PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Modelos de depredadores/presa

Jeff Lepore/Photo Researchers, Inc.

Las funciones seno y coseno se utilizan principalmente en la física y la ingeniería para modelar un comportamiento oscilatorio, tal como el movimiento de un péndulo o la corriente en un circuito eléctrico de corriente alterna. (Véase sección 5.5.) Pero estas funciones también surgen en otras ciencias. En este proyecto, consideramos una aplicación a la biología usando funciones seno para modelar la población de un predador y su presa.

Dos especies de mamíferos habitan en una isla lejana: linces y liebres. Los linces son *predadores*, los cuales se alimentan de las liebres, sus *presas*. Las poblaciones de linces y liebres cambian cíclicamente, de acuerdo con las gráficas de la figura 1. En la parte A de la gráfica, las liebres son abundantes, de modo que el lince tiene mucho para comer, por lo que su población se incrementa. En el tiempo representado en la parte B, tantos linces se están alimentando con las liebres que la población de éstas empieza a disminuir. En la parte C, la población de liebres ha declinado tanto que ya no hay alimento suficiente para los linces, de modo que baja la población de éstos. En la parte D, tantos son los linces que murieron que las liebres tienen pocos enemigos, por lo que su población se incrementa de nuevo. Esto nos regresa al punto donde empezamos, y el ciclo se repite una y otra vez.

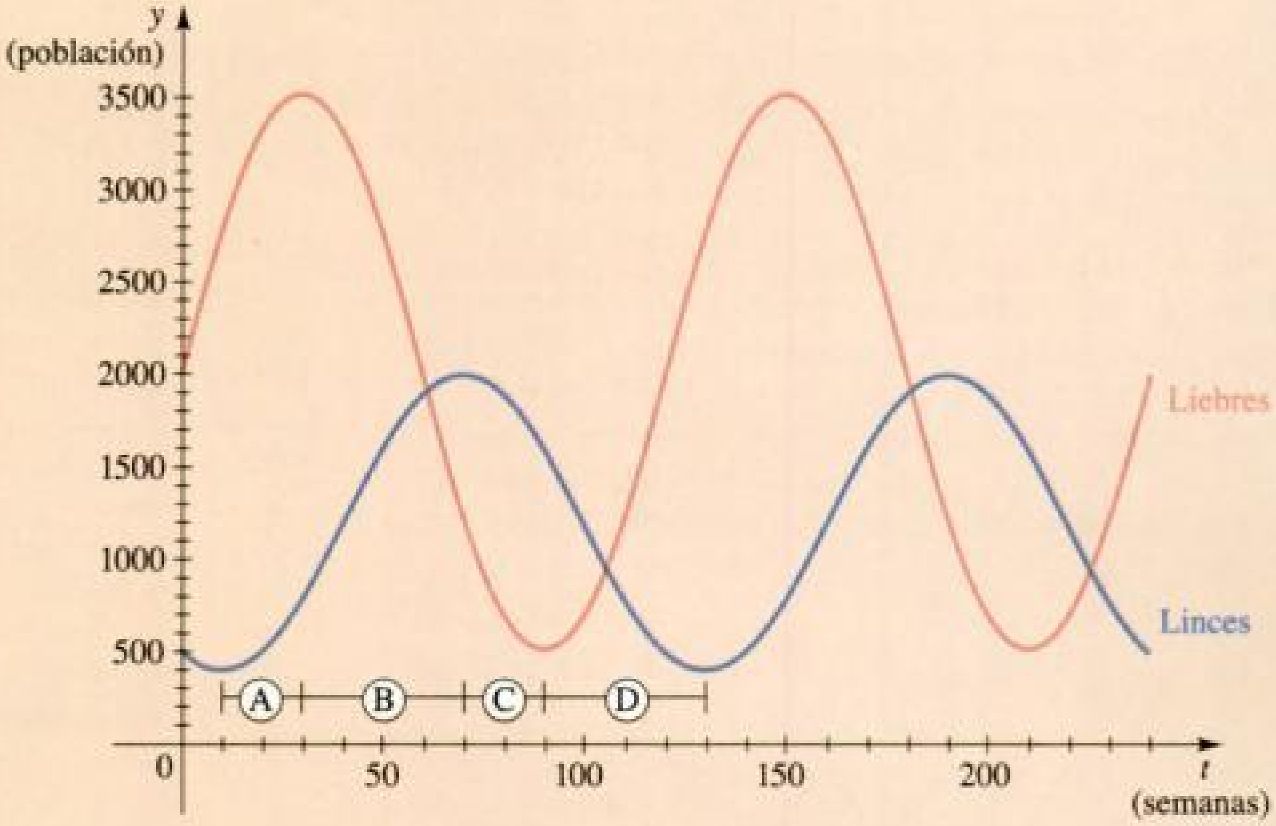


Figura 1

Las gráficas de la figura 1 son curvas seno que están desplazadas hacia arriba, así que son gráficas de funciones de la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(t - b) + c$$

En este caso, c es la cantidad que la curva seno se ha desplazado verticalmente (véase sección 2.4). Observe que c es el valor promedio de la función, a medio camino entre los valores más alto y más bajo de la gráfica. La amplitud $|a|$ es la cantidad que varía hacia arriba y hacia abajo del valor promedio de la gráfica (véase figura 2).

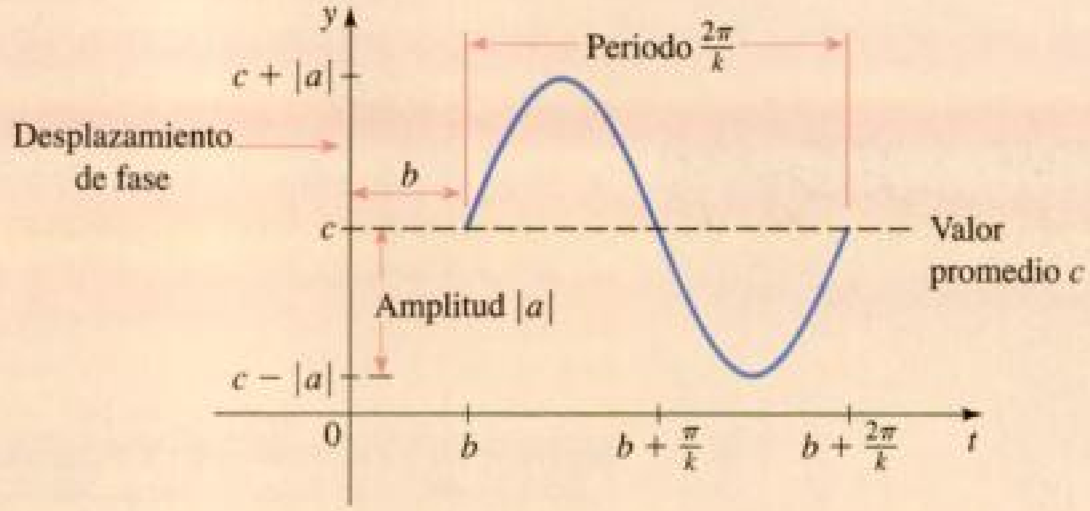


Figura 2
$y = a \operatorname{sen} k(t - b) + c$

1. Determine funciones de la forma $y = a \operatorname{sen} k(t - b) + c$ que modelen las poblaciones de linces y liebres graficadas en la figura 1. Grafique ambas funciones en su calculadora y compare con la figura 1 para comprobar que sus funciones son las correctas.
2. Sume las funciones de las poblaciones de linces y liebres para obtener una nueva función que modele la población total de *mamíferos* en esta isla. Grafique esta función en su calculadora y calcule su valor promedio, amplitud, periodo y desplazamiento de la fase. ¿Cuál es la relación entre el valor promedio y el periodo de la función de la población de mamíferos y el valor promedio y el periodo de las funciones de las poblaciones de linces y liebres?
3. Un pequeño lago de la isla contiene dos especies de peces: merluza y un pez rojizo. La merluza es un predador que se alimenta del pez rojizo. La población de peces del lago varía en forma periódica, y su periodo es de 180 días. La cantidad de merluza varía entre 500 y 1500, y la cantidad de peces rojizos varía entre 1000 y 3000. La población de la merluza alcanza su punto máximo 30 días después que el pez rojizo alcanza *su* población máxima en el ciclo.
   a) Trace una gráfica (como la de la figura 1) en la que se ilustren dos periodos completos del ciclo de la población para estas especies de peces. Suponga que $t = 0$ corresponde a un tiempo cuando la población de peces rojizos se encuentra en un máximo.
   b) Determine las funciones coseno de la forma $y = a \cos k(t - b) + c$ que modele las poblaciones de merluza y peces rojizos del lago.
4. En la vida real, la mayor parte de poblaciones predador/presa no se comportan de manera tan sencilla como se describió aquí. En la mayoría de los casos, las poblaciones de predadores y presas oscilan, pero la amplitud de las oscilaciones se vuelve más y más pequeña, de modo que con el tiempo ambas poblaciones se estabilizan cerca de un valor constante. Trace una gráfica aproximada que ilustre cómo se podrían comportar en este caso las poblaciones de predadores y presas.

5.4 Más gráficas trigonométricas

En esta sección se grafican las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante y transformaciones de estas funciones.

Gráficas de la función tangente, cotangente, secante y cosecante

Iniciamos estableciendo las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que el seno y el coseno tienen periodo 2π. Puesto que la cosecante y la secante son los recíprocos del seno y el coseno, respectivamente, también tienen periodo 2π (véase ejercicio 53). La tangente y la cotangente tienen periodo π (véase ejercicio 83 de la sección 5.2).

Propiedades periódicas

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.58
$\frac{\pi}{4}$	1.00
$\frac{\pi}{3}$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1 255.77
1.5707	10 381.33

Primero graficamos la tangente. Como tiene periodo π, necesitamos sólo trazar la gráfica de cualquier intervalo de longitud π, y luego repetir el patrón a la izquierda y a la derecha. Trazamos la gráfica en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Puesto que tan $\pi/2$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidas, es necesario ser cuidadoso al trazar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y $-\pi/2$. A medida que x se acerca a $\pi/2$ a través de valores menores que $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se incrementa. Para ver esto, observe que cuando x se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ se aproxima a 0 y sen x se aproxima a 1, y entonces $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ es grande. Al margen se muestra una tabla de valores de $\tan x$ para x cerca de $\pi/2$ (≈ 1.570796).

Por consiguiente, para elegir a x con cercanía suficiente a $\pi/2$ a través de valores menores que $\pi/2$, podemos hacer el valor de $\tan x$ más grande que cualquier número positivo dado. Esto se expresa escribiendo

$$\tan x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

Las expresiones anteriores significan "tan x tiende al infinito cuando x tiende a $\pi/2$ desde la izquierda".

La notación de flecha se trata en la sección 3.6.

En una forma similar, al elegir x cercana a $-\pi/2$ de valores mayores que $-\pi/2$, podemos hacer $\tan x$ más pequeña que cualquier número negativo dado. Esto se expresa de la manera siguiente:

$$\tan x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$$

Las expresiones anteriores significan "la tan x tiende al infinito negativo cuando x tiende a $-\pi/2$ desde la derecha".

Las asíntotas se estudian en la sección 3.6.

Por tanto, la gráfica de $y = \tan x$ se aproxima a las rectas verticales $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Entonces estas rectas son **asíntotas verticales**. Con la información que tenemos hasta este momento, podemos graficar $y = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ en la figura 1. La gráfica completa de la tangente (véase figura 5(a) de la página 436) se obtiene ahora aplicando el hecho de que la tangente es periódica y que su periodo es π.

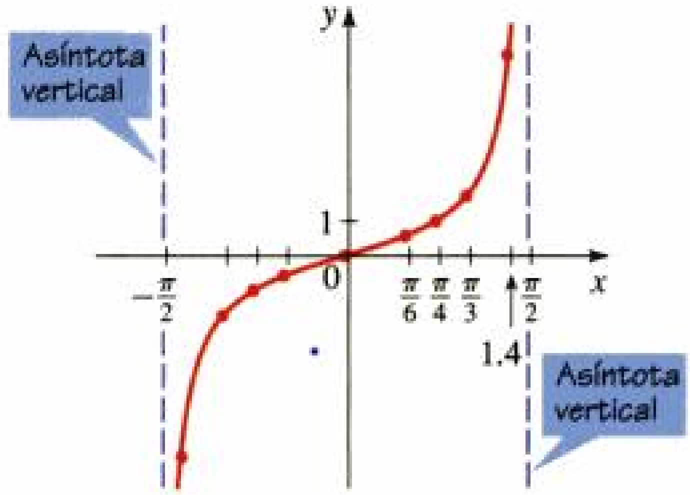


Figura 1

Un periodo de $y = \tan x$

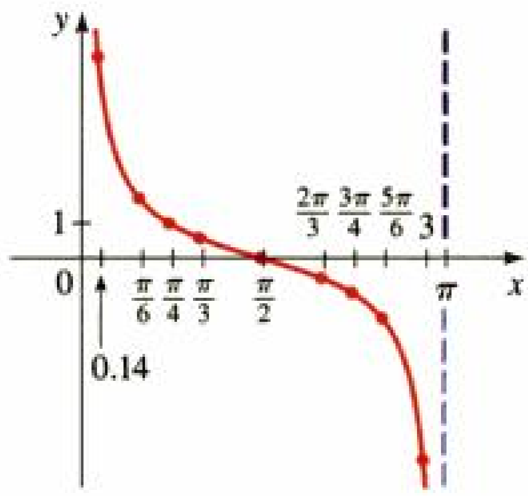


Figura 2

Un periodo de $y = \cot x$

La función $y = \cot x$ se grafica en el intervalo $(0, \pi)$ mediante un análisis similar (véase figura 2). Puesto que $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$ donde n es un entero, su gráfica completa (en la figura 5(b) de la página 436) tiene asíntotas verticales en estos valores.

Para graficar las funciones cosecante y secante, aplicamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Entonces, para graficar $y = \csc x$, utilizamos los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (véase figura 3). De igual manera, para graficar $y = \sec x$, recurrimos a los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$ (véase figura 4).

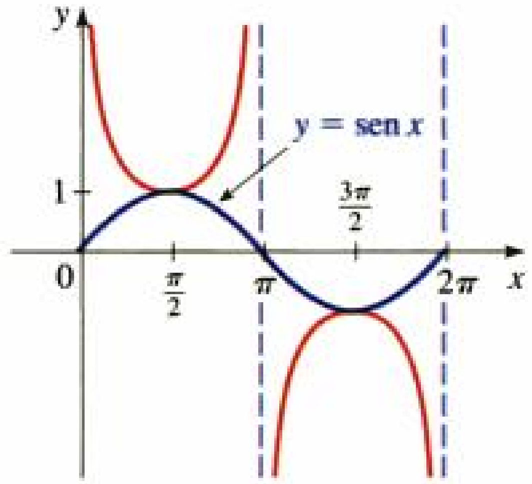


Figura 3

Un periodo de $y = \csc x$

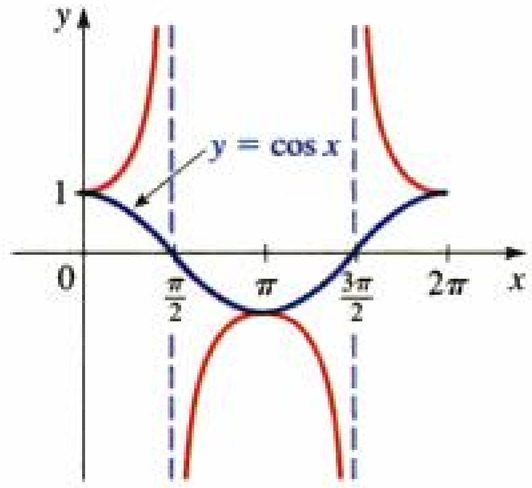


Figura 4

Un periodo de $y = \sec x$

Consideremos con mayor detalle la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Es necesario examinar los valores de la función cerca de 0 y π ya que en estos valores $\operatorname{sen} x = 0$, y, por lo tanto, $\csc x$ no está definida. Entonces,

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pi^-$$

Matemáticas en el mundo moderno

Evaluación de funciones mediante una calculadora

¿Cómo evaluar mediante una calculadora sen t, cos t, e^t, ln t, $\sqrt{t}$ y otras funciones semejantes? Un método es aproximar estas funciones mediante polinomios, porque éstos son fáciles de evaluar. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

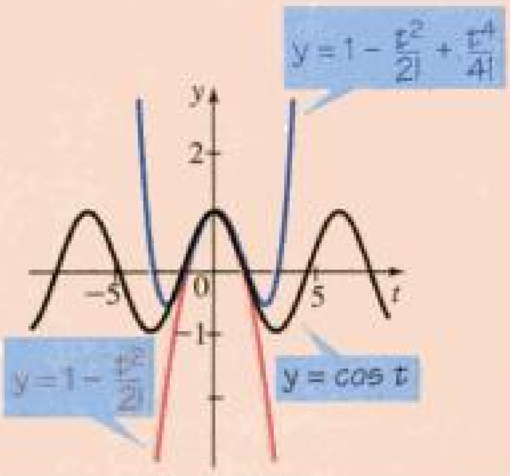
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. El matemático británico Brook Taylor (1685-1731) dedujo estas fórmulas admirables. Por ejemplo, si utilizamos los tres primeros términos de la serie de Taylor para encontrar cos(0.4), obtenemos

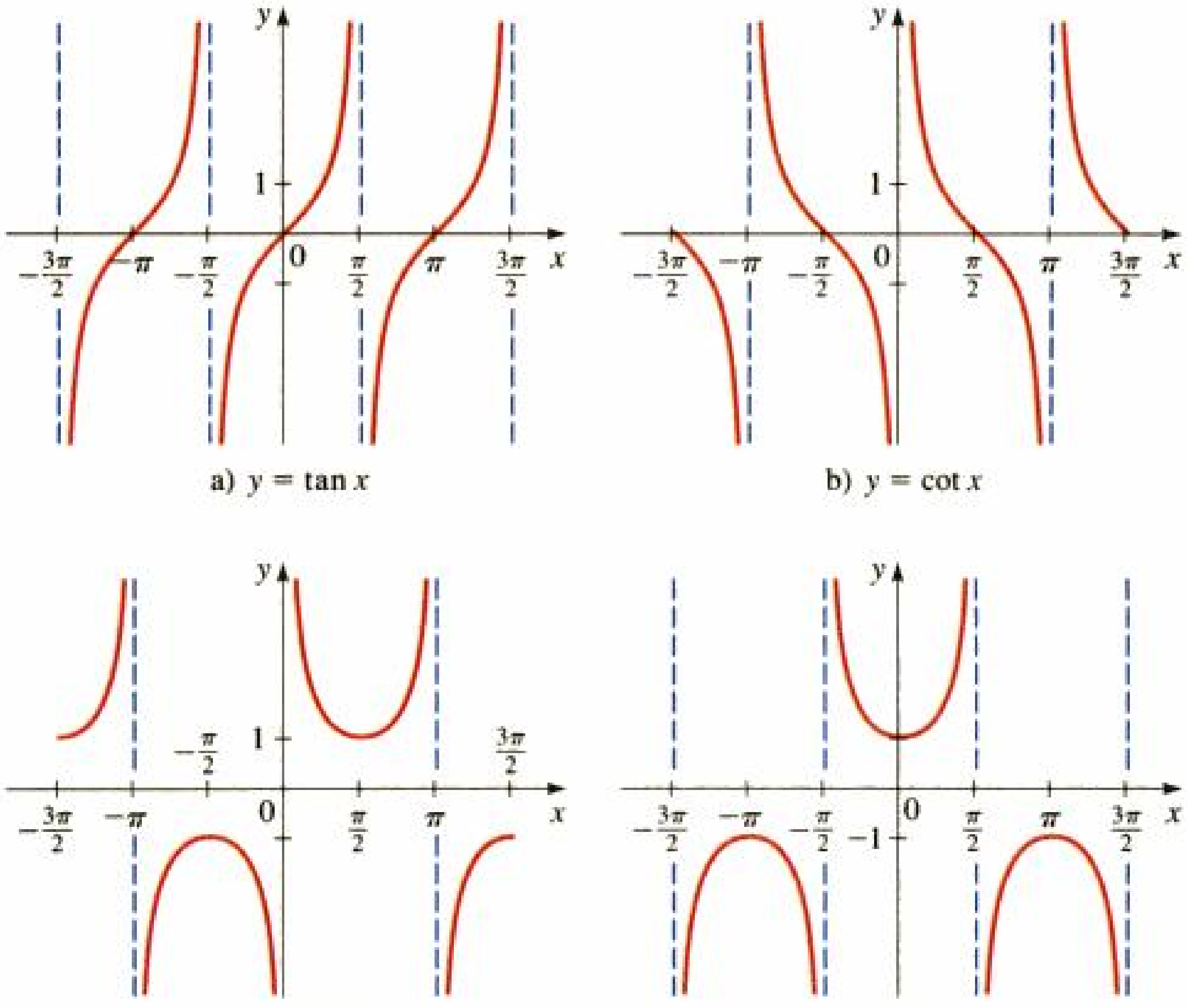
$$\cos 0.4 \approx 1 - \frac{(0.4)^2}{2!} + \frac{(0.4)^4}{4!}$$

$$\approx 0.92106667$$

(Compare lo anterior con el valor que obtiene mediante su calculadora.) La gráfica muestra que cuantos más términos de la serie usemos, tanto más los polinomios se aproximan al valor de la función cos t.



Por consiguiente, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. En el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza igual. Los valores de csc x en ese intervalo son los mismos que en el intervalo $0 < x < \pi$, excepto por el signo (véase figura 3). La gráfica completa de la figura 5(c) se obtiene a partir del hecho de que la función cosecante es periódica y su periodo es 2π. Observe que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en $x = n\pi$, donde n es un entero.



a) $y = \tan x$

b) $y = \cot x$

c) $y = \csc x$

d) $y = \sec x$

Figura 5

La gráfica de $y = \sec x$ se traza de manera similar. Observe que el dominio de sec x es el conjunto de todos los números reales que no son $x = (\pi/2) + n\pi$, donde n es un entero, de modo que la gráfica tiene asíntotas verticales en esos puntos. La gráfica completa se ilustra en la figura 5(d).

Es evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son simétricas con respecto al origen, y que, por otro lado, $y = \sec x$ es simétrica con respecto al eje y. La razón es que la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares, en tanto que la secante es una función par.

Gráficas que contienen funciones tangente y cotangente

Consideremos ahora las gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

Ejemplo 1 Gráficas de curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones.

a) $y = 2 \tan x$ b) $y = -\tan x$

Solución Primero graficamos $y = \tan x$ y luego la transformamos según se requiera.

a) Para graficar $y = 2 \tan x$, multiplicamos la coordenada y de cada uno de los puntos sobre la gráfica de $y = \tan x$ por 2. La gráfica resultante se muestra en la figura 6(a).

b) La gráfica de $y = -\tan x$ de la figura 6(b) se obtiene de $y = \tan x$, al reflejarla en el eje x

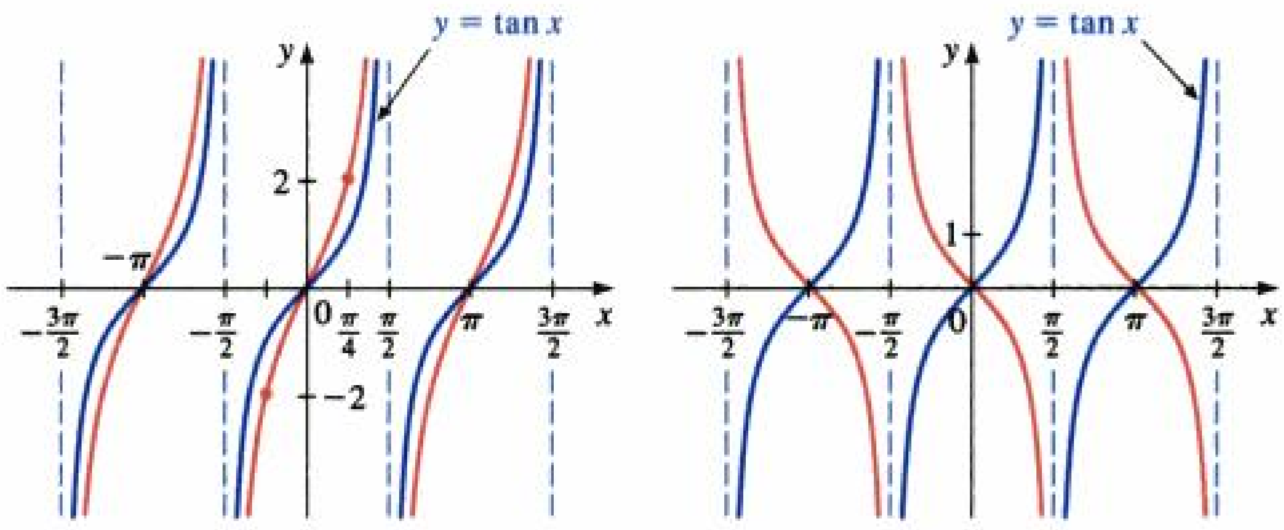


Figura 6 ■

Puesto que las funciones tangente y cotangente tienen periodo π, las funciones

$$y = a \tan kx \quad \text{y} \quad y = a \cot kx \quad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía desde 0 hasta π, es decir, para $0 \leq kx \leq \pi$. Al resolver esta desigualdad, obtenemos $0 \leq x \leq \pi/k$. Entonces, cada una tiene un periodo π/k.

Curvas tangente y cotangente

Las funciones

$$y = a \tan kx \quad \text{y} \quad y = a \cot kx \quad (k > 0)$$

tienen un periodo π/k.

Por consiguiente, un periodo completo de las gráficas de estas funciones ocurre en cualquier intervalo de longitud π/k. Para graficar un periodo completo de estas gráficas, conviene elegir un intervalo entre asíntotas verticales:

Para graficar un periodo de $y = a \tan kx$, un intervalo adecuado es $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para graficar un periodo de $y = a \cot kx$, un intervalo adecuado es $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

Ejemplo 2 Gráficas de curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones.

a) $y = \tan 2x$ b) $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución

a) El periodo es $\pi/2$ y un intervalo adecuado es $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos terminales $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. Por lo tanto, graficamos un periodo completo de la función en $(-\pi/4, \pi/4)$. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está acortada horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$. Entonces repetimos esa parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Véase figura 7(a).

b) La gráfica es la misma que la del inciso a), pero está desplazada a la derecha $\pi/4$, como se ilustra en la figura 7(b).

Puesto que $y = \tan x$ completa un periodo entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, la función $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ completa un periodo cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

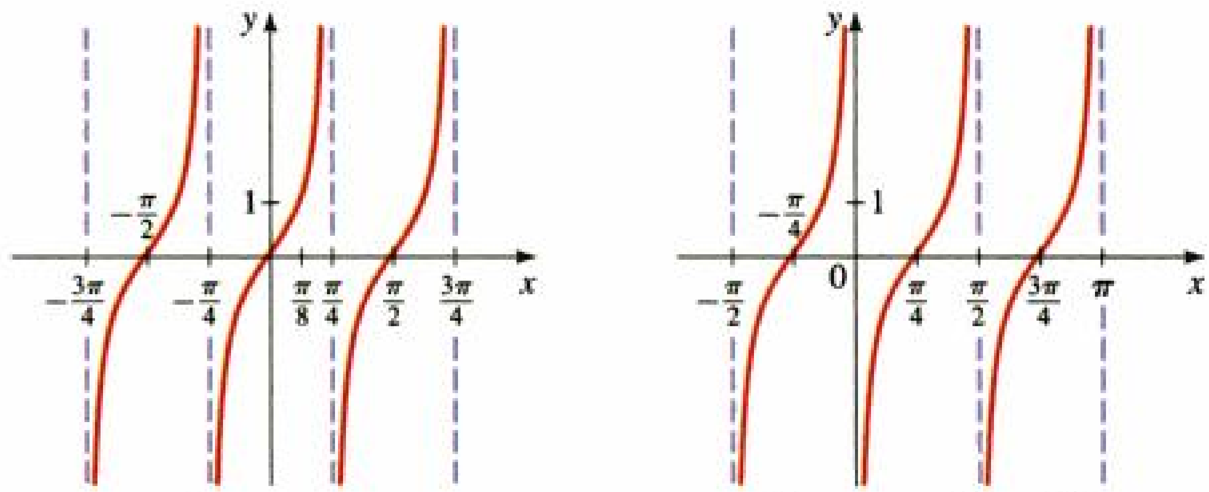


Figura 7 a) $y = \tan 2x$ b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ■

Ejemplo 3 Una curva cotangente desplazada

Grafique $y = 2\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución Primero expresamos la ecuación en la forma $y = a\cot k(x - b)$ tomando como factor a 3 de la expresión $3x - \dfrac{\pi}{2}$:

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Puesto que $y = \cot x$ completa un periodo entre $x = 0$ y $x = \pi$, la función $y = 2\cot(3x - \frac{\pi}{2})$ completa un periodo cuando $3x - \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$3x - \frac{\pi}{2} = 0$	$3x - \frac{\pi}{2} = \pi$
$3x = \frac{\pi}{2}$	$3x = \frac{3\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{2}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

Por consiguiente, la gráfica es la misma que la de $y = 2\cot 3x$, pero está desplazada a la derecha $\pi/6$. El periodo de $y = 2\cot 3x$ es $\pi/3$, por lo que un intervalo adecuado es $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente para la gráfica deseada, desplazamos este intervalo a la derecha $\pi/6$. Esto nos da

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Para terminar, graficamos un periodo en la forma de la cotangente en el intervalo $(\pi/6, \pi/2)$ y repetimos la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha (véase figura 8).

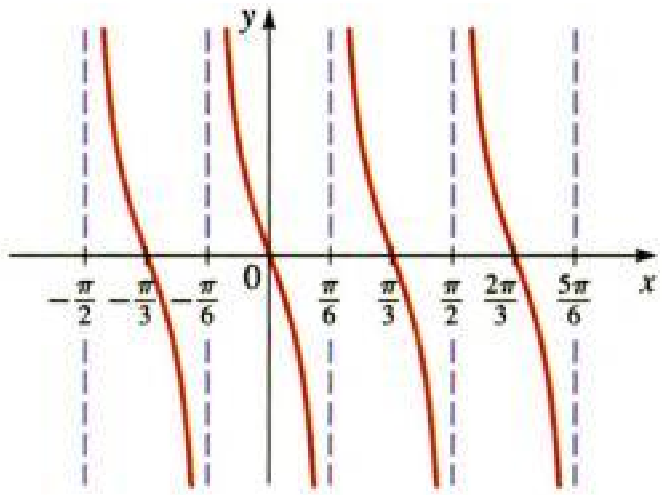


Figura 8

$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

■

Gráficas que contienen funciones cosecante y secante

Ya observamos que las funciones cosecante y secante son los recíprocos de las funciones seno y coseno. Por lo tanto, el resultado siguiente es la parte equivalente del resultado de las curvas seno y coseno de la sección 5.3.

Curvas cosecante y secante

El periodo de las funciones

$$y = a \csc kx \qquad \text{y} \qquad y = a \sec kx \qquad (k > 0)$$

es $2\pi/k$.

Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

Ejemplo 4 Gráfica de curvas cosecantes

Grafique las funciones siguientes.

a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solución

a) El periodo es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo adecuado es $[0, \pi]$, y las asíntotas se presentan siempre en este intervalo sen $2x = 0$. Entonces, las asíntotas en este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. A partir de esta información trazamos una gráfica en el intervalo $[0, \pi]$ con la misma forma general que la de un periodo de la función cosecante. La gráfica completa de la figura 9(a) se obtiene repitiendo esta parte a la izquierda y a la derecha.

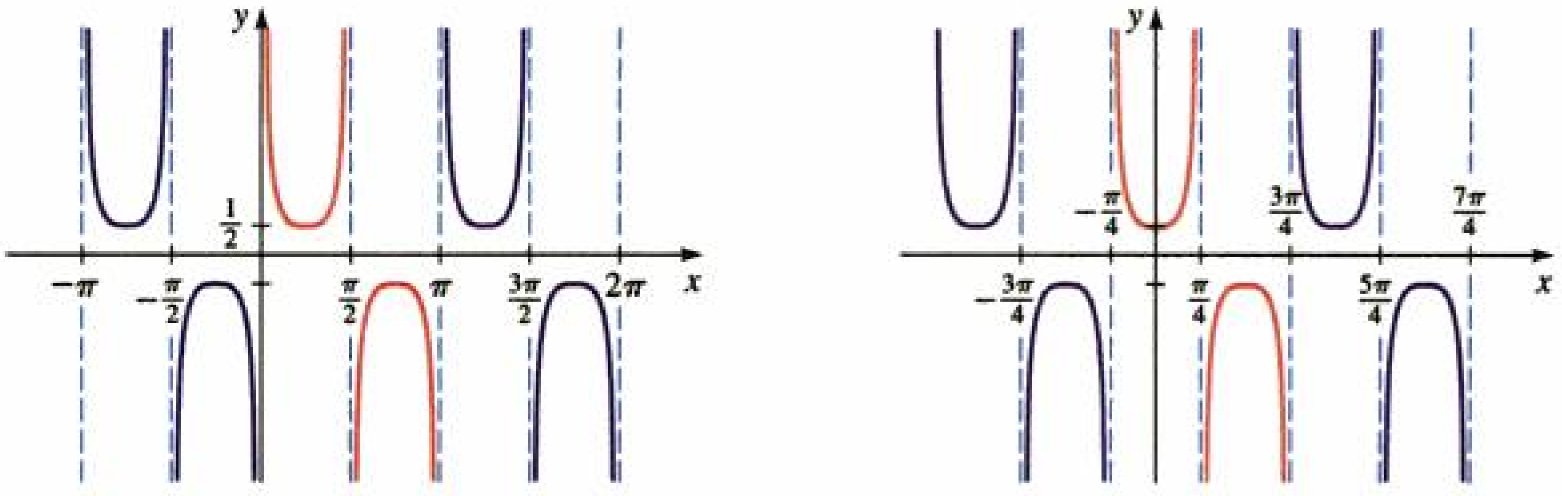


Figura 9 a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Puesto que $y = \csc x$ completa un periodo entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, la función $y = \frac{1}{2}\csc(2x + \frac{\pi}{2})$ completa un periodo cuando $2x + \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a 2π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2x + \frac{\pi}{2} = 0$	$2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$
$2x = -\frac{\pi}{2}$	$2x = \frac{3\pi}{2}$
$x = -\frac{\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Primero escribimos

$$y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

A partir de la ecuación vemos que la gráfica es la misma que la del inciso a), pero desplazada a la izquierda $\pi/4$. La gráfica se muestra en la figura 9(b). ■

Ejemplo 5 Gráfica de una curva secante

Grafique $y = 3\sec\frac{1}{2}x$.

Solución El periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo adecuado es $[0, 4\pi]$, y las asíntotas se presentan en este intervalo siempre que $\cos\frac{1}{2}x = 0$. Por lo tanto, las asíntotas en este intervalo son $x = \pi$, $x = 3\pi$. Con esta información trazamos en el intervalo $[0, 4\pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un periodo de la función secante. La gráfica completa de la figura 10 se obtiene al repetir esta parte a la izquierda y a la derecha.

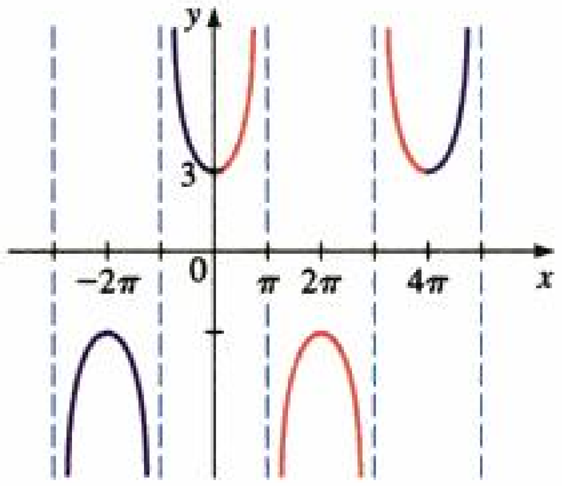


Figura 10
$y = 3\sec\frac{1}{2}x$

■

5.4 Ejercicios

1–6 ■ Diga a qué gráfica corresponde cada una de las funciones.

1. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

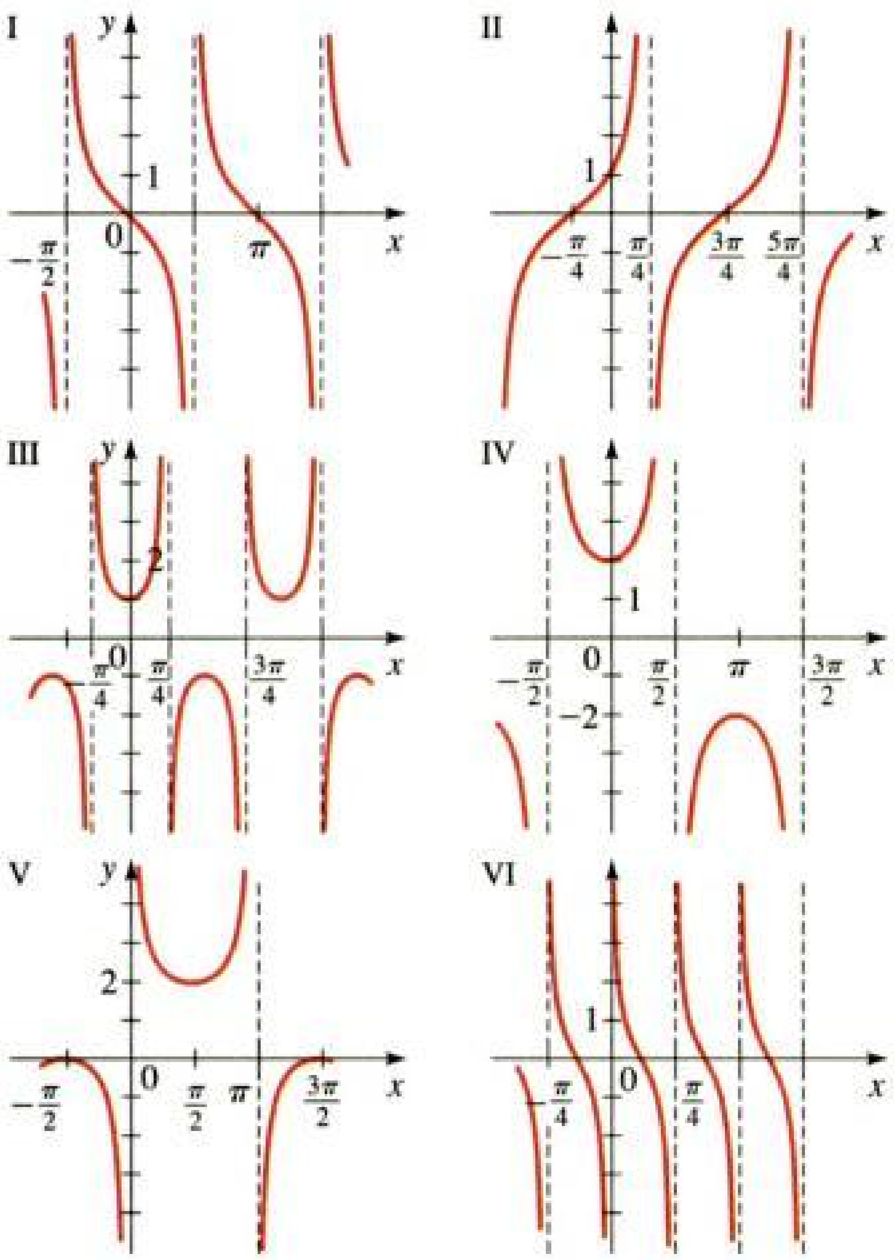
2. $f(x) = \sec 2x$

3. $f(x) = \cot 2x$

4. $f(x) = -\tan x$

5. $f(x) = 2 \sec x$

6. $f(x) = 1 + \csc x$



7–52 ■ Determine el periodo y grafique la función.

7. $y = 4 \tan x$

8. $y = -4 \tan x$

9. $y = -\frac{1}{2} \tan x$

10. $y = \frac{1}{2} \tan x$

11. $y = -\cot x$

12. $y = 2 \cot x$

13. $y = 2 \csc x$

14. $y = \frac{1}{2} \csc x$

15. $y = 3 \sec x$

16. $y = -3 \sec x$

17. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

19. $y = \csc\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

20. $y = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

21. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

22. $y = 2 \csc\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

23. $y = \dfrac{1}{2} \sec\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

24. $y = 3 \csc\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

25. $y = \tan 2x$

26. $y = \tan \frac{1}{2}x$

27. $y = \tan \dfrac{\pi}{4}x$

28. $y = \cot \dfrac{\pi}{2}x$

29. $y = \sec 2x$

30. $y = 5 \csc 3x$

31. $y = \csc 2x$

32. $y = \csc \frac{1}{2}x$

33. $y = 2 \tan 3\pi x$

34. $y = 2 \tan \dfrac{\pi}{2}x$

35. $y = 5 \csc \dfrac{3\pi}{2}x$

36. $y = 5 \sec 2\pi x$

37. $y = \tan 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

38. $y = \csc 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

39. $y = \tan 2(x - \pi)$

40. $y = \sec 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

41. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

42. $y = \frac{1}{2} \tan(\pi x - \pi)$

43. $y = 2 \csc\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

44. $y = 2 \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

45. $y = 5 \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

46. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$

47. $y = \tan\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

48. $y = \tan \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $y = 3 \sec \pi\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

50. $y = \sec\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

51. $y = -2 \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

52. $y = 2 \csc(3x + 3)$

53. **a)** Demuestre que si f es periódica y su periodo es p, entonces $1/f$ también es periódica y su periodo es p.

b) Demuestre que la cosecante y la secante tiene periodo 2π.

54. Demuestre que si f y g son periódicas y su periodo es p, entonces el cociente f/g es periódico también, pero el periodo podría ser más pequeño que p.

Aplicaciones

55. Faros El haz de un faro da una rotación completa cada dos minutos. En el tiempo t, la distancia d que se ilustra en la figura de la página siguiente es

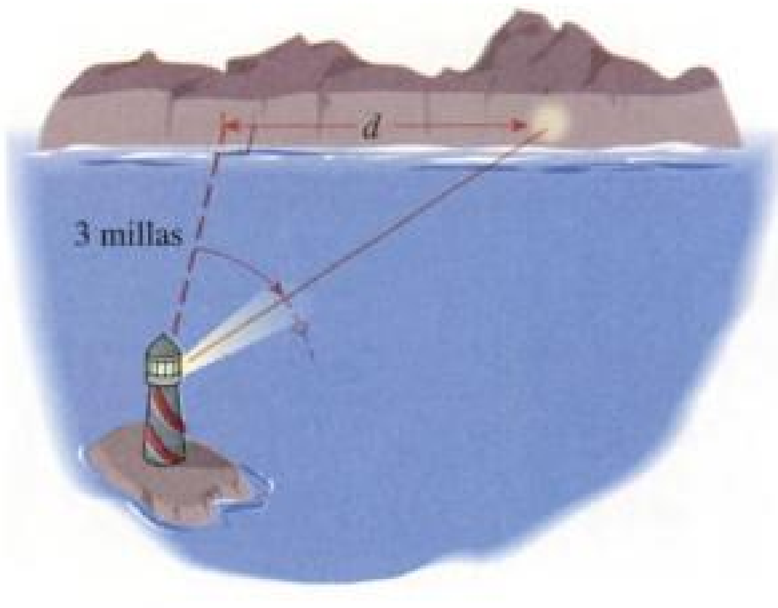
$$d(t) = 3 \tan \pi t$$

donde t se mide en minutos y d en millas.

a) Determine $d(0.15)$, $d(0.25)$ y $d(0.45)$.

b) Grafique la función d para $0 \le t < \frac{1}{2}$.

c) ¿Qué sucede con la distancia d cuando t tiende a $\frac{1}{2}$?



56. Largo de una sombra En un día cuando el Sol pasa directamente sobre la cabeza a mediodía, un hombre de seis pies de estatura proyecta una sombra cuyo largo es

$$S(t) = 6\left|\cot \frac{\pi}{12}t\right|$$

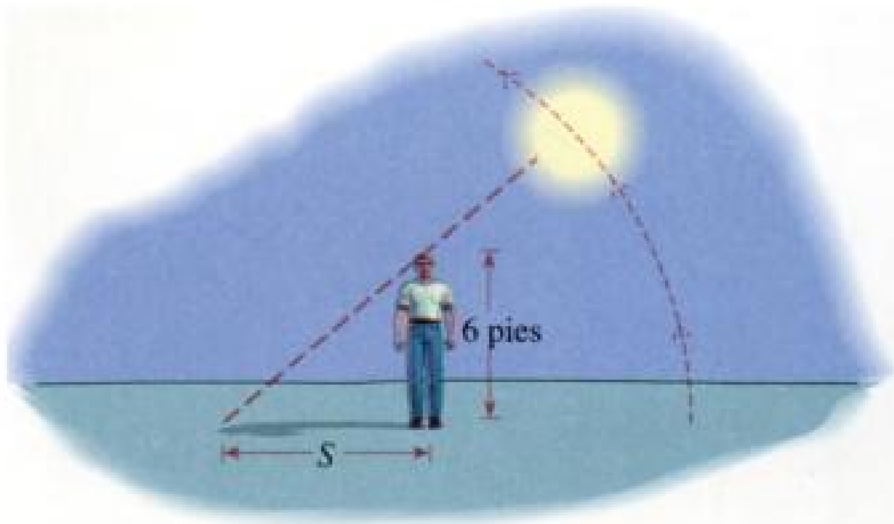
donde S está en pies y t es la cantidad de horas a partir de las 6 AM.

a) Determine el largo de la sombra a las 8 AM, a mediodía, a las 2 PM y a las 5.45 PM.

b) Grafique la función S para $0 < t < 12$.

c) A partir de la gráfica determine los valores de t a los cuales el largo de la sombra es igual a la estatura del hombre. ¿A qué momento del día corresponden cada uno de estos valores?

d) Explique qué pasa con la sombra cerca de las 6 PM. (es decir, cuando $t \to 12^-$).



Descubrimiento • Debate

57. Fórmulas de reducción Utilice las gráficas de la figura 5 para explicar por qué las fórmulas siguientes son verdaderas

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

5.5 Modelado del movimiento armónico

El comportamiento periódico —comportamiento que se repite una y otra vez— es común en la naturaleza. Tal vez el ejemplo más conocido es la salida y la puesta del Sol de todos los días, lo cual origina el patrón repetitivo de día, noche, día, noche, ... Otro ejemplo es la variación diaria del nivel de la marea en las playas, lo cual da como resultado el patrón repetitivo de marea alta, marea baja, marea alta, marea baja, ... Ciertas poblaciones de animales se incrementan y disminuyen de acuerdo con un patrón periódico predecible: una población grande consume las provisiones alimentarias, lo cual ocasiona que la población decline; a su vez, esto ocasiona provisiones alimentarias abundantes, lo cual hace que la población aumente; y el patrón se repite y se repite (véanse páginas 432 a 433).

Otros ejemplos comunes de comportamiento periódico se relacionan con el movimiento que es originado por vibraciones u oscilaciones. Una masa que cuelga de un resorte, el cual está comprimido y que luego se suelta, es un ejemplo sencillo. Este mismo movimiento hacia arriba y hacia abajo también se observa en fenómenos diversos como las ondas del sonido, las ondas de luz, la corriente eléctrica alterna y las estrellas pulsátiles, para mencionar unos cuantos ejemplos. En esta sección trataremos el problema de modelar el comportamiento periódico.

Modelado del comportamiento periódico

Las funciones trigonométricas son ideales para modelar el comportamiento periódico. Una mirada a las gráficas de las funciones seno y coseno, por ejemplo, nos dice que estas funciones muestran un comportamiento periódico. En la figura 1 se puede observar la gráfica de $y = \text{sen}\, t$. Si pensamos que t es el tiempo, vemos que a medida que pasa el tiempo, $y = \text{sen}\, t$ aumenta y disminuye una y otra vez. En la figura 2 se puede observar que el movimiento de una masa que cuelga de un resorte que vibra está modelado con mucha exactitud mediante $y = \text{sen}\, t$.

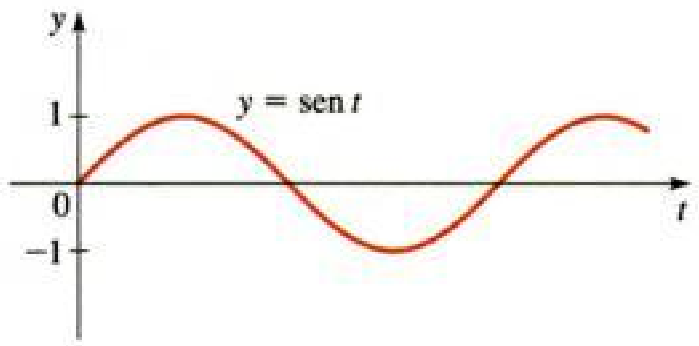


Figura 1
$y = \text{sen}\, t$

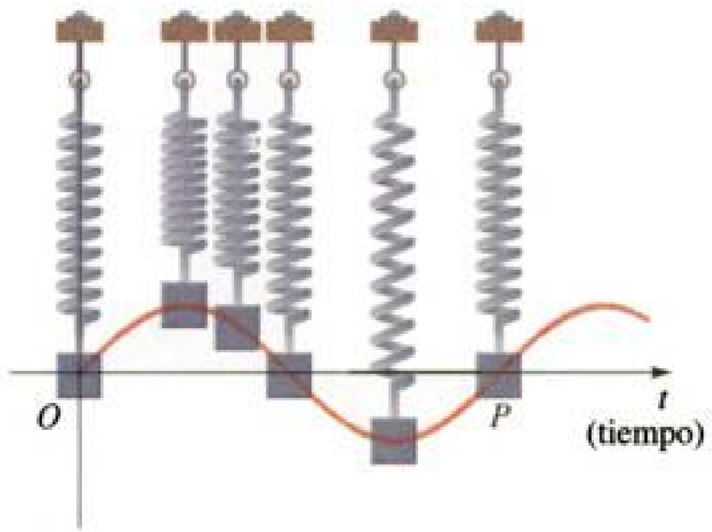


Figura 2
Movimiento de un resorte que vibra modelado mediante $y = \text{sen}\, t$.

Observe que la masa regresa a su posición original una y otra vez. Un **ciclo** es una vibración completa de un objeto, de modo que la masa de la figura 2 completa un ciclo de su movimiento entre O y P. Las observaciones sobre cómo las funciones seno y coseno modelan el comportamiento periódico se resumen en el siguiente recuadro.

La diferencia principal entre dos ecuaciones que describen el movimiento armónico simple es el punto de inicio. En $t = 0$, tenemos

$$y = a\,\text{sen}\,\omega \cdot 0 = 0$$

$$y = a\cos\omega \cdot 0 = a$$

En el primer caso, el movimiento "inicia" con cero desplazamiento, en tanto que en el segundo caso, el movimiento "inicia" con el desplazamiento en un punto máximo (a la amplitud a).

Movimiento armónico simple

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un objeto en el tiempo t es

$$y = a\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{o bien} \qquad y = a\cos\omega t$$

entonces el objeto sigue un **movimiento armónico simple**. En este caso

amplitud $= |a|$ — Desplazamiento máximo del objeto

periodo $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ — Tiempo necesario para completar un ciclo

frecuencia $= \dfrac{\omega}{2\pi}$ — Número de ciclos por unidad de tiempo

El símbolo ω es la letra griega minúscula omega y ν es la letra griega "nu".

Observe que las funciones

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi\nu t \qquad \text{y} \qquad y = a \cos 2\pi\nu t$$

tienen frecuencia ν, porque $2\pi\nu/(2\pi) = \nu$. Como podemos leer inmediatamente la frecuencia de estas ecuaciones, las ecuaciones de movimiento armónico simple usualmente se expresan de esta forma.

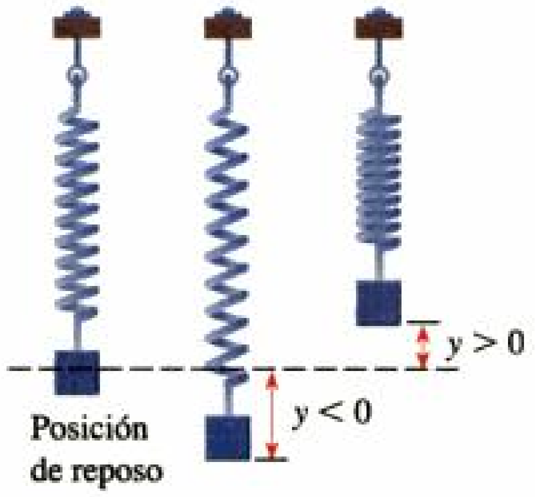


Figura 3

Ejemplo 1 Un resorte en vibración

El desplazamiento de una masa que pende de un resorte está modelado por la función

$$y = 10 \operatorname{sen} 4\pi t$$

donde y está en pulgadas y t es segundos (véase figura 3).

a) Determine amplitud, periodo y frecuencia del movimiento de la masa.

b) Grafique el desplazamiento de la masa.

Solución

a) De acuerdo con las fórmulas de amplitud, periodo y frecuencia, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = 10 \text{ pulgadas}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\text{ s}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ Hz}$$

b) La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se muestra en la figura 4. ■

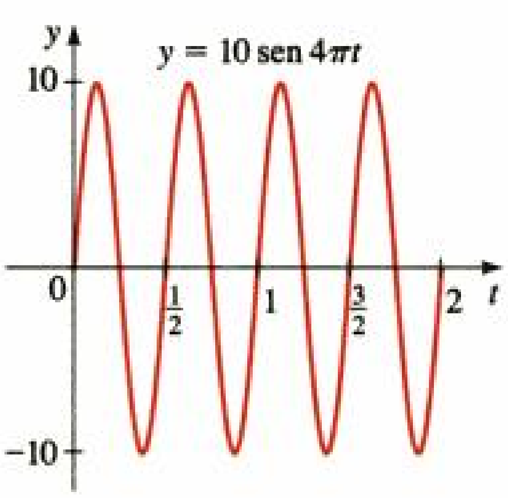


Figura 4

Una situación importante donde se presenta el movimiento armónico simple es en la generación del sonido. El sonido se produce por una variación regular en la presión del aire a partir de la presión normal. Si la presión varía según un movimiento armónico simple, entonces se genera un sonido puro. El tono del sonido depende de la frecuencia y la intensidad depende de la amplitud.

Ejemplo 2 Vibraciones de una nota musical

Un músico toca con una tuba la nota mi y sostiene el sonido durante un tiempo. Para una nota mi pura la variación en la presión a partir de la presión normal de aire está dada por

$$V(t) = 0.2 \operatorname{sen} 80\pi t$$

donde V se mide en libras por pulgada cuadrada y t en segundos.

a) Calcule la amplitud, periodo y frecuencia de V.

b) Grafique V.

c) Si el músico que toca la tuba aumenta la intensidad de la nota, ¿qué tanto se modifica la ecuación de V?

d) Si el músico toca la nota incorrectamente y un poco apagada ¿en qué cambia la ecuación para V?

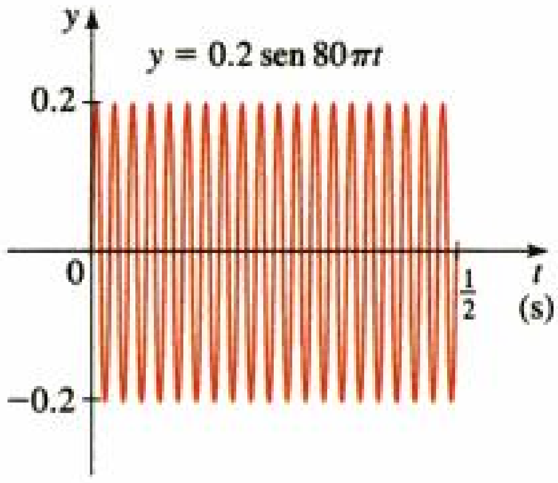


Figura 5

Solución

a) De acuerdo con las fórmulas de amplitud, periodo y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |0.2| = 0.2$$

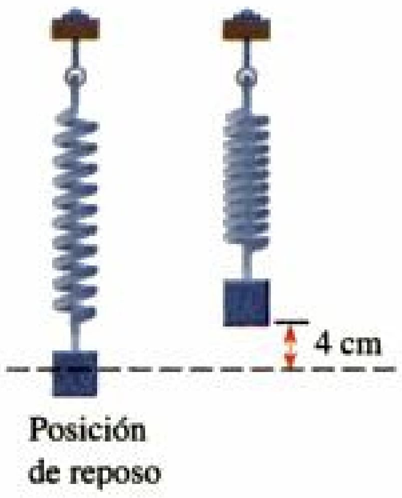
$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40$$

b) La gráfica de V se muestra en la figura 5.

c) Si el músico aumenta la intensidad se incrementa la amplitud. De este modo el número 0.2 se reemplaza por un número mayor.

d) Si la nota es apagada, entonces la frecuencia disminuye. Por lo tanto, el coeficiente de t es menor que 80π. ■



Ejemplo 3 Modelado de un resorte que vibra

Una masa pende de un resorte. El resorte está comprimido y mide 4 cm. Luego se suelta. Se observa que la masa regresa a la posición comprimida después de $\frac{1}{3}$ de segundo.

a) Encuentre una función que modele el desplazamiento de la masa.

b) Grafique el desplazamiento de la masa.

Solución

a) El movimiento de la masa está representado por una de las ecuaciones del movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es 4 cm. Puesto que esta amplitud se alcanza en el tiempo $t = 0$, una función adecuada que modele el desplazamiento es de la forma

$$y = a \cos \omega t$$

Como el periodo es $p = \frac{1}{3}$, podemos determinar ω a partir de la ecuación siguiente:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Periodo} = \tfrac{1}{3}$$

$$\omega = 6\pi \qquad \text{Despeje de } \omega$$

Entonces, el movimiento de la masa está modelado por la función

$$y = 4 \cos 6\pi t$$

donde y es el desplazamiento desde el punto de reposo en el tiempo t. Observe que cuando $y = 0$, el desplazamiento es $y = 4$, como era de esperarse.

b) La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se ilustra en la figura 6. ■

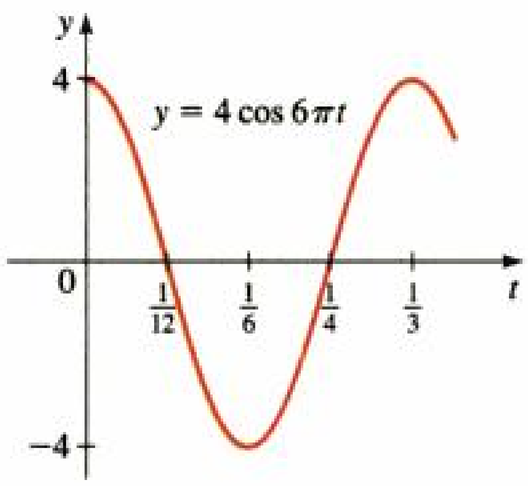


Figura 6

En general, las funciones seno o coseno que representan un movimiento armónico simple podrían estar desplazadas horizontal o verticalmente. En este caso, la ecuación tiene la forma

$$y = a\,\mathrm{sen}(\omega(t - c)) + b \qquad \text{o} \qquad y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

El desplazamiento vertical b indica que la variación ocurre alrededor de un valor promedio b. El desplazamiento horizontal c indica la posición del objeto en $t = 0$. (Véase figura 7.)

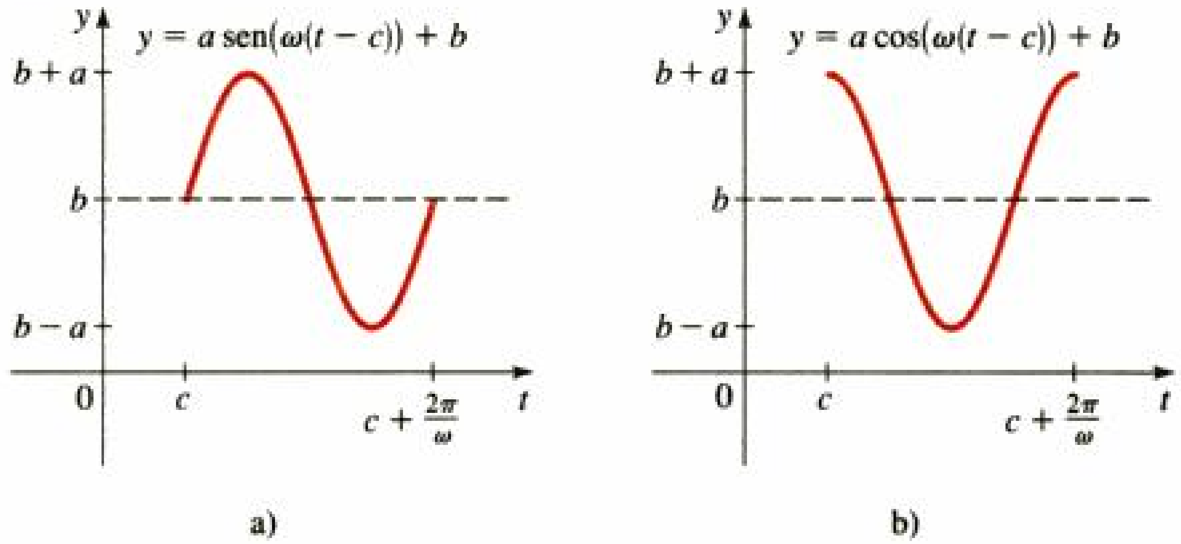


Figura 7

Ejemplo 4 Modelado de la brillantez de una estrella variable

Una estrella variable es aquella cuya brillantez aumenta y disminuye en forma alternada. Para la estrella variable Cefeida delta, el tiempo entre los periodos de brillantez máxima es 5.4 días. La brillantez promedio, es decir, la magnitud, de la estrella es 4.0 y su brillantez varía en una magnitud de ± 0.35.

a) Determine una función que modele la brillantez de la Cefeida delta en función del tiempo.

b) Grafique la brillantez de la Cefeida delta en función del tiempo.

Solución

a) Determinemos una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

La amplitud es la variación máxima de la brillantez promedio, de modo que la amplitud es $a = 0.35$ de magnitud. Sabemos que el periodo es de 5.4 días, de modo que

$$\omega = \frac{2\pi}{5.4} \approx 1.164$$

Puesto que la brillantez varía desde un valor promedio de 4.0 de magnitud, la gráfica se desplaza hacia arriba $b = 4.0$. Si tomamos $t = 0$ como el tiempo cuando la estrella está en su brillantez máxima, no hay desplazamiento horizontal, por lo que $c = 0$ (porque una curva coseno alcanza su máximo a $t = 0$). Por lo tanto, la función que queremos es

$$y = 0.35\cos(1.16t) + 4.0$$

donde t es el número de días a partir del momento cuando la estrella está en su brillantez máxima.

b) La gráfica se ilustra en la figura 8. ■

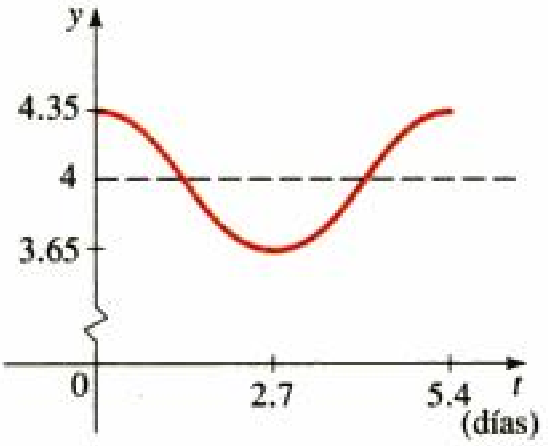
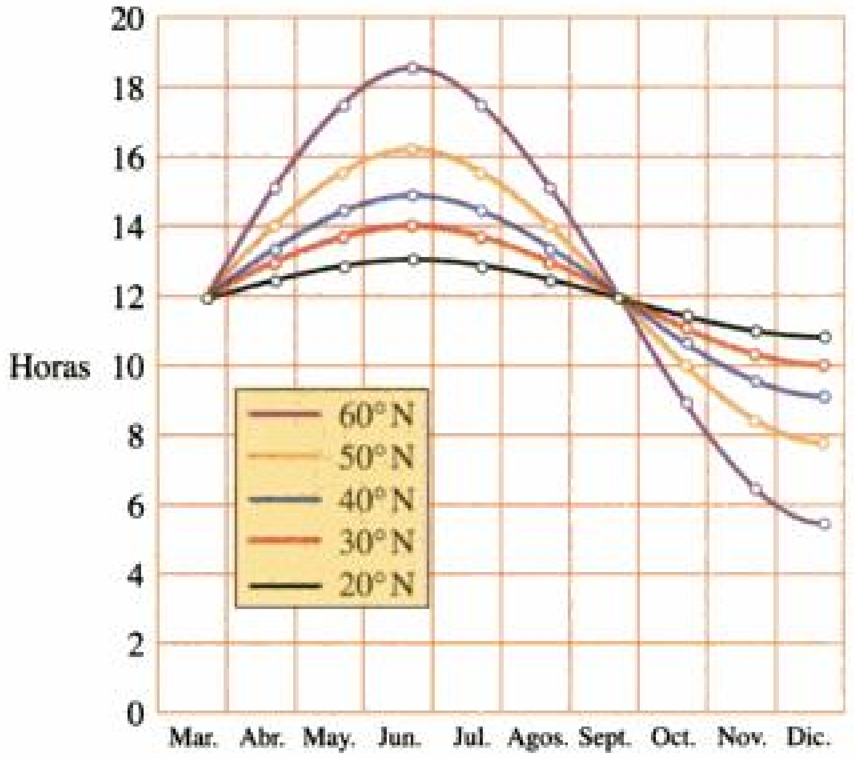


Figura 8

La cantidad de horas con luz del Sol varía a lo largo del año. En el Hemisferio Norte, el día más largo es el 21 de junio, y el más corto es el 21 de diciembre. La duración promedio de la luz de día es de 12 horas, y la variación de este promedio depende de la latitud. (Por ejemplo, en Fairbanks, Alaska, se experimentan ¡más de 20 horas de luz en el día más largo y menos de cuatro horas en el día más corto!) La gráfica de la figura 9 ilustra la cantidad de horas con luz del día en distintas épocas del año para varias latitudes. Es evidente, de acuerdo con la gráfica, que la variación en horas de luz de día es armónica simple.



Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nueva York: Silver, Burdett, 1935), p. 40.

Figura 9

Gráfica de la duración de la luz del día desde el 21 de marzo al 21 de diciembre en varias latitudes

Ejemplo 5 Modelado del número de horas de luz solar

En Filadelfia (40° de latitud norte), el día más largo del año tiene 14 h 50 min de luz de día y el día más corto tiene 9 h 10 min de luz.

a) Determine una función L que modele la duración de la luz del día en función de t, la cantidad de días desde el 1 de enero.

b) Un astrónomo requiere por lo menos 11 h de oscuridad para una fotografía astronómica de larga exposición. ¿En qué días del año es posible tomar dicha fotografía?

Solución

a) Necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a\,\text{sen}(\omega(t - c)) + b$$

cuya gráfica es la curva a 40° de latitud norte de la figura 9. A partir de la información dada, vemos que la amplitud es

$$a = \tfrac{1}{2}\left(14\tfrac{5}{6} - 9\tfrac{1}{6}\right) \approx 2.83\text{ h}$$

Puesto que hay 365 días en el año, el periodo es 365, por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \approx 0.0172$$

Como la duración promedio de la luz del día es de 12 horas, la gráfica se desplaza 12 hacia arriba, de modo que $b = 12$. Puesto que la curva alcanza el valor promedio (12) el 21 de marzo, el octagésimo día del año, la curva se desplaza 80 unidades a la derecha. Por lo tanto, $c = 80$. Entonces, una función que modela el número de horas de luz del día es

$$y = 2.83\ \text{sen}(0.0172(t - 80)) + 12$$

donde t es el número de días a partir del 1 de enero.

b) Un día tiene 24 h, de modo que 11 horas de noche corresponden a 13 horas de luz de día. Entonces, necesitamos resolver la desigualdad $y \leq 13$. Para resolver esta desigualdad en forma gráfica, trazamos $y = 2.83\ \text{sen}\ 0.0172(t - 80) + 12$ y $y = 13$ en el mismo sistema. Según la gráfica de la figura 10 vemos que hay menos de 13 h de luz de día entre el día 1 (1 de enero) y el día 101 (11 de abril) y desde el día 241 (29 de agosto) al día 365 (31 de diciembre). ■

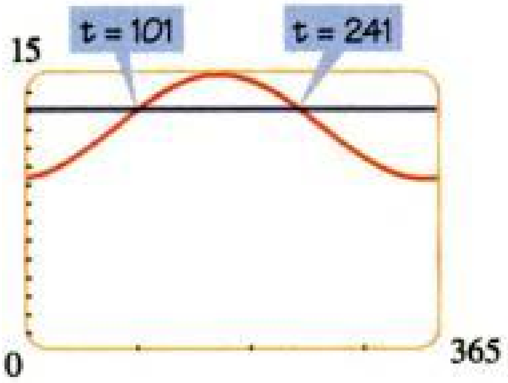


Figura 10

Otra situación donde se presenta movimiento armónico simple es en los generadores de corriente alterna (AC). La corriente alterna se produce cuando una armadura gira alrededor de su eje en un campo magnético.

En la figura 11 se representa una versión sencilla de tal generador. Cuando el alambre atraviesa el campo magnético, un voltaje o tensión E se genera en el alambre. Se puede demostrar que el voltaje generado se representa mediante

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

donde E_0 es la tensión máxima producida, la cual depende de la fuerza del campo magnético, y $\omega/(2\pi)$ es la cantidad de revoluciones por segundo de la armadura, es decir, la frecuencia.

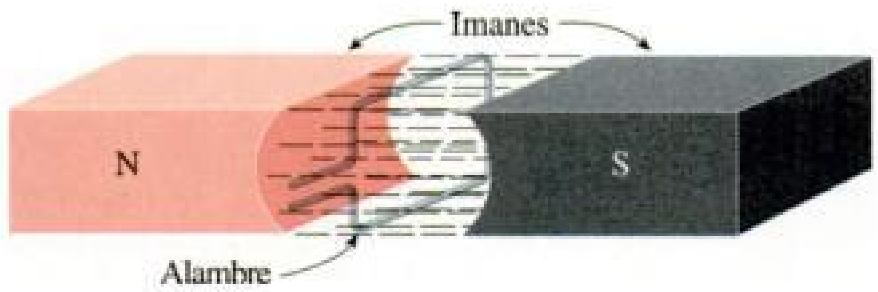


Figura 11

¿Por qué decimos que la corriente de los hogares es de 110 V cuando el voltaje máximo producido es 155 V? De acuerdo con la simetría de la función coseno, vemos que el voltaje promedio generado es cero. Este valor promedio sería el mismo para todos los generadores de corriente alterna y entonces no nos daría información acerca del voltaje generado. Para obtener mayor información del voltaje, los ingenieros usan el método del **valor eficaz de la tensión** (rms). Se puede demostrar que el valor eficaz de la tensión es $1/\sqrt{2}$ por el voltaje máximo. Entonces, en el caso de la corriente de los hogares el valor eficaz de la tensión es

$$155 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 110 \text{ V}$$

Ejemplo 6 Modelado de la corriente alterna

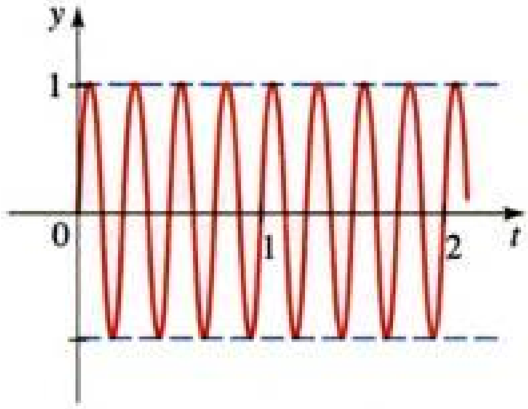
La corriente alterna de 110 V de los hogares varía de +155 V a −155 V con una frecuencia de 60 Hz (ciclos por segundo). Plantee una ecuación que describa esta variación del voltaje.

Solución La variación del voltaje es armónica simple. Puesto que la frecuencia es de 60 ciclos por segundo, tenemos

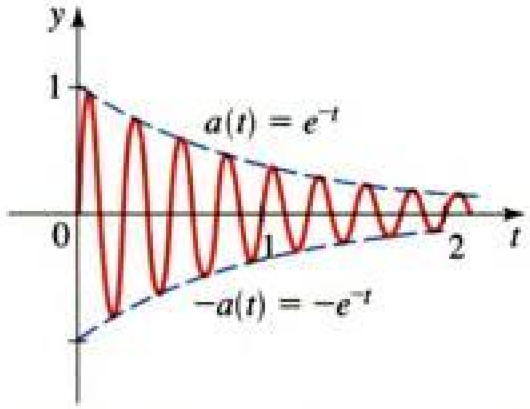
$$\frac{\omega}{2\pi} = 60 \qquad \text{o bien} \qquad \omega = 120\pi$$

Hagamos que $t = 0$ es el tiempo cuando el voltaje es +155 V. Entonces,

$$E(t) = a \cos \omega t = 155 \cos 120\pi t$$ ■



a) Movimiento armónico:
$y = \text{sen}\, 8\pi t$



b) Movimiento armónico amortiguado:
$y = e^{-t}\,\text{sen}\, 8\pi t$

Figura 12

Movimiento armónico amortiguado

Se supone que el resorte de la figura 2 de la página 443 oscila en un medio sin fricción. En este caso hipotético, la amplitud de la oscilación no cambia. En la presencia de fricción, el movimiento del resorte "se extinguirá" con el tiempo, es decir, la amplitud del movimiento disminuirá con el paso del tiempo. El movimiento de este tipo se llama *movimiento armónico amortiguado.*

Movimiento armónico amortiguado

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un objeto en el tiempo t es

$$y = ke^{-ct}\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{o bien} \qquad y = ke^{-ct}\cos\omega t \qquad (c > 0)$$

entonces, el objeto se desplaza con un **movimiento armónico amortiguado**. La constante c es la **constante de amortiguamiento**, k es la amplitud inicial y $2\pi/\omega$ es el periodo.*

El movimiento armónico amortiguado es movimiento armónico simple para el cual la amplitud está regida por la función $a(t) = ke^{-ct}$. En la figura 12 se muestran las diferencias entre movimiento armónico y movimiento armónico amortiguado.

Ejemplo 7 Modelado del movimiento armónico amortiguado

Dos sistemas masa-resorte están experimentando movimiento armónico amortiguado, ambos a 0.5 ciclos por segundo y con un desplazamiento inicial máximo de 10 cm. El primero tiene una constante de amortiguamiento de 0.5 y el segundo de 0.1.

a) Determine funciones de la forma $g(t) = ke^{-ct}\cos\omega t$ para modelar el movimiento en cada caso.

b) Grafique las dos funciones que determinó en el inciso anterior. ¿En qué difieren?

Solución

Hz es la abreviatura de hertz. Un hertz es un ciclo por segundo.

a) En el tiempo $t = 0$, el desplazamiento es 10 cm. Por lo tanto, $g(0) = ke^{-c\cdot 0}\cos(\omega\cdot 0) = k$, y entonces $k = 10$. Asimismo, la frecuencia es $f = 0.5$ Hz, y como $\omega = 2\pi f$ (véase página 443), obtenemos $\omega = 2\pi(0.5) = \pi$. Al aplicar las constantes de amortiguamiento dadas, encontramos que los movimientos de los dos resortes se representan mediante las funciones

$$g_1(t) = 10e^{-0.5t}\cos\pi t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = 10e^{-0.1t}\cos\pi t$$

b) Las funciones g_1 y g_2 se grafican en la figura 13. Según las gráfica, vemos que en el primer caso, donde la constante de amortiguamiento es mayor, el movimiento se extingue con rapidez, en tanto que en el segundo caso, el movimiento perceptible continúa mucho más tiempo. ■

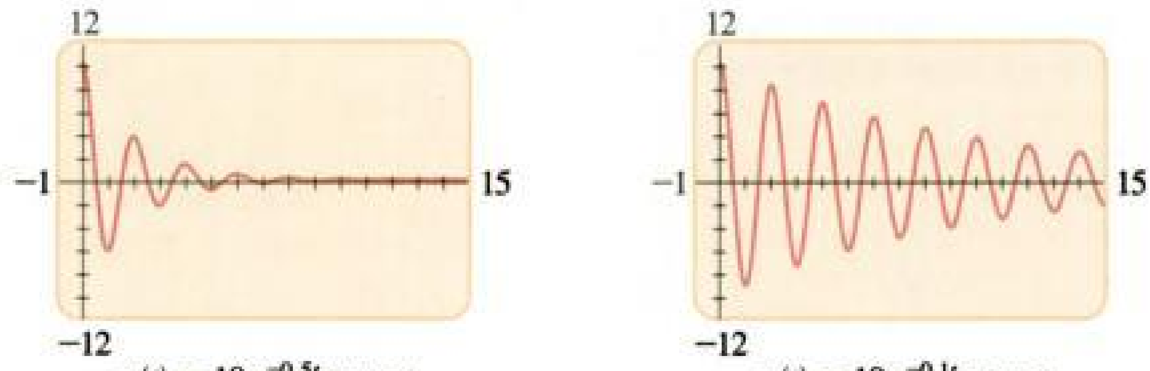


Figura 13 $g_1(t) = 10\,e^{-0.5t}\cos\pi t$ $\qquad$ $g_2(t) = 10\,e^{-0.1t}\cos\pi t$

*En el caso del movimiento armónico amortiguado, el término *cuasi-periodo* se usa con mucha frecuencia en lugar de *periodo* porque el movimiento no es en realidad periódico, sino que disminuye con el tiempo. No obstante, seguiremos utilizando el término *periodo* para evitar confusiones.

Como lo indica el ejemplo anterior, a medida que es más grande la constante de amortiguamiento c, es más rápida la extinción de la oscilación. Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra y luego se le permite vibrar libremente, un punto en esa cuerda sufre movimiento armónico simple. Escuchamos el amortiguamiento del movimiento cuando se apaga el sonido que genera la vibración de la cuerda. Qué tan rápido se presenta el amortiguamiento en la cuerda, según la medida de la constante c, es una propiedad de las dimensiones de la cuerda y del material con que esté fabricada. Otro ejemplo de movimiento armónico amortiguado es el movimiento que sufre un amortiguador de automóvil cuando éste golpea contra algo en la carretera. En este caso, el amortiguador del automóvil está diseñado para amortiguar el movimiento tan rápido como sea posible (c grande) y tener una frecuencia tan pequeña como sea posible (ω pequeña). Por otro lado, el sonido producido por un músico que toca una nota con una tuba no es amortiguado siempre que el músico mantenga la intensidad de la nota. Las ondas electromagnéticas que producen luz se desplazan en un movimiento armónico simple que no es amortiguado.

Ejemplo 8 Vibración de una cuerda de violín

Se jala la cuerda sol de un violín una distancia de 0.5 cm por arriba de su posición de reposo, luego se suelta y se le deja vibrar. Se determinó que la constante de amortiguamiento c de esta cuerda es 1.4. Suponga que la nota generada es sol pura (frecuencia = 200 Hz). Determine una ecuación que describa el movimiento en el punto en el cual la cuerda fue pulsada.

Solución Sea P el punto en el cual la cuerda es pulsada. Determinaremos una función $f(t)$ que da la distancia en el tiempo t del punto P desde su posición original de reposo. Como el desplazamiento máximo ocurre en $t = 0$, encontramos una ecuación de la forma

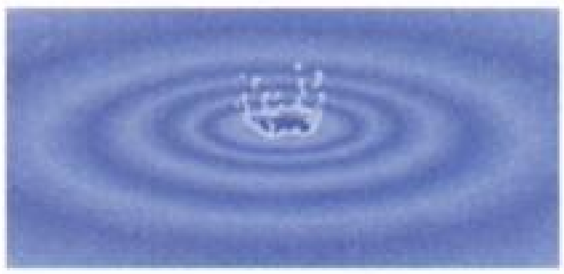
$$y = ke^{-ct}\cos\omega t$$

A partir de esta ecuación vemos que $f(0) = k$. Pero sabemos que el desplazamiento original de la cuerda es 0.5 cm. Entonces, $k = 0.5$. Como la frecuencia de la vibración es 200, tenemos $\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi$. Para finalizar, puesto que sabemos que la constante de amortiguamiento es 1.4 tenemos

$$f(t) = 0.5e^{-1.4t}\cos 400\pi t$$

■

Ejemplo 9 Ondas en un lago



Se arroja una piedra en un lago en calma, lo cual ocasiona que se formen ondas. El movimiento hacia arriba y hacia abajo de un punto en la superficie del agua lo modela el movimiento armónico amortiguado. En un cierto momento se mide la amplitud de la onda y 20 s más tarde se observa que la amplitud disminuyó a $\frac{1}{10}$ de su valor. Calcule la constante de amortiguamiento c.

Solución La amplitud se rige por el coeficiente ke^{-ct} en las ecuaciones para el movimiento armónico amortiguado. Por lo tanto, la amplitud en el tiempo t es ke^{-ct}, y 20 s después es $ke^{-c(t+20)}$. Entonces, como el último valor es $\frac{1}{10}$ del primer valor, tenemos

$$ke^{-c(t+20)} = \tfrac{1}{10}ke^{-ct}$$

Entonces determinamos el valor de c. Al anular k y aplicar las leyes de los exponentes llegamos a

$$\begin{aligned} e^{-ct}\cdot e^{-20c} &= \tfrac{1}{10}e^{-ct} && \\ e^{-20c} &= \tfrac{1}{10} && \text{Anulación de } e^{-ct} \\ e^{20c} &= 10 && \text{Se determinan los recíprocos} \end{aligned}$$

Determinamos los logaritmos naturales de ambos miembros:

$$20c = \ln(10)$$
$$c = \tfrac{1}{20}\ln(10) \approx \tfrac{1}{20}(2.30) \approx 0.12$$

Por lo tanto, la constante de amortiguamiento es $c \approx 0.12$. ■

5.5 Ejercicios

1–8 ■ La función dada modela el desplazamiento de un objeto que se desplaza en movimiento armónico simple.

a) Determine amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.

b) Grafique el desplazamiento del objeto en un periodo completo.

1. $y = 2 \operatorname{sen} 3t$

2. $y = 3 \cos \tfrac{1}{2}t$

3. $y = -\cos 0.3t$

4. $y = 2.4 \operatorname{sen} 3.6t$

5. $y = -0.25 \cos\left(1.5t - \dfrac{\pi}{3}\right)$

6. $y = -\tfrac{3}{2} \operatorname{sen}(0.2t + 1.4)$

7. $y = 5 \cos(\tfrac{2}{3}t + \tfrac{3}{4})$

8. $y = 1.6 \operatorname{sen}(t - 1.8)$

9–12 ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que presenta las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$.

9. amplitud = 10 cm, periodo = 3 s

10. amplitud = 24 pies, periodo = 2 min

11. amplitud = 6 pulg, frecuencia = $5/\pi$ Hz

12. amplitud = 1.2 m, frecuencia = 0.5 Hz

13–16 ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que presenta las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es máximo en el tiempo $t = 0$.

13. amplitud = 60 pies, periodo = 0.5 min

14. amplitud = 35 cm, periodo = 8 s

15. amplitud = 2.4 m, frecuencia = 750 Hz

16. amplitud = 6.25 pulg, frecuencia = 60 Hz

17–24 ■ Se proporcionan una amplitud inicial k, constante de amortiguamiento c y frecuencia f o periodo p. (Recuerde que la frecuencia y el periodo están relacionados mediante la ecuación $f = 1/p$.)

a) Determine una función que modele el movimiento armónico amortiguado. Use una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ en los ejercicios 17 a 20 y de la forma $y = ke^{-ct} \operatorname{sen} \omega t$ en los ejercicios 21 a 24.

b) Grafique la función.

17. $k = 2, \quad c = 1.5, \quad f = 3$

18. $k = 15, \quad c = 0.25, \quad f = 0.6$

19. $k = 100, \quad c = 0.05, \quad p = 4$

20. $k = 0.75, \quad c = 3, \quad p = 3\pi$

21. $k = 7, \quad c = 10, \quad p = \pi/6$

22. $k = 1, \quad c = 1, \quad p = 1$

23. $k = 0.3, \quad c = 0.2, \quad f = 20$

24. $k = 12, \quad c = 0.01, \quad f = 8$

Aplicaciones

25. Un corcho flotante Un corcho que flota en un lago está sometido a movimiento armónico simple. Su desplazamiento por arriba del fondo del lago está expresado por

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

donde y está en metros y t en minutos.

a) Calcule la frecuencia del movimiento del corcho.

b) Grafique y.

c) Encuentre el desplazamiento máximo del corcho por arriba del fondo del lago.

26. Señales FM de radio La onda portadora para una señal FM de radio está expresada mediante la función

$$y = a \operatorname{sen}(2\pi(9.15 \times 10^7)t)$$

donde t está en segundos. Calcule el periodo y la frecuencia de la onda portadora.

27. Modelo de la población de un predador En un modelo de predador/presa (véase página 432), la población del predador se modela mediante la función

$$y = 900 \cos 2t + 8000$$

donde t se mide en años.

a) ¿Cuál es la población máxima?

b) Determine el tiempo entre periodos sucesivos de población máxima.

28. Presión sanguínea Cada vez que late el corazón, la presión sanguínea aumenta, luego disminuye cuando el corazón descansa entre latidos. La presión sanguínea de una persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \operatorname{sen}(160\pi t)$$

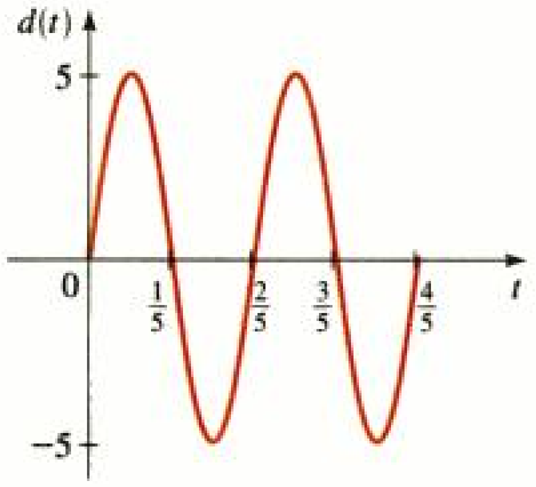
donde $p(t)$ es la presión en mm de Hg en el tiempo t, que se mide en minutos.

a) Calcule la amplitud, periodo y frecuencia de p.

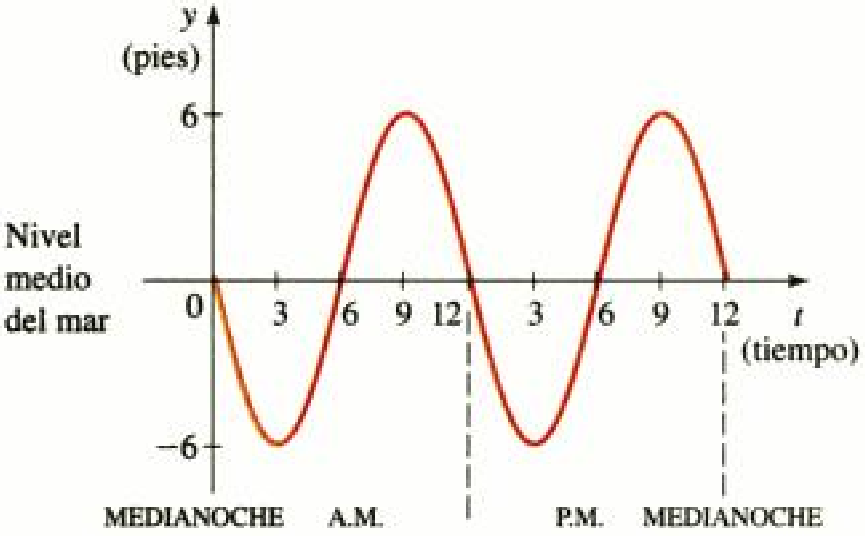
b) Grafique p.

c) Cuando una persona hace ejercicio, su corazón late más rápido. ¿Cómo afecta esta situación el periodo y la frecuencia de p?

29. Sistema resorte-masa Una masa unida a un resorte se desplaza hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. La gráfica proporciona el desplazamiento $d(t)$ desde el equilibrio en el tiempo t. Exprese la función d en la forma $d(t) = a \operatorname{sen} \omega t$.

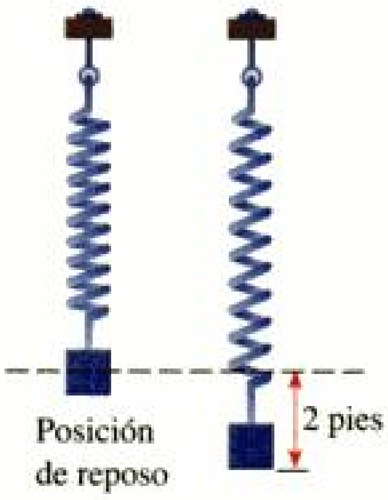


30. Mareas La gráfica muestra la variación del nivel del agua relacionada con el nivel medio del mar en Commencement Bay en Tacoma, Washington, para un periodo particular de 24 h. Si se supone que esta variación está modelada por el movimiento armónico simple, determine una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua como una función del número de horas después de medianoche.



31. Mareas La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene las mareas más altas del mundo. En un periodo de 12 horas el agua inicia al nivel medio del mar, se eleva 21 pies y cae hasta 21 pies y luego regresa al nivel medio del mar. Si suponemos que el movimiento de las mareas es armónico simple, proporcione una ecuación que describa la altura de la marea en la Bahía de Fundy por arriba del nivel medio del mar. Trace una gráfica donde se muestre el nivel de las mareas en un periodo de 12 horas.

32. Sistema resorte-masa Se jala hacia abajo una distancia de 2 pies a una masa que está unida a un resorte, desde su posición de reposo según se muestra en la figura. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le deja oscilar. Si la masa regresa a su posición después de 1 s, encuentre una ecuación que describa su movimiento



33. Sistema resorte-masa Una masa pende de un resorte. El resorte se comprime de modo que la masa de localiza 5 cm por arriba de su posición de reposo. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le deja oscilar. Se observa que la masa alcanza su punto más bajo medio segundo después de que se suelta. Dé una ecuación que describa el movimiento de la masa.

34. Sistema resorte-masa La frecuencia de oscilación de un objeto suspendido de un resorte depende de la rigidez k de éste y la masa m del objeto. La rigidez se llama *constante del resorte*. Si el resorte se comprime a una distancia a y luego se le deja oscilar, su desplazamiento se representa mediante

$$f(t) = a \cos \sqrt{k/m}\, t$$

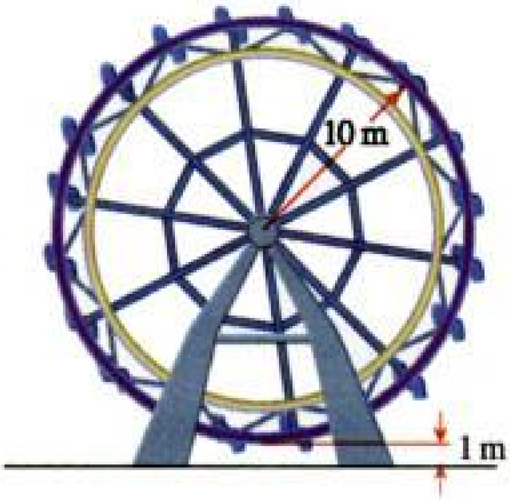
a) Una masa de 10 g está suspendida de un resorte con rigidez $k = 3$. Si el resorte se comprime una distancia de 5 cm y luego se libera, determine la ecuación que describe la oscilación del resorte.

b) Halle una fórmula general para la frecuencia en función de k y m.

c) ¿Qué tanto se afecta la frecuencia si la masa se incrementa? ¿La oscilación es más rápida o más lenta?

d) ¿Qué tanto resulta afectada la frecuencia si se usa un resorte más rígido (k más grande)? ¿La oscilación es más rápida o más lenta?

35. Rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna tiene un radio de 10 m y la parte inferior de la rueda pasa a 1 m por arriba del suelo. Si la rueda da una vuelta completa cada 20 s, determine una ecuación que proporcione la altura por arriba del suelo, en función del tiempo, de una persona que va sentada en la rueda.



36. Péndulo de reloj El péndulo de un reloj del abuelo da una oscilación completa cada 2 s. El ángulo máximo que el péndulo subtiende con respecto a su posición de reposo es 10°. Sabemos a partir de los principios físicos que el ángulo θ entre el péndulo y su posición de reposo cambia de modo armónico simple. Plantee una ecuación que describa el ángulo θ en función del tiempo. (Tome $t = 0$ como el tiempo cuando el péndulo es vertical.)

37. Estrellas variables El periodo de la estrella variable Géminis zeta es de 10 días. La brillantez promedio de la estrella es 3.8 magnitudes y la variación máxima con respecto al promedio es 0.2 de magnitud. Si suponemos que la variación en la brillantez sigue un patrón armónico simple, determine una ecuación que proporcione la brillantez de la estrella en función del tiempo.

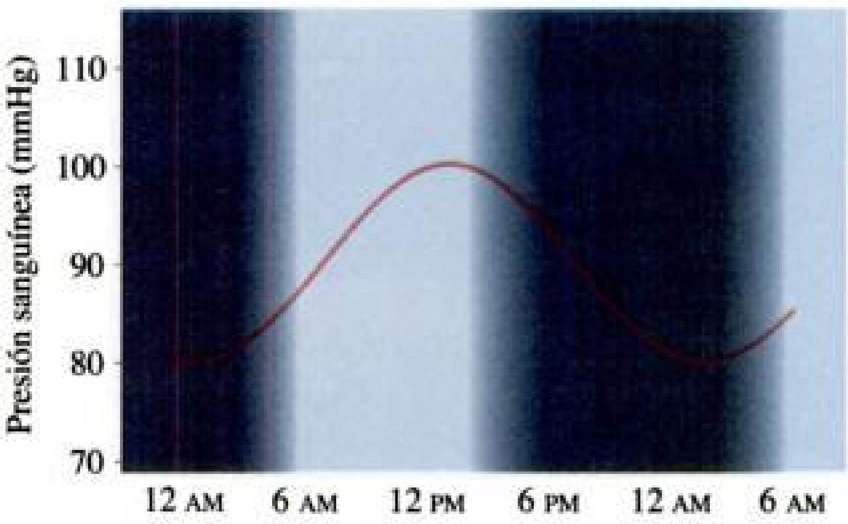
38. Estrellas variables Los astrónomos suponen que el radio de una estrella variable se incrementa y disminuye con la brillantez de la estrella. La estrella variable Cefeida delta (ejemplo 4) tiene un radio promedio de 20 millones de millas y cambia un máximo de 1.5 millones de millas con respecto al promedio durante una sola pulsación. Determine una ecuación que describa el radio de esta estrella en función del tiempo.

39. Generador eléctrico La armadura de un generador eléctrico gira a 100 revoluciones por segundo (rps). Si el voltaje máximo producido es 310 V, plantee una ecuación que describe esta variación en voltaje. ¿Cuál es el valor eficaz de la tensión? (Véase ejemplo 6 y la nota al margen adyacente a él.)

40. Relojes biológicos Los ritmos circadianos son procesos biológicos que oscilan con un periodo de aproximadamente 24 h. Es decir, un ritmo circadiano es un reloj biológico diario interno. Al parecer, la presión sanguínea sigue un ritmo. Para una cierta persona, la presión sanguínea promedio en reposo varía de un máximo de 100 mm de Hg a las 2:00 PM a un mínimo de 80 mm de Hg a las 2:00 AM. Determine la función seno de la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen}(\omega(t - c)) + b$$

que modela la presión sanguínea en el tiempo t, que se mide en horas a partir de la medianoche.



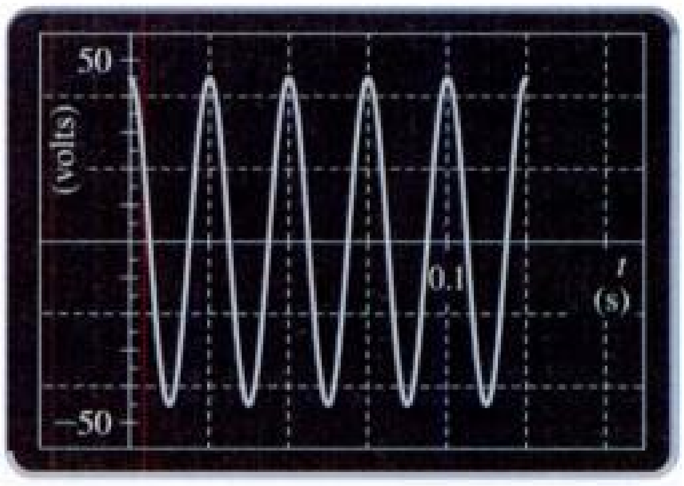
41. Generador eléctrico La gráfica muestra la pantalla de un osciloscopio sobre la lectura de la variación del voltaje de una corriente alterna que produce un generador sencillo.

a) Encuentre el voltaje máximo producido.

b) Determine la frecuencia (ciclos por segundo) del generador.

c) ¿Cuántas revoluciones por segundo da la armadura del generador?

d) Determine una fórmula que describa la variación en el voltaje en función del tiempo.



42. Efecto Doppler Cuando un automóvil hace sonar su claxon al acercarse a un observador, el tono de la bocina parece más alto al aproximarse y más bajo al alejarse (véase la figura). Este fenómeno se llama **efecto Doppler**. Si la fuente del sonido se desplaza a una velocidad v en relación con el observador y si la velocidad del sonido es v_0, entonces la frecuencia percibida f se relaciona con la frecuencia real f_0 según

$$f = f_0\left(\frac{v_0}{v_0 \pm v}\right)$$

Elegimos el signo menos si la fuente se desplaza hacia el observador y el signo más si se aleja.

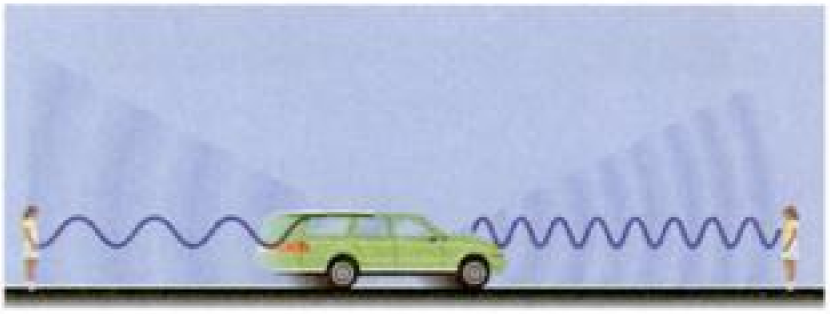
Suponga que un automóvil va 110 pies/s pasa tocando su claxon frente a una mujer que se encuentra de pie en el acotamiento de la carretera; la frecuencia de la bocina es de 500 Hz. Suponga también que la velocidad del sonido es de 1130 pies/s. (Es la velocidad en aire seco a 70°F.)

a) ¿Cuáles son las frecuencias de los sonidos que la mujer escucha cuando el automóvil se aproxima a ella y cuando se aleja de ella?

b) Sea A la amplitud del sonido. Determine unas funciones de la forma

$$y = A \operatorname{sen} \omega t$$

que modelan el sonido percibido cuando el automóvil se aproxima a la mujer y cuando se aleja.

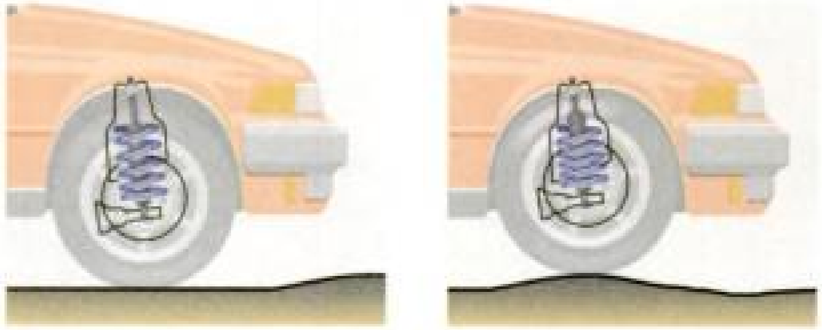


43. Movimiento de un edificio Una fuerte racha de aire golpea a un edificio alto, lo que ocasiona que la construcción se mueva de un lado al otro según un movimiento armónico amortiguado. La frecuencia de la oscilación es 0.5 ciclos por segundo y la constante de amortiguamiento es $c = 0.9$. Calcule una ecuación que describe el movimiento del edificio. (Suponga $k = 1$ y $t = 0$ es el instante cuando la racha de aire golpea al edificio.)

44. Amortiguador de golpes Cuando un automóvil choca contra un tope en el camino, un amortiguador del vehículo se comprime una longitud de 6 pulg, luego se libera (véase la figura). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 2 ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

a) Determine una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador desde su posición de reposo como una función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en el que el amortiguador es liberado.

b) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la amplitud de la vibración disminuya a 0.5 pulg?



45. Diapasón Se golpea un diapasón y oscila en movimiento armónico amortiguado. La amplitud del movimiento se mide, y 3 s más tarde se observa que la amplitud ha caído $\frac{1}{4}$ de su valor. Determine la constante de amortiguamiento c para este diapasón.

46. Cuerda de guitarra La cuerda de una guitarra se pulsa en el punto P una distancia de 3 cm por arriba de su posición de reposo. Luego se suelta y vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 165 ciclos por segundo. Después de 2 s se observa que la amplitud de la vibración en el punto P es 0.6 cm.

a) Calcule la constante de amortiguamiento c.

b) Encuentre una ecuación que describe la posición del punto P por arriba de su posición de reposo como una función del tiempo. Considere que $t = 0$ es el instante en que se suelta la cuerda.

5 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) ¿Qué es el círculo unitario?

b) Utilice un diagrama para explicar qué significa el punto sobre la circunferencia determinado por un número real t.

c) ¿Cuál es el número de referencia $\bar{t}$ asociado a t?

d) Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por t, escriba ecuaciones que definan sen t, cos t, tan t, cot t, sec t y csc t.

e) ¿Cuáles son los dominios de las seis funciones que definió en el inciso d)?

f) ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes I, II, III y IV?

2. a) ¿Qué es una función par?

b) ¿Cuáles funciones trigonométricas son pares?

c) ¿Qué es una función impar?

d) ¿Cuáles funciones trigonométricas son impares?

3. a) Diga ¿cuáles son las identidades recíprocas?

b) Mencione las identidades pitagóricas.

4. a) ¿Qué es una función periódica?

b) ¿Cuáles son los periodos de las seis funciones trigonométricas?

5. Grafique las funciones seno y coseno. ¿Cómo es la gráfica del coseno en relación con la gráfica del seno?

6. Escriba expresiones para amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la curva seno $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ y la curva coseno $y = a \cos k(x - b)$.

7. a) Grafique las funciones tangente y cotangente.

b) Establezca los periodos de la curva tangente $y = a \tan kx$ y la curva cotangente $y = a \cot kx$.

8. a) Grafique las funciones secante y cosecante.

b) Proporcione los periodos de la curva secante $y = a \sec kx$ y la curva cosecante $y = a \csc kx$.

9. a) ¿Cuál es el movimiento armónico simple?

b) ¿Cuál es el movimiento armónico amortiguado?

c) Mencione tres ejemplos de la vida cotidiana relacionados con el movimiento armónico simple y el movimiento armónico amortiguado.

Ejercicios

1–2 ■ Se proporciona un punto $P(x, y)$.

a) Demuestre que P está sobre el círculo unitario.

b) Suponga que P es el punto sobre la circunferencia determinado por t. Determine sen t, cos t y tan t.

1. $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

3–6 ■ Se da un número real t.

a) Determine el número de referencia para t.

b) Encuentre el punto sobre la circunferencia $P(x, y)$ del círculo unitario determinado por t.

c) Calcule las seis funciones trigonométricas de t.

3. $t = \frac{2\pi}{3}$

4. $t = \frac{5\pi}{3}$

5. $t = -\frac{11\pi}{4}$

6. $t = -\frac{7\pi}{6}$

7–16 ■ Determine el valor de la función trigonométrica. Si es posible, proporcione el valor exacto; si no es así, utilice una calculadora para encontrar un valor aproximado correcto con cinco cifras decimales.

7. a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ b) $\cos \frac{3\pi}{4}$

8. a) $\tan \frac{\pi}{3}$ b) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

9. a) sen 1.1 b) cos 1.1

10. a) $\cos \frac{\pi}{5}$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

11. a) $\cos \frac{9\pi}{2}$ b) $\sec \frac{9\pi}{2}$

12. a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$ b) $\csc \frac{\pi}{7}$

13. a) $\tan \frac{5\pi}{2}$ b) $\cot \frac{5\pi}{2}$

14. a) $\operatorname{sen} 2\pi$ b) $\csc 2\pi$

15. a) $\tan \frac{5\pi}{6}$ b) $\cot \frac{5\pi}{6}$

16. a) $\cos \frac{\pi}{3}$ b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

17–20 ■ Aplique las identidades fundamentales para plantear la primera expresión en términos de la segunda.

17. $\frac{\tan t}{\cos t}$, sen t

18. $\tan^2 t \sec t$, $\cos t$

19. $\tan t$, sen t; t en el cuadrante IV

20. $\sec t$, sen t; t en el cuadrante II

21–24 ■ Calcule los valores de las funciones trigonométricas restantes en t a partir de la información proporcionada.

21. $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$

22. $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$, $\cos t > 0$

23. $\cot t = -\frac{1}{2}$, $\csc t = \sqrt{5}/2$

24. $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\tan t < 0$

25. Si $\tan t = \frac{1}{4}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante III, determine $\sec t + \cot t$.

26. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante IV, determine $\csc t + \sec t$.

27. Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante I, determine $\tan t + \sec t$.

28. Si $\sec t = -5$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante II, determine $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$.

29–36 ■ Se proporciona una función trigonométrica.

a) Calcule amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la función.

b) Trace la gráfica.

29. $y = 10 \cos \frac{1}{2}x$ **30.** $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi x$

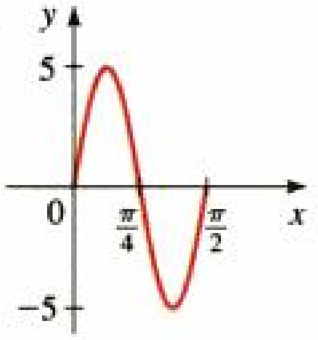
31. $y = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ **32.** $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

33. $y = 3 \operatorname{sen}(2x - 2)$ **34.** $y = \cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

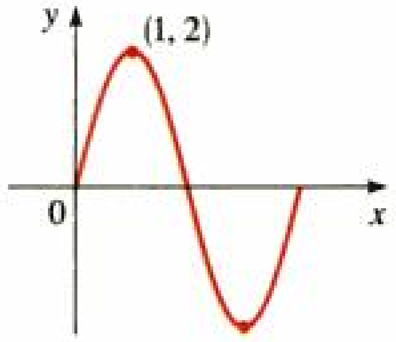
35. $y = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ **36.** $y = 10 \operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

37–40 ■ Se muestra la gráfica de un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ o $y = a \cos k(x - b)$. Determine la función.

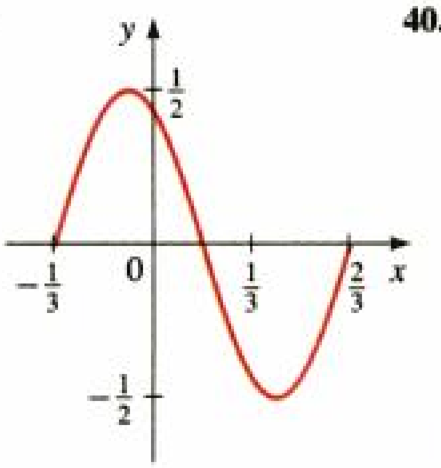
37.



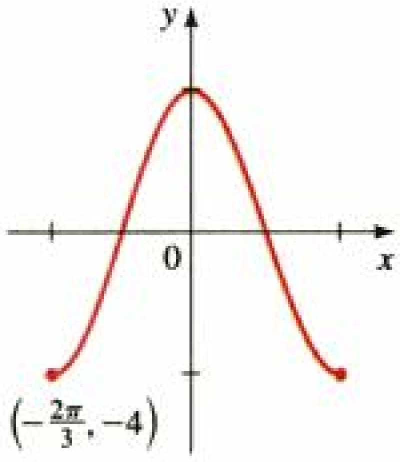
38.



39.



40.



41–48 ■ Determine el periodo y grafique.

41. $y = 3 \tan x$ **42.** $y = \tan \pi x$

43. $y = 2 \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **44.** $y = \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

45. $y = 4 \csc(2x + \pi)$ **46.** $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

47. $y = \tan\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ **48.** $y = -4 \sec 4\pi x$

49–54 ■ Se proporciona una función.

a) Utilice una calculadora o una computadora para graficar la función.

b) Determine a partir de la gráfica si la función es periódica y, si es así, calcule el periodo.

c) Calcule a partir de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de las dos.

49. $y = |\cos x|$ **50.** $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

51. $y = \cos(2^{0.1x})$ **52.** $y = 1 + 2^{\cos x}$

53. $y = |x| \cos 3x$ **54.** $y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 3x \quad (x > 0)$

55–58 ■ Grafique las tres funciones sobre una misma pantalla. ¿De qué manera se relacionan las gráficas?

55. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \operatorname{sen} x$

56. $y = 2^{-x}, \quad y = -2^{-x}, \quad y = 2^{-x} \cos 4\pi x$

57. $y = x, \quad y = \operatorname{sen} 4x, \quad y = x + \operatorname{sen} 4x$

58. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

59–60 ■ Calcule los valores máximo y mínimo de la función.

59. $y = \cos x + \operatorname{sen} 2x$ **60.** $y = \cos x + \operatorname{sen}^2 x$

61. Calcule las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0.3$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

62. Calcule las soluciones de $\cos 3x = x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

63. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

a) ¿La función f es par, impar o ninguna de las dos?

b) Determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.

c) Grafique f en un rectángulo de visión adecuado.

d) Describa el comportamiento de la función cuando x se incrementa.

e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué sucede cuando x tiende a 0?

64. Sean $y_1 = \cos(\operatorname{sen} x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\cos x)$.

a) Grafique y_1 y y_2 en el mismo rectángulo de visión.

b) Determine el periodo de cada una de las funciones a partir de su gráfica.

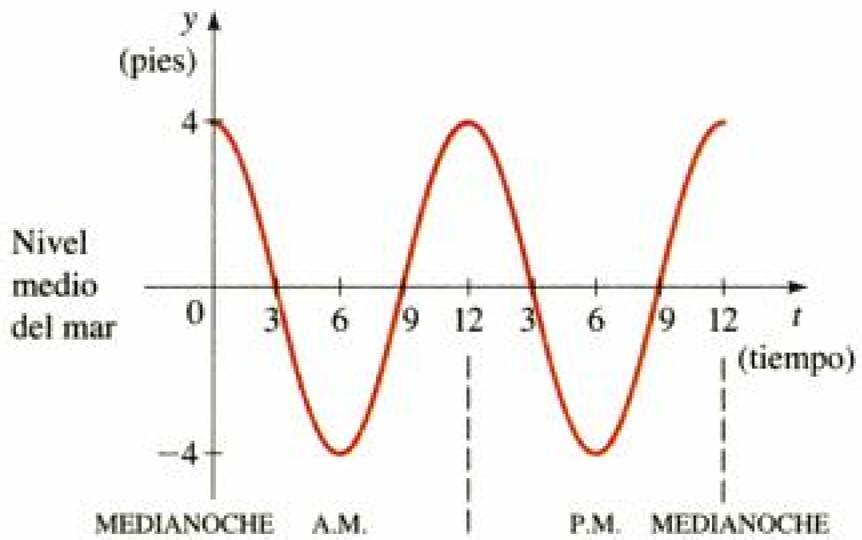
c) Determine una desigualdad entre $\operatorname{sen}(\cos x)$ y $\cos(\operatorname{sen} x)$ que sea válida para toda x.

65. Un punto P que se desplaza en movimiento armónico simple completa ocho ciclos cada segundo. Si la amplitud del movimiento es 50 cm, plantee una ecuación que describa el movimiento de P en función del tiempo. Suponga que el punto P se encuentra en su desplazamiento máximo cuando $t = 0$.

66. Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple a una frecuencia de cuatro ciclos por segundo.

La distancia desde el punto más alto al punto más bajo de la oscilación es 100 cm. Determine una ecuación que describa la distancia de la masa desde la posición de reposo en función del tiempo. Suponga que la masa está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

67. La gráfica muestra la variación del nivel del agua con respecto al nivel medio del mar en el puerto de Long Beach para un periodo particular de 24 horas. Si suponemos que esta variación es movimiento armónico simple, encuentre una ecuación de la forma $y = a \cos \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua en función de la cantidad de horas después de medianoche.



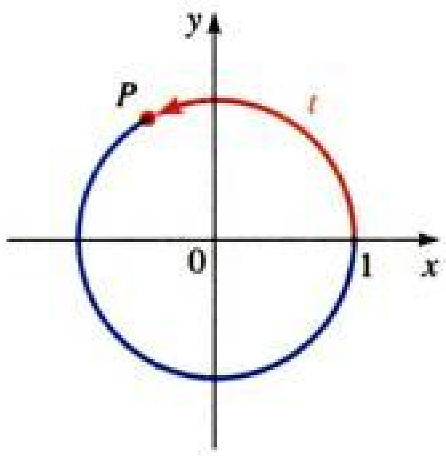
68. El piso superior de una construcción sufre movimiento armónico amortiguado después de un sismo breve. En el tiempo $t = 0$ el desplazamiento es el máximo, 16 cm desde la posición normal. La constante de amortiguamiento es $c = 0.72$ y el edificio vibra a 1.4 ciclos por segundo.

a) Determine una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento.

b) Grafique la función que determinó en el inciso a).

c) ¿Cuál es el desplazamiento en el tiempo $t = 10$ s?

5 Evaluación



1. El punto $P(x, y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Si $x = \sqrt{11}/6$, determine y.

2. El punto P de la figura a la izquierda tiene $\frac{4}{5}$ como coordenada y. Determine
   a) $\operatorname{sen} t$ b) $\cos t$
   c) $\tan t$ d) $\sec t$

3. Calcule el valor exacto.
   a) $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{6}$ b) $\cos \dfrac{13\pi}{4}$
   c) $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ d) $\csc \dfrac{3\pi}{2}$

4. Exprese $\tan t$ en términos de $\operatorname{sen} t$, si el punto sobre la circunferencia determinado por t está en el cuadrante II.

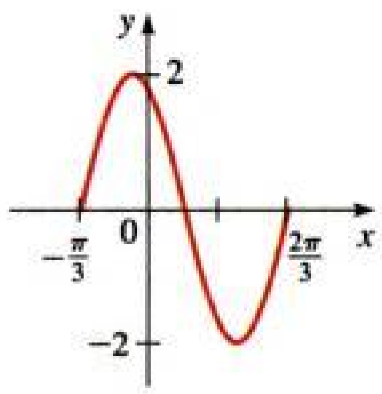
5. Si $\cos t = -\frac{8}{17}$ y si el punto sobre la circunferencia determinado por t está en el cuadrante III, calcule $\tan t \cot t + \csc t$.

6–7 ■ Dada una función trigonométrica.
a) Determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de la fase de la función.
b) Trace la gráfica.

6. $y = -5 \cos 4x$ 7. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

8–9 ■ Calcule el periodo y grafique la función.

8. $y = -\csc 2x$ 9. $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$



10. La gráfica mostrada a la izquierda es un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$. Determine la función.

11. Sea $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$.
    a) Utilice una calculadora o una computadora para graficar f en un rectángulo de visión adecuado.
    b) Determine con ayuda de la gráfica si f es par, impar o ninguna de las dos.
    c) Determine los valores máximo y mínimo de f.

12. Una masa está suspendida de un resorte, y oscila según el movimiento armónico simple. La masa completa dos ciclos cada segundo y la distancia entre el punto más alto y el punto más bajo de la oscilación es 10 cm. Formule una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} \omega t$ que proporciona la distancia de la masa desde la posición de reposo en función del tiempo.

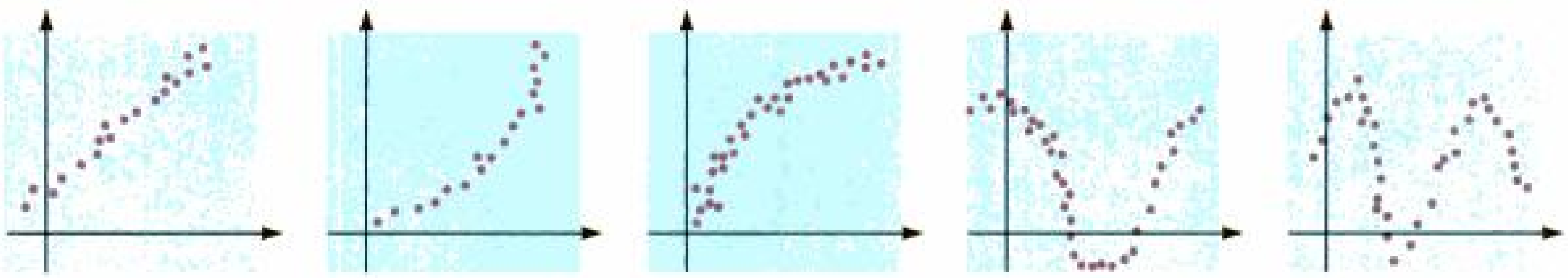
13. Un objeto se mueve hacia arriba y hacia abajo en un movimiento armónico amortiguado. Su desplazamiento en el tiempo $t = 0$ es 16 pulg; éste es su desplazamiento máximo. La constante de amortiguamiento es $c = 0.1$ y la frecuencia es 12 Hz.
    a) Determine una función que modele este movimiento.
    b) Grafique la función.

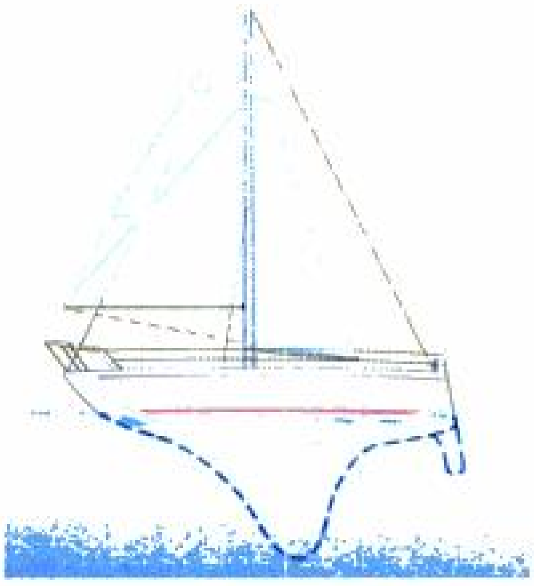
Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas sinusoidales a datos

En la sección *Enfoque en el modelado* del capítulo 2 (página 239), aprendimos a construir modelos lineales a partir de datos. En la figura 1 se ilustran algunas gráficas de datos dispersos; la primera gráfica parece ser lineal, pero las otras no. ¿Qué hacer cuando los datos que estudiamos no son lineales? En este caso, el modelo sería algún tipo de función que mejor se ajuste a los datos. Si la gráfica dispersa sugiere movimiento armónico simple, entonces trataríamos de modelar los datos con una función seno o coseno. El ejemplo siguiente ilustra este proceso.

Figura 1





Ejemplo 1 Modelado de la altura de la marea

La profundidad del agua en un canal angosto varía con las mareas. En la tabla 1 se muestra la profundidad del agua en un periodo de 12 horas.

a) Trace una gráfica de dispersión con los datos de profundidad del agua.

b) Encuentre una función que modele la profundidad del agua con respecto al tiempo.

c) Si una embarcación necesita por lo menos 11 pies de agua para pasar por el canal, ¿en qué momentos lo puede hacer con seguridad?

Solución

a) Una gráfica de dispersión de los datos se ilustra en la figura 2.

Tabla 1

Tiempo	Profundidad (pies)
12:00 A.M.	9.8
1:00 A.M.	11.4
2:00 A.M.	11.6
3:00 A.M.	11.2
4:00 A.M.	9.6
5:00 A.M.	8.5
6:00 A.M.	6.5
7:00 A.M.	5.7
8:00 A.M.	5.4
9:00 A.M.	6.0
10:00 A.M.	7.0
11:00 A.M.	8.6
12:00 P.M.	10.0

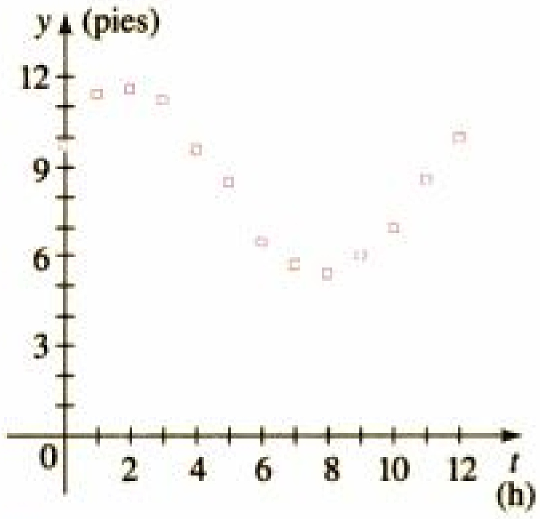


Figura 2

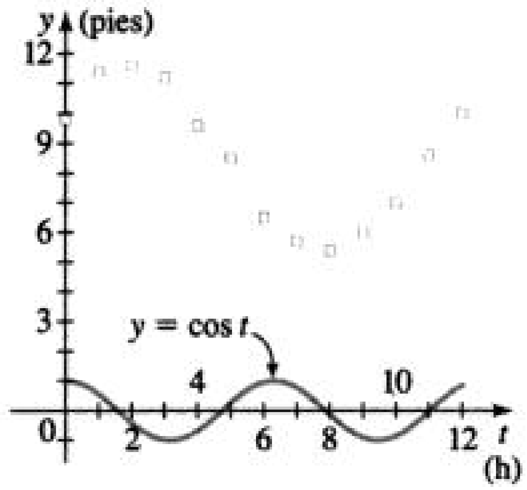
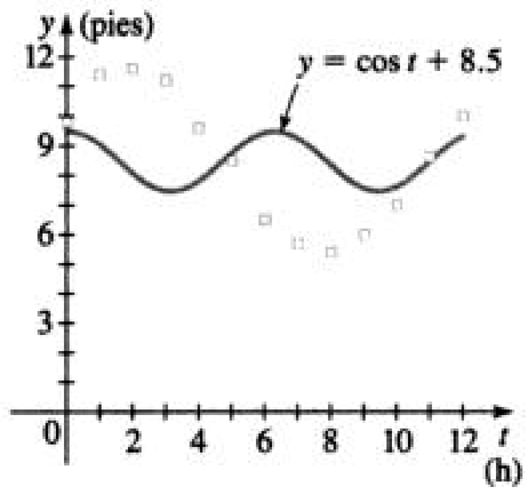


Figura 3

b) Parece que los datos quedan en una curva coseno o seno. Pero si graficamos $y = \cos t$ en la misma gráfica que la gráfica de dispersión, los resultados de la figura 3 no se acercan a los datos. Para ajustar los datos necesitamos ajustar el desplazamiento vertical, amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la curva coseno. En otras palabras necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

Seguimos los pasos siguientes, los cuales se ilustran mediante las gráficas al margen.



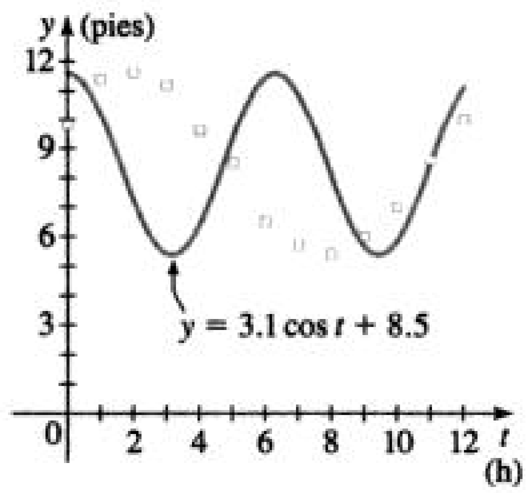
Ajuste del desplazamiento vertical

El desplazamiento vertical b es el promedio de los valores máximo y mínimo:

$$b = \text{desplazamiento vertical}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} + \text{valor mínimo})$$

$$= \frac{1}{2}(11.6 + 5.4) = 8.5$$



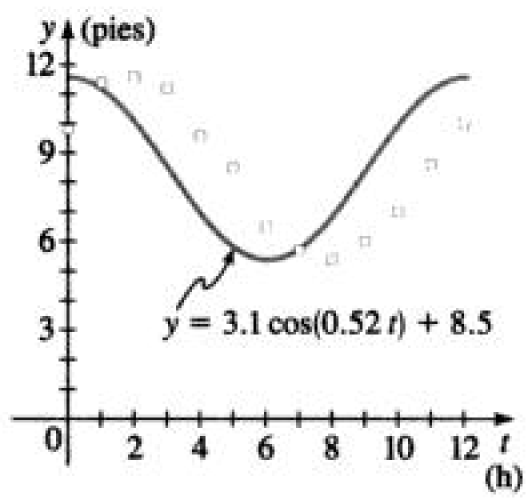
Ajuste de la amplitud

La amplitud a es la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo:

$$a = \text{amplitud}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} - \text{valor mínimo})$$

$$= \frac{1}{2}(11.6 - 5.4) = 3.1$$



Ajuste del periodo

El tiempo entre valores consecutivos máximo y mínimo es la mitad de un periodo. Por lo tanto,

$$\frac{2\pi}{\omega} = \text{periodo}$$

$$= 2\cdot(\text{tiempo del valor máximo} - \text{tiempo del valor mínimo})$$

$$= 2(8 - 2) = 12$$

Entonces, $\omega = 2\pi/12 = 0.52$.

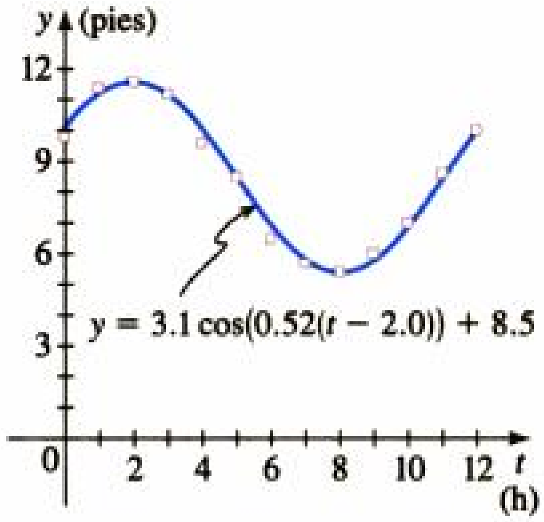


Figura 4

▪ **Ajuste del desplazamiento horizontal**

Puesto que el valor máximo de los datos se presenta en aproximadamente $t = 2.0$, éste representa una curva coseno desplazada 2 h a la derecha. Entonces,

$$\begin{aligned} c &= \text{desplazamiento de fase} \\ &= \text{tiempo del valor máximo} \\ &= 2.0 \end{aligned}$$

▪ **El modelo**

Hemos demostrado que una función que modela las mareas en un periodo está dada por

$$y = 3.1 \cos(0.52(t - 2.0)) + 8.5$$

Una gráfica de la función y la gráfica de dispersión se muestran en la figura 4. Al parecer, el modelo que encontramos es una buena aproximación de los datos.

c) Es necesario resolver la desigualdad $y \geq 11$. Resolvemos la desigualdad por medio de métodos gráficos, para lo cual graficamos $y = 3.1 \cos 0.52(t - 2.0) + 8.5$ y $y = 11$ en el mismo sistema. A partir de la gráfica de la figura 5 vemos que la profundidad del agua es superior a 11 pies entre $t \approx 0.8$ y $t \approx 3.2$. Esto corresponde a los tiempos 12:48 AM a 3:12 AM. ■

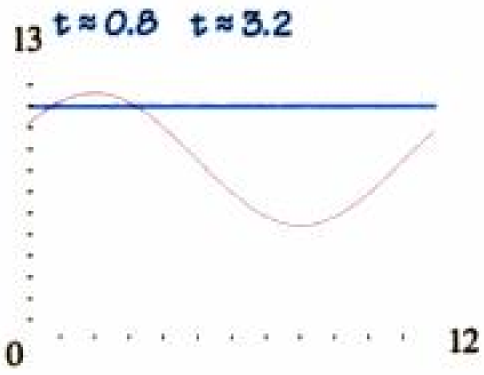


Figura 5

En el caso de las TI-83 y TI-86, el comando `SinReg` (para regresión del seno) encuentra la curva seno que mejor se ajusta a los datos dados.

En el ejemplo 1 recurrimos a la gráfica de dispersión para que funcionara como una guía en la búsqueda de la curva coseno que da un modelo aproximado de los datos. Algunas calculadoras para graficar son capaces de encontrar una curva seno o coseno que mejor se ajuste al conjunto de datos dado. El método que aplican estas calculadoras es similar al método para determinar la recta del mejor ajuste, que se explica en las páginas 239 a 240.

Ejemplo 2 Ajuste de una curva seno a los datos

a) Utilice una calculadora o una computadora para encontrar una curva seno que mejor se ajuste a los datos de la profundidad del agua de la tabla 1 de la página 459.

b) Compare sus resultados con el modelo encontrado en el ejemplo 1.

Solución

a) Utilizamos los datos de la tabla 1 y el comando **SinReg** en la calculadora TI-83, y obtuvimos una función de la forma

```
SinReg
 y=a*sin(bx+c)+d
  a=3.097877596
  b=.5268322697
  c=.5493035195
  d=8.424021899
```

Resultados que proporciona la TI-83 con la función **SinReg**.

$$y = a\,\text{sen}(bt + c) + d$$

donde

$$a = 3.1 \qquad b = 0.53$$

$$c = 0.55 \qquad d = 8.42$$

Entonces, la función seno que mejor se ajusta a los datos es

$$y = 3.1\,\text{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42$$

b) Para comparar esto con la función del ejemplo 1, cambiamos la función seno a función coseno usando la fórmula de reducción sen $u = \cos(u - \pi/2)$.

$$\begin{aligned} y &= 3.1\,\text{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42 \\ &= 3.1\cos\left(0.53t + 0.55 - \frac{\pi}{2}\right) + 8.42 && \text{Fórmula de reducción} \\ &= 3.1\cos(0.53t - 1.02) + 8.42 \\ &= 3.1\cos(0.53(t - 1.92)) + 8.42 && \text{Se saca 0.53 como factor} \end{aligned}$$

Al comparar lo anterior con la función obtenida en el ejemplo 1, vemos que hay pequeñas diferencias en los coeficientes. En la figura 6 elaboramos una gráfica de dispersión de los datos junto con la función seno del mejor ajuste.

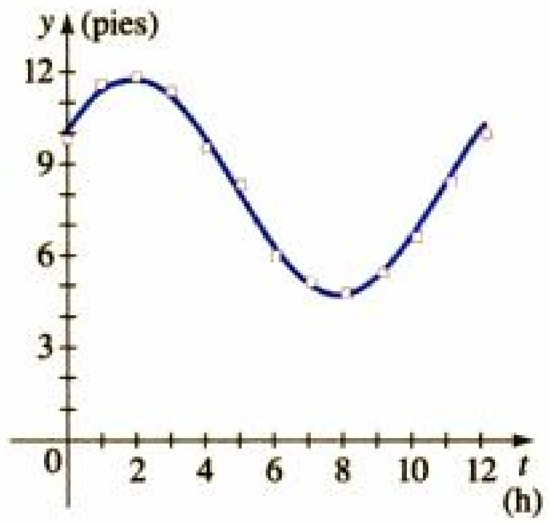


Figura 6 ■

En el ejemplo 1 estimamos los valores de amplitud, periodo y desplazamiento a partir de los datos. En el ejemplo 2, la calculadora obtuvo la curva seno que se ajusta mejor a los datos, es decir, la curva que se desvía lo menos posible de los datos según lo explicado en la página 240. Las maneras distintas de obtener el modelo explican las diferencias en las funciones.

Problemas

1–4 ■ Modelado de datos periódicos Se proporciona un conjunto de datos.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Determine una función coseno de la forma $y = a\cos(\omega(t - c)) + b$ que modele los datos como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función encontrada en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta la curva a los datos?

d) Mediante una calculadora para graficar determine la función seno que mejor se ajusta a los datos, como en el ejemplo 2.

e) Compare las funciones que ha determinado en los incisos b) y d). [Aplique la fórmula de reducción sen $u = \cos(u - \pi/2)$.]

1.

t	y
0	2.1
2	1.1
4	−0.8
6	−2.1
8	−1.3
10	0.6
12	1.9
14	1.5

2.

t	y
0	190
25	175
50	155
75	125
100	110
125	95
150	105
175	120
200	140
225	165
250	185
275	200
300	195
325	185
350	165

3.

t	y
0.1	21.1
0.2	23.6
0.3	24.5
0.4	21.7
0.5	17.5
0.6	12.0
0.7	5.6
0.8	2.2
0.9	1.0
1.0	3.5
1.1	7.6
1.2	13.2
1.3	18.4
1.4	23.0
1.5	25.1

4.

t	y
0.0	0.56
0.5	0.45
1.0	0.29
1.5	0.13
2.0	0.05
2.5	−0.10
3.0	0.02
3.5	0.12
4.0	0.26
4.5	0.43
5.0	0.54
5.5	0.63
6.0	0.59

5. **Cambios en la temperatura anual** En la tabla se proporcionan las temperaturas medias mensuales en el condado de Montgomery, Maryland.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2.

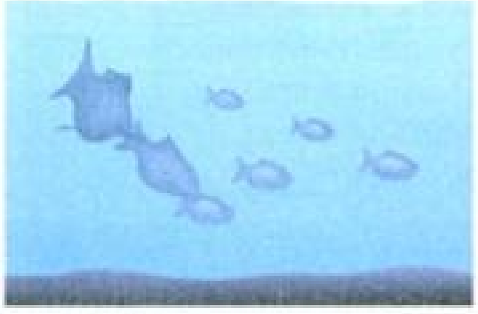
Mes	Temperatura media (°F)	Mes	Temperatura media (°F)
Enero	40.0	Julio	85.8
Febrero	43.1	Agosto	83.9
Marzo	54.6	Septiembre	76.9
Abril	64.2	Octubre	66.8
Mayo	73.8	Noviembre	55.5
Junio	81.8	Diciembre	44.5

6. **Ritmos circadianos** El ritmo circadiano (de las palabras latinas *circa*, casi, y *diem*, día) es el patrón biológico diario según el cual se modifican la temperatura corporal, la presión sanguínea y otras variables fisiológicas. Los datos en la tabla que sigue muestran cambios característicos en la temperatura corporal del hombre a lo largo de un periodo de 24 horas ($t = 0$ corresponde a la medianoche).
   a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
   b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.
   c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.
   d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2.

Tiempo	Temperatura corporal (°C)	Tiempo	Temperatura corporal (°C)
0	36.8	14	37.3
2	36.7	16	37.4
4	36.6	18	37.3
6	36.7	20	37.2
8	36.8	22	37.0
10	37.0	24	36.8
12	37.2		

7. **Población de predadores** Cuando dos especies interactúan en la relación predador/presa (véase página 432), las poblaciones de ambas especies tienden a variar en forma sinusoidal. En un cierto condado del oeste medio, el principal alimento de la lechuza bodeguera es el ratón de campo y otros mamíferos pequeños. En la tabla se proporciona la población de las lechuzas en este condado cada 1 de julio a lo largo de un periodo de 12 años.
   a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
   b) Encuentre una curva seno que modele los datos, como en el ejemplo 1.
   c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.
   d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2. Compare su respuesta con la del inciso b).

Año	Población de lechuzas
0	50
1	62
2	73
3	80
4	71
5	60
6	51
7	43
8	29
9	20
10	28
11	41
12	49



8. Supervivencia de los salmones Por razones que todavía no están muy claras, la cantidad de crías de salmón que sobreviven al viaje desde sus áreas de desove del lecho del río hasta el mar abierto varía año con año aproximadamente en forma sinusoidal. En la tabla se muestra la cantidad de salmones que nacen en un cierto arroyo y que emprenden el camino hasta el Estrecho de Georgia. Los datos están en miles de crías en un periodo de 16 años.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva seno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2. Compare su respuesta con la del inciso b).

Año	Salmón (en miles)	Año	Salmón (en miles)
1985	43	1993	56
1986	36	1994	63
1987	27	1995	57
1988	23	1996	50
1989	26	1997	44
1990	33	1998	38
1991	43	1999	30
1992	50	2000	22

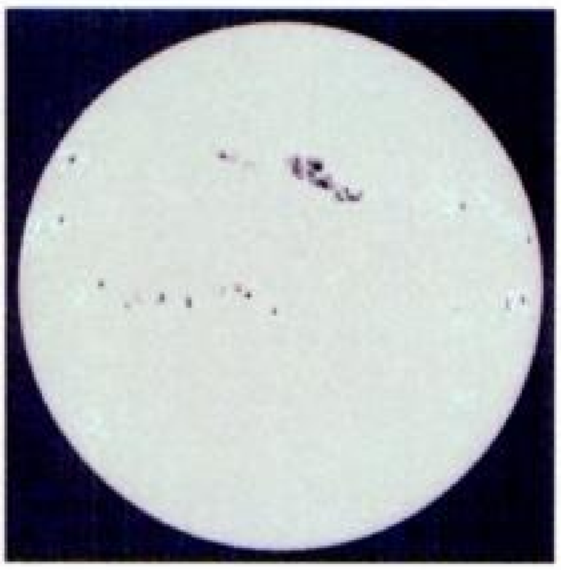
9. Actividad de las manchas solares Las manchas solares son regiones relativamente "frías" en el Sol, que se ven como puntos más oscuros cuando se les observa con filtros solares especiales. La cantidad de manchas solares varía en un ciclo de 11 años. En la tabla se proporciona la cuenta de manchas solares promedio diaria en el periodo de 1975 a 2004.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajusta a los datos, como en el ejemplo 2. Compare esta respuesta con la del inciso b).



SOHO/ESA/NASA/Photo Researchers, Inc.

Año	Manchas solares	Año	Manchas solares	Año	Manchas solares
1975	16	1985	18	1995	18
1976	13	1986	13	1996	9
1977	28	1987	29	1997	21
1978	93	1988	100	1998	64
1979	155	1989	158	1999	93
1980	155	1990	143	2000	119
1981	140	1991	146	2001	111
1982	116	1992	94	2002	104
1983	67	1993	55	2003	64
1984	46	1994	30	2004	40

6 Funciones trigonométricas de ángulos

Esquema del capítulo

Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas pero equivalentes: como funciones de números reales (capítulo 5) o como funciones de ángulos (capítulo 6). Los dos enfoques a la trigonometría son independientes entre sí, así que se puede estudiar primero el capítulo 5 o el capítulo 6. Se estudian ambos métodos porque distintas aplicaciones requieren que sean consideradas desde un punto de vista distinto. El enfoque en este capítulo lleva a problemas geométricos en los que se requiere hallar ángulos y distancias.

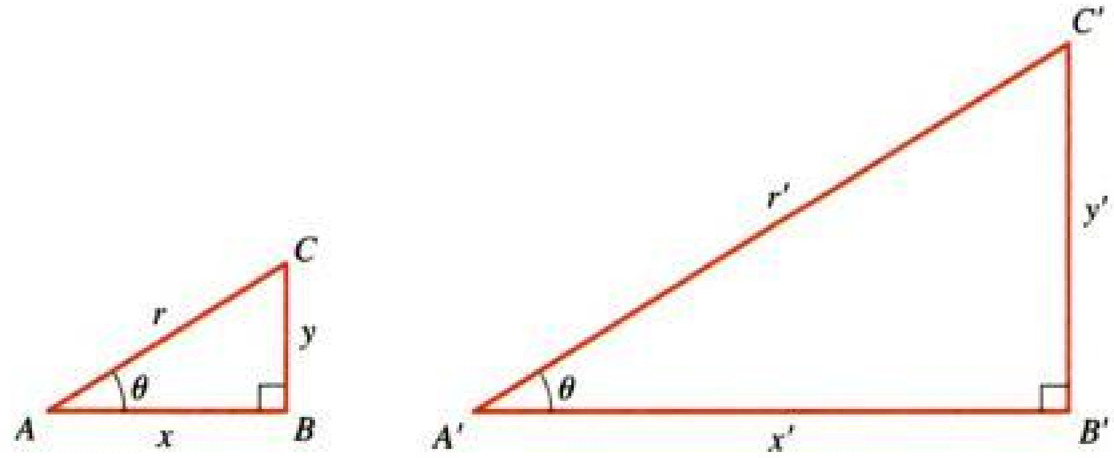
Gregory D. Dimijian M.D.

Suponga que se quiere hallar la distancia al Sol. Usar una cinta métrica es por supuesto impráctico, así que se necesita algo más que la medición simple para enfrentar este problema. Los ángulos son fáciles de medir; por ejemplo, se puede hallar el ángulo formado entre el Sol, la Tierra y la Luna apuntando simplemente al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar una relación entre ángulos y distancias. Así que si se tiene una manera de determinar distancias a partir de ángulos, se podría hallar la distancia al Sol sin ir allá. Las funciones trigonométricas proporcionan las herramientas necesarias.

Si ABC es un ángulo recto con ángulo agudo θ como en la figura, entonces se define sen θ como la relación y/r. El triángulo $A'B'C'$ es similar al triángulo ABC, por lo tanto

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$$

Aunque las distancias y' y r' son diferentes de y y r, la relación dada es la misma. Así, en *cualquier* ángulo recto con ángulo agudo θ, la relación del ángulo opuesto θ a la hipotenusa es la misma y se llama sen θ. Las otras relaciones trigonométricas se definen de manera similar.



En este capítulo se aprende cómo se pueden usar las funciones trigonométricas para medir distancias sobre la tierra y el espacio. En los ejercicios 61 y 62 de la página 487, se determina en realidad la distancia al Sol por medio de trigonometría.

La trigonometría del ángulo recto tiene muchas otras aplicaciones, desde determinar la estructura celular óptima en una colmena (ejercicio 67, página 497) hasta explicar la forma de un arco iris (ejercicio 69, página 498). En *Enfoque en el modelado*, páginas 522 y 523, se ve cómo un topógrafo emplea la trigonometría para trazar el mapa de una ciudad.

6.1 Medida angular

Un **ángulo** AOB, consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (véase la figura 1). A menudo se interpreta un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 se llama el **lado inicial** y R_2 se llama el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se considera **positivo** al ángulo, y si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, se considera que el ángulo es **negativo**.

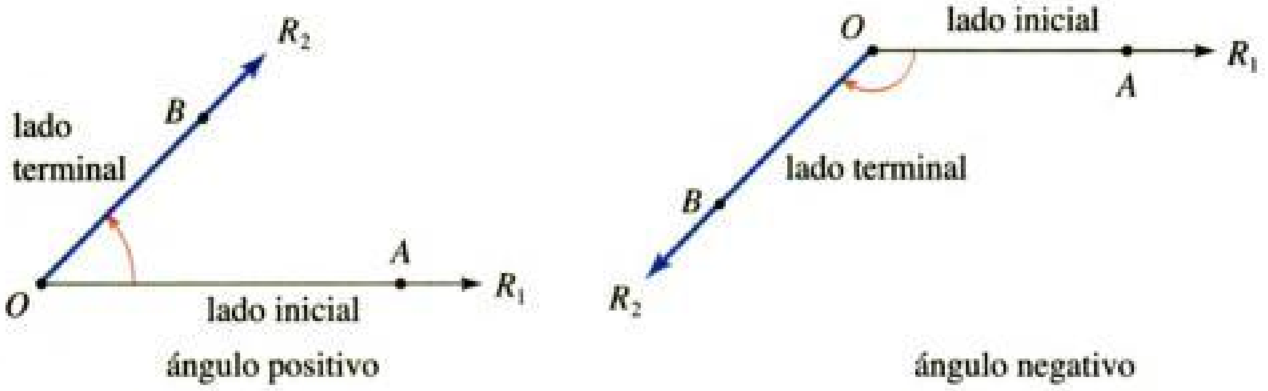


Figura 1

Medida angular

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación respecto al vértice requerida para mover R_1 sobre R_2. De manera intuitiva, esto es cuánto se "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 se forma al rotar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de las matemáticas, se usa un modo más natural de medir ángulos, la *medida en radianes*. La cantidad que se abre un ángulo se mide a lo largo del arco de un círculo de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

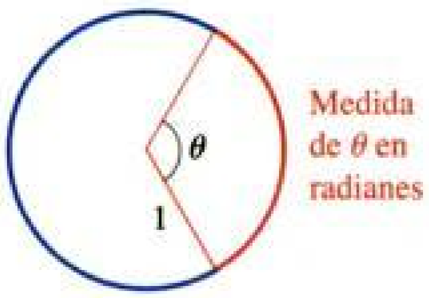


Figura 2

Definición de medida en radianes

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (véase la figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene medida π rad y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que está subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de un círculo unitario tiene medida 2 en radianes (véase la figura 3).

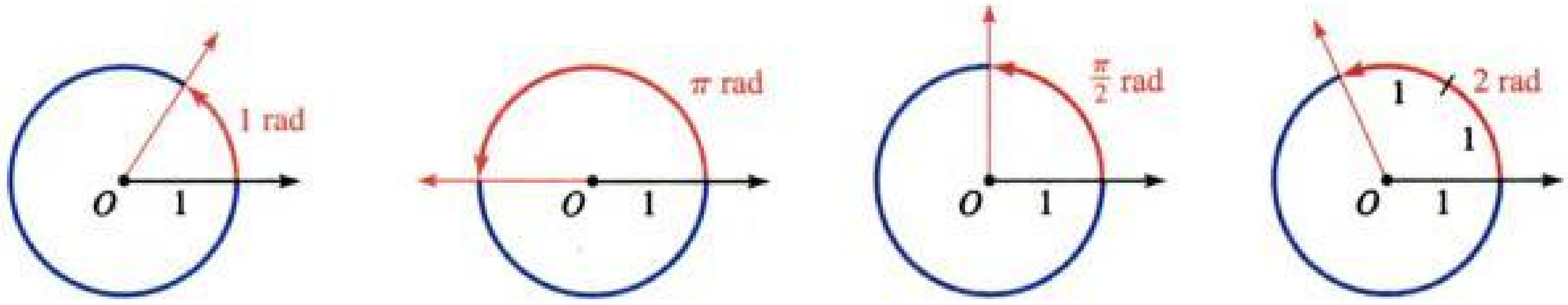


Figura 3
Medida en radianes

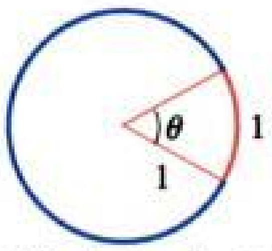
Puesto que una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π, se obtiene la siguiente relación entre estos dos métodos de medición de ángulo.

Relación entre grados y radianes

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

Figura 4

Para tener cierta idea del tamaño de un radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296^\circ \qquad \text{y} \qquad 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo θ de medida 1 rad se muestra en la figura 4.

Ejemplo 1 Convertir entre radianes y grados

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

a) $60^\circ = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$ b) $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30^\circ$ ■

Una nota sobre terminología: con frecuencia se emplea una frase como "un ángulo de 30°" para indicar *un ángulo cuya medida es* 30°. Asimismo, para un ángulo θ, se escribe $\theta = 30°$ o $\theta = \pi/6$ para indicar que la *medida de θ es* 30° o $\pi/6$ *rad*. Cuando no se da ninguna unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

Ángulos en posición estándar

Un ángulo está en **posición estándar** si se dibuja en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje x positivo. En la figura 5 se dan ejemplos de ángulos en posición estándar.

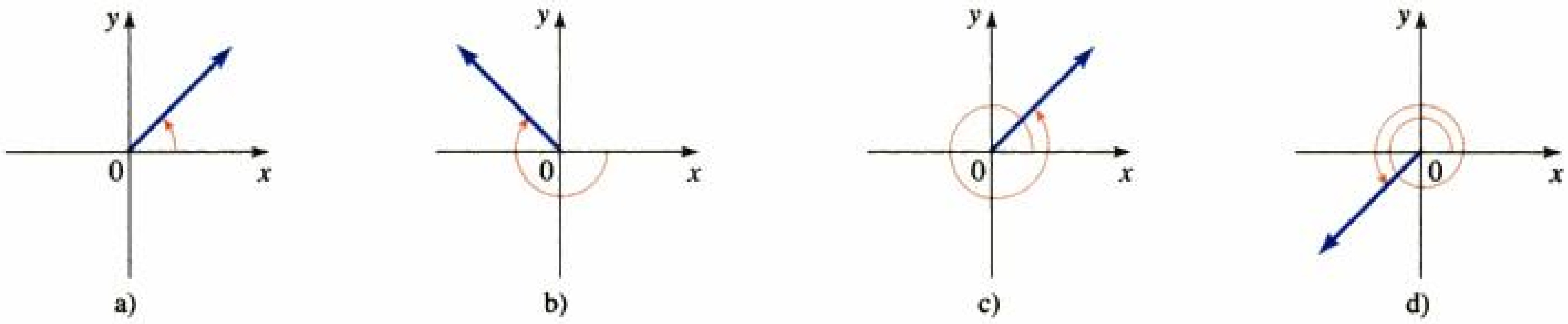


Figura 5
Ángulos en posición estándar

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si coinciden sus lados. En la figura 5 los ángulos en a) y c) son coterminales.

Ejemplo 2 Ángulos coterminales

a) Encuentre ángulos que son coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición estándar.

b) Encuentre ángulos que son coterminales con el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ en posición estándar.

Solución

a) Para hallar ángulos que son coterminales con θ, se añade un múltiplo de 360°. Por lo tanto

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, se resta cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. (Véase la figura 6.)

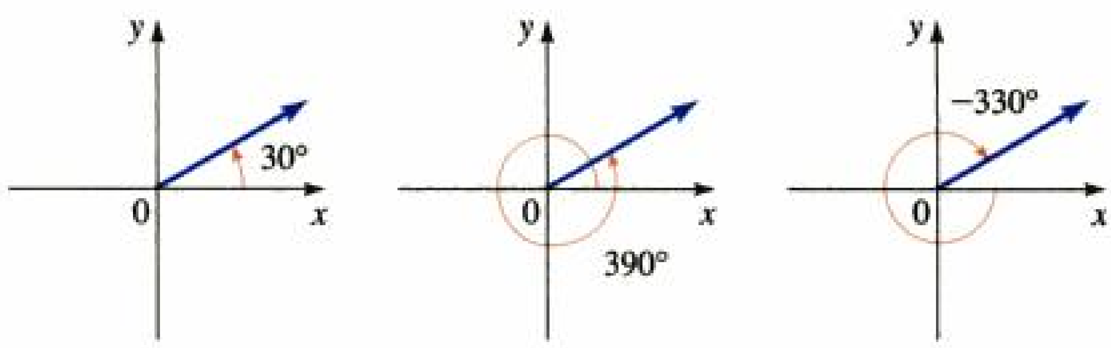


Figura 6

b) Para hallar ángulos positivos que son coterminales con θ, se suma cualquier múltiplo de 2π. Por lo tanto

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, se resta cualquier múltiplo de 2π. Así,

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con θ. (Véase la figura 7.)

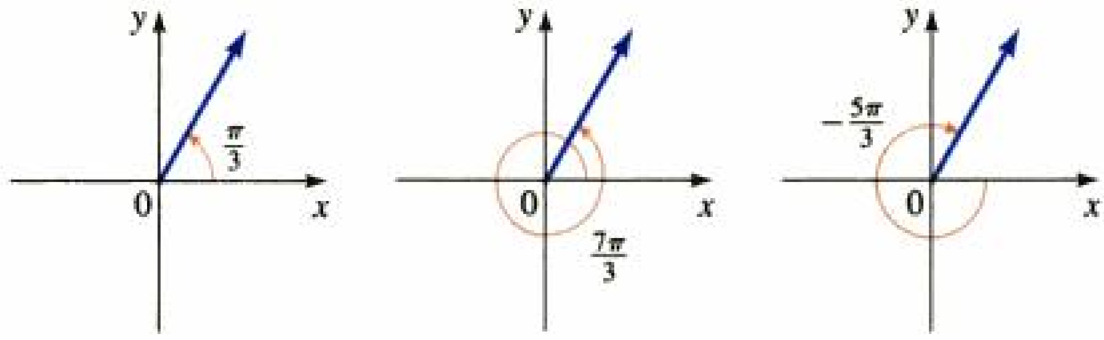


Figura 7

■

Ejemplo 3 Ángulos coterminales

Encuentre un ángulo con medida entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo de medida 1290° en posición estándar.

Solución Se puede restar 360° tantas veces como se desee de 1290°, y el ángulo resultante será coterminal con 1290°. Por lo tanto, 1290° − 360° = 930° es coterminal con 1290° y, por lo tanto, es el ángulo 1290° − 2(360)° = 570°.

Para hallar el ángulo que se desea entre 0° y 360°, se resta 360° de 1290° cuantas veces sea necesario. Una manera eficaz de hacer esto es determinar cuántas veces 360° entra en 1290°, es decir, se divide 1290 entre 360, y el residuo será el ángulo que se está buscando. Se ve que 360 entra tres veces en 1290 con un residuo de 210. Por lo tanto, 210° es el ángulo deseado (véase la figura 8).

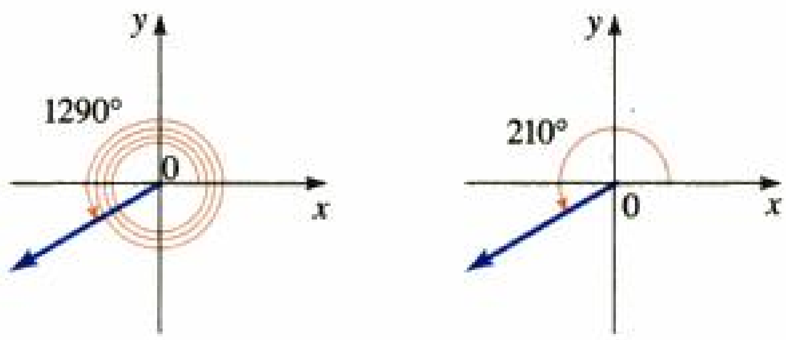


Figura 8

■

Longitud de un arco circular

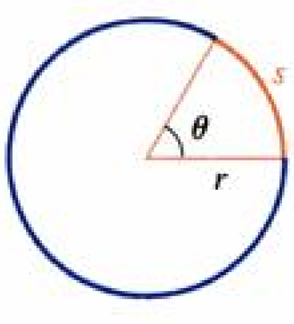


Figura 9
$s = \theta r$

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Así, un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende el ángulo θ (véase la figura 9) es

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia del círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

Longitud de un arco

En un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Al despejar θ, se obtiene la fórmula importante

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

Esta fórmula permite definir la medida en radianes por medio de un círculo de cualquier radio r. La medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco circular que subtiende θ en un círculo de radio r (véase la figura 10).

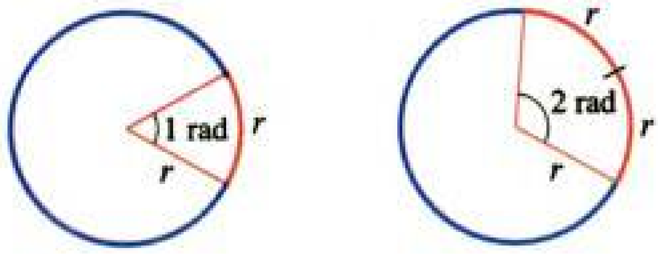


Figura 10
La medida en radianes de θ es el número de "radios" que se pueden ajustar en el arco que subtiende θ; de ahí el término *radián*.

Ejemplo 4 Longitud de arco y medida angular

a) Encuentre la longitud de un arco de un círculo con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

b) Un ángulo central θ en un círculo de radio 4 m es subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre una medida de θ en radianes.

Solución

a) Del ejemplo 1(b) se ve que $30° = \pi/6$ rad. Por lo tanto, la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}\text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

b) Por la fórmula $\theta = s/r$, se tiene

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\text{ rad}$$

■

Área de un sector circular

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área del círculo entero (véase la figura 11). Por lo tanto el área de este sector es

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{área del círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta$$

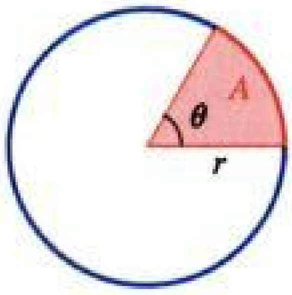


Figura 11
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

Área de un sector circular

En un círculo de radio r, el área A de un sector con ángulo central de θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Ejemplo 5 Área de un sector

Encuentre el área de un sector de un círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 m.

Solución Para usar la fórmula del área de un sector circular, se debe encontrar el ángulo central del sector en radianes: $60° = 60(\pi/180)$ rad $= \pi/3$ rad. Así, el área del sector es

La fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2}\text{ m}^2$$ ■

Movimiento circular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo como se muestra en la figura 12. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular. La **velocidad lineal** es la razón a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. La **velocidad angular** es la razón a la cual cambia el ángulo central θ, así que la velocidad angular es el número de radianes que cambia este ángulo dividido entre el tiempo transcurrido.

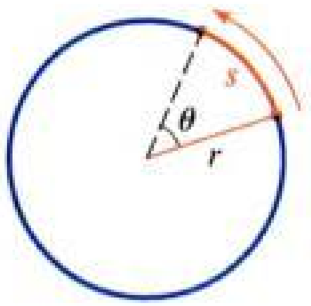


Figura 12

Velocidad lineal y velocidad angular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r y el rayo desde el centro del círculo al punto cruza θ radianes en el tiempo t. Sea $s = r\theta$ la distancia que viaja el punto en el tiempo t. Entonces la velocidad del objeto está dada por

El símbolo ω es la letra griega "omega."

Velocidad angular $\quad \omega = \dfrac{\theta}{t}$

Velocidad lineal $\quad v = \dfrac{s}{t}$

Ejemplo 6 Hallar la velocidad lineal y la velocidad angular

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo a una velocidad de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

Solución En 10 s, el ángulo θ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Así que la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi\text{ rad}}{10\text{ s}} = 3\pi\text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi r = 15 \cdot 2\pi \cdot 3 = 90\pi$ pies. Por lo tanto, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi \text{ pies}}{10 \text{ s}} = 9\pi \text{ pies/s}$$ ■

Hay que observarse que la velocidad angular *no* depende del radio del círculo, sino sólo del ángulo θ. Sin embargo, si se conoce la velocidad angular ω y el radio r, se puede encontrar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

Relación entre velocidad lineal y angular

Si un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r con velocidad angular ω, entonces su velocidad lineal v está dada por

$$v = r\omega$$

Ejemplo 7 Hallar la velocidad lineal a partir de la velocidad angular

Una mujer va en una bicicleta cuyas ruedas tienen 26 pulgadas de diámetro. Si las ruedas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que está viajando, en millas/h.

Solución La velocidad angular de las ruedas es $2\pi \cdot 125 = 250\pi$ radianes/min. Puesto que las ruedas tienen de radio 13 pulg (la mitad del diámetro), la velocidad lineal es

$$v = r\omega = 13 \cdot 250\pi \approx 10\,210.2 \text{ pulg/min}$$

Puesto que hay 12 pulgadas por pie, 5280 pies por milla y 60 minutos por hora, su velocidad en millas por hora es

$$\frac{10\,210.2 \text{ pulg/min} \times 60 \text{ min/h}}{12 \text{ pulg/pies} \times 5280 \text{ pies/mi}} = \frac{612\,612 \text{ pulg/h}}{63\,360 \text{ pulg/mi}}$$
$$\approx 9.7 \text{ mi/h}$$ ■

6.1 Ejercicios

1–12 ■ Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida de grados dada.

1. 72° **2.** 54° **3.** −45°

4. −60° **5.** −75° **6.** −300°

7. 1080° **8.** 3960° **9.** 96°

10. 15° **11.** 7.5° **12.** 202.5°

13–24 ■ Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida en radianes dada.

13. $\frac{7\pi}{6}$ **14.** $\frac{11\pi}{3}$ **15.** $-\frac{5\pi}{4}$

16. $-\frac{3\pi}{2}$ **17.** 3 **18.** −2

19. −1.2 **20.** 3.4 **21.** $\frac{\pi}{10}$

22. $\frac{5\pi}{18}$ **23.** $-\frac{2\pi}{15}$ **24.** $-\frac{13\pi}{12}$

25–30 ■ Se da la medida de un ángulo es posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que son coterminales con el ángulo dado.

25. 50° **26.** 135° **27.** $\frac{3\pi}{4}$

28. $\frac{11\pi}{6}$ **29.** $-\frac{\pi}{4}$ **30.** $-45°$

31–36 ■ Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminales.

31. $70°,\ 430°$ **32.** $-30°,\ 330°$

33. $\frac{5\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6}$ **34.** $\frac{32\pi}{3},\ \frac{11\pi}{3}$

35. $155°,\ 875°$ **36.** $50°,\ 340°$

37–42 ■ Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo dado.

37. $733°$ **38.** $361°$

39. $1110°$ **40.** $-100°$

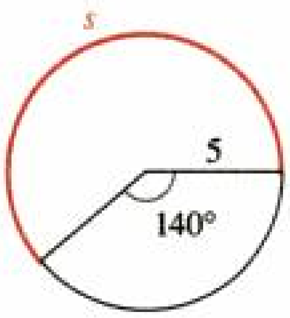
41. $-800°$ **42.** $1270°$

43–48 ■ Encuentre el ángulo entre 0 y 2π que es coterminal con el ángulo dado.

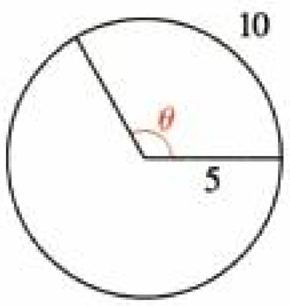
43. $\frac{17\pi}{6}$ **44.** $-\frac{7\pi}{3}$ **45.** 87π

46. 10 **47.** $\frac{17\pi}{4}$ **48.** $\frac{51\pi}{2}$

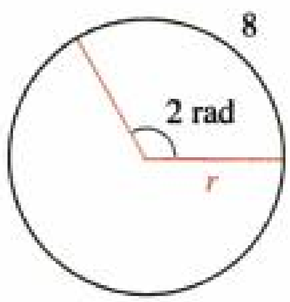
49. Encuentre la longitud del arco s en la figura.



50. Encuentre el ángulo θ en la figura.



51. Encuentre el radio r del círculo en la figura.



52. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 m.

53. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 2 mi.

54. Un ángulo central θ en un círculo de radio 5 m es subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

55. Un arco de longitud 100 m subtiende un ángulo central θ en un círculo de radio 50 m. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

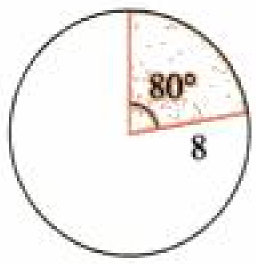
56. Un arco circular de longitud 3 pies subtiende un ángulo central de 25°. Encuentre el radio del círculo.

57. Determine el radio del círculo si un arco de longitud 6 m en el círculo subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

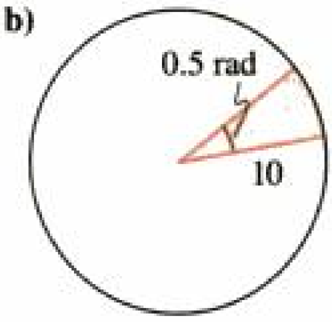
58. Halle el radio del círculo si un arco de longitud 4 pies en el círculo subtiende un ángulo central de 135°.

59. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.

a)

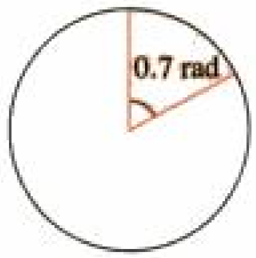


b)

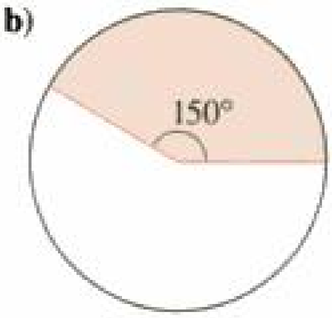


60. Determine el radio de cada círculo si el área del sector es 12.

a)



b)



61. Encuentre el área de un sector con un ángulo central 1 radián en un círculo de radio 10 m.

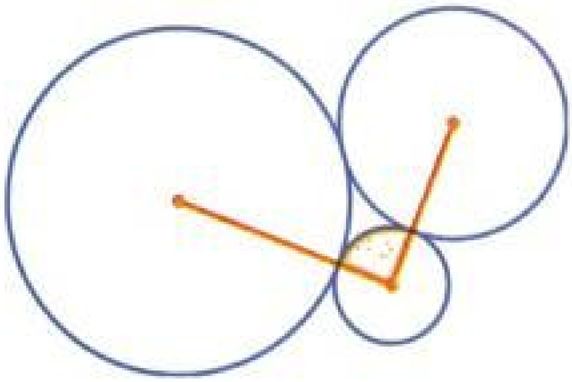
62. Un sector de un círculo tiene un ángulo central de 60°. Encuentre el área del sector si el radio del círculo es 3 millas.

63. El área de un sector de un círculo con un ángulo central de 2 radianes es 16 m^2. Encuentre el radio del círculo.

64. El sector de un círculo con radio de 24 millas tiene una superficie de 288 millas^2. Encuentre el ángulo central del sector.

65. El área de un círculo es 72 cm^2. Encuentre el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

66. Tres círculos con radios 1, 2 y 3 pies son externamente tangentes entre sí, como se ilustra en la figura de la página siguiente. Encuentre el área del sector del círculo de radio 1 que es cortado por los segmentos de recta que unen el centro de ese círculo con los centros de los otros dos círculos.



Aplicaciones

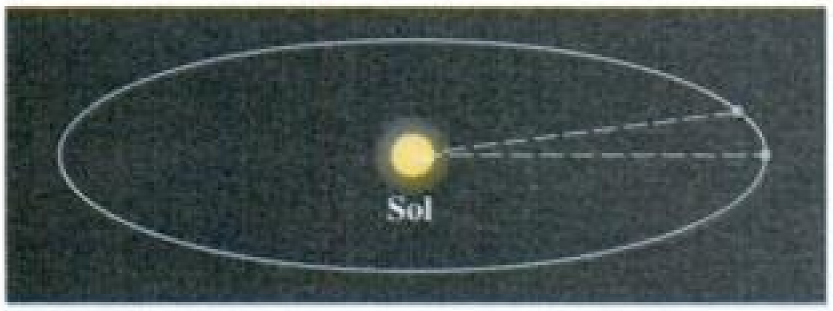
67. Distancia recorrida Las ruedas de un automóvil miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué tan lejos viajará el automóvil (en millas) si su ruedas giran 10 000 veces sin deslizamiento?

68. Revoluciones de las ruedas ¿Cuántas revoluciones dará una rueda de 30 pulgadas de diámetro cuando el automóvil recorre una distancia de una milla.

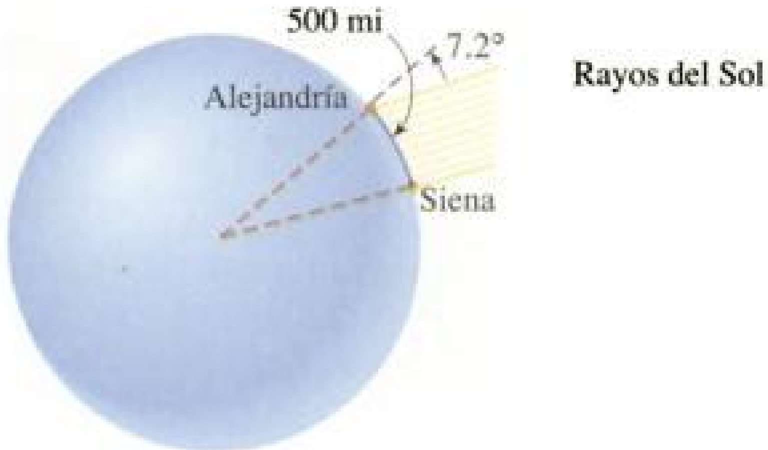
69. Latitudes Pittsburgh, Pennsylvania y Miami, Florida, se encuentran aproximadamente sobre el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami, 25.5° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

70. Latitudes Memphis, Tennessee y Nueva Orleans, Louisiana, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Memphis tiene latitud 35° N y Nueva Orleans, 30° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

71. Órbita de la Tierra Encuentre la distancia que viaja la Tierra en un día y su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es un círculo de radio 93 millones de millas. [La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es en realidad una *elipse* con el Sol en un foco (véase la sección 10.2). Esta elipse, sin embargo, tiene excentricidad muy pequeña, así que es aproximadamente circular.]

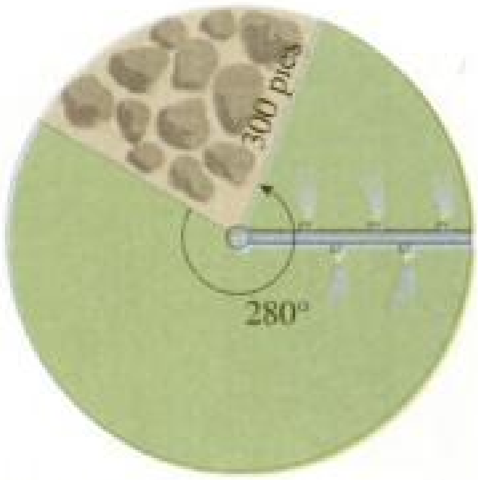


72. Circunferencia de la Tierra El matemático griego Eratóstenes (276-195 a.C.) midió la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones. Él observó que en cierto día el Sol brillaba directamente en un pozo profundo en Siena (en la actualidad Assuán). Al mismo tiempo en Alejandría, 500 millas al norte (en el mismo meridiano), los rayos del Sol brillaban a un ángulo de 7.2° respecto al cenit. Use esta información y la figura para hallar el radio y la circunferencia de la Tierra.

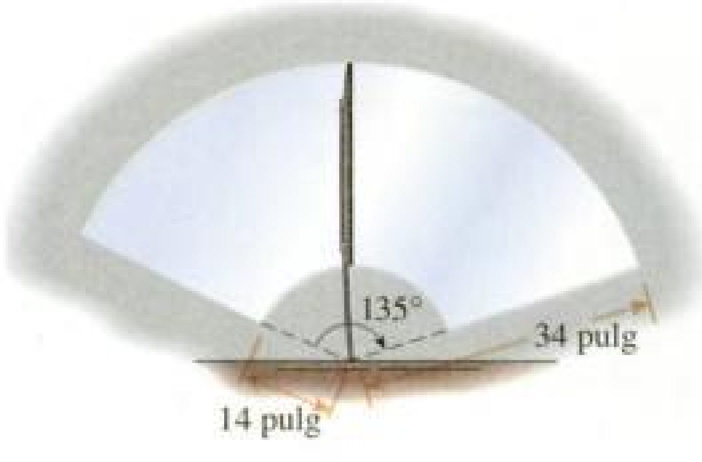


73. Millas naúticas Encuentre la distancia a lo largo de un arco en la superficie de la Tierra que subtiende un ángulo central de 1 minuto (1 minuto = $\frac{1}{60}$ de grado). La distancia se llama una *milla náutica*. (El radio de la Tierra mide 3960 millas.)

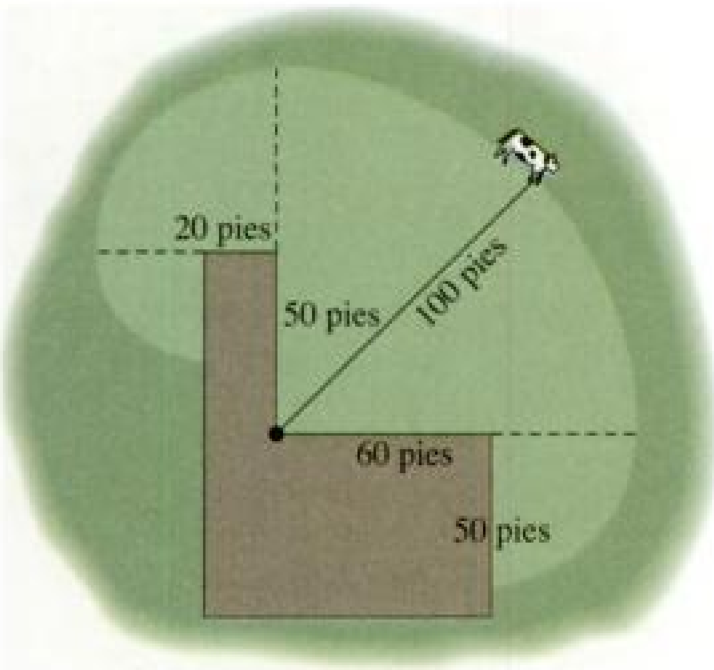
74. Irrigación Un sistema de irrigación emplea un tubo rociador recto de 300 pies de largo que gira alrededor de un punto central como se ilustra. Debido a un obstáculo sólo se permite que el tubo gire 280°. Encuentre el área irrigada por este sistema.



75. Limpia parabrisas Los extremos superior e inferior de una hoja de limpia parabrisas están a 34 pulg y 14 pulg del punto central, respectivamente. Mientras está en operación el limpiador abarca 135°. Encuentre el área barrida por la hoja.



76. La vaca amarrada Una vaca está sujeta a una cuerda de 100 pies a la esquina interna de un edificio en forma de L, como se muestra en la figura. Encuentre el área en la que puede pastar la vaca.



77. Malacate Se emplea un malacate de radio 2 pies para levantar cargas pesadas. Si el malacate da 8 revoluciones cada 15 s, encuentre la velocidad a la cual sube la carga.

78. Ventilador Un ventilador de techo con aspas de 16 pulg gira a 45 rpm.

a) Determine el velocidad angular del ventilador en rad/min.

b) Encuentre la velocidad lineal de las puntas de las aspas en pulg/min.

79. Sierra radial Una sierra radial tiene una aspa con un radio de 6 pulg. Suponga que el aspa gira a 1000 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del aspa en rad/min.

b) Determine la velocidad radial de los dientes de la sierra en pies/s.

80. Velocidad en el Ecuador La Tierra gira respecto a su eje una vez cada 23 h 56 min 4 s, y el radio de la Tierra mide 3960 millas. Calcule la velocidad lineal de un punto en el Ecuador en millas/h.

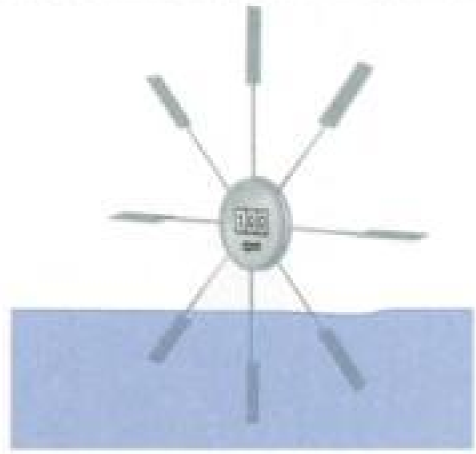
81. Velocidad de un automóvil Las ruedas de un automóvil tienen un radio de 11 pulg y giran a 600 rpm. Determine la velocidad del automóvil en millas/h.

82. Ruedas de un camión Un camión con ruedas de 48 pulg de diámetro viaja a 50 millas/h.

a) Encuentre la velocidad angular de las ruedas en rad/min.

b) ¿Cuántas revoluciones por minuto dan las ruedas?

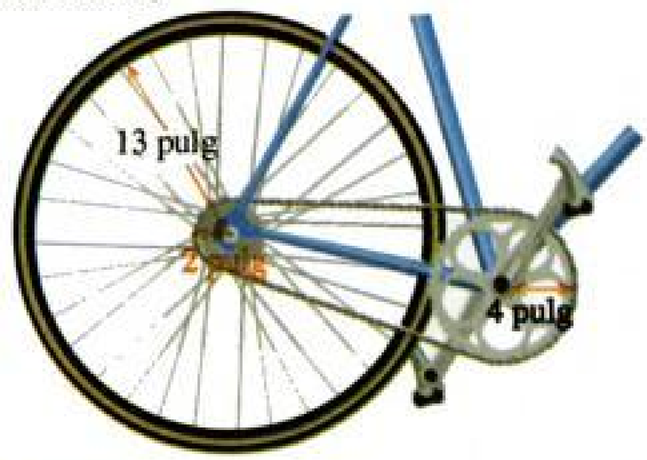
83. Velocidad de una corriente Para medir la velocidad de una corriente, los científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observan la velocidad a la cual gira. Si la rueda de paletas tiene un radio de 0.20 m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en m/s.



84. Rueda de bicicleta En la figura se muestran las coronas dentadas y la cadena de una bicicleta. La corona dentada de los pedales tiene un radio de 4 pulg, la corona dentada de la rueda tiene un radio de 2 pulg y la rueda tiene un radio de 13 pulg. El ciclista pedalea a 40 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular de la corona dentada de la rueda.

b) Determine la velocidad de la bicicleta. (Suponga que la rueda gira a la misma velocidad que la corona dentada de la rueda.)



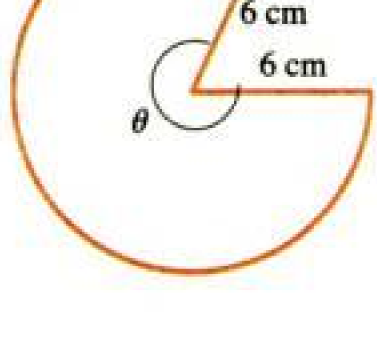
85. Taza cónica Una taza cónica se construye a partir de una pieza circular de papel con radio 6 cm al cortar un sector y unir los bordes como se muestra. Suponga que $\theta = 5\pi/3$.

a) Encuentre la circunferencia C de la abertura de la taza.

b) Obtenga el radio r de la abertura de la taza. [*Sugerencia*: use $C = 2\pi r$.]

c) Encuentre la altura h de la taza. [*Sugerencia*: use el teorema de Pitágoras.]

d) Encuentre el volumen de la taza.



86. Taza cónica En este ejercicio se determina el volumen de la taza cónica del ejercicio 85 para un ángulo θ.

a) Siga los pasos del ejercicio 85 para mostrar que el volumen de la taza como una función de θ es

$$V(\theta) = \frac{9}{\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

b) Grafique la función V.

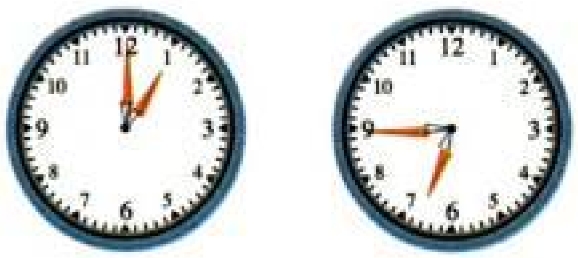
c) ¿Para qué ángulo θ el volumen de la taza es un máximo?

Descubrimiento • Debate

87. Formas diferentes de medir ángulos La costumbre de medir ángulos por medio de grados, con 360° en un círculo, data de los antiguos babilonios, quienes usaron un sistema numérico basado en grupos de 60. Otro sistema de medición de ángulos divide el círculo en 400 unidades, llamadas *gradianes*. En este sistema un ángulo recto mide 100 gradianes, de modo que se ajusta en el sistema numérico de base 10.

Escriba un ensayo corto que compare las ventajas y desventajas de estos dos sistemas y el sistema de radianes para medir ángulos. ¿Cuál sistema preferiría?

88. Relojes y ángulos En una hora, el minutero de un reloj recorre un círculo completo y la manecilla que marca las horas se mueve $\frac{1}{12}$ de un círculo. ¿Cuántos radianes se mueven el minutero y el horario entre la 1:00 P.M. y las 6.45 P.M. (en el mismo día)?



6.2 Trigonometría de ángulos rectos

En esta sección se estudian ciertas relaciones de los lados de triángulos rectángulos, llamadas relaciones trigonométricas y se dan varias aplicaciones.

Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (véase la figura 1).

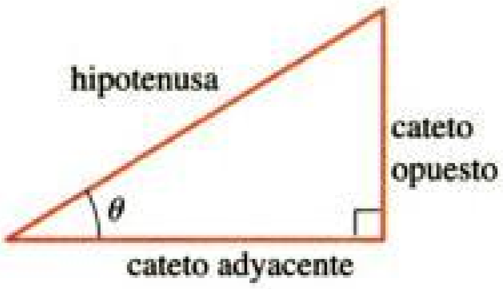


Figura 1

Relaciones trigonométricas

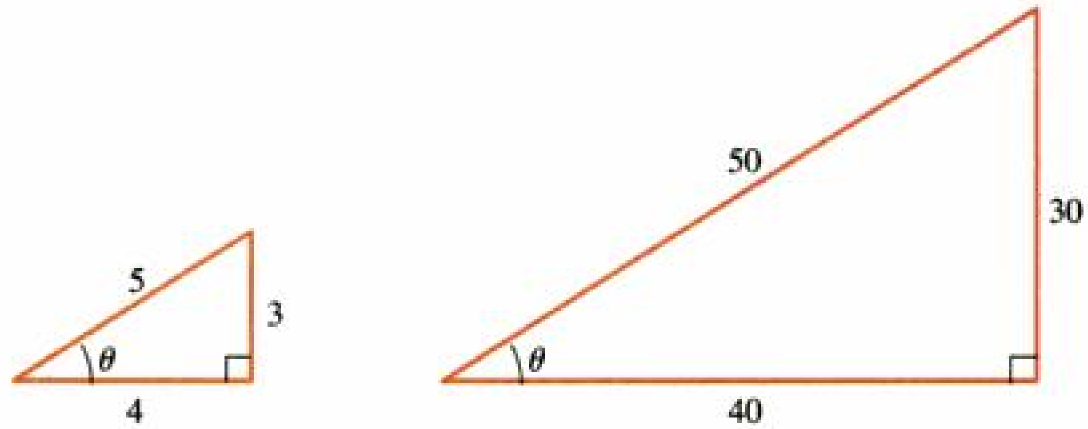
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Los símbolos que se usan para estas relaciones son abreviaturas para sus nombres completos: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente.** Puesto que dos triángulos rectángulos con ángulo θ son similares, estas relaciones son las mismas,

Hiparco (cerca de 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para una función estrechamente relacionada con la moderna función seno y evaluó ángulos a intervalos de medio grado. Estas son consideradas las primeras tablas trigonométricas. Utilizó sus tablas sobre todo para calcular las trayectorias de los planetas por el cielo.

sin importar el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ (véase la figura 2).



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

Figura 2

Ejemplo 1 Hallar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en la figura 3.

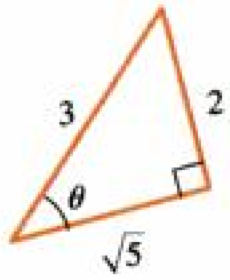


Figura 3

Solución

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

■

Ejemplo 2 Hallar relaciones trigonométricas

Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, bosqueje un triángulo rectángulo con ángulo α agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

Solución Puesto que $\cos\alpha$ se define como la relación del cateto adyacente a la hipotenusa, se bosqueja un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un cateto de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o $x^2 = 7$, por lo tanto, $x = \sqrt{7}$. Después se usa el triángulo de la figura 4 para hallar las relaciones.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

■

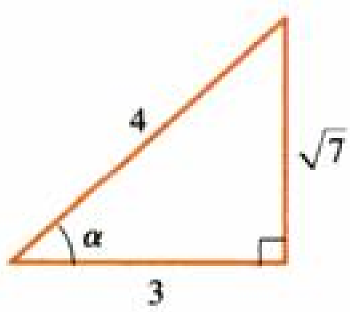


Figura 4

Triángulos especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del teorema de Pitágoras. Puesto que se usan con frecuencia, se mencionan aquí.

El primer triángulo se obtiene al dibujar una diagonal en un cuadrado de lado 1 (véase la figura 5 en la página 480). Por el teorema de Pitágoras esta diagonal tiene

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) fue un famoso científico griego, músico, astrónomo y geómetra. En su libro *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon*, estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en media luna, el triángulo que forman el Sol, la Luna y la Tierra tiene un ángulo recto en la Luna. Su método fue muy similar al descrito en el ejercicio 61 de esta sección. Aristarco fue el primero en adelantar la teoría de que la Tierra y los planetas se mueven alrededor del Sol, una idea que no tuvo completa aceptación hasta después del tiempo de Copérnico, 1800 años después. Por esta razón es común llamarlo el "Copérnico de la antigüedad".

longitud $\sqrt{2}$. El triángulo resultante tiene ángulos 45°, 45° y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, se empieza con un triángulo equilátero ABC de lado 2 y se dibuja la bisectriz perpendicular DB de la base, como en la figura 6. Por el teorema de Pitágoras la longitud de DB es $\sqrt{3}$. Puesto que DB biseca al ángulo ABC, se obtiene un triángulo con ángulos 30°, 60° y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

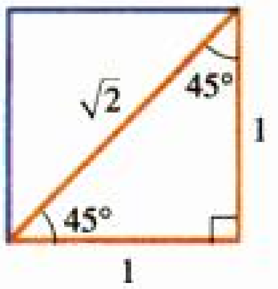


Figura 5

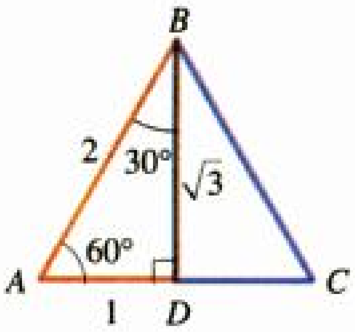


Figura 6

Ahora se pueden usar los triángulos especiales de las figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$). Éstos se listan en la tabla 1.

Tabla 1 Valores de la relaciones trigonométricas para ángulos especiales.

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Es útil recordar estas relaciones trigonométricas especiales porque se presentan con frecuencia. Por supuesto, se pueden recordar con facilidad si se recuerdan los triángulos de las que se obtuvieron.

Para hallar los valores de las relaciones trigonométricas para otros ángulos, se emplea una calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) usados para hallar las relaciones trigonométricas se programan directamente en las calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se pulsa la tecla SEN, la calculadora computa una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras proporcionan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de éstas por medio de las siguientes *relaciones recíprocas*.

Para una explicación de métodos numéricos, véase la nota al margen en la página 436.

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Se debe comprobar que estas relaciones se deducen inmediatamente de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

Se sigue la convención de que cuando se escribe sen t, *se denota el seno del ángulo cuya medida en radianes es* t. Por ejemplo, sen 1 significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Al usar una calculadora para hallar un valor aproximado para este número, fije su calculadora en el modo radianes; encontrará que

$$\operatorname{sen} 1 \approx 0.841471$$

Si desea hallar el seno del ángulo cuya medida es 1°, coloque su calculadora en el modo de grados; encontrará que

$$\operatorname{sen} 1^\circ \approx 0.0174524$$

Ejemplo 3 Cómo usar una calculadora para hallar relaciones trigonométricas

Con la calculadora en el modo de grados, y escribiendo los resultados correctos hasta cinco decimales, se encuentra que

$$\operatorname{sen} 17^\circ \approx 0.29237 \qquad \sec 88^\circ = \frac{1}{\cos 88^\circ} \approx 28.65371$$

Con la calculadora en el modo de radianes, y escribiendo los resultados correctos hasta cinco decimales, se encuentra que

$$\cos 1.2 \approx 0.36236 \qquad \cot 1.54 = \frac{1}{\tan 1.54} \approx 0.03081$$

■

Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

Ejemplo 4 Resolver un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo ABC, mostrado en la figura 7.

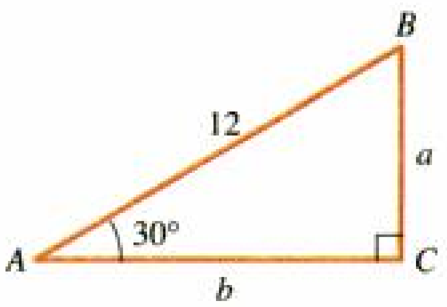


Figura 7

Solución Es claro que $\angle B = 60^\circ$. Para encontrar a, se busca una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos ya conocidos. En este caso, se tiene sen $30^\circ = a/12$, por lo tanto

$$a = 12 \operatorname{sen} 30^\circ = 12(\tfrac{1}{2}) = 6$$

De manera similar, $\cos 30^\circ = b/12$, por lo tanto

$$b = 12 \cos 30^\circ = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

■

Es muy útil saber que, usando la información dada en la figura 8, las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son

$$a = r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

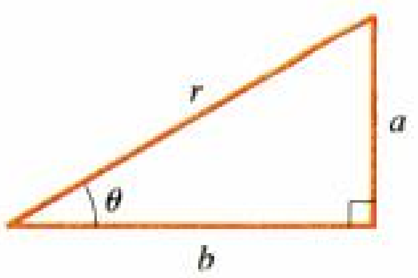


Figura 8
$a = r \operatorname{sen} \theta$
$b = r \cos \theta$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos por medio de relaciones trigonométricas es fundamental en muchos problemas de navegación, levantamiento de planos, astronomía y la medición de distancias. Las aplicaciones consideradas en esta sección siempre tienen que ver con triángulos rectángulos pero, como se verá en las tres secciones siguientes, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son triángulos rectángulos.

Para el análisis de los ejemplos siguientes se requiere cierta terminología. Si un observador está mirando un objeto, entonces la línea del ojo del observador al objeto