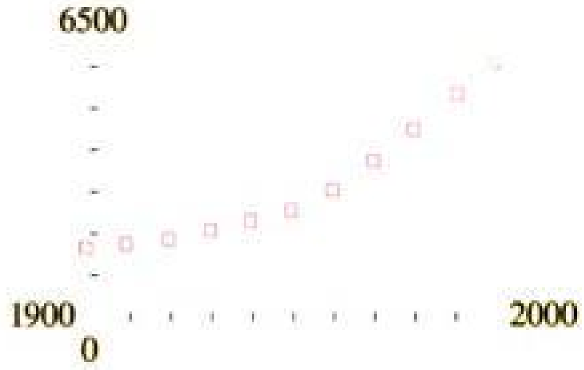


Figura 2
Diagrama de dispersión de la población mundial

b) Por medio de una calculadora para gráficas y el comando `ExpReg` (véase la figura 3(a)), se obtiene el modelo exponencial

$$P(t) = (0.0082543) \cdot (1.0137186)^t$$

Éste es un modelo de la forma $y = Cb^t$. Para convertir esto a la forma $y = Ce^{kt}$, se usan las propiedades de los exponentes y los logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned} 1.0137186^t &= e^{\ln 1.0137186^t} && A = e^{\ln A} \\ &= e^{t \ln 1.0137186} && \ln A^B = B \ln A \\ &= e^{0.013625t} && \ln 1.0137186 \approx 0.013625 \end{aligned}$$

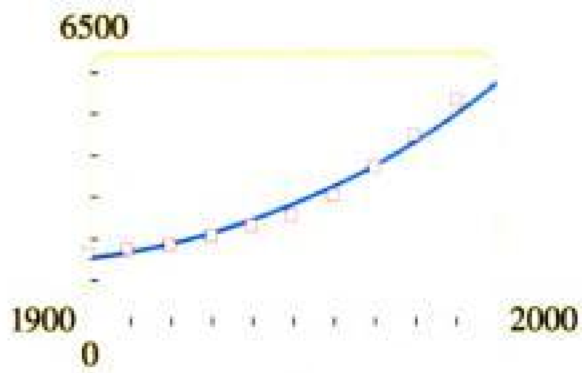
Así, se puede escribir el modelo como

$$P(t) = 0.0082543e^{0.013625t}$$

c) De la gráfica de la figura 3(b), se puede observar que el modelo al parecer se ajusta bastante bien a los datos. El periodo de crecimiento poblacional relativamente lento se explica por la depresión de la década de 1930 y las dos guerras mundiales.

```
ExpReg
 y=a*b^x
 a=.0082543035
 b=1.013718645
```

a)



b)

Figura 3
Modelo exponencial para la población mundial

d) El modelo predice que la población mundial en 2020 será

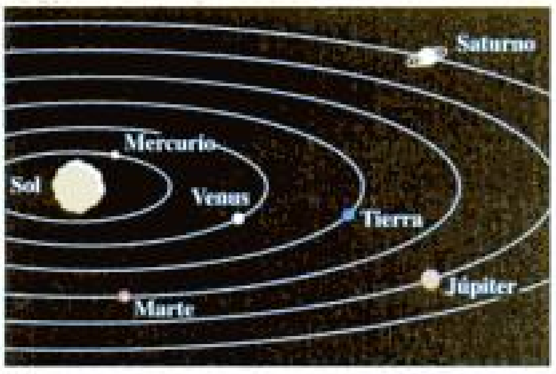
$$\begin{aligned} P(2020) &= 0.0082543e^{(0.013625)(2020)} \\ &\approx 7\,405\,400\,000 \end{aligned}$$ ■

Modelado con funciones de potencia

Si el diagrama de dispersión de los datos bajo estudio se asemejan a la gráfica de $y = ax^2$, $y = ax^{1.32}$, o a alguna otra función de potencia, entonces se busca un *modelo de potencia*, es decir, una función de la forma

$$\boxed{f(x) = ax^n}$$

donde a es una constante positiva y n es cualquier número real.



En el ejemplo siguiente se busca un modelo de potencia para algunos datos astronómicos. En astronomía, la distancia en el sistema solar se mide en unidades astronómicas. Una *unidad astronómica* (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol. El *periodo* de un planeta es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol (medido en años terrestres). En este ejemplo se deduce la relación notable, descubierta por Johannes Kepler (véase la página 780), entre la distancia media de un planeta desde el Sol y su periodo.

Ejemplo 2 Un modelo de potencia para periodos planetarios

Tabla 2 Distancias y periodos de los planetas

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón	39.507	248.350

En la tabla 2 se muestra la distancia media d de cada planeta desde el Sol en unidades astronómicas y su periodo T en años.

a) Bosqueje un diagrama de dispersión. ¿Es apropiado un modelo lineal?

b) Encuentre una función de potencia que modele los datos.

c) Dibuje una gráfica de la función que encontró y el diagrama de dispersión en la misma gráfica. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

d) Use el modelo que encontró para determinar el periodo de un asteroide cuya distancia media al Sol es 5 UA.

Solución

a) El diagrama de dispersión mostrado en la figura 4 indica que los puntos graficados no se ubican a lo largo de una recta, así que es inapropiado un modelo lineal.

Figura 4
Diagrama de dispersión de datos de planetas

b) Por medio de una calculadora para gráficas y el comando `PwrReg` (véase la figura 5(a)), se obtiene el modelo de potencia

$$T = 1.000396d^{1.49966}$$

Si se redondea tanto el coeficiente como el exponente a tres cifras significativas, se puede escribir el modelo como

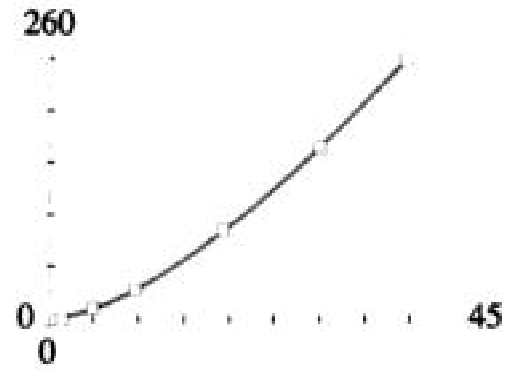
$$T = d^{1.5}$$

Ésta es la relación que descubrió Kepler (véase la página 780). Sir Isaac Newton utilizó después su Ley de la gravedad para deducir en forma teórica su relación, y de este modo proporcionó evidencia científica firme de que la Ley de la gravedad debe ser cierta.

c) La gráfica se muestra en la figura 5(b). El modelo al parecer se ajusta muy bien a los datos.

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=1.000396048
 b=1.499661718
```

a)



b)

Figura 5
Modelo de potencia para los datos de los planetas.

d) En este caso, $d = 5$ UA y, por lo tanto, el modelo produce

$$T = 1.00039 \cdot 5^{1.49966} \approx 11.22$$

El periodo del asteroide es aproximadamente 11.2 años. ■

Linealización de datos

Se ha empleado la forma de un diagrama de dispersión para decidir qué tipo de modelo usar —lineal, exponencial o de potencia—. Esto funciona bien si los puntos de datos se ubican sobre una recta. Pero es difícil distinguir un diagrama de dispersión que sea exponencial a partir de uno que requiere un modelo de potencia. Así, para ayudar a decidir qué modelo usar, se pueden *linealizar* los datos, es decir, aplicar una función que "enderezca" al diagrama de dispersión. El inverso de la función de linealización es entonces un modelo apropiado. Ahora se describe cómo linealizar datos que pueden ser modelados por funciones exponenciales o de potencia.

■ Linealización de datos exponenciales

Si se sospecha que los puntos de datos (x, y) están sobre una curva exponencial $y = Ce^{kx}$, entonces los puntos

$$(x, \ln y)$$

deben quedar sobre una recta. Esto se puede ver a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln Ce^{kx} && \text{Suponga que } y = Ce^{kx} \text{ y tome el ln} \\ &= \ln e^{kx} + \ln C && \text{Propiedad del ln} \\ &= kx + \ln C && \text{Propiedad del ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de x, sea $Y = \ln y$ y $A = \ln C$; entonces

$$Y = kx + A$$

Tabla 3 Datos de población mundial

t	Población P (en millones)	$\ln P$
1900	1650	21.224
1910	1750	21.283
1920	1860	21.344
1930	2070	21.451
1940	2300	21.556
1950	2520	21.648
1960	3020	21.829
1970	3700	22.032
1980	4450	22.216
1990	5300	22.391
2000	6060	22.525

Se aplica esta técnica a los datos de población mundial (t, P) para obtener los puntos $(t, \ln P)$ de la tabla 3. En el diagrama de dispersión de la figura 6 se observa que los datos linealizados se encuentran más o menos sobre una recta, así que debe ser apropiado un modelo exponencial.

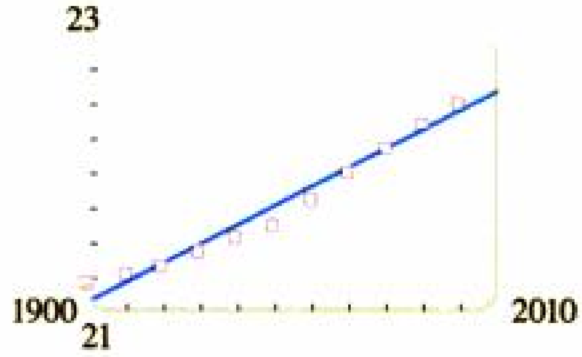


Figura 6

■ Linealización de datos de potencia

Si se sospecha que los puntos de datos (x, y) yacen sobre una curva de potencia $y = ax^n$, entonces los puntos

$$(\ln x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Esto se puede observar en los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^n && \text{Suponga que } y = ax^n \text{ y tome el ln} \\ &= \ln a + \ln x^n && \text{Propiedad del ln} \\ &= \ln a + n \ln x && \text{Propiedad del ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función de $\ln x$, sea $Y = \ln y$, $X = \ln x$ y $A = \ln a$; entonces

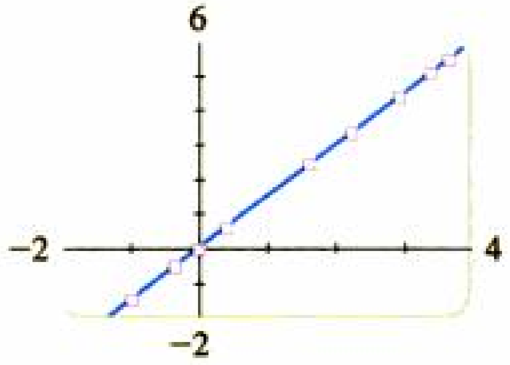
$$Y = nX + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos de los planetas (d, T) de la tabla 2 para obtener los puntos $(\ln d, \ln T)$ de la tabla 4. En el diagrama de dispersión de la figura 7 se observa que los datos caen sobre una recta, así que el modelo de potencia parece ser apropiado.

Tabla 4 Tabla log-log

$\ln d$	$\ln T$
−0.94933	−1.4230
−0.32435	−0.48613
0	0
0.42068	0.6318
1.6492	2.4733
2.2556	3.3829
2.9544	4.4309
3.4041	5.1046
3.6765	5.5148

Figura 7 Diagrama log-log de los datos de la tabla 4



¿Un modelo exponencial o de potencia?

Suponga que un diagrama de dispersión de los puntos de datos (x, y) muestran un incremento rápido. ¿Se debe usar una función exponencial o una función de potencia para modelar los datos? A fin de decidir, se trazan dos diagramas de dispersión, uno para los puntos $(x, \ln y)$ y el otro para los puntos $(\ln x, \ln y)$. Si el primer diagrama de dispersión al parecer cae a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo exponencial. Si al parecer el segundo diagrama cae a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo de potencia.

Ejemplo 3 ¿Un modelo exponencial o de potencia?

Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla 5.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace los diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Para modelar estos datos es apropiada una función exponencial o una de potencia?

d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

Tabla 5

x	y
1	2
2	6
3	14
4	22
5	34
6	46
7	64
8	80
9	102
10	130

Solución

a) El diagrama de dispersión de los datos se muestra en la figura 8.

Figura 8

b) Se usan los valores de la tabla 6 para trazar los diagramas de dispersión de las figuras 9 y 10.

Tabla 6

x	$\ln x$	$\ln y$
1	0	0.7
2	0.7	1.8
3	1.1	2.6
4	1.4	3.1
5	1.6	3.5
6	1.8	3.8
7	1.9	4.2
8	2.1	4.4
9	2.2	4.6
10	2.3	4.9

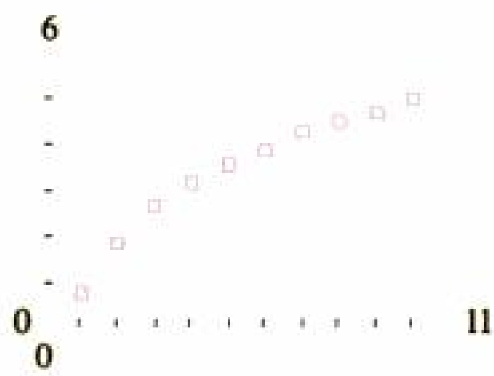


Figura 9

Figura 10

c) El diagrama de dispersión de $(x, \ln y)$ de la figura 9 al parecer no es lineal, así que es inapropiado un modelo exponencial. Por otro lado, el diagrama de dispersión de $(\ln x, \ln y)$ en la figura 10 es casi lineal, así que es apropiado un modelo de potencia.

d) Al utilizar el comando `PwrReg` en una calculadora para gráficas, se encuentra que la función de potencia que mejor se ajusta a los datos es

$$y = 1.85x^{1.82}$$

La gráfica de esta función y los datos originales se muestran en la figura 11.

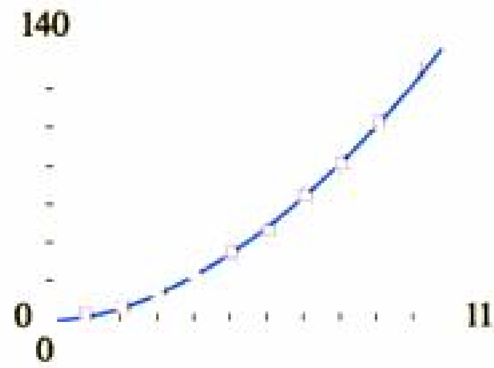


Figura 11

■

Antes de que se volvieran comunes las calculadoras para gráficas y el software de estadística, los modelos exponenciales y de potencia para datos solían construirse encontrando primero un modelo lineal para los datos linealizados. Luego se hallaba el modelo para los datos reales tomando exponenciales. Por ejemplo, si se encuentra que $y = A \ln x + B$, entonces al tomar exponenciales se obtiene el modelo $y = e^B \cdot e^{A \ln x}$ o $y = Cx^A$ (donde $C = e^B$). Se empleaba papel de gráficas especial llamado papel logarítmico o papel log-log para facilitar este proceso.

Modelado con funciones logísticas

Un modelo de crecimiento logístico es una función de la forma

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde a, b y c son constantes positivas. Las funciones logísticas se usan para modelar poblaciones donde el crecimiento está restringido por los recursos disponibles. (Véanse los ejercicios 69-72 de la sección 4.1.)

Ejemplo 4 Aprovisionamiento de un estanque con bagres

Tabla 7

Semana	Bagres
0	1000
15	1500
30	3300
45	4400
60	6100
75	6900
90	7100
105	7800
120	7900

Mucho del pescado que se vende en los supermercados en la actualidad se cría en granjas pesqueras comerciales, y no son capturados en su hábitat natural. Un estanque en una granja de este tipo es aprovisionado al inicio con 100 bagres, y la población de peces se muestrea después a intervalos de 15 semanas para estimar su tamaño. Los datos de población se dan en la tabla 7.

a) Encuentre un modelo apropiado para los datos.

b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique el modelo que encontró en el inciso a) en el diagrama de dispersión.

c) ¿Cómo predice el modelo que la población de peces cambiará con el tiempo?

Solución

a) Puesto que la población de bagres está restringida por su hábitat (el estanque), es apropiado un modelo logístico. Por medio del comando `Logistic` en una calculadora (véase la figura 12(a)), se encuentra el siguiente modelo para la población de peces $P(t)$:

$$P(t) = \frac{7925}{1 + 7.7e^{-0.052t}}$$

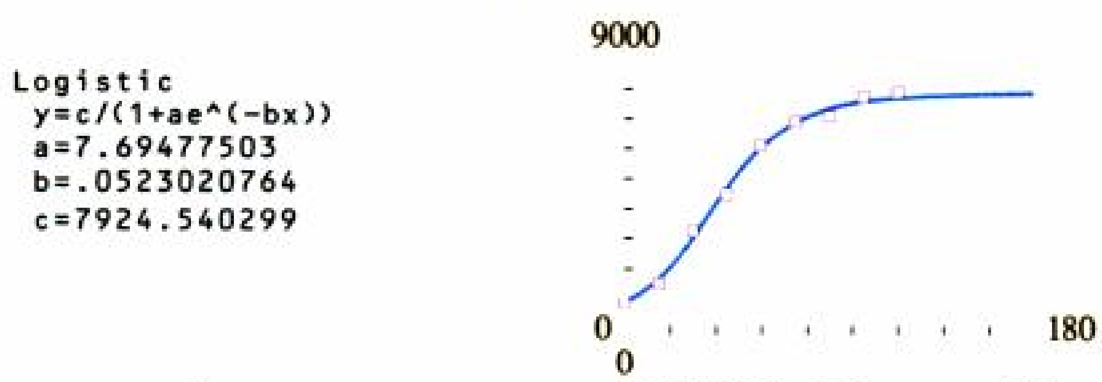


Figura 12 a) b) Población de bagres $y = F(t)$

b) El diagrama de dispersión y la curva logística se muestran en la figura 12(b).

c) De la gráfica de P en la figura 12(b), se ve que la población de bagres se incrementa con rapidez hasta casi $t = 80$ semanas. Después disminuye el crecimiento, y en aproximadamente $t = 120$ semanas la población se equilibra y permanece más o menos constante en poco más de 7900. ■

El comportamiento que exhibe la población de bagres en el ejemplo 4 es representativo del crecimiento logístico. Después de una fase de crecimiento rápido, la población se aproxima a un nivel constante conocido como **capacidad de transporte** del ambiente. Esto ocurre porque cuando $t \to \infty$, se tiene $e^{-bt} \to 0$ (véase la sección 4.1) y, por lo tanto,

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \quad \to \quad \frac{c}{1 + 0} = c$$

Así, la capacidad de transporte es c.

Problemas

1. **Población de Estados Unidos.** La constitución de Estados Unidos requiere un censo cada 10 años. Los datos del censo para 1790-2000 se dan en la tabla.
   a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.
   b) Use una calculadora para hallar un modelo exponencial para los datos.
   c) Use su modelo para predecir la población en el censo de 2010.
   d) Emplee su modelo para estimar la población en 1965.
   e) Compare sus respuestas de los incisos a) y d) con los valores de la tabla. ¿Considera que es apropiado un modelo exponencial para estos datos?

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1790	3.9	1870	38.6	1950	151.3
1800	5.3	1880	50.2	1960	179.3
1810	7.2	1890	63.0	1970	203.3
1820	9.6	1900	76.2	1980	226.5
1830	12.9	1910	92.2	1990	248.7
1840	17.1	1920	106.0	2000	281.4
1850	23.2	1930	123.2		
1860	31.4	1940	132.2		

Tiempo (s)	Distancia (m)
0.1	0.048
0.2	0.197
0.3	0.441
0.4	0.882
0.5	1.227
0.6	1.765
0.7	2.401
0.8	3.136
0.9	3.969
1.0	4.902

2. **Pelota en descenso** En un experimento de física una bola de plomo se deja caer desde una altura de 5 m. Los alumnos registran la distancia que ha caído la bola cada décima de segundo. (Esto se puede hacer con una cámara y una luz estroboscópica.)
   a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.
   b) Use una calculadora para hallar un modelo de potencia.
   c) Emplee su modelo para predecir cuánto ha caído la bola en 3 s.

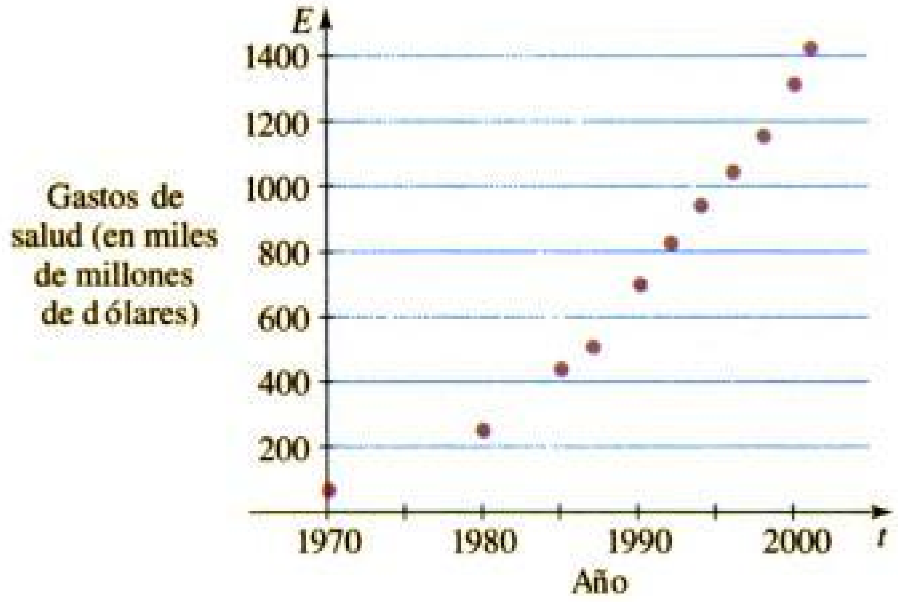
3. **Gastos de atención de la salud** Los gastos de atención sanitaria en Estados Unidos para 1970-2001 se dan en la tabla de la página siguiente, y un diagrama de dispersión se muestra en la figura.
   a) ¿El diagrama de dispersión mostrado indica un modelo exponencial?
   b) Construya una tabla de los valores (t, $\ln E$) y un diagrama de dispersión. ¿Parece ser lineal el diagrama de dispersión?

Año	Gastos de salud (en miles de millones de dólares)
1970	74.3
1980	251.1
1985	434.5
1987	506.2
1990	696.6
1992	820.3
1994	937.2
1996	1039.4
1998	1150.0
2000	1310.0
2001	1424.5

c) Encuentre la recta de regresión para los datos del inciso b).

d) Use los resultados del inciso c) para hallar un modelo exponencial para el crecimiento de los gastos de atención sanitaria.

e) Use su modelo para predecir los gastos totales de atención sanitaria en 2009.



Tiempo (h)	Cantidad de ^{131}I (g)
0	4.80
8	4.66
16	4.51
24	4.39
32	4.29
40	4.14
48	4.04

4. Vida media de yodo radiactivo Un estudiante intenta determinar la vida media del yodo radiactivo 131. Él mide la cantidad de yodo 131 en una disolución de muestra cada 8 horas. Sus datos se muestran en la tabla del margen.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

b) Use una calculadora para hallar un modelo exponencial.

c) Emplee su modelo para hallar la vida media del yodo 131.

5. Ley de Beer-Lambert Cuando la luz del sol pasa por el agua de lagos y océanos es absorbida, y mientras más profundo penetra, disminuye más su intensidad. La intensidad luminosa I a la profundidad x está dada por la ley de Beer-Lamber:

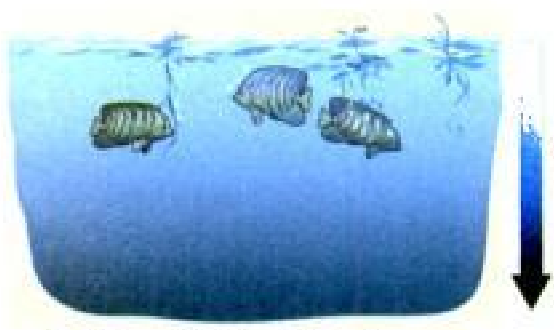
$$I = I_0 e^{-kx}$$

donde I_0 es la intensidad luminosa en la superficie y k es una constante que depende de la turbiedad del agua (véase la página 364). Un biólogo utiliza un fotómetro para investigar la penetración en un lago y obtiene los datos de la tabla.

a) Use una calculadora graficadora a fin de hallar la función exponencial de la forma dada por la ley de Beer-Lambert para modelar estos datos. ¿Cuál es la intensidad luminosa I_0 en la superficie en este día y cuál es la constante de "turbiedad" para este lago? [*Sugerencia:* si su calculadora da una función de la forma $I = ab^x$, conviértala a la forma que desea usando las identidades $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}$. Véase el ejemplo 1(b).]

b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique en su diagrama de dispersión la función que encontró en el inciso a).

c) Si la intensidad luminosa cae por debajo de 0.15 lúmenes (lm), cierta especie de alga no puede sobrevivir debido a que la fotosíntesis es imposible. Use su modelo del inciso a) para determinar la profundidad debajo de la cual la luz es insuficiente para que esta alga sobreviva.



La intensidad de la luz decrece exponencialmente con la profundidad.

Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)	Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)
5	13.0	25	1.8
10	7.6	30	1.1
15	4.5	35	0.5
20	2.7	40	0.3

6. **Experimentación con curvas de "olvido"** Todos estamos familiarizados con el fenómeno de olvidar. Los hechos entendidos con claridad al momento de aprenderlos por primera vez a veces se borran de la memoria a la hora del examen final. Los psicólogos han propuesto varias formas de modelar este proceso. Un modelo de este tipo es la curva de olvido de Ebbinghaus, descrito en la página 355. Otros modelos utilizan funciones exponenciales o logarítmicas. Para desarrollar su propio modelo una psicóloga lleva a cabo un experimento con un grupo de voluntarios pidiéndoles que memoricen una lista de 100 palabras relacionadas. Ella prueba entonces cuántas de estas palabras pueden recordar después de varios periodos. Los resultados promedio para el grupo se muestran en la tabla.
   a) Use una calculadora para gráficas a fin de encontrar la función de *potencia* de la forma $y = at^b$ que modela el número promedio de palabras y que los voluntarios recuerdan después de t horas. Después, encuentre una función *exponencial* de la forma $y = ab^t$ para modelar los datos.
   b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique en su diagrama de dispersión las funciones que encontró en el inciso a).
   c) ¿Cuál de las dos funciones al parecer proporciona el mejor modelo?

Tiempo	Palabras recordadas
15 min	64.3
1 h	45.1
8 h	37.3
1 día	32.8
2 días	26.9
3 días	25.6
5 días	22.9

7. **Emisiones de plomo** En la tabla siguiente se dan las emisiones de plomo en Estados Unidos hacia el ambiente en millones de toneladas métricas para 1970-1992.
   a) Encuentre un modelo exponencial para estos datos.
   b) Encuentre un modelo polinomial de cuarto grado para estos datos.
   c) ¿Cuál de estas curvas da un mejor modelo para los datos? Use gráficas de los dos modelos para decidir.
   d) Use cada modelo para estimar las emisiones de plomo en 1972 y 1982.

Año	Emisiones de plomo
1970	199.1
1975	143.8
1980	68.0
1985	18.3
1988	5.9
1989	5.5
1990	5.1
1991	4.5
1992	4.7

8. Emisiones de escape de automóvil En un estudio realizado por la Office of Science and Technology de Estados Unidos en 1972, se estimó el costo de reducir las emisiones de automóviles en ciertos porcentajes. Encuentre un modelo exponencial que capta la tendencia de "rendimiento decreciente" de los datos mostrados en la tabla siguiente.

Reducción de emisiones (%)	Costo por automóvil ($)
50	45
55	55
60	62
65	70
70	80
75	90
80	100
85	200
90	375
95	600

9. ¿Modelo exponencial o de potencia? Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Cuál es más apropiada para modelar estos datos, una función exponencial o una función de potencia?

d) Halle una función apropiada para modelar los datos.

x	y
2	0.08
4	0.12
6	0.18
8	0.25
10	0.36
12	0.52
14	0.73
16	1.06

10. ¿Modelo exponencial o de potencia? Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla del margen.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace los diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Cuál es más apropiada para modelar estos datos, una función exponencial o una función de potencia?

d) Halle una función apropiada para modelar los datos.

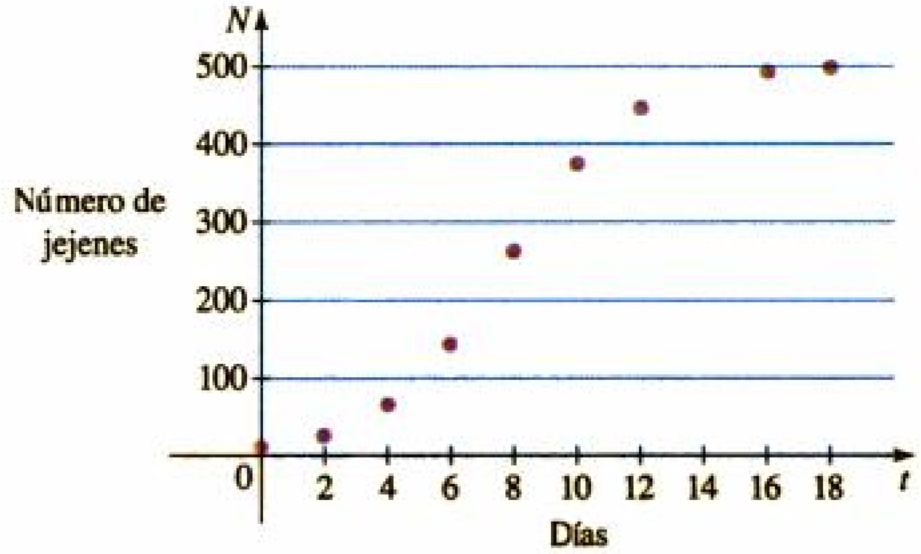
x	y
10	29
20	82
30	151
40	235
50	330
60	430
70	546
80	669
90	797

11. Crecimiento poblacional logístico La tabla y el diagrama de dispersión dan la población de jejenes en un recipiente de laboratorio cerrado en un periodo de 18 días.

a) Use el comando `Logistic` en su calculadora con el fin de hallar un modelo logístico para estos datos.

b) Use el modelo para estimar el tiempo cuando hay 400 jejenes en el recipiente.

Tiempo (días)	Número de jejenes
0	10
2	25
4	66
6	144
8	262
10	374
12	446
16	492
18	498



12. Modelos logarítmicos Un **modelo logarítmico** es una función de la forma

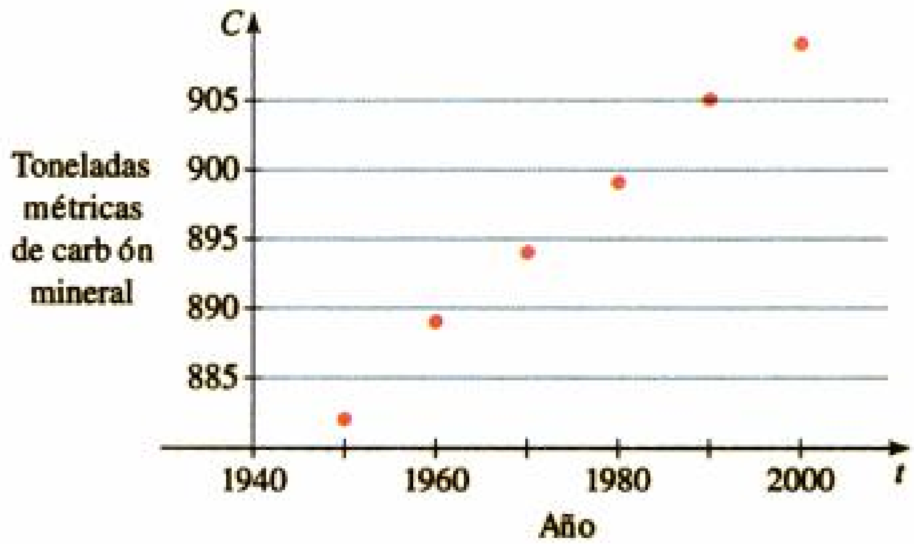
$$y = a + b \ln x$$

Muchas relaciones entre variables en el mundo real se pueden modelar mediante este tipo de función. La tabla y el diagrama de dispersión muestran la producción de carbón mineral (en toneladas métricas) de una pequeña mina en el norte de la Columbia Británica.

a) Use el comando `LnReg` en su calculadora con el fin de hallar un modelo logarítmico para estas cifras de producción.

b) Use el modelo para predecir la producción de carbón mineral de esta mina en 2010.

Año	Toneladas métricas de carbón mineral
1950	882
1960	889
1970	894
1980	899
1990	905
2000	909

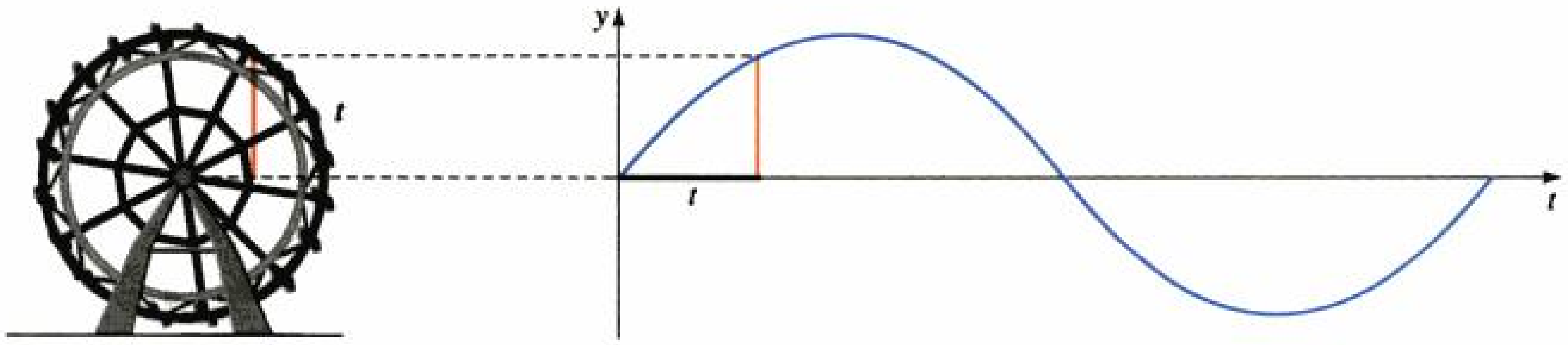


5 Funciones trigonométricas de números reales

Esquema del capítulo

En este capítulo y en el siguiente presentaremos nuevas funciones llamadas funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas, pero equivalentes —como funciones de ángulos (capítulo 6) o funciones de números reales (capítulo 5)—. Los dos enfoques de la trigonometría son independientes entre sí, de modo que cualquiera de los capítulos 5 o 6 se puede estudiar primero. Tratamos ambos enfoques porque las diferentes aplicaciones requieren que estudiemos estas funciones de manera distinta. El enfoque de este capítulo se presta particularmente al modelado del movimiento periódico.

Si usted se ha subido a una rueda de la fortuna, entonces ya conoce el movimiento periódico —es decir, el movimiento que se repite una y otra vez—. Este tipo de movimiento es común en la naturaleza. Piense en la salida y en la puesta diarias del Sol (día, noche, día noche, . . .), la variación diaria en los niveles de las mareas (alta, baja, alta, baja, . . .), las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha, . . .), o bien, la presión en los cilindros del motor de un automóvil (alta, baja, alta, baja, . . .). Para poder describir tal movimiento desde el punto de vista de las matemáticas necesitamos una función cuyos valores aumenten, luego disminuyan, luego se incrementen, . . . , y que se repita este patrón indefinidamente. Para entender cómo definir tal función, veamos la rueda de la fortuna otra vez. Una persona que vaya en la rueda sube y baja, sube y baja, ... La gráfica muestra qué tan alto está la persona por arriba del centro de la rueda de la fortuna en el tiempo t. Observe que mientras la rueda gira la gráfica sube y baja en forma repetida.



Definimos la función trigonométrica *seno* de manera similar. Empezamos con un círculo de radio 1, y para cada distancia t a lo largo del arco del círculo que termina en (x, y) definimos el valor de la función sen t como la altura, o bien, la coordenada y, de ese punto. Para aplicar esta función a situaciones del mundo cotidiano aplicamos las transformaciones que aprendimos en el capítulo 2 para acortar, ampliar o desplazar la función con el fin de ajustar la variación que estamos modelando.

Hay seis funciones trigonométricas, cada una con propiedades especiales. En este capítulo estudiamos sus definiciones, gráficas y aplicaciones. En la sección 5.5, vemos cómo se pueden utilizar las funciones trigonométricas para modelar el movimiento armónico.

5.1 Círculo unitario

En esta sección exploramos algunas propiedades del círculo de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se aplican en la sección siguiente para definir las funciones trigonométricas.

Círculo unitario

El conjunto de puntos a una distancia de 1 a partir del origen es un círculo de radio 1 (véase figura 1). En la sección 1.8 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

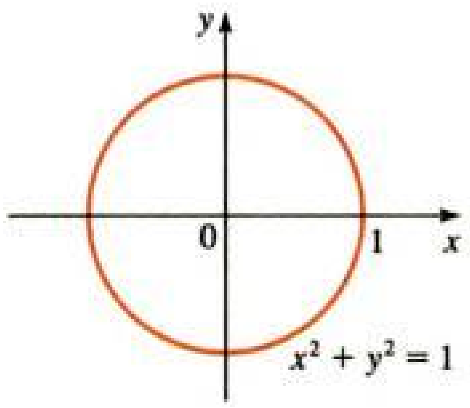


Figura 1
Círculo unitario

Círculo unitario

El **círculo unitario** es el que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo 1 Un punto en el círculo unitario

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en el círculo unitario.

Solución Necesitamos demostrar que este punto cumple con la ecuación del círculo unitario, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Puesto que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en el círculo unitario. ■

Ejemplo 2 Localización de un punto en el círculo unitario

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Encuentre su coordenada y.

Solución Puesto que el punto está en el círculo unitario, entonces

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Como el punto está en el cuadrante IV, su coordenada y debe ser negativa, así que $y = -\frac{1}{2}$. ■

Puntos sobre la circunferencia del círculo unitario

Suponga que t es un número real. Recorramos una distancia t a lo largo del círculo unitario, empezando en el punto $(1, 0)$ y desplazándonos en sentido contrario al de las manecillas del reloj si t es positiva, o bien, en el sentido de las manecillas del reloj si t es negativa (figura 2). Así llegamos al punto $P(x, y)$ sobre el círculo unitario. El punto $P(x, y)$ obtenido de esta manera se llama **punto sobre la circunferencia** determinado por el número real t.

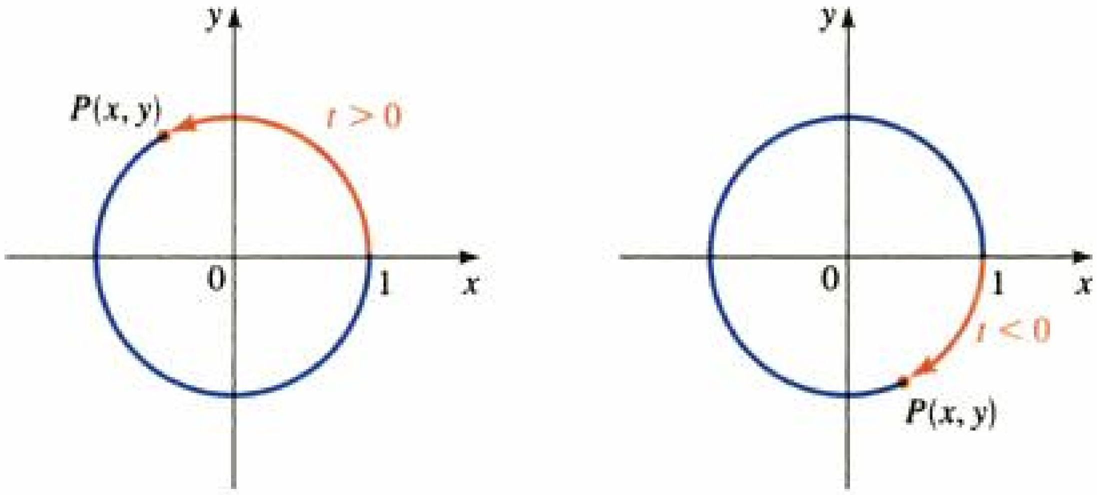


Figura 2 a) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t > 0$ b) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t < 0$

La circunferencia del círculo unitario es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto empieza en $(1, 0)$ y se desplaza en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de toda la circunferencia y regresa a $(1, 0)$, se desplaza una distancia de 2π. Para desplazarse medio camino alrededor del círculo, recorre una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, recorre una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿En dónde se encuentra este punto cuando recorre estas distancias a lo largo del círculo? Según la figura 3, vemos por ejemplo que cuando recorre una distancia de π iniciando en $(1, 0)$, el punto final es $(-1, 0)$.

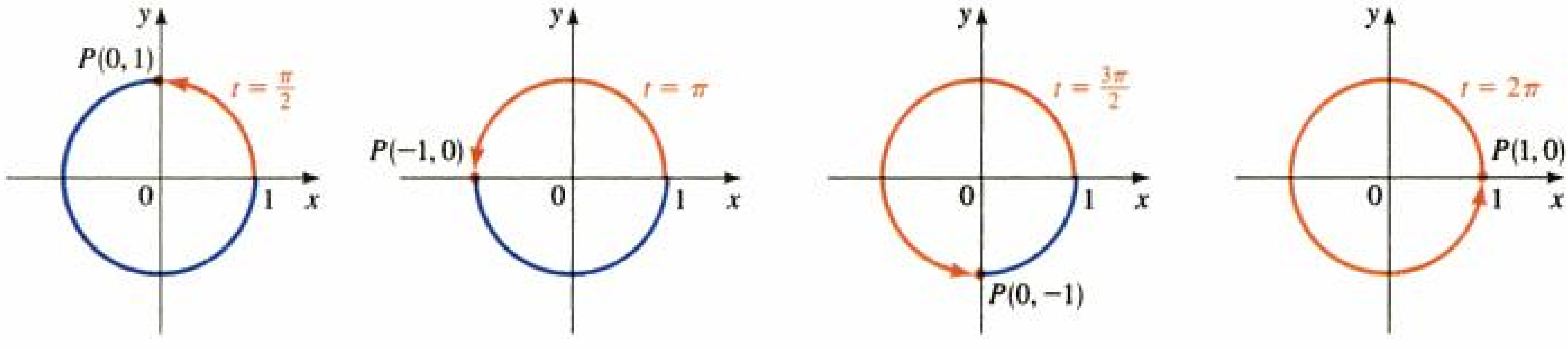


Figura 3
Puntos sobre la circunferencia determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π

Ejemplo 3 Determinación de los puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia del círculo unitario determinado por cada número real t.

a) $t = 3\pi$ b) $t = -\pi$ c) $t = -\dfrac{\pi}{2}$

Solución De acuerdo con la figura 4 observamos lo siguiente.

a) El punto determinado por 3π es $(-1, 0)$.

b) El punto determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

c) El punto determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

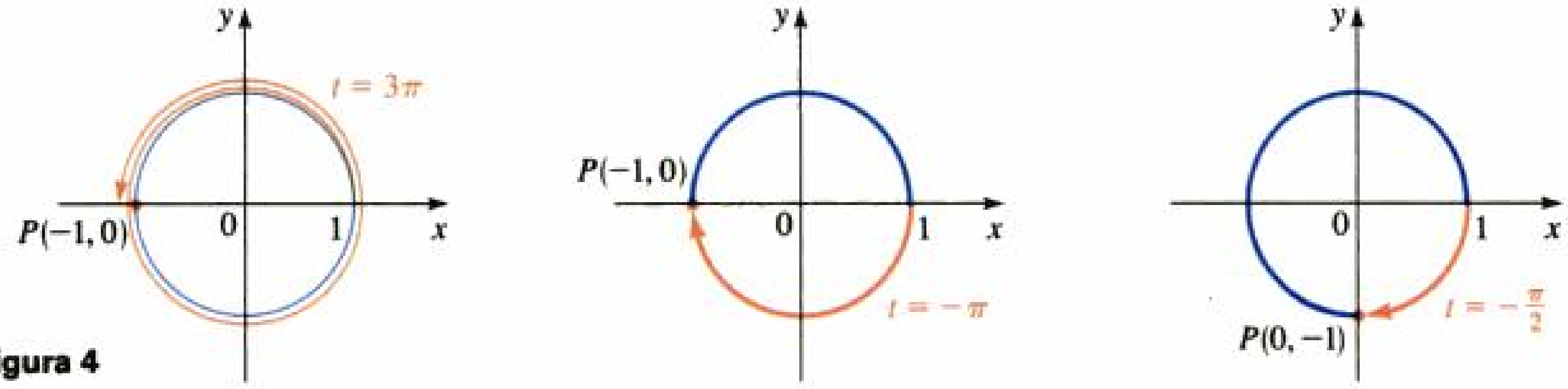


Figura 4

Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto. ■

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia desde $(1, 0)$ que de $(0, 1)$ a lo largo del círculo unitario (véase figura 5).

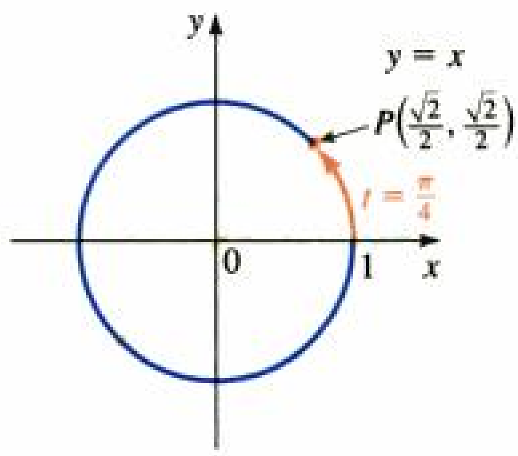


Figura 5

Puesto que el círculo unitario es simétrico con respecto a la recta $y = x$, se infiere que P queda sobre la recta $y = x$. De este modo, P es el punto, en el primer cuadrante, donde se cortan la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Al sustituir y por x en la ecuación de la circunferencia, tenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combinación de términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, entonces tenemos también $y = 1/\sqrt{2}$. Por lo tanto, el punto determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden aplicar métodos similares para calcular los puntos sobre la circunferencia determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$. Véanse ejercicios 55 y 56. En la tabla 1 y en la figura 6 se dan los puntos para algunos valores especiales de t.

Tabla 1

t	Punto determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

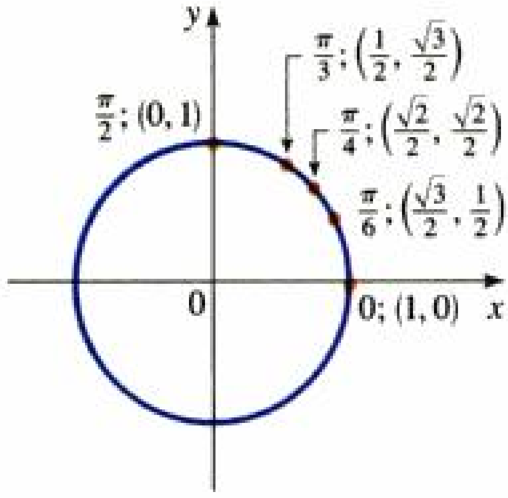


Figura 6

Ejemplo 4 Determinación de puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada número real dado t.

a) $t = -\dfrac{\pi}{4}$ b) $t = \dfrac{3\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{5\pi}{6}$

Solución

a) Sea P el punto determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto determinado por $\pi/4$. A partir de la figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero no el signo. Puesto que P está en el cuadrante IV, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia es $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

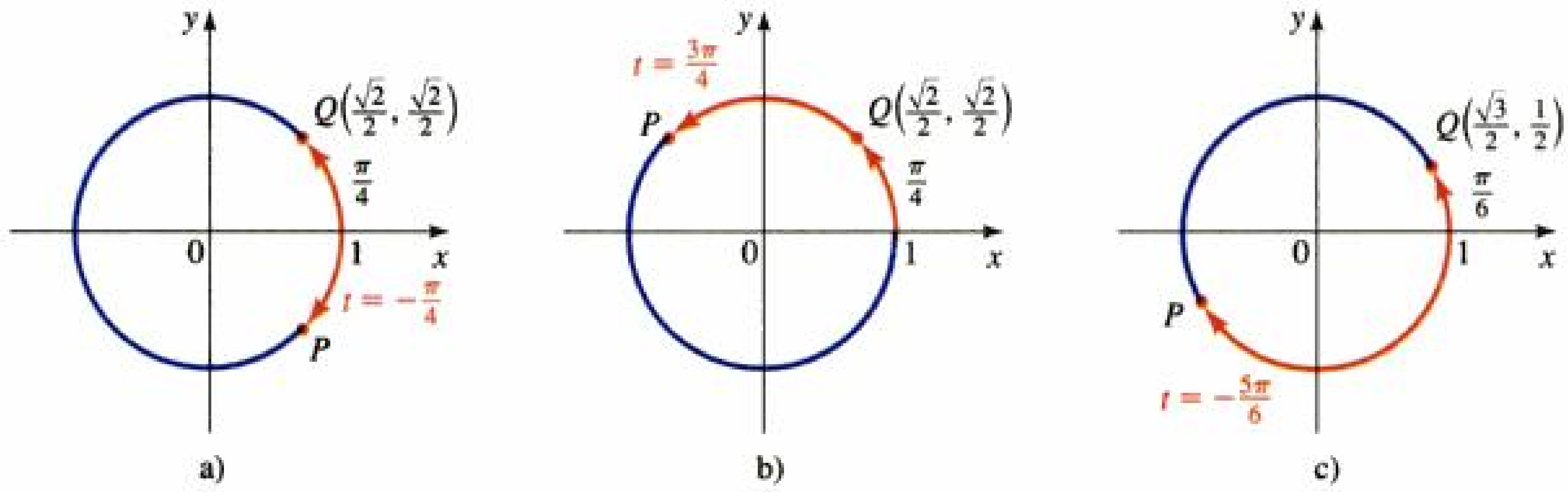


Figura 7

b) Sea P el punto sobre la circunferencia determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto determinado por $\pi/4$. En la figura 7(b) observamos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero el signo es distinto. Como P está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto es $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

c) Sea P el punto sobre la circunferencia determinado por $-5\pi/6$ y sea Q el punto definido por $\pi/6$. De acuerdo con la figura 7(c), vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero signo distinto. Puesto que P está en el cuadrante III, sus coordenadas son negativas. Por consiguiente, el punto es $P\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$. ■

Número de referencia

Según los ejemplos 3 y 4, vemos que para encontrar el punto sobre la circunferencia en cualquier cuadrante sólo es necesario conocer el punto "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos el concepto de *número de referencia* como un auxiliar en el cálculo de los puntos sobre la circunferencia.

Número de referencia

Sea t un número real. El **número de referencia** $\bar{t}$ asociado a t es la distancia más corta a lo largo del círculo unitario entre el punto sobre la circunferencia determinado por t y el eje x.

En la figura 8 se ilustra que para calcular el número de referencia $\bar{t}$ es útil saber en qué cuadrante está el punto que se determinó mediante t. Si el punto quedó en los cuadrantes I o IV, donde x es positivo, encontramos $\bar{t}$ desplazándonos a lo largo del círculo hasta el eje *positivo* x. Si queda en los cuadrantes II o III, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ recorriendo el círculo hasta el eje x *negativo*.

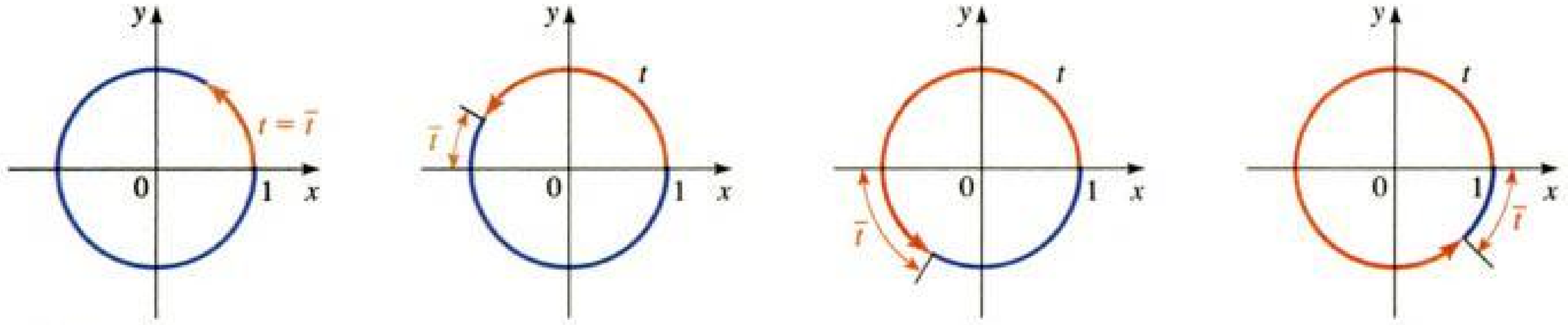


Figura 8
Número de referencia $\bar{t}$ para t

Ejemplo 5 Determinación de los números de referencia

Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ d) $t = 5.80$

Solución Encontramos los números de referencia en la figura 9 como sigue.

a) $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

b) $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

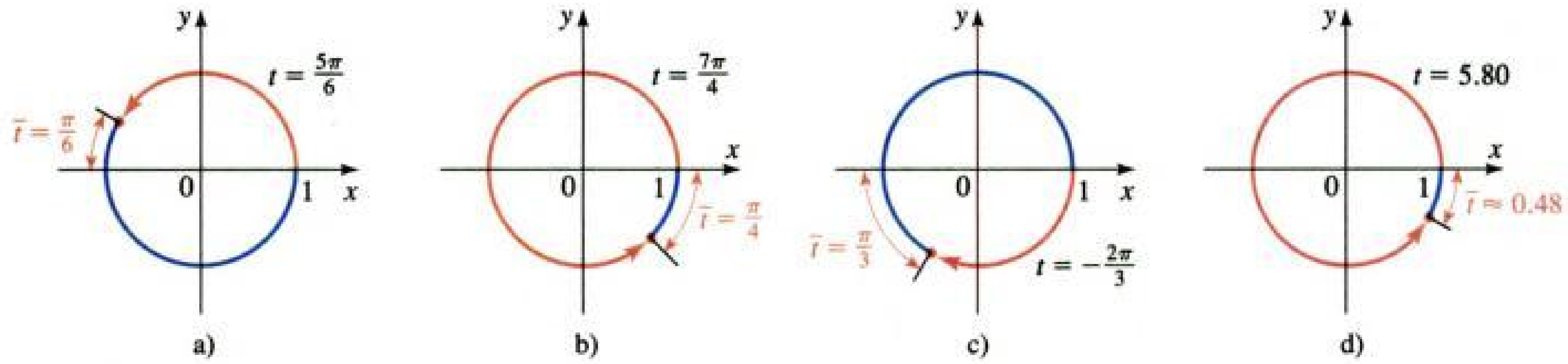


Figura 9

■

Uso de los números de referencia para los puntos sobre la circunferencia

Para determinar el punto P definido por cualquier valor de t, seguimos los pasos siguientes:

1. Encontrar el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encontrar el punto sobre la circunferencia $Q(a, b)$ definido por $\bar{t}$.
3. El punto determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se eligen de acuerdo con el cuadrante en el cual está este punto sobre la circunferencia.

Ejemplo 6 Uso de los números de referencia para hallar los puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada uno de los números reales t.

a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

Solución Los números de referencia asociados con estos valores de t se calcularon en el ejemplo 5.

a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, el cual define el punto sobre la circunferencia $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ según la tabla 1. Puesto que el punto determinado por t está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, el cual determina el punto sobre la circunferencia $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ de acuerdo con la tabla 1. Como el punto está en el cuadrante IV, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, el cual determina el punto sobre la circunferencia $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ según la tabla 1. Como el punto determinado por t está en el cuadrante III, sus coordenadas son ambas negativas. Por lo tanto, el punto deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ ■

Puesto que la circunferencia del círculo unitario es 2π, el punto sobre la circunferencia determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto sobre la circunferencia determinado por t. Aplicamos esta observación en el ejemplo siguiente para hallar los puntos sobre la circunferencia para t grandes.

Ejemplo 7 Determinación del punto sobre la circunferencia para t grandes

Calcule el punto sobre la circunferencia definido por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

Solución Puesto que

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto sobre la circunferencia determinado por t es el mismo que el de $5\pi/6$ (es decir, restamos 4π). Entonces, por el ejemplo 6(a) el punto buscado es $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$. (Véase figura 10.) ■

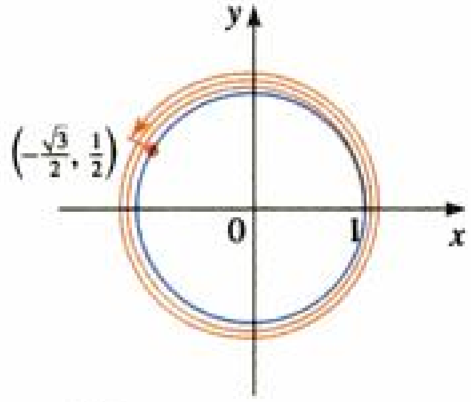


Figura 10

5.1 Ejercicios

1–6 ■ Demuestre que el punto está en el círculo unitario.

1. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **2.** $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **3.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

4. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **5.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **6.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

7–12 ■ Determine la coordenada faltante de P si sabemos que P está en el círculo unitario en el cuadrante dado

Coordenadas	Cuadrante
7. $P(-\frac{3}{5},\quad)$	III
8. $P(\quad, -\frac{7}{25})$	IV
9. $P(\quad, \frac{1}{3})$	II
10. $P(\frac{2}{5},\quad)$	I
11. $P(\quad, -\frac{2}{7})$	IV
12. $P(-\frac{2}{3},\quad)$	II

13–18 ■ El punto P está en el círculo unitario. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información proporcionada.

13. La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$ y la coordenada y es positiva.

14. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$ y la coordenada x es positiva.

15. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$ y la coordenada x es negativa.

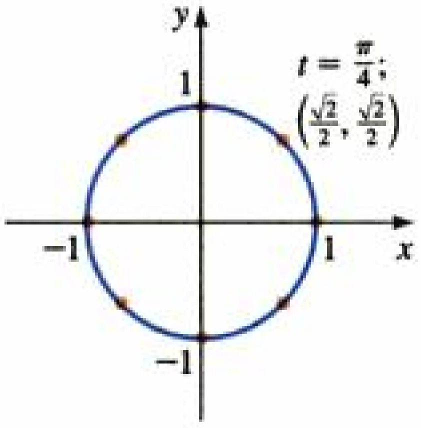
16. La coordenada x de P es positiva y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

17. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$ y P queda abajo del eje x.

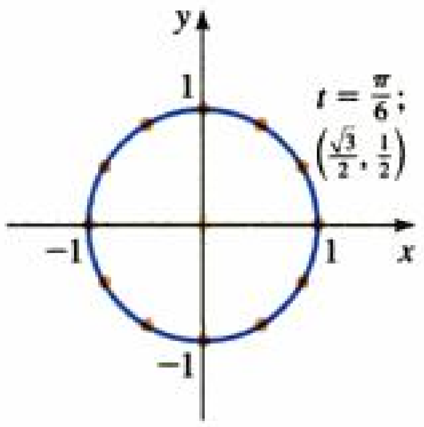
18. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$ y P queda por encima del eje x.

19–20 ■ Encuentre t y el punto sobre la circunferencia determinado por t para cada punto de la figura. En el ejercicio 19, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 20, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

19.



20.



21–30 ■ Calcule el punto $P(x, y)$ sobre el círculo unitario definido por el valor dado de t.

21. $t = \dfrac{\pi}{2}$ **22.** $t = \dfrac{3\pi}{2}$

23. $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **24.** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

25. $t = -\dfrac{\pi}{3}$ **26.** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

27. $t = \dfrac{2\pi}{3}$ **28.** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

29. $t = -\dfrac{3\pi}{4}$ **30.** $t = \dfrac{11\pi}{6}$

31. Suponga que el punto definido por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ del círculo unitario. Encuentre el punto sobre la circunferencia definido por cada uno de los siguientes valores.

a) $\pi - t$ **b)** $-t$

c) $\pi + t$ **d)** $2\pi + t$

32. Suponga que el punto determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4\right)$ del círculo unitario. Encuentre el punto determinado por cada uno de los valores siguientes.

a) $-t$ **b)** $4\pi + t$

c) $\pi - t$ **d)** $t - \pi$

33–36 ■ Calcule el número de referencia para cada valor de t.

33. a) $t = \dfrac{5\pi}{4}$ **b)** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

c) $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **d)** $t = \dfrac{\pi}{6}$

34. a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

c) $t = \dfrac{11\pi}{3}$ **d)** $t = -\dfrac{7\pi}{4}$

35. a) $t = \dfrac{5\pi}{7}$ **b)** $t = -\dfrac{7\pi}{9}$

c) $t = -3$ **d)** $t = 5$

36. a) $t = \dfrac{11\pi}{5}$ **b)** $t = -\dfrac{9\pi}{7}$

c) $t = 6$ **d)** $t = -7$

37–50 ■ Calcule **a)** el número de referencia de cada valor de t y **b)** el punto determinado por t.

37. $t = \dfrac{2\pi}{3}$ **38.** $t = \dfrac{4\pi}{3}$

39. $t = \dfrac{3\pi}{4}$ **40.** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

41. $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **42.** $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

43. $t = \dfrac{13\pi}{4}$ **44.** $t = \dfrac{13\pi}{6}$

45. $t = \dfrac{7\pi}{6}$ **46.** $t = \dfrac{17\pi}{4}$

47. $t = -\dfrac{11\pi}{3}$ **48.** $t = \dfrac{31\pi}{6}$

49. $t = \dfrac{16\pi}{3}$ **50.** $t = -\dfrac{41\pi}{4}$

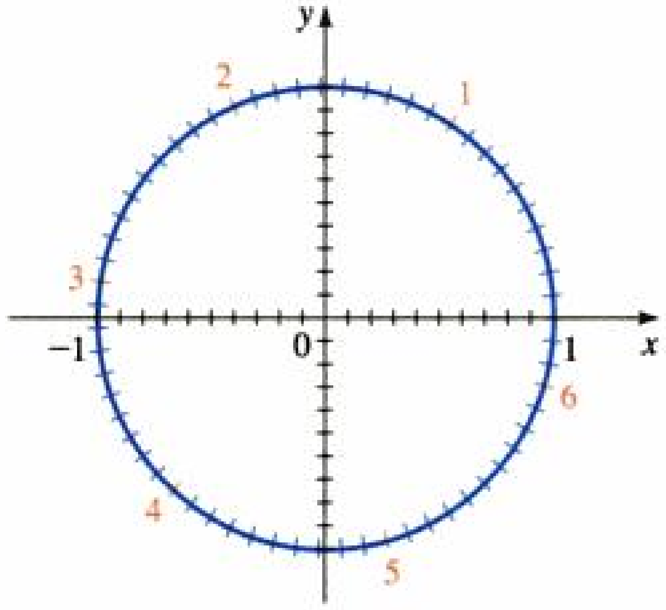
51–54 ■ Mediante la figura encuentre el punto sobre la circunferencia determinado por el número real t, con coordenadas con una cifra decimal.

51. $t = 1$

52. $t = 2.5$

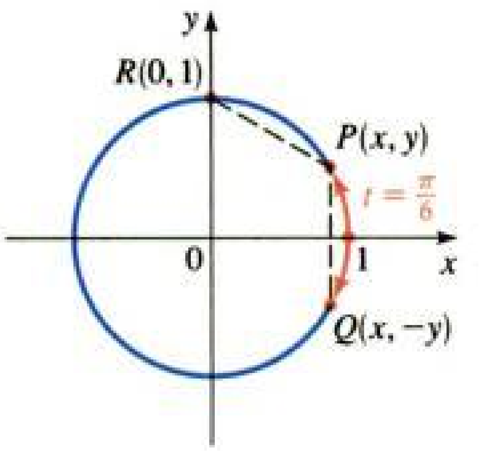
53. $t = -1.1$

54. $t = 4.2$

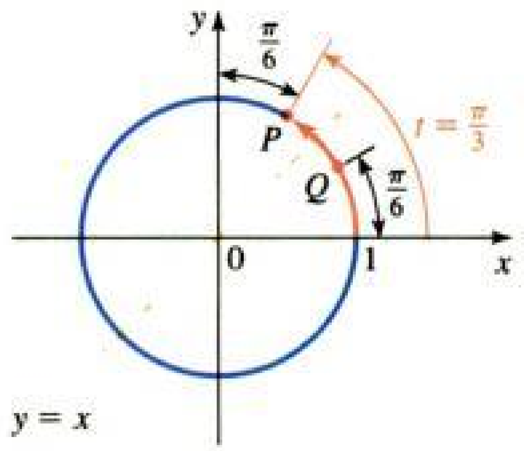


Descubrimiento • Debate

55. Determinación del punto sobre la circunferencia para $\pi/6$ Suponga que $P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por $t = \pi/6$ y los puntos Q y R son los mostrados en la figura de la página siguiente. ¿Por qué las distancias PQ y PR son iguales? Use este hecho junto con la fórmula de la distancia para demostrar que las coordenadas de P cumplen con la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación utilizando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada y determine $P(x, y)$.



56. **Cálculo del punto sobre la circunferencia de $\pi/3$** Ahora que ya conoce el punto determinado por $t = \pi/6$, aplique la simetría para encontrar el punto determinado por $t = \pi/3$ (véase la figura). Explique su razonamiento.



5.2 Funciones trigonométricas de números reales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección utilizamos las propiedades del círculo unitario de acuerdo con la sección anterior para definir las funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas

Recuerde que encontrar el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia para un número real dado t, recorremos una distancia t a lo largo del círculo unitario, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en sentido contrario al de las manecillas del reloj si t es positiva y en el sentido de las manecillas si t es negativa (véase figura 1). Ahora usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* asignando a cada número real t la coordenada y del punto $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* se definen también usando las coordenadas de $P(x, y)$.

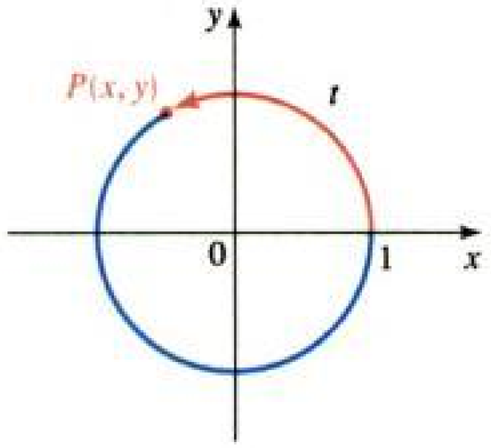


Figura 1

Definición de las funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

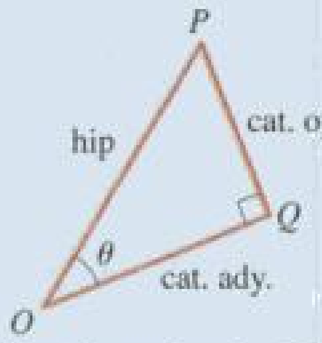
$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Como las funciones trigonométricas se pueden definir en términos del círculo unitario, algunas veces se les llama **funciones circulares.**

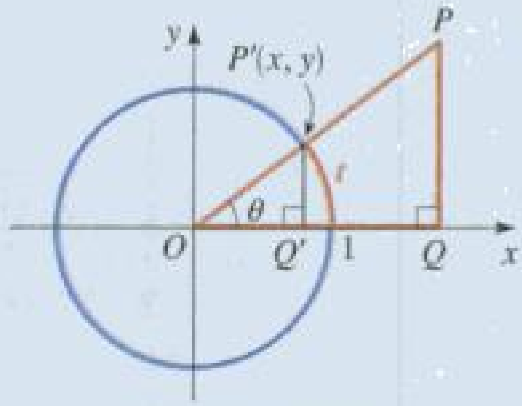
Relaciones de las funciones trigonométricas de los ángulos

Si usted estudió las propiedades trigonométricas de los triángulos rectángulos (capítulo 6), quizá se esté preguntando cómo el seno y el coseno de un ángulo se relacionan con esta sección. Para saberlo, iniciemos con un triángulo rectángulo ΔOPQ.



Triángulo rectángulo OPQ

Localice el triángulo en el plano coordenado como se muestra, con el ángulo θ en la posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto que está determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos miden x y y.

Ahora, por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

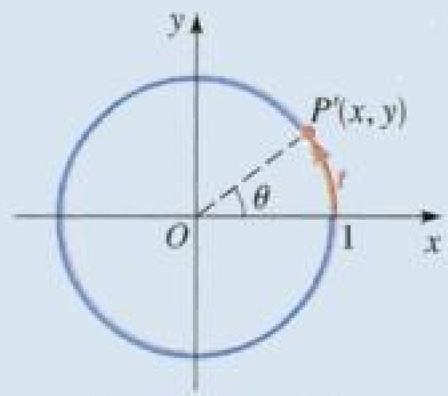
$$\cos\theta = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

Ahora, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (véase la figura). Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo con θ dado en radianes son exactamente las mismas que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto sobre la circunferencia determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué estudiar entonces trigonometría de dos maneras distintas? Porque aplicaciones diferentes requieren que veamos de forma distinta las funciones trigonométricas. (Compare la sección 5.5 con las secciones 6.2, 6.4 y 6.5.)

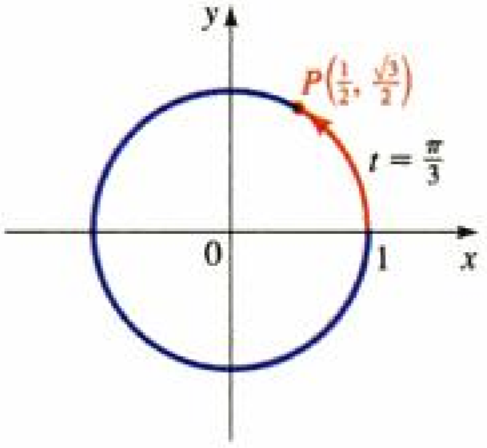


Figura 2

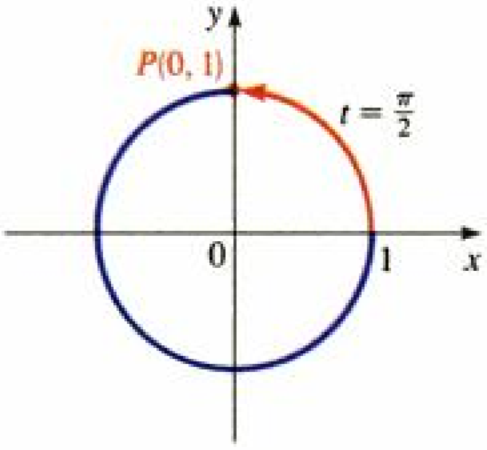


Figura 3

Ejemplo 1 Evaluación de las funciones trigonométricas

Calcule las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ b) $t = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

a) Según la tabla 1 de la página 403, vemos que el punto determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (Véase figura 2.) Puesto que las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) El punto determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Véase figura 3.) Entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidas porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones. ■

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se listan en la tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la tabla 1 de la sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

Tabla 1 Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Podemos recordar con toda facilidad los senos y los cosenos de los ángulos básicos escribiéndolos en la forma $\sqrt{■}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

En el ejemplo 1 se puede observar que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales. Así que necesitamos determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Como las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no están definidas cuando la coordenada y del punto $P(x, y)$ determinado por t sea 0. Esto sucede cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas cuando $x = 0$. Esto sucede cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

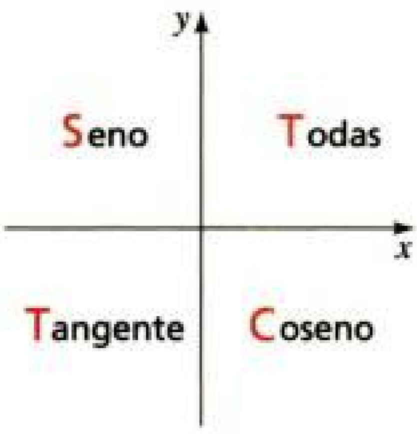
Dominios de las funciones trigonométricas

Función	Dominio
sen, cos	Todos los números reales
tan, sec	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot, csc	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas primero determinamos los signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual se encuentre el punto determinado por t. Por ejemplo, si el punto $P(x, y)$ determinado por t está en el cuadrante III, entonces las coordenadas son negativas. Entonces, sen t, cos t, csc t y sec t son negativas, en tanto que tan t y cot t son positivas. Puede comprobar los otros valores en el recuadro siguiente.

La siguiente regla nemotécnica le ayuda a recordar cuáles funciones trigonométricas son positivas en cada uno de los cuadrantes: Todas, Seno, Tangente o Coseno.



Lo puede recordar mejor como: "Todas las Estudiantes Toman Cálculo."

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Ejemplo 2 Determinación del signo de la función trigonométrica

a) $\cos \frac{\pi}{3} > 0$, porque el punto determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ está en el cuadrante I.

b) $\tan 4 > 0$, porque el punto determinado por $t = 4$ está en el cuadrante III.

c) Si $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$, entonces el punto determinado por t tiene que estar en el cuadrante II. ■

En la sección 5.1 usamos el número de referencia para determinar el punto que define un número real t. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia, podemos utilizar el número de referencia para encontrar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia de t. Entonces el punto sobre la circunferencia $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente el signo, que el punto que determina t. De este modo, los valores de las funciones trigonométricas en t son los mismos, excepto quizás el signo, que sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Evaluación de las funciones trigonométricas

Determine cada uno de los valores.

a) $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ b) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ c) $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$

Solución

a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (véase figura 4(a)). Puesto que el número final de $2\pi/3$ está en el cuadrante II, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Por consiguiente

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo Número de referencia Según la tabla 1

b) El número de referencia de $-\pi/3$ es $\pi/3$ (véase figura 4(b)). Como el punto definido por $-\pi/3$ está en el cuadrante IV, $\tan(-\pi/3)$ es negativo. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo Número de referencia Según la tabla 1

c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son iguales. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (véase la figura 4(c)). Puesto que el punto sobre la circunferencia de $3\pi/4$ está en el cuadrante II, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} \frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resta de 4π Signo Número de referencia Según la Tabla 1 ■

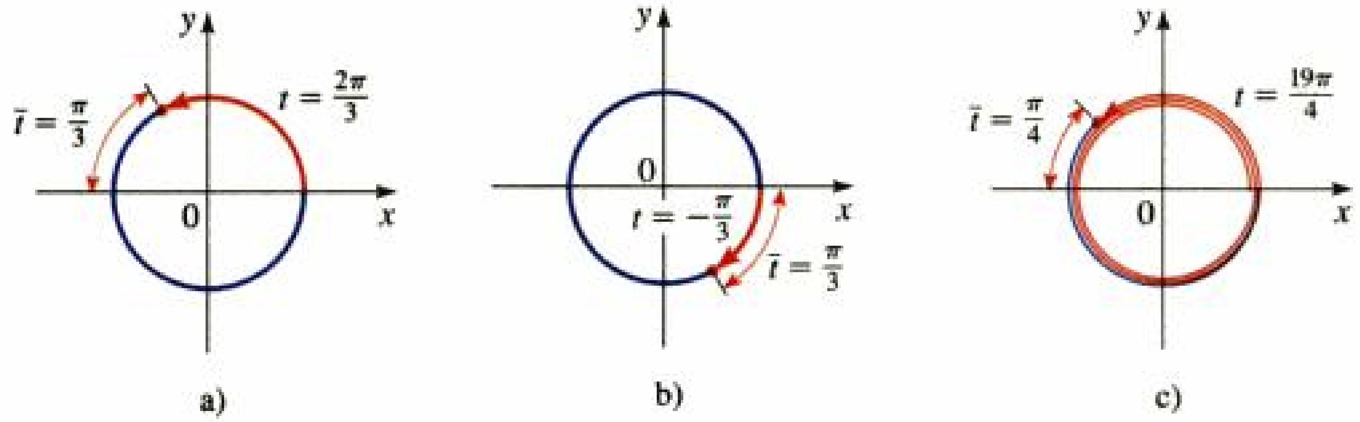


Figura 4 a) b) c)

Hasta este momento hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de t. De hecho, podemos calcular los valores de funciones trigonométricas siempre y cuando t sea un múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de t? Por ejemplo, ¿cómo podemos determinar sen 1.5? Una manera es dibujar con todo cuidado un diagrama y leer el valor (véase ejercicios 37-44); no obstante, este método no es muy seguro. Por fortuna hay procedimientos matemáticos que están programados en la calculadora científica (véase nota al margen en la página 436) que calculan los valores de *seno, coseno* y *tangente* que son correctos con todas la cifras decimales que se ven en la pantalla. La calculadora debe estar puesta en el *modo de radianes* para poder evaluar estas funciones. Para determinar los valores de cosecante, secante y cotangente usando una calculadora es necesario aplicar las *relaciones recíprocas* siguientes:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se infieren de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\operatorname{sen} t)$. Las otras se infieren de manera similar.

Ejemplo 4 Uso de la calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurémonos de que la calculadora está en el modo de radianes y de redondear el resultado a seis cifras decimales; entonces tenemos

a) $\operatorname{sen} 2.2 \approx 0.808496$ b) $\cos 1.1 \approx 0.453596$

c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$ d) $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 0.98} \approx 1.204098$ ■

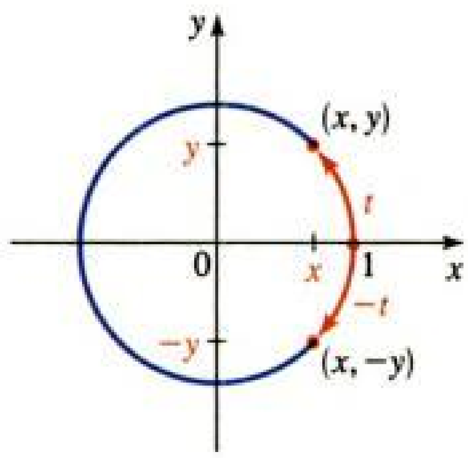


Figura 5

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. Según la figura 5, se puede observar que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas ecuaciones muestran que el seno y la tangente son funciones impares, en tanto que el coseno es una función par. Es fácil observar que el recíproco de una función par es par y el recíproco de una función impar es impar. Este hecho, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares se definen en la sección 2.4.

Propiedades pares e impares

El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

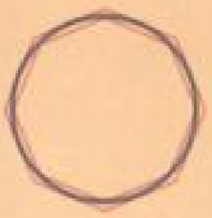
Ejemplo 5 Funciones trigonométricas pares e impares

Utilice las propiedades pares e impares de las funciones trigonométricas para determinar cada uno de los valores.

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

El valor de π

El número π es la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Desde épocas muy antiguas se sabe que esta relación es la misma en todos los círculos. El primer esfuerzo sistemático para encontrar una aproximación numérica de π lo hizo Arquímedes (alrededor de 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ determinando el perímetro de polígonos regulares inscritos en un círculo y circunscritos al mismo.



Por el año 480 d.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \tfrac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

la cual es correcta hasta la sexta cifra decimal. Este valor se consideró como la estimación más aproximada hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos de más de mil millones de lados para calcular π con 15 cifras decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en la búsqueda de π. El inglés William Shanks pasó 15 años (1858-1873) aplicando estos métodos para calcular π con 707 decimales, pero en 1946 se descubrió que estas cifras eran erróneas a partir de la cifra decimal 528. En la actualidad, con la ayuda de computadoras los matemáticos en forma rutinaria determinan π con millones de cifras decimales.

Solución De acuerdo con las propiedades pares-impares y la tabla 1, tenemos

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$ *El seno es impar*

b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *El coseno es par* ■

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas se relacionan entre sí mediante ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Presentamos las más importantes en el recuadro siguiente.*

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

■ **Demostración** Las identidades recíprocas se infieren inmediatamente de la definición de la página 408. Enseguida demostramos las identidades pitagóricas. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Puesto que $P(x, y)$ están sobre el círculo unitario, tenemos $x^2 + y^2 = 1$. Por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Al dividir ambos miembros entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos usado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. De manera similar, al dividir ambos miembros de la primera identidad pitagórica entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) obtenemos $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

*Nos apegamos a la convención usual de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^n$ para todos los enteros n, excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la sección 7.4. Naturalmente, la misma convención se aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

Como su nombre lo indica, las identidades fundamentales tienen un papel esencial en la trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquier otra. Entonces, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, podemos calcular los valores de todas las otras en t.

Ejemplo 6 Cálculo de todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuadrante IV, calcule los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

Solución De acuerdo con las identidades pitagóricas tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 &= 1 && \text{Sustitución de } \cos t = \tfrac{3}{5} \\ \operatorname{sen}^2 t &= 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} && \text{Despeje de } \operatorname{sen}^2 t \\ \operatorname{sen} t &= \pm\tfrac{4}{5} && \text{Obtención de las raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Puesto que este punto está en el cuadrante IV, sen t es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que ya conocemos tanto sen t como cos t, podemos calcular los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas.

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

■

Ejemplo 7 Expresar una función trigonométrica en función de otra

Escriba tan t en función de cos t, donde t está en el cuadrante III.

Solución Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. De acuerdo con las identidades pitagóricas tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 t &= 1 - \cos^2 t && \text{Despeje de } \operatorname{sen}^2 t \\ \operatorname{sen} t &= \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} && \text{Obtención de las raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Como sen t es negativo en el cuadrante III, el signo negativo se aplica aquí. Por lo tanto,

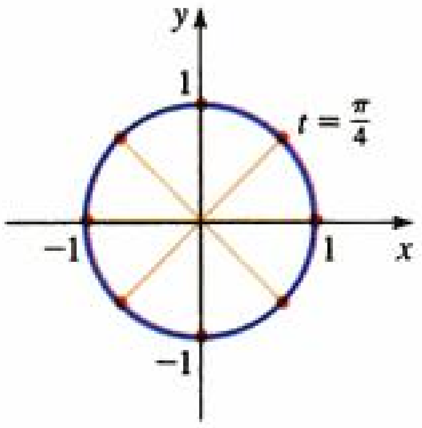
$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

■

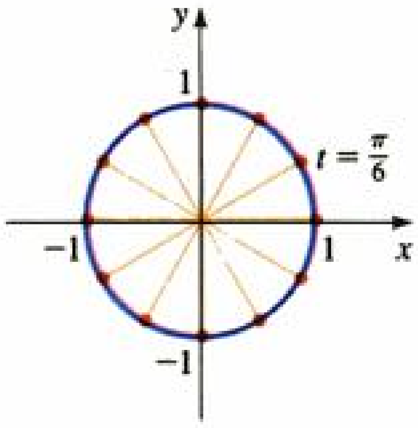
5.2 Ejercicios

1–2 ■ Determine sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos al final del recorrido se muestran en el círculo unitario de la figura. En el ejercicio 1, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 2, t se incrementa en incrementos de $\pi/6$. (Véanse ejercicios 19 y 20 de la sección 5.1.)

1.



2.



3–22 ■ Calcule el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

3. **a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\tan\frac{2\pi}{3}$

4. **a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ **b)** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **c)** $\tan\frac{5\pi}{6}$

5. **a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ **b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

6. **a)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **c)** $\cos\frac{7\pi}{3}$

7. **a)** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **c)** $\cos\frac{7\pi}{4}$

8. **a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ **b)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **c)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

9. **a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ **b)** $\csc\frac{7\pi}{3}$ **c)** $\cot\frac{7\pi}{3}$

10. **a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. **a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

12. **a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

13. **a)** $\sec\frac{11\pi}{3}$ **b)** $\csc\frac{11\pi}{3}$ **c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

14. **a)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **b)** $\sec\frac{7\pi}{6}$ **c)** $\csc\frac{7\pi}{6}$

15. **a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **b)** $\tan\frac{7\pi}{6}$ **c)** $\tan\frac{11\pi}{6}$

16. **a)** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\cot\frac{5\pi}{3}$

17. **a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

18. **a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **b)** $\sec\frac{5\pi}{4}$ **c)** $\tan\frac{5\pi}{4}$

19. **a)** $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\csc\frac{\pi}{2}$ **c)** $\csc\frac{3\pi}{2}$

20. **a)** $\sec(-\pi)$ **b)** $\sec\pi$ **c)** $\sec 4\pi$

21. **a)** $\operatorname{sen} 13\pi$ **b)** $\cos 14\pi$ **c)** $\tan 15\pi$

22. **a)** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ **b)** $\cos\frac{25\pi}{2}$ **c)** $\cot\frac{25\pi}{2}$

23–26 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas, si están definidas, en el número real dado t. Utilice sus respuestas para completar la tabla.

23. $t = 0$ **24.** $t = \frac{\pi}{2}$ **25.** $t = \pi$ **26.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinida		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinida
$\frac{3\pi}{2}$						

27–36 ■ Se proporciona el punto $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

27. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **28.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

29. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **30.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

31. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **32.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

33. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **34.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

35. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **36.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

37–44 ■ Estime el valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **a)** la figura y **b)** una calculadora. Compare los dos valores.

37. sen 1

38. cos 0.8

39. sen 1.2

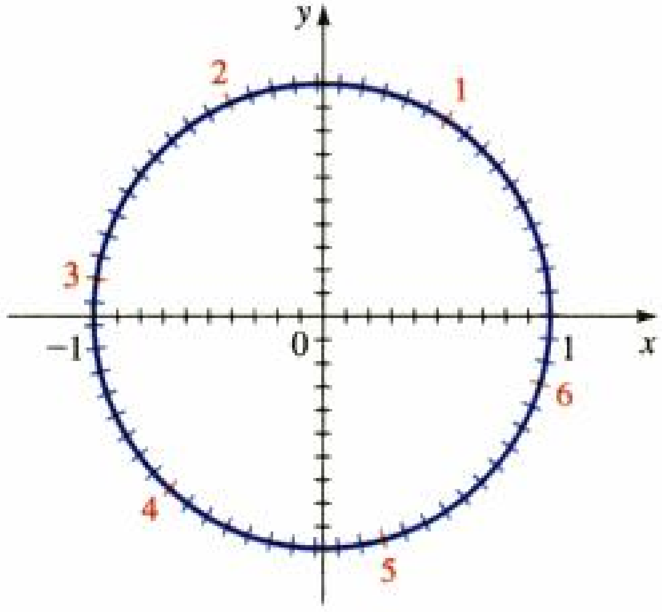
40. cos 5

41. tan 0.8

42. tan(−1.3)

43. cos 4.1

44. sen(−5.2)



45–48 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto determinado por t está en el cuadrante indicado.

45. sen t cos t, cuadrante II

46. tan t sec t, cuadrante IV

47. $\dfrac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, cuadrante III

48. cos t sec t, cualquier cuadrante

49–52 ■ A partir de la información dada encuentre el cuadrante en el cual está el punto determinado por t.

49. sen $t > 0$ y cos $t < 0$

50. tan $t > 0$ y sen $t < 0$

51. csc $t > 0$ y sec $t < 0$

52. cos $t < 0$ y cot $t < 0$

53–62 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto determinado por t está en el cuadrante indicado.

53. sen t, cos t; cuadrante II

54. cos t, sen t; cuadrante IV

55. tan t, sen t; cuadrante IV

56. tan t, cos t; cuadrante III

57. sec t, tan t; cuadrante II

58. csc t, cot t; cuadrante III

59. tan t, sec t; cuadrante III

60. sen t, sec t; cuadrante IV

61. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

62. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

63–70 ■ Determine los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información proporcionada.

63. sen $t = \frac{3}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante II

64. cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante III

65. sec $t = 3$, el punto definido por t está en el cuadrante IV

66. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto definido por t está en el cuadrante III

67. tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

68. sec $t = 2$, sen $t < 0$

69. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

70. tan $t = -4$, csc $t > 0$

71–78 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

71. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

72. $f(x) = x^2 \cos 2x$

73. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

74. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

75. $f(x) = |x| \cos x$

76. $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

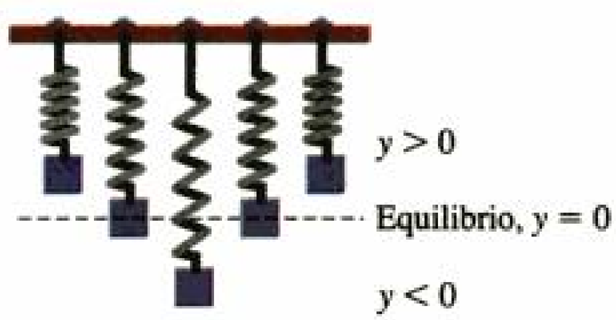
77. $f(x) = x^3 + \cos x$

78. $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

Aplicaciones

79. Movimiento armónico El desplazamiento desde el equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte es $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Calcule el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

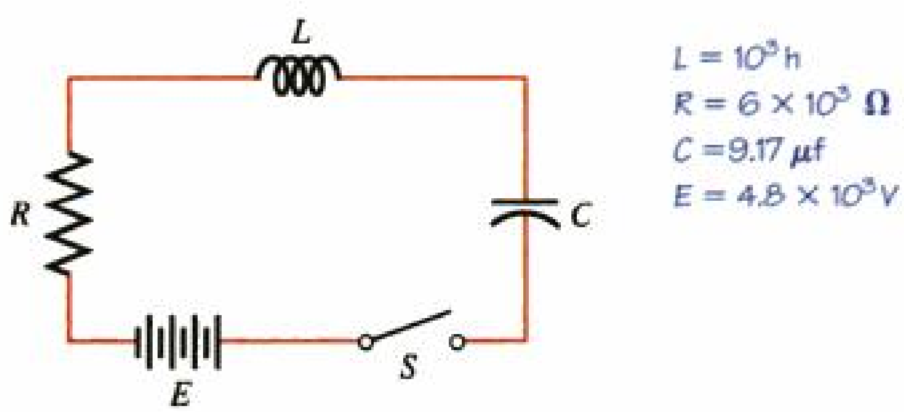
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



80. Ritmos circadianos La presión sanguínea del hombre varía a lo largo del día. En una cierta persona, la presión sanguínea diastólica en reposo en el tiempo t se obtiene mediante $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas a partir de la medianoche y $B(t)$ en milímetros de mercurio (mmHg). Calcule la presión sanguínea diastólica de esta persona

a) a las 6:00 A.M. **b)** a las 10:30 A.M. **c)** al mediodía **d)** a las 8:00 P.M.

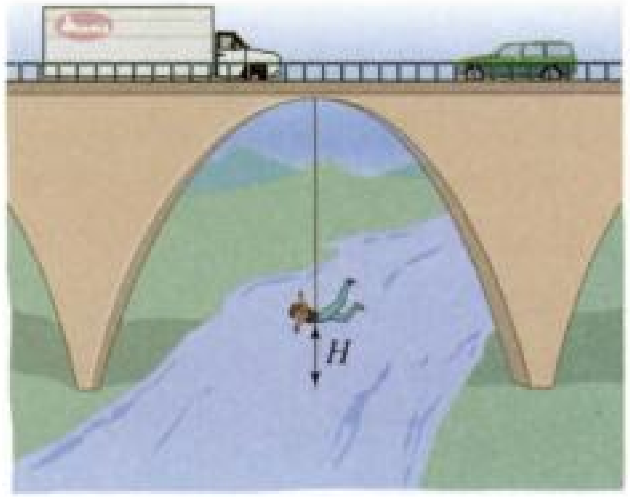
81. Circuito eléctrico Después de que se cierra el interruptor en el circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t} \operatorname{sen} 10t$. Calcule la corriente en los tiempos **a)** $t = 0.1$ s y **b)** $t = 0.5$ s.



82. Salto con bungee Una mujer salta, sujeta a un elástico, desde un punto alto hacia el río que corre abajo, y rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de saltar, su altura H en metros por arriba del río se representa mediante

$H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos(\frac{\pi}{4}t)$. Calcule su altura en los tiempos señalados en la tabla.

t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	

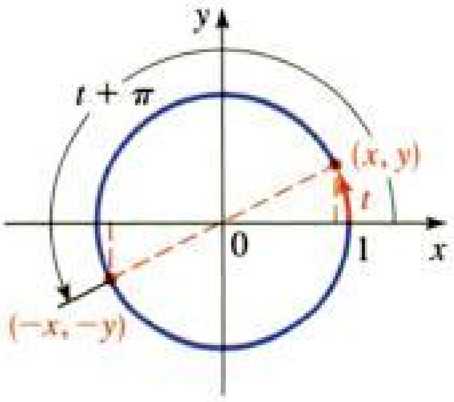


Descubrimiento • Debate

83. Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es una que se usa para "reducir" la cantidad de términos en una función trigonométrica. Explique cómo la figura muestra que las siguientes fórmulas de reducción son válidas:

$$\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$\tan(t + \pi) = \tan t$$

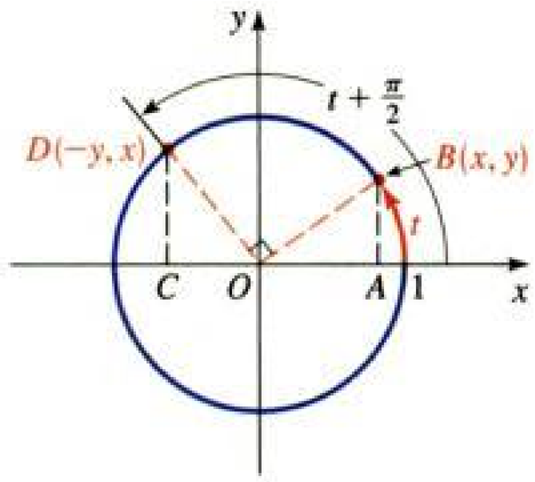


84. Más fórmulas de reducción Por medio del teorema de "ángulo-lado-ángulo" de la geometría elemental, los triángulos CDO y AOB de la figura son congruentes. Explique cómo esto demuestra que si B tiene coordenadas (x, y), entonces D tiene coordenadas $(-y, x)$. Luego explique cómo la figura muestra que las siguientes fórmulas de reducción son válidas.

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$$

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 Gráficas trigonométricas

La gráfica de una función nos proporciona una mejor idea de su comportamiento. De este modo, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones se grafican en la sección siguiente.

Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno primero observemos que dichas funciones repiten sus valores según un patrón. Para ver exactamente cómo sucede esto, recuerde que la circunferencia de un círculo unitario es 2π. Se infiere entonces que el punto $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Puesto que las funciones seno y coseno se definen en términos de las coordenadas de $P(x, y)$ se infiere que sus valores no cambian al añadir cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Por lo tanto, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la definición siguiente. Un función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. Tal número positivo mínimo, si es que existe, es el **periodo** de f. Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es **un periodo completo** de f.

Propiedades periódicas del seno y el coseno

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad\qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

Tabla 1

t	$\operatorname{sen} t$	$\cos t$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar las gráficas, primero graficamos un periodo. Para trazar las gráficas en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, podríamos intentar elaborar una tabla de valores y usar dichos puntos para dibujar la gráfica. Puesto que una tabla así está incompleta, veamos con más detalle las definiciones de estas funciones.

Tenga presente que sen t es la coordenada y del punto $P(x, y)$ en el círculo unitario determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta hasta 1, luego disminuye repetidamente hasta -1 a medida que el punto $P(x, y)$ recorre el círculo unitario (véase figura 1). En efecto, a medida que t aumenta desde 0 hasta $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta desde 0 hasta 1. Conforme t se incrementa de $\pi/2$ hasta π, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye desde 1 hasta 0. En la tabla 1 se muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

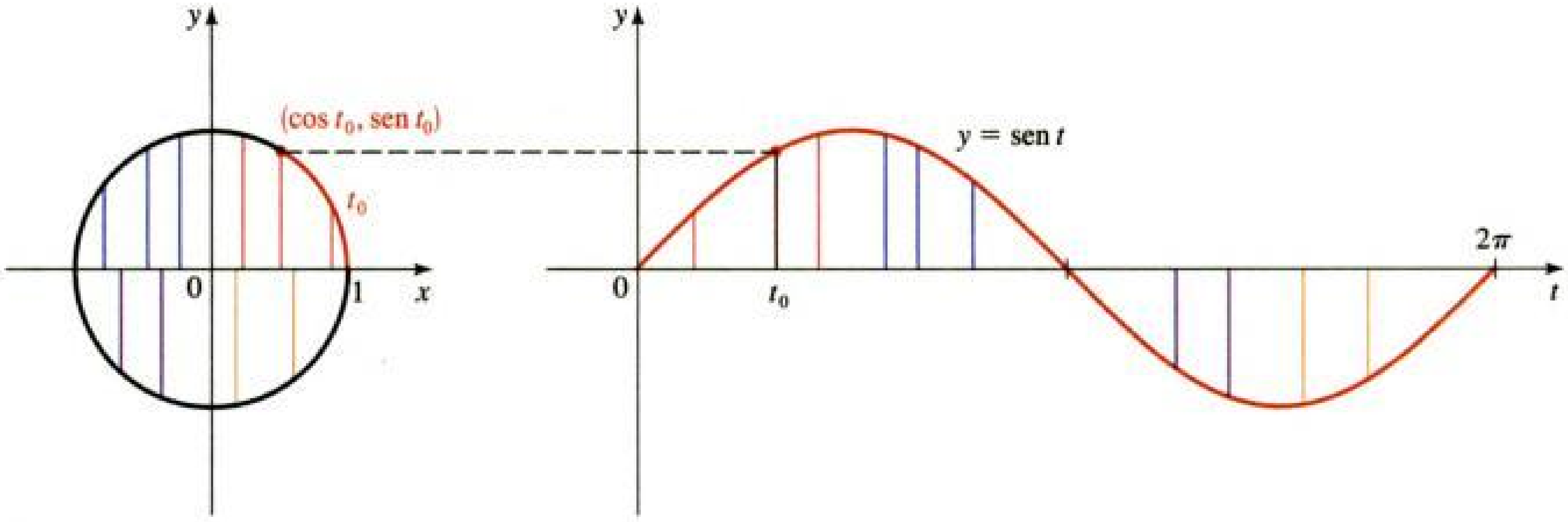


Figura 1

Para trazar la gráfica con mayor exactitud, determinamos otros pocos valores de sen t y cos t en la tabla 2. Podríamos determinar más valores con la ayuda de una calculadora.

Tabla 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen} t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ahora utilizamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las figuras 2 y 3. Estas son las gráficas de un periodo. Obtenemos las gráficas completas aprovechando el hecho de que estas funciones son periódicas y su periodo es 2π y siguiendo el mismo patrón a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Así se esperaba, ya que el seno es una función impar. Puesto que la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

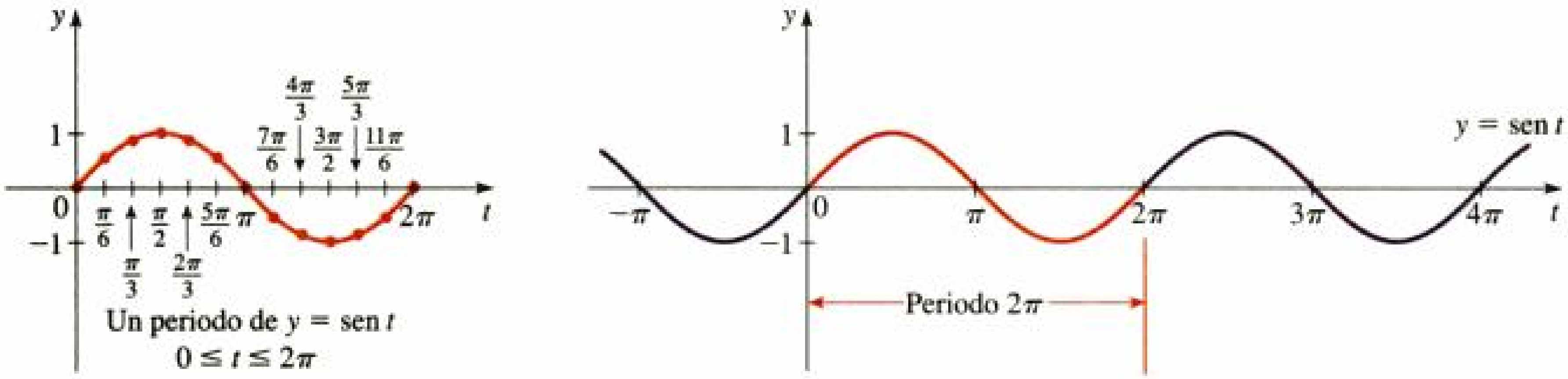


Figura 2
Gráfica de sen t

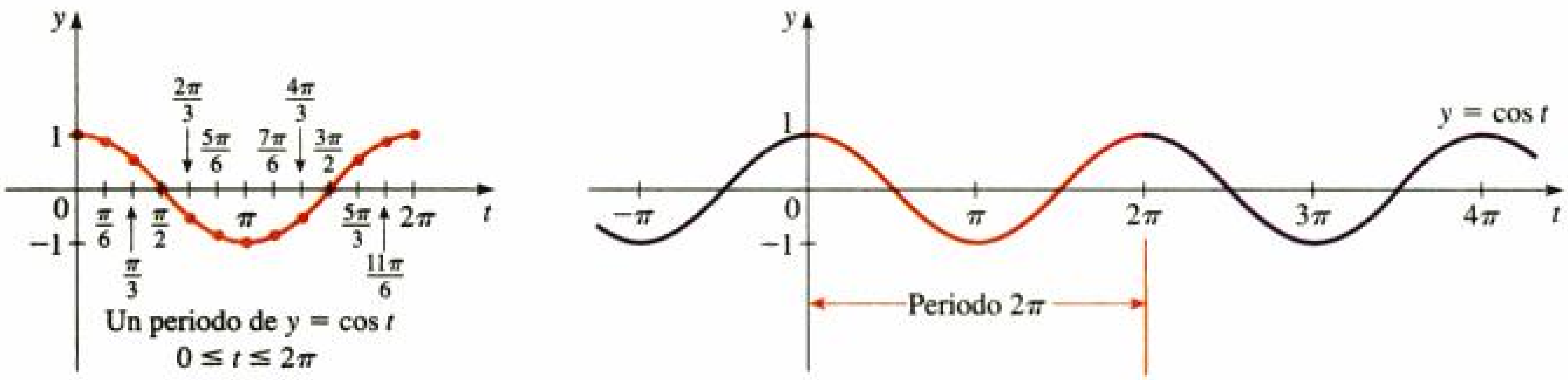


Figura 3
Gráfica de cos t

Gráficas de transformaciones de seno y coseno

En seguida consideramos las gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno, para lo cual, las técnicas de graficación de la sección 2.4 son muy útiles. Las gráficas que se obtienen son muy importantes para entender las aplicaciones a las situaciones físicas como el movimiento armónico (véase sección 5.5), pero algunas de ellas son gráficas hermosas que son interesantes por derecho propio.

Lo común es usar la x para denotar la variable en el dominio de una función. Entonces, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

Ejemplo 1 Curvas del coseno

Trace la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 2 + \cos x$ b) $g(x) = -\cos x$

Solución

a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero se desplaza hacia arriba 2 unidades (véase figura 4(a)).

b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.

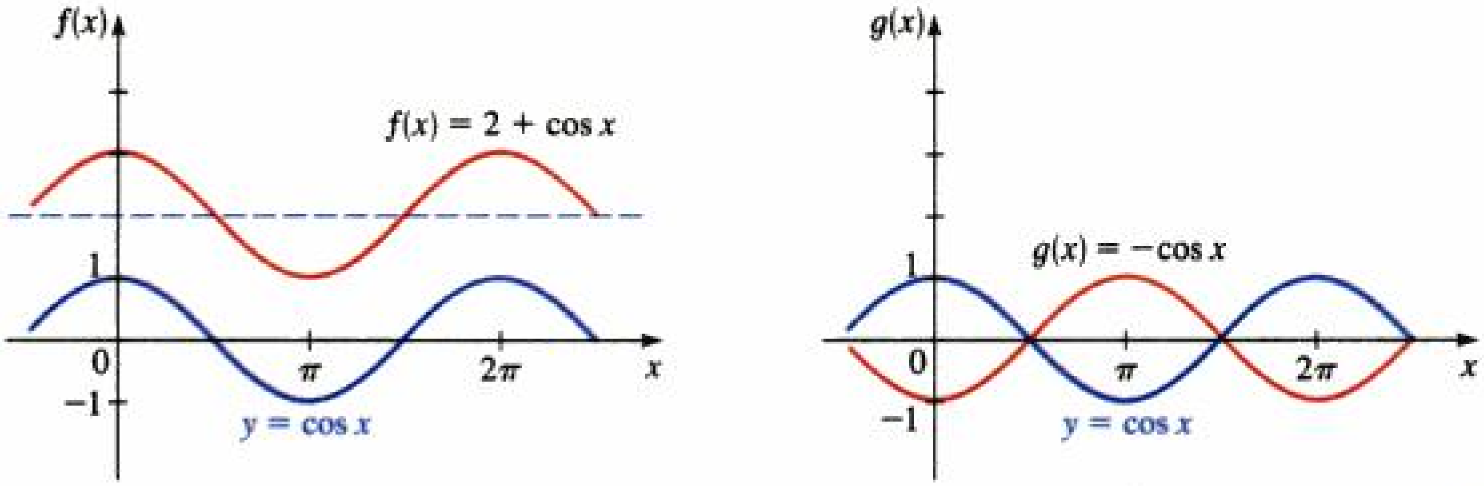


Figura 4 a) b) ■

Grafiquemos $y = 2 \text{ sen } x$. Empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por 2. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica por un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, empezamos por graficar $y = \text{sen } x$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por $\frac{1}{2}$. El efecto de esta operación es acortar verticalmente la gráfica por un factor de $\frac{1}{2}$ (véase figura 5).

El alargamiento y el acortamiento de las gráficas se estudian en la sección 2.4

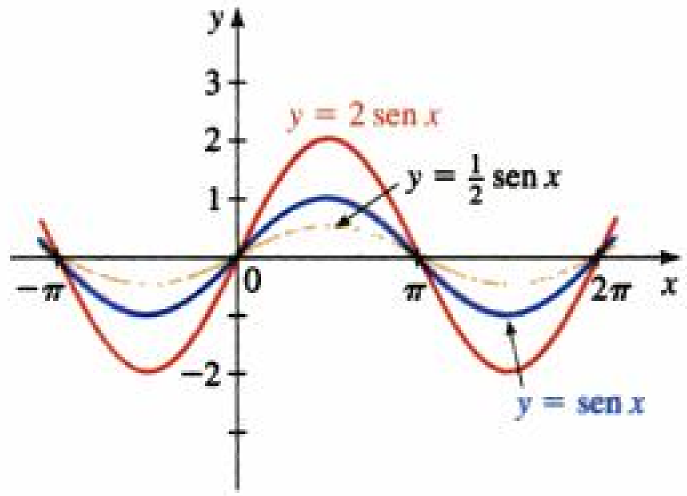


Figura 5

En general, para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se llama **amplitud** y es el valor más grande que alcanzan estas funciones. Las gráficas de $y = a \text{ sen } x$ para varios valores de a se ilustran en la figura 6.

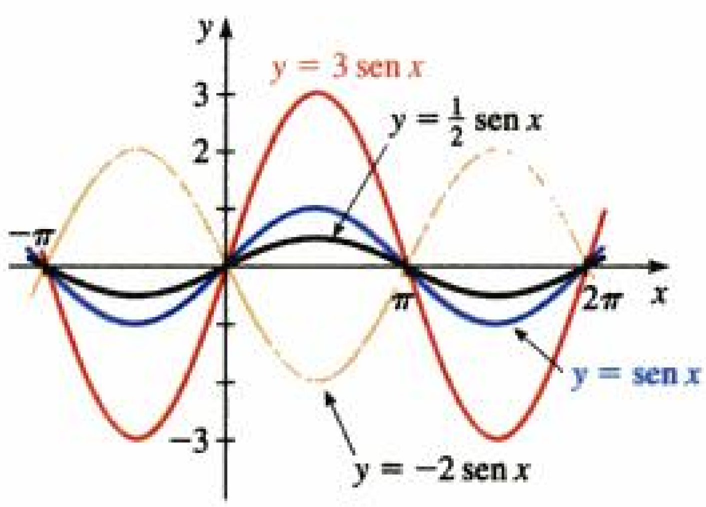


Figura 6

Ejemplo 2 Alargamiento de la curva del coseno

Determine la amplitud de $y = -3\cos x$ y trace la gráfica.

Solución La amplitud es $|-3| = 3$, por lo que el valor más grande que alcanza la gráfica es 3 y el más pequeño es -3. Para trazar la gráfica empezamos por graficar $y = \cos x$, alargar verticalmente la gráfica por un factor de 3 y reflejarla en el eje x. Así se obtiene la gráfica de la figura 7.

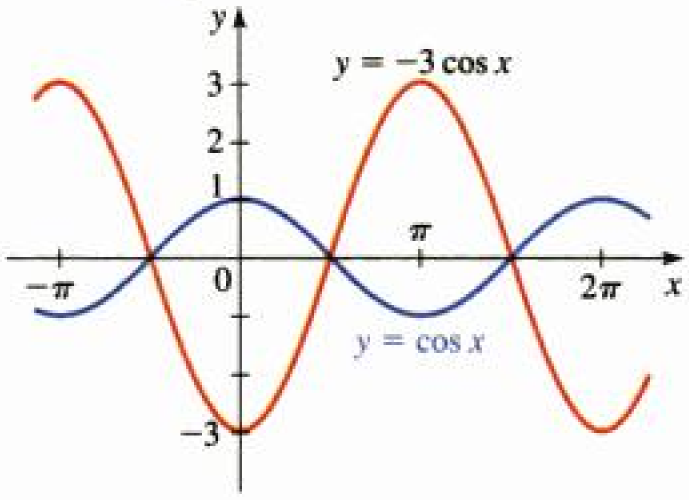


Figura 7

■

Puesto que las funciones seno y coseno tienen periodo de 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a\cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía desde 0 hasta 2π, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$, o bien, para $0 \le x \le 2\pi/k$. De modo que estas funciones completan un periodo cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ y, por lo tanto, tienen periodo $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se llaman **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. Con frecuencia, a las curvas seno y coseno se les llama curvas **sinusoidales**.

Curvas seno y coseno

Las curvas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a\cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen amplitud $|a|$ y periodo $2\pi/k$.

Un intervalo adecuado para graficar en él un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

El alargamiento horizontal y el acortamiento se analizan en la sección 2.4.

Para ver cómo el valor de k afecta la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Puesto que el periodo es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (véase figura 8(a)). En el caso de la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, y de este modo la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (véase figura 8(b)). Observamos que el efecto es *acortar* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica en el sentido horizontal si $k < 1$.

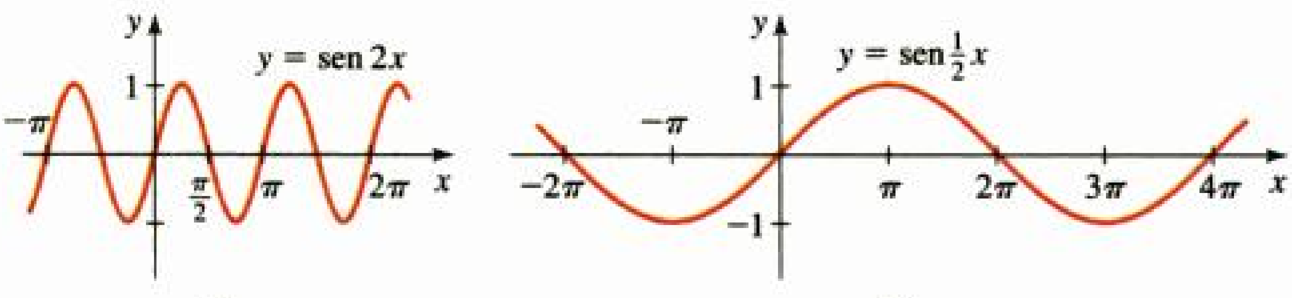


Figura 8

Para comparar, en la figura 9 ilustramos las gráficas de un periodo de la curva seno $y = a$ sen kx para varios valores de k.

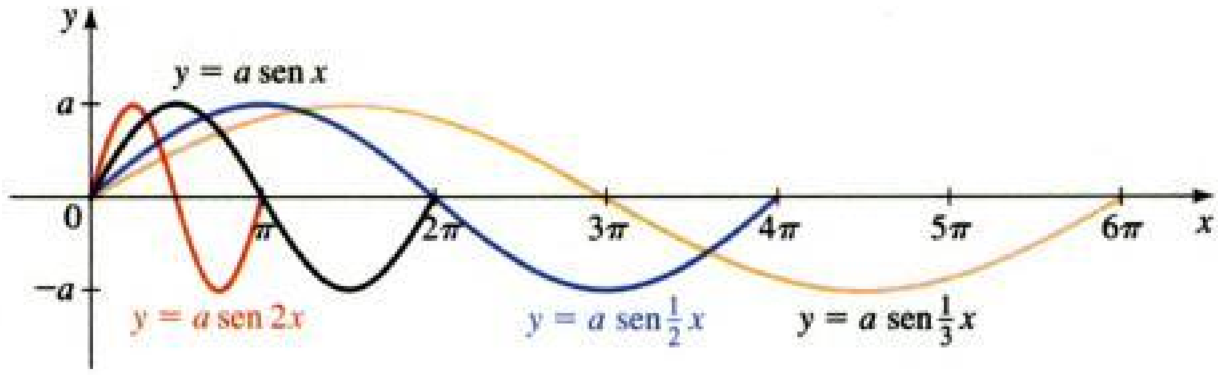


Figura 9

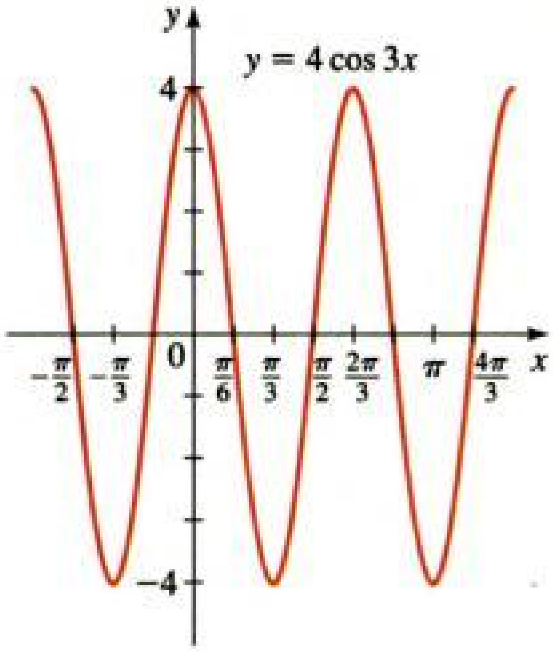


Figura 10

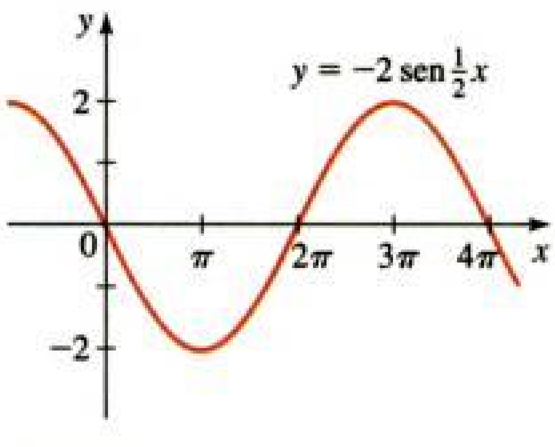


Figura 11

Ejemplo 3 Amplitud y periodo

Determine la amplitud y el periodo de cada una de las funciones, y trace la gráfica.

a) $y = 4 \cos 3x$ b) $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

Solución

a) Obtenemos la amplitud y el periodo de la forma de la función como sigue:

amplitud $= |a| = 4$

$$y = 4 \cos 3x$$

periodo $= \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{3}$

La amplitud es 4 y el periodo es $2\pi/3$. La gráfica se muestra en la figura 10

b) En el caso de $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

La gráfica se muestra en la figura 11. ■

Las gráficas de las funciones de la forma $y = a$ sen $k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas en el sentido horizontal por una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$, o bien, a la izquierda si $b < 0$. El número b es el **desplazamiento de fase**. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

Curvas seno y coseno desplazadas

Las curvas seno y coseno

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen amplitud $|a|$, periodo $2\pi/k$ y desplazamiento de fase b.

Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ se ilustran en la figura 12.

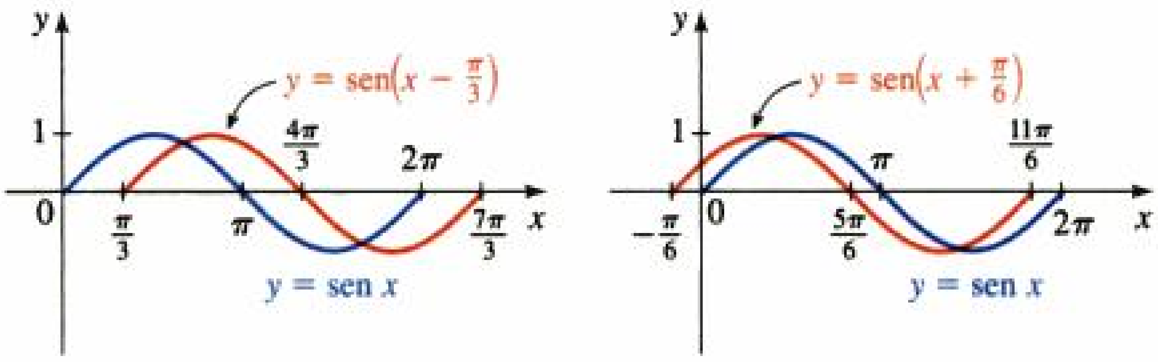


Figura 12

Ejemplo 4 Una curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y grafique un periodo completo.

He aquí otro método para determinar un intervalo adecuado en el cual graficar un periodo completo. Puesto que el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ se tendrá un periodo completo cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe desde 0 hasta 2π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

De este modo graficamos un periodo en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Solución Determinamos la amplitud, el periodo y el desplazamiento de la fase de la forma de la función como sigue:

amplitud $= |a| = 3$ periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

desplazamiento de la fase $= \frac{\pi}{4}$ (a la derecha)

Puesto que el desplazamiento de la fase es $\pi/4$ y el periodo es π, se tiene un periodo completo en el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como un auxiliar para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales, luego graficamos una curva seno con amplitud 3 como la de la figura 13.

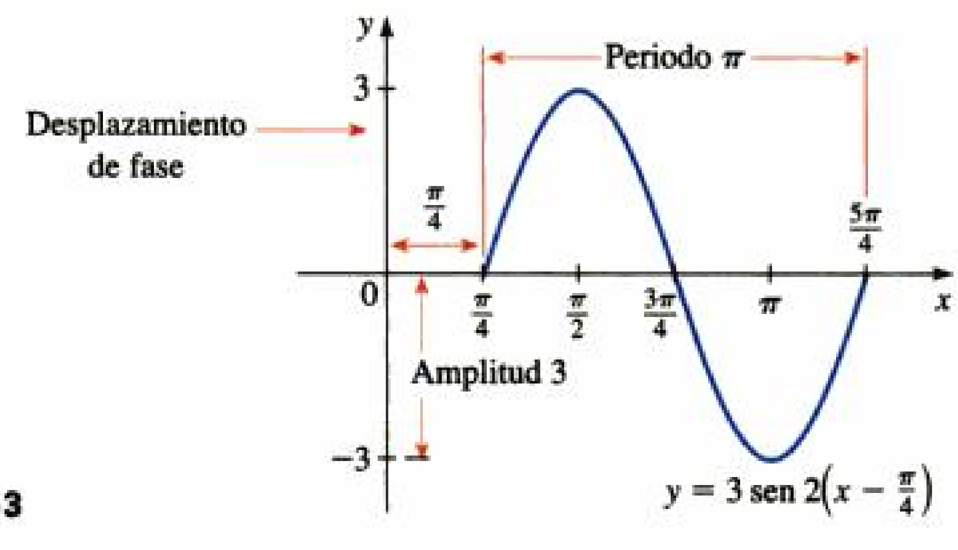


Figura 13

■

Ejemplo 5 Una curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de

$$y = \frac{3}{4}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un periodo completo.

Solución Primero escribimos esta función en la forma $y = a\cos k(x - b)$ Para hacerlo, sacamos como factor el 2 de la expresión $2x + \dfrac{2\pi}{3}$ para tener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

También podemos determinar un periodo completo como sigue:

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2x + \frac{2\pi}{3} = 0$	$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3}$	$2x = \frac{4\pi}{3}$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = \frac{2\pi}{3}$

Entonces graficamos un periodo en el intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

Por lo tanto, obtenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desplazamiento de fase} = b = -\frac{\pi}{3}$$ Desplazamiento de $\frac{\pi}{3}$ a la izquierda

A partir de esta información se infiere que un periodo de esta curva del coseno inicia en $-\pi/3$ y termina en $(-\pi/3) + \pi = 2\pi/3$. Para trazar la gráfica en el intervalo $[-\pi/3, 2\pi/3]$, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y graficamos una curva coseno con amplitud $\frac{3}{4}$ como se muestra en la figura 14.

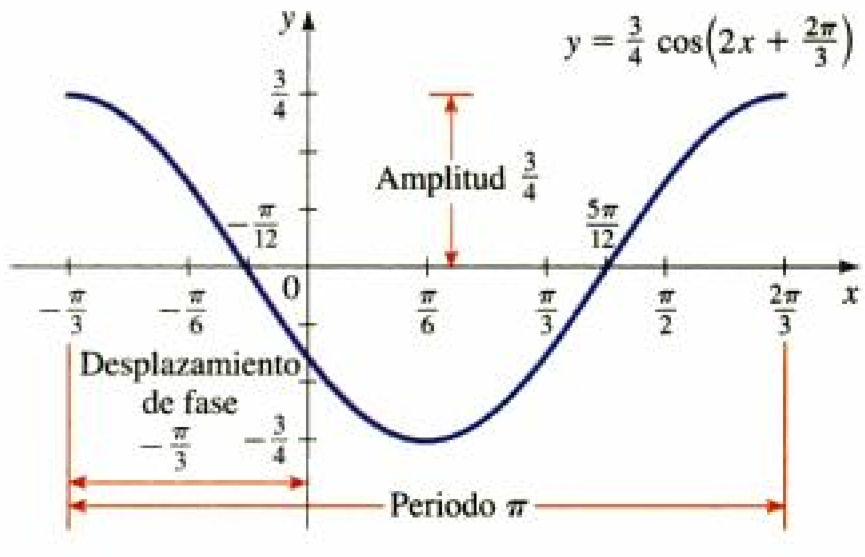


Figura 14

■

Uso de los dispositivos para graficar para trazar funciones trigonométricas

Cuando usamos una calculadora para graficar o una computadora para trazar una función es importante elegir con mucho cuidado un rectángulo de visión con objeto de generar una gráfica aceptable de la función. Esto se refiere especialmente a las funciones trigonométricas. El ejemplo siguiente muestra que si no se pone atención, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

En la sección 1.9 se proporcionan criterios para escoger un rectángulo de visión aceptable.

Ejemplo 6 Elección del rectángulo de visión

Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de visión aceptable.

Solución En la figura 15(a) se ilustra la gráfica de f que se genera en una calculadora para graficar usando un rectángulo de visión $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser aceptable, pero si modificamos el rectángulo de visión a los mostrados en la figura 15, entonces la gráfica luce muy diferente. Algo raro sucedió.

La apariencia de las gráficas de la figura 15 depende de la calculadora o computadora que se utilice. Las gráficas que obtenga en su propia calculadora podrían ser distintas a estas figuras, y también pueden ser inexactas.

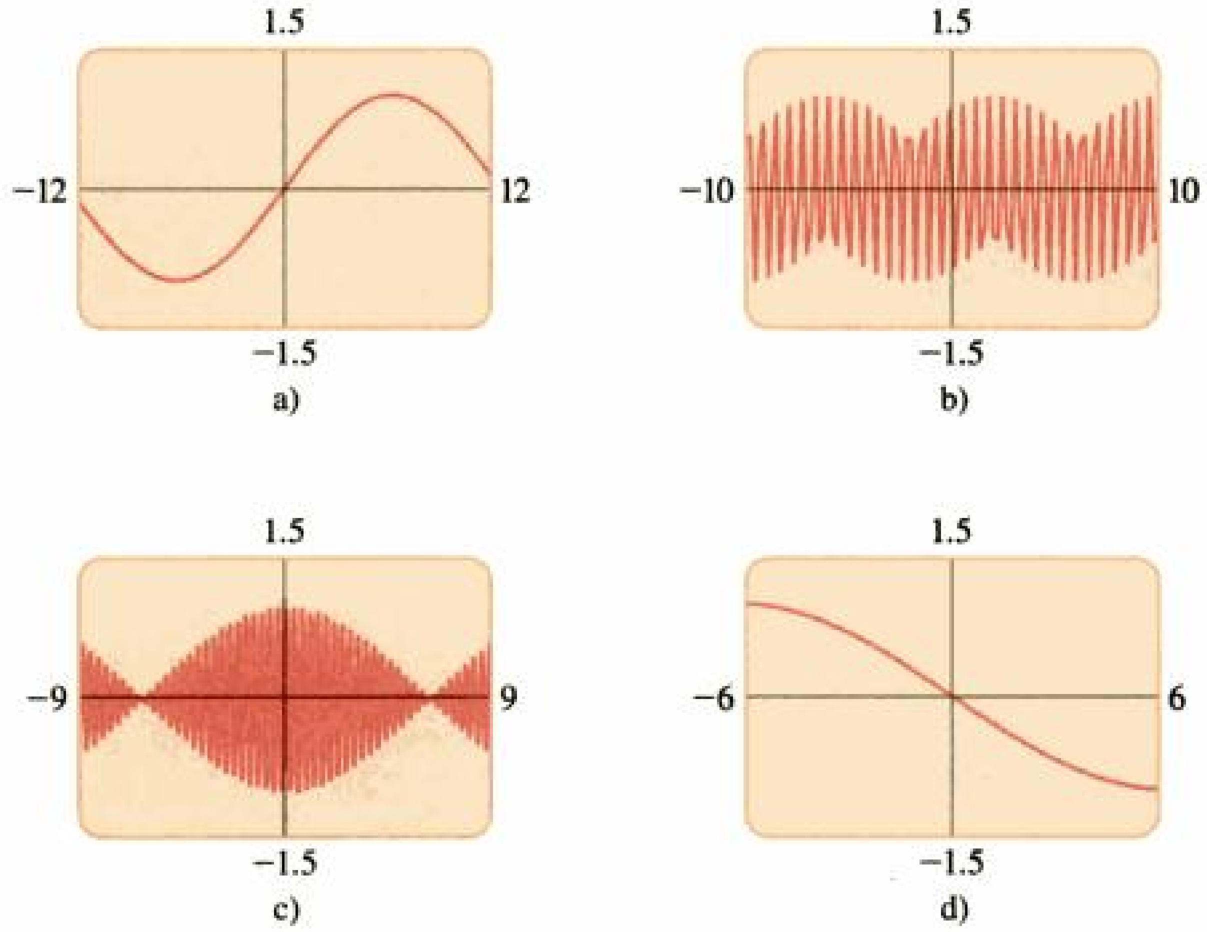


Figura 15
Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de visión

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y para determinar un rectángulo de visión aceptable necesitamos determinar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos tratar sólo con valores pequeños de x con objeto de mostrar sólo algunas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de visión $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, entonces obtenemos la gráfica ilustrada en la figura 16.

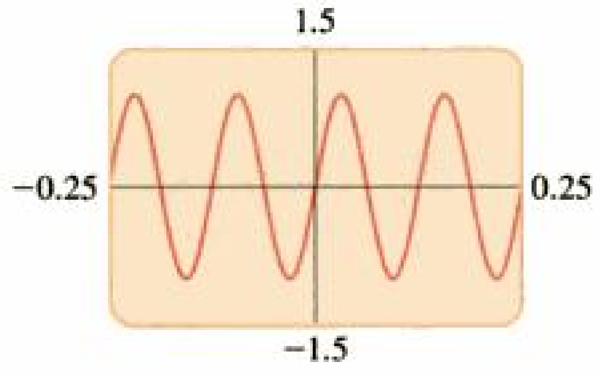


Figura 16
$f(x) = \text{sen } 50x$

Ahora vemos qué fue lo que sucedió en la figura 15. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora grafica puntos y los une, ignora la

La función h del ejemplo 7 es **periódica**; su periodo es 2π. En general, las funciones que son sumas de funciones de la lista siguiente

$$1, \cos kx, \cos 2kx, \cos 3kx, \ldots$$
$$\operatorname{sen} kx, \operatorname{sen} 2kx, \operatorname{sen} 3kx, \ldots$$

son periódicas. Aunque al parecer estas funciones son especiales, son en realidad fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (véase página 536) descubrió que casi todas las funciones periódicas se pueden expresar como una suma (por lo regular, una suma infinita) de estas funciones. Es notable porque significa que cualquier situación en la que ocurra una variación periódica se puede expresar en forma matemática, usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en los discos compactos.

mayor parte de los máximos y mínimos y, por lo tanto, se tiene una falsa impresión de la gráfica. ■

Ejemplo 7 Una suma de las curvas seno y coseno

Grafique $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $h(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ en una sola pantalla para ilustrar el método de la adición gráfica.

Solución Hay que observar que $h = f + g$, de modo que la gráfica se obtiene sumando las coordenadas y correspondientes de las gráficas de f y g. Las gráficas de f, g y h se ilustran en la figura 17.

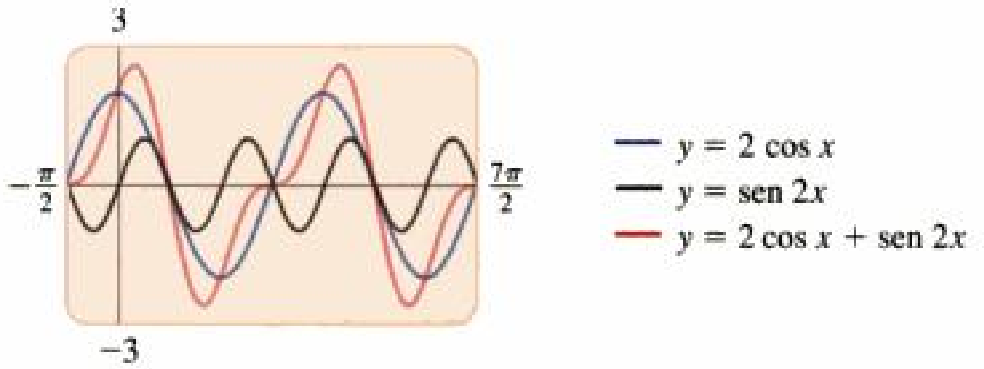


Figura 17 ■

Ejemplo 8 Una curva coseno con amplitud variable

Grafique las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una sola pantalla. Comente y explique la relación entre las gráficas.

Solución En la figura 18 se muestran las tres gráficas en un rectángulo de visión de $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Al parecer, la gráfica de $y = x^2\cos 6\pi x$ queda entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

Para entender esto, recuerde que los valores de $\cos 6\pi x$ queda entre -1 y 1, es decir,

$$-1 \le \cos 6\pi x \le 1$$

para todos los valores de x. Al multiplicar las desigualdades por x^2 y observar que $x^2 \ge 0$, tenemos

$$-x^2 \le x^2\cos 6\pi x \le x^2$$

Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ representan un límite o frontera para la gráfica de $y = x^2\cos 6\pi x$. (Hay que observar que las gráficas se tocan cuando $6\pi x = \pm 1$.) ■

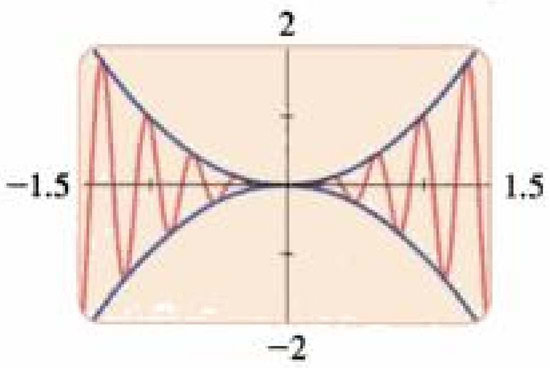


Figura 18
$y = x^2\cos 6\pi x$

En el ejemplo 8 se muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2\cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x)\operatorname{sen} kx$, o bien, $f(x) = a(x)\cos kx$, la función a determina cómo la amplitud de f varía, y la gráfica de f queda entre las gráficas de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. A continuación se muestra otro ejemplo.

Ejemplo 9 Una curva coseno con amplitud variable

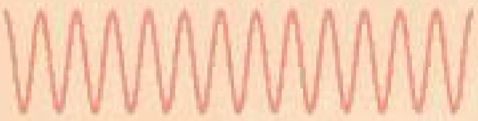
Grafique la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

Solución La gráfica se muestra en la figura 19 de la página siguiente. Aunque la trazó una computadora, también la puede dibujar usted trazando primero las curvas

Radio AM y FM

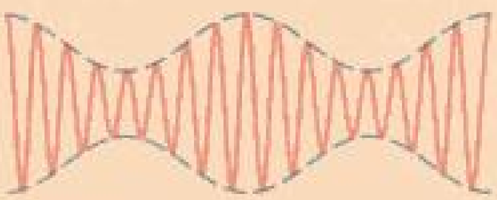
Las transmisiones de radio consisten en ondas sonoras sobrepuestas en una onda electromagnética armónica llamada **señal portadora**

Onda sonora



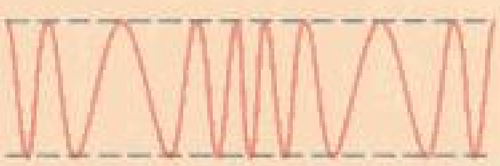
Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, que se llaman **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En la transmisión AM, la onda sonora cambia, es decir, **modula** la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin cambio.



Señal AM

En la transmisión FM, la onda sonora modula la frecuencia, pero la amplitud sigue siendo la misma.



Señal FM

que funcionan como límites $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de f es una curva coseno que se ubica entre las gráficas de estas dos funciones.

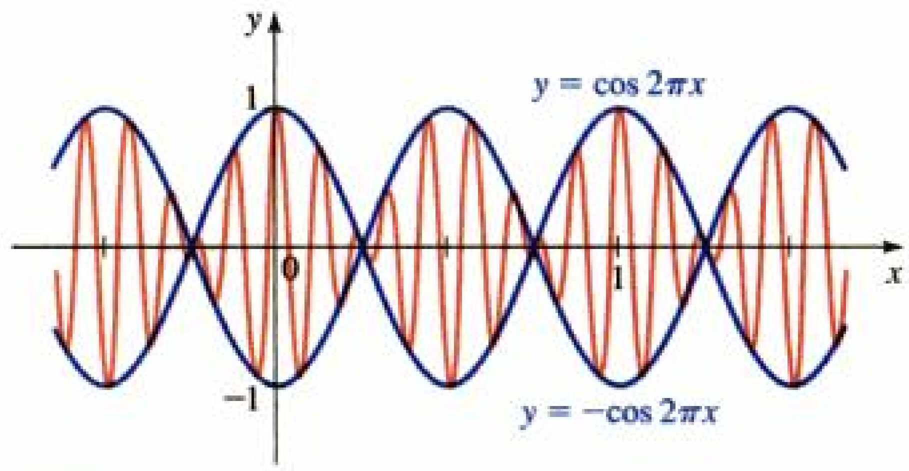


Figura 19
$f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$ ■

Ejemplo 10 Una curva seno con amplitud decreciente

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es importante en el cálculo infinitesimal. Grafique esta función y comente su comportamiento cuando x se acerca a 0.

Solución El rectángulo de visión $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ mostrado en la figura 20(a) da una buena visión global de la gráfica de f. El rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la figura 20(b) se enfoca en el comportamiento de f cuando $x \approx 0$. Observe que aunque $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$, o en otras palabras, 0 no está en el dominio de f, los valores de f parecen aproximarse a 1 cuando x se vuelve más cercana a 0. Este hecho es decisivo en el cálculo infinitesimal.

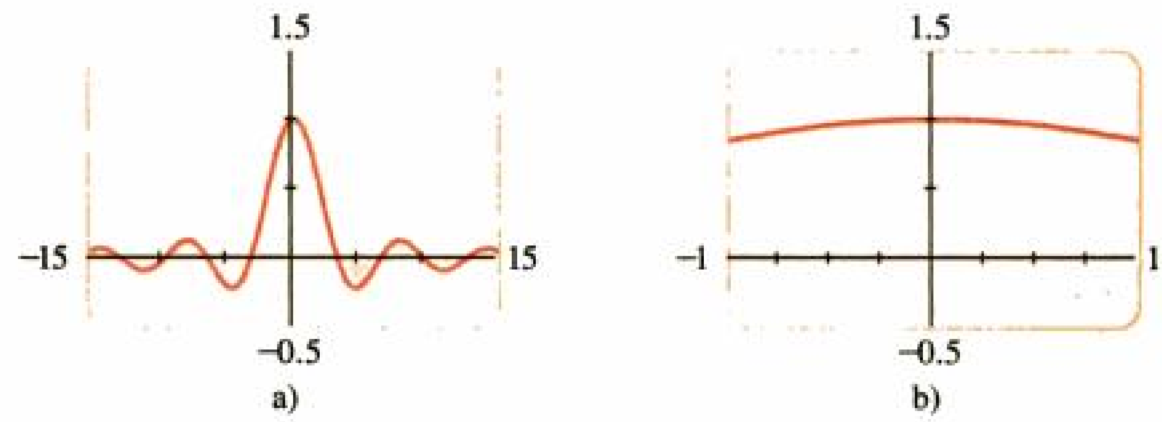


Figura 20
$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ ■

La función del ejemplo 10 puede expresarse como

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$$

y se podría considerar como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

5.3 Ejercicios

1–14 ■ Grafique la función.

1. $f(x) = 1 + \cos x$

2. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$

3. $f(x) = -\operatorname{sen} x$

4. $f(x) = 2 - \cos x$

5. $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$

6. $f(x) = -1 + \cos x$

7. $g(x) = 3 \cos x$

8. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

9. $g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

10. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$

11. $g(x) = 3 + 3 \cos x$

12. $g(x) = 4 - 2 \operatorname{sen} x$

13. $h(x) = |\cos x|$

14. $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

15–26 ■ Determine la amplitud y el periodo de la función, y dibuje su gráfica.

15. $y = \cos 2x$

16. $y = -\operatorname{sen} 2x$

17. $y = -3 \operatorname{sen} 3x$

18. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

19. $y = 10 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

20. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$

21. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$

22. $y = 4 \operatorname{sen}(-2x)$

23. $y = -2 \operatorname{sen} 2\pi x$

24. $y = -3 \operatorname{sen} \pi x$

25. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$

26. $y = -2 + \cos 4\pi x$

27–40 ■ Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función, y grafique un periodo completo.

27. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

28. $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

29. $y = -2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

30. $y = 3 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

31. $y = -4 \operatorname{sen} 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

32. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

33. $y = 5 \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

35. $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

36. $y = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

37. $y = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$

38. $y = 3 + 2 \operatorname{sen} 3(x + 1)$

39. $y = \operatorname{sen}(\pi + 3x)$

40. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

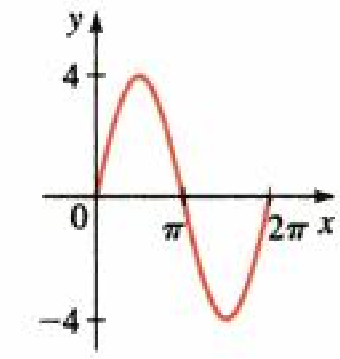
41–48 ■ Se proporciona la gráfica de un periodo completo de una curva seno o coseno.

a) Calcule la amplitud, periodo y desplazamiento de la fase.

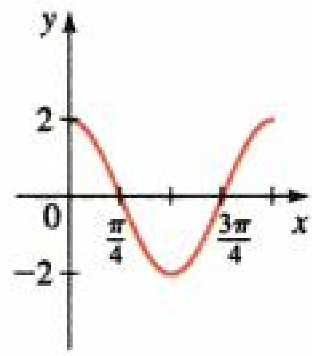
b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \qquad \text{o bien} \qquad y = a \cos k(x - b)$$

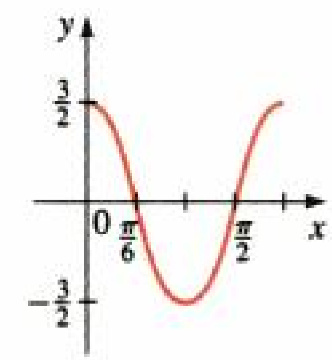
41.



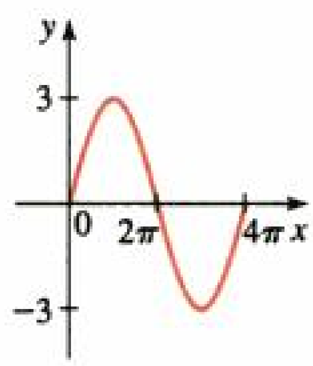
42.



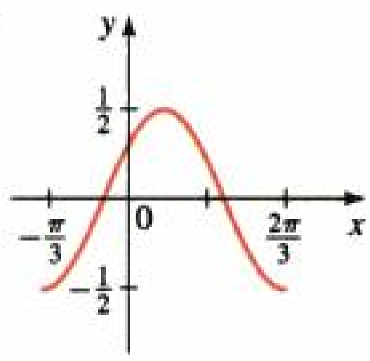
43.



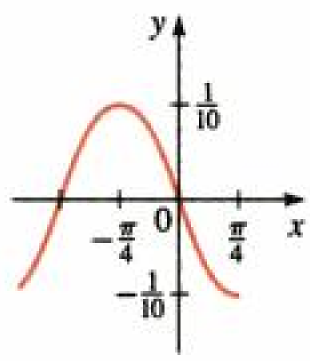
44.



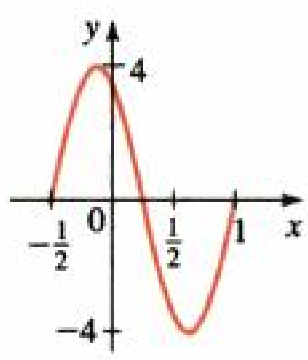
45.



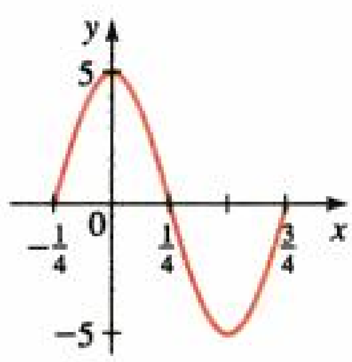
46.



47.



48.



49–56 ■ Determine un rectángulo de visión adecuado para cada función y úselo para graficar la función.

49. $f(x) = \cos 100x$

50. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$

52. $f(x) = \cos(x/80)$

53. $y = \tan 25x$

54. $y = \csc 40x$

55. $y = \operatorname{sen}^2 20x$

56. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

57–58 ■ Grafique f, g y $f + g$ en una sola pantalla para ilustrar la adición gráfica.

57. $f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

59–64 ■ Grafique las tres funciones en una sola pantalla. ¿Cuál es la relación entre las gráficas?

59. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2 \operatorname{sen} x$

60. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

61. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 5\pi x$

62. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

63. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

64. $y = \operatorname{sen} 2\pi x, \quad y = -\operatorname{sen} 2\pi x, \quad y = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} 10\pi x$

65–68 ■ Calcule los valores máximo y mínimo de la función

65. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

66. $y = x - 2 \operatorname{sen} x, 0 \le x \le 2\pi$

67. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

68. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

69–72 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación que queda en el intervalo $[0, \pi]$. Proporcione cada una de las respuestas con dos cifras decimales.

69. $\cos x = 0.4$

70. $\tan x = 2$

71. $\csc x = 3$

72. $\cos x = x$

73–74 ■ Se proporciona una función f.

a) ¿Es f par, impar o ninguna de las dos?

b) Calcule la intersección con el eje x de la gráfica de f.

c) Grafique f en un rectángulo de visión aceptable.

d) Describa el comportamiento de la función cuando $x \to \pm\infty$.

e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué sucede cuando x se aproxima a 0?

73. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

74. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2x}$

Aplicaciones

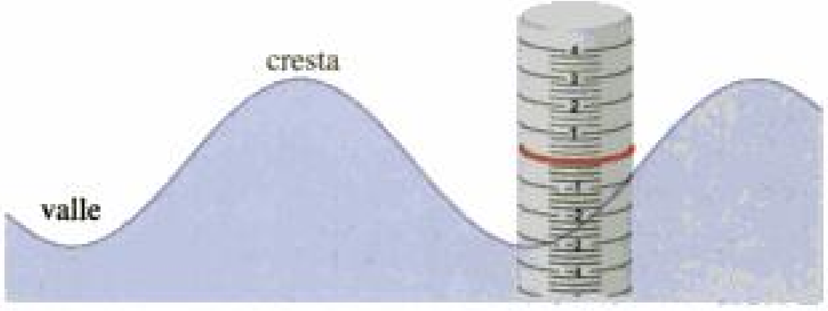
75. Altura de una onda Cuando una ola pasa por los pilotes fuera de la playa, la altura del agua está modelada mediante la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies por arriba del nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

a) Determine el periodo de la ola.

b) Calcule la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



76. Vibraciones sonoras Se golpea un diapasón, lo cual produce un tono puro cuando sus puntas vibran. Las vibraciones se modelan con la función

$$v(t) = 0.7 \operatorname{sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t segundos.

a) Determine el periodo de la vibración.

b) Calcule la frecuencia de la vibración, es decir, la cantidad de veces que vibra por segundo el diapasón.

c) Grafique la función v.

77. Presión sanguínea Cada vez que el corazón late, la presión de la sangre se incrementa primero y luego disminuye cuando el corazón descansa entre latido y latido. Las presiones máxima y mínima se llaman presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. La *presión sanguínea de un individuo* se expresa como presión sistólica/diastólica. Se considera normal una lectura de 120/80.

La presión sanguínea de una persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \operatorname{sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en milímetros de mercurio (mmHg) cuando el tiempo t se mide en minutos.

a) Determine el periodo de p.

b) Calcule el número de latidos por minuto.

c) Grafique la función p.

d) Determine la lectura de la presión sanguínea. ¿Cómo es comparada con la presión sanguínea normal?

78. Estrellas variables Las estrellas variables son aquellas cuya brillantez varía en forma periódica. Una de las más visibles es Leónidas R; su brillantez está modelada por la función

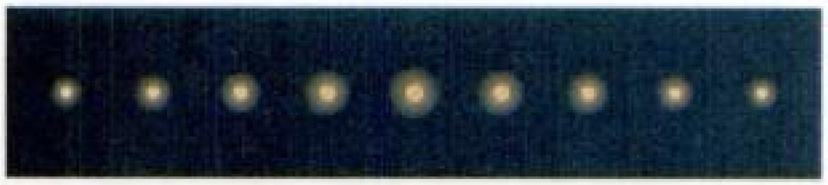
$$b(t) = 7.9 - 2.1\cos\left(\frac{\pi}{156}t\right)$$

donde t se mide en días.

a) Calcule el periodo en días.

b) Determine la brillantez máxima y la mínima.

c) Grafique la función b.



Descubrimiento • Debate

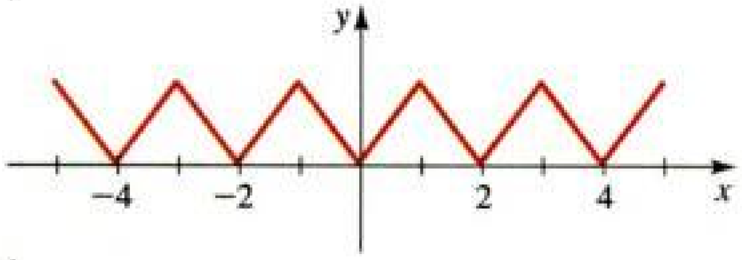
79. Composiciones que contienen funciones trigonométricas Mediante este ejercicio exploramos el efecto de la función interna g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de visión $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cuáles son las diferencias entre esta gráfica y la gráfica de la función seno?

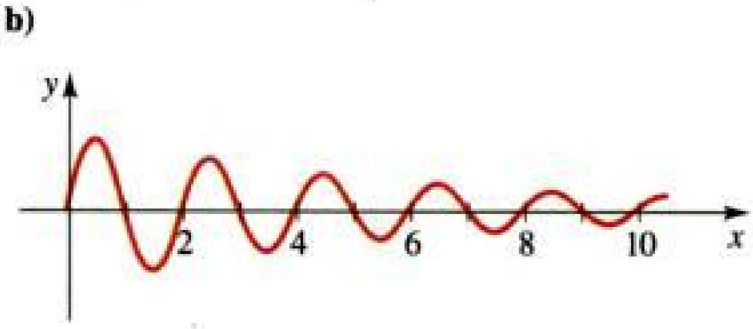
b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cuáles son las diferencias entre esta gráfica y la gráfica de la función seno?

80. Funciones periódicas I Recuerde que una función f es *periódica* si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para cada t, y el mínimo de tal p (si existe) es el *periodo* de f. La gráfica de una función de periodo p se ve igual en cada intervalo de longitud p, de modo que podemos determinar con facilidad el periodo de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica. Si es así, calcule el periodo.

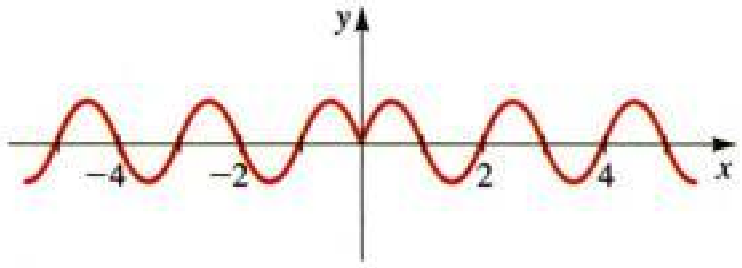
a)



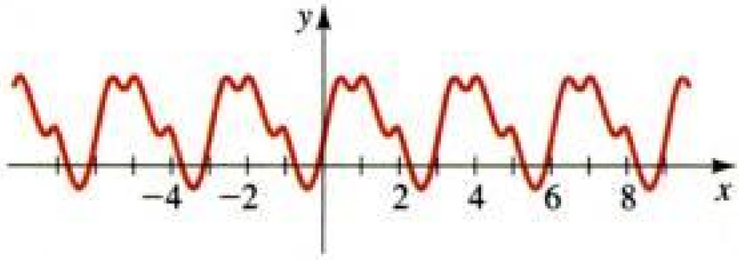
b)



c)



d)



81. Funciones periódicas II Utilice una calculadora para graficar o una computadora para trazar las funciones siguientes. A partir de la gráfica, determine si la función es periódica, y si es así, encuentre el periodo. (Véase la definición de $[\![x]\!]$ en la página 162.)

a) $y = |\operatorname{sen} x|$

b) $y = \operatorname{sen}|x|$

c) $y = 2^{\cos x}$

d) $y = x - [\![x]\!]$

e) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

f) $y = \cos(x^2)$

82. Curvas sinusoidales La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \operatorname{sen} x$ es al mismo tiempo una curva coseno: $y = \cos(x - \pi/2)$. En efecto, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desplazamiento de fase distinto, y cualquier curva coseno es también una curva seno. Las curvas seno y coseno reciben el nombre colectivo de *sinusoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las maneras posibles de expresarla como una curva seno $y = a\operatorname{sen}(x - b)$ o como una curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa que ha encontrado todas las elecciones posibles de a y b en cada caso.