Tales de Mileto (alrededor de 625-547 a.C.) es el fundador legendario de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna. Por medio de propiedades de triángulos semejantes, argumentó que la relación de la altura h de la columna a la altura h' de su bastón era igual a la relación de la longitud s de la sombra de la columna a la longitud s' de la sombra del bastón:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Puesto que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales usó un método similar para encontrar la altura de la Gran Pirámide en Egipto, una proeza que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aunque él [el rey de Egipto] te admira [Tales] por otras cosas, le gustó la manera particular mediante la cual mediste la altura de la pirámide sin tener que molestarte y sin ningún instrumento". El principio que usó Tales, el hecho de que relaciones de lados correspondientes de triángulos similares sean iguales, es la base de la materia de la geometría.

se llama **línea de visión** (figura 9). Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación.** Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y depresión se dan para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, como un plano inclinado o una ladera, se usa el término **ángulo de inclinación**.

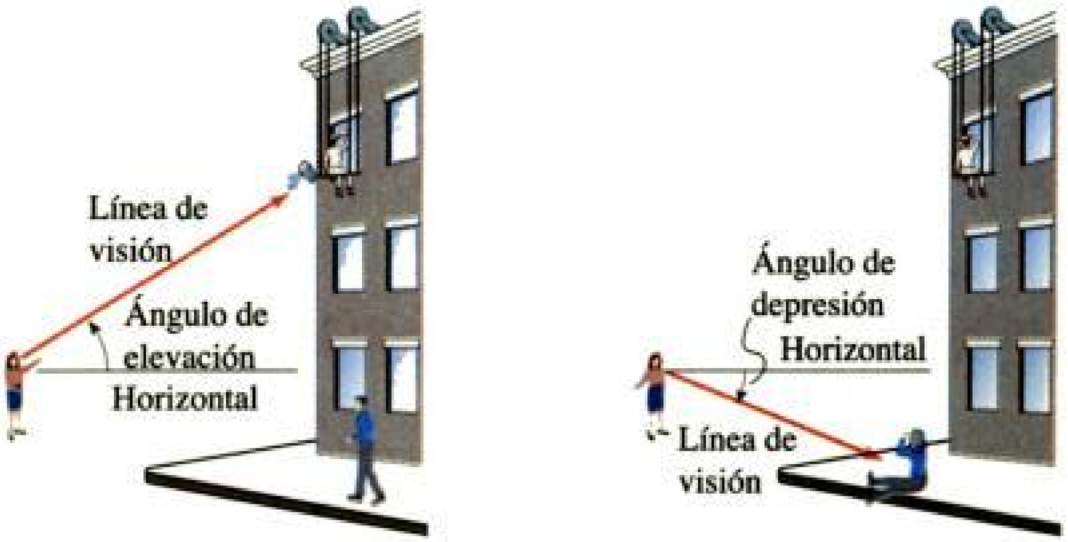


Figura 9

En el ejemplo siguiente se da una aplicación importante de la trigonometría al problema de medición: se mide la altura de un árbol alto sin tener que subirse a él. Aunque el ejemplo es simple, el resultado es fundamental para entender cómo se aplican las relaciones trigonométricas a tales problemas.

Ejemplo 5 Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

Solución Sea h la altura del árbol. De la figura 10 se puede observar que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

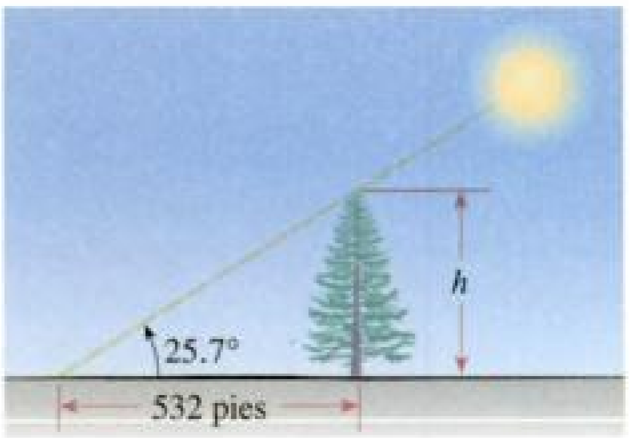


Figura 10 ■

Ejemplo 6 Un problema relacionado con triángulos rectángulos

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a la parte superior de un asta de bandera sobre el edificio es 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta.

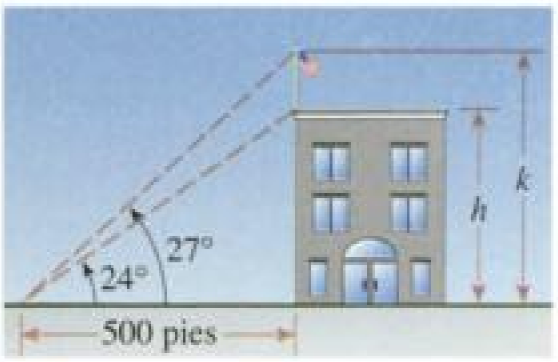


Figura 11

Solución En la figura 11 se ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra de la misma manera como se halló la altura del árbol del ejemplo 5.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Use una calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la longitud del asta de bandera, se determinará primero la altura desde el suelo hasta la parte superior del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27°$$

$$k = 500 \tan 27°$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud del asta, se resta h de k. Por lo tanto, la longitud del asta es cercana a $255 - 223 = 32$ pies. ■

Las teclas SEN^{-1} o INV SEN representan el "seno inverso". En la sección 7.4 se estudian las funciones trigonométricas inversas.

En algunos problemas es necesario hallar un ángulo en un triángulo rectángulo cuyos catetos se dan. Para hacer esto, se usa la tabla 1 (página 480) "hacia atrás"; es decir, se encuentra el *ángulo* con la relación trigonométrica específica. Por ejemplo, si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el ángulo θ? De la tabla 1 se puede decir que $\theta = 30°$. Para hallar un ángulo cuyo seno no se da en la tabla, se usan las teclas SEN^{-1} o INV SEN o ARCSEN en una calculadora. Por ejemplo, si $\operatorname{sen}\theta = 0.8$, se aplica la tecla SEN^{-1} a 0.8 para obtener $\theta = 53.13°$ o 0.927 radianes. La calculadora también proporciona ángulos cuyo coseno o tangente se conocen, con la tecla COS^{-1} o TAN^{-1}.

Ejemplo 7 Determinar el ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies está apoyada en un edificio. Si la base de la escalera está separada 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo que forman la escalera y el edificio?

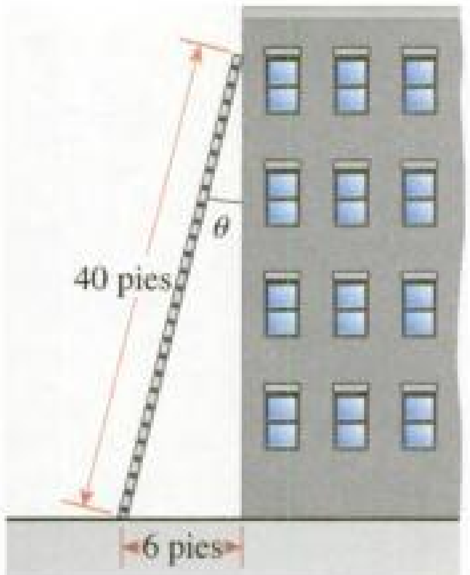


Figura 12

Solución Primero se bosqueja un diagrama como el de la figura 12. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{40} = 0.15$$

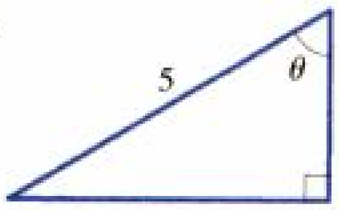
Por lo tanto, θ es el ángulo cuyo seno es 0.15. Para hallar el ángulo θ, se usa la tecla SEN^{-1} en una calculadora. Con la calculadora en el modo de grados, se obtiene

$$\theta \approx 8.6°$$ ■

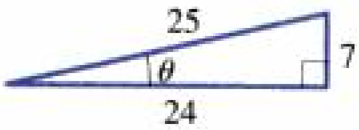
6.2 Ejercicios

1–6 ■ Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo.

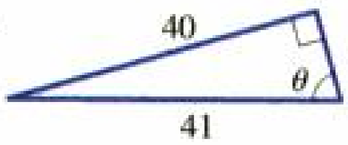
1.



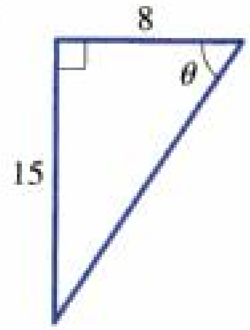
2.



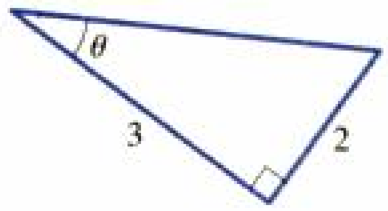
3.



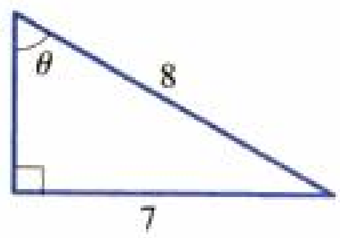
4.



5.

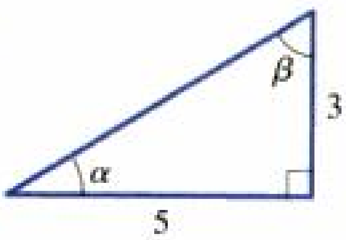


6.

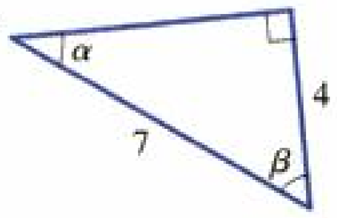


7–8 ■ Encuentre a) sen α, cos β, b) tan α y cot β y c) sec α y csc β.

7.

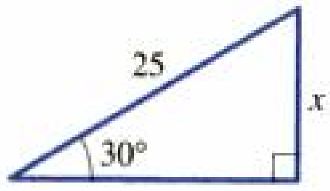


8.

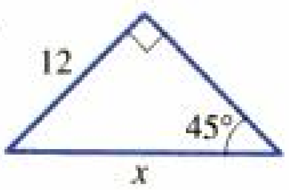


9–14 ■ Encuentre el lado marcado con x. En los ejercicios 13 y 14 exprese su respuesta correcta hasta cinco decimales.

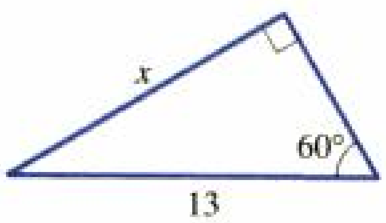
9.



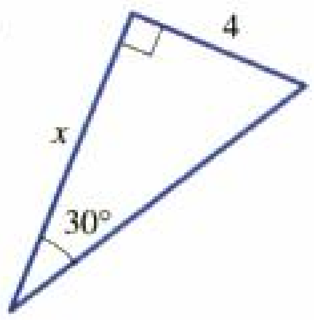
10.



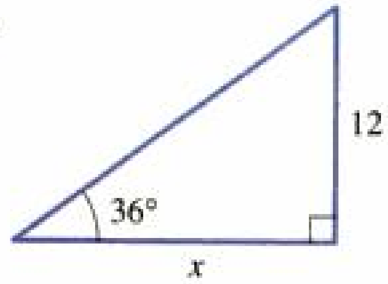
11.



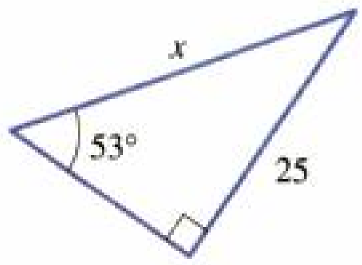
12.



13.

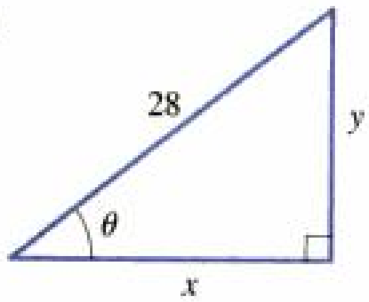


14.

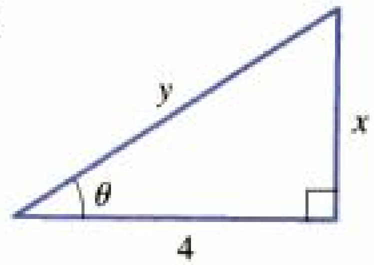


15–16 ■ Exprese x y y en términos de relaciones trigonométricas de θ.

15.



16.



17–22 ■ Bosqueje el triángulo que tiene ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$

18. $\cos\theta = \frac{9}{40}$

19. $\cot\theta = 1$

20. $\tan\theta = \sqrt{3}$

21. $\sec\theta = \frac{7}{2}$

22. $\csc\theta = \frac{13}{12}$

23–28 ■ Evalúe la expresión sin usar una calculadora.

23. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6}$

24. $\operatorname{sen} 30° \csc 30°$

25. $\operatorname{sen} 30° \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cos 30°$

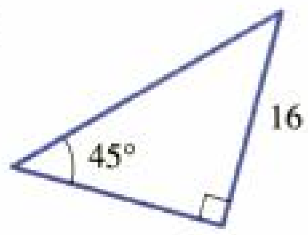
26. $(\operatorname{sen} 60°)^2 + (\cos 60°)^2$

27. $(\cos 30°)^2 - (\operatorname{sen} 30°)^2$

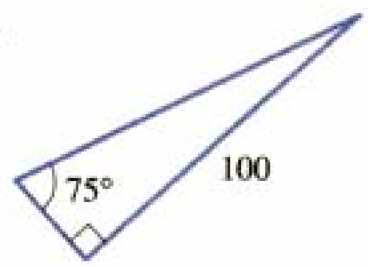
28. $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

29–36 ■ Resuelva el triángulo.

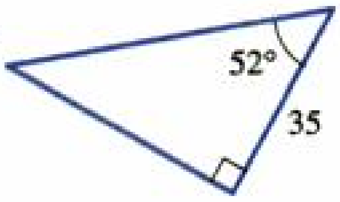
29.



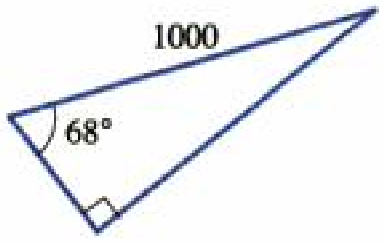
30.



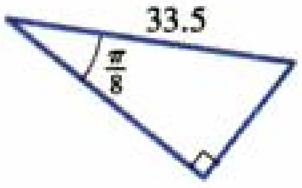
31.



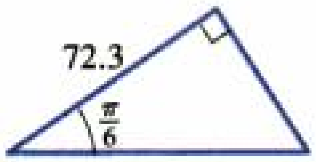
32.



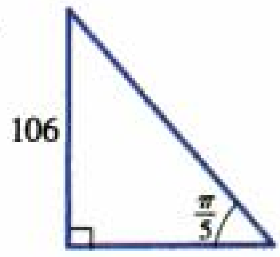
33.



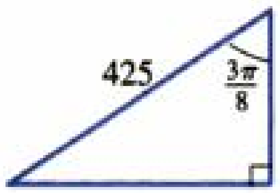
34.



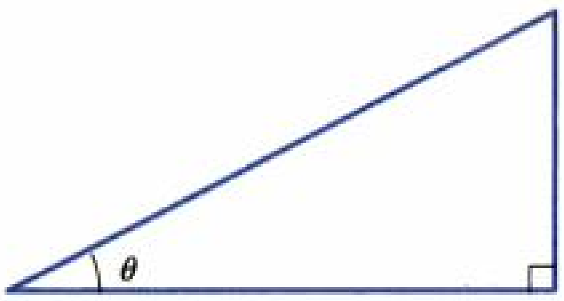
35.



36.



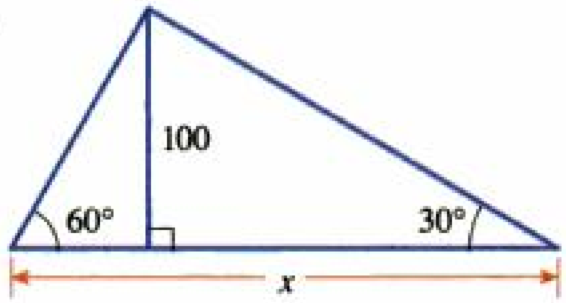
37. Use una regla para medir de manera cuidadosa los lados del triángulo, y después use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de θ.



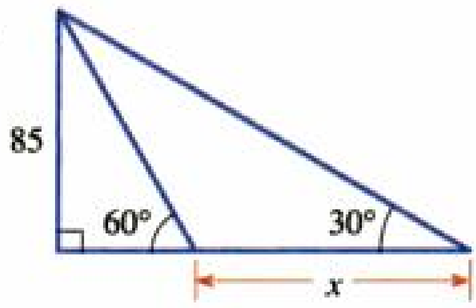
38. Con un transportador, bosqueje el triángulo rectángulo que tiene el ángulo agudo 40°. Mida los lados con cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40°.

39–42 ■ Encuentre x correcta hasta un decimal.

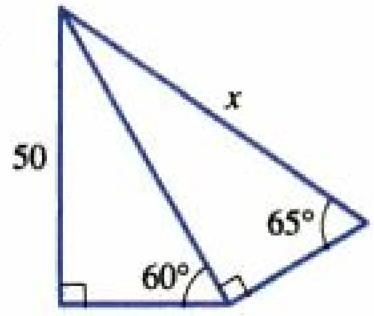
39.



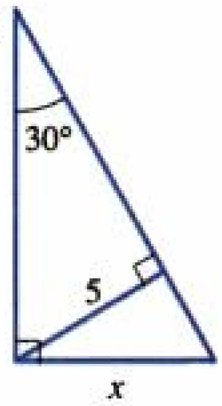
40.



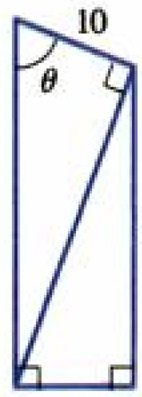
41.



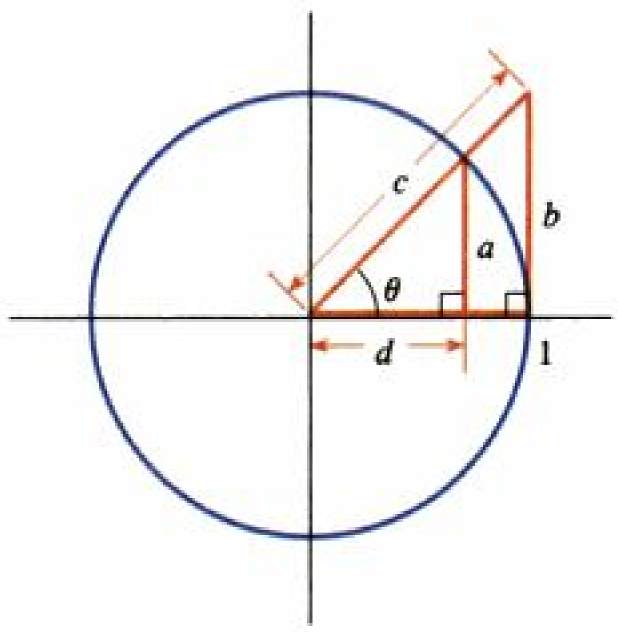
42.



43. Exprese la longitud x en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



44. Exprese la longitud a, b, c y d en la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



Aplicaciones

45. Altura de un edificio Se encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del Empire State en Nueva York es 11° desde el suelo a una distancia de 1 milla a partir de la base del edificio. Use esta información para hallar la altura del edificio Empire State.

46. Gateway Arch Un avión está volando dentro de la vista del Gateway Arch en St. Louis, Missouri, a una altura de 35 000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el Gateway Arch. Encuentra que el ángulo de depresión respecto a un punto sobre el suelo debajo del arco es 22°.

a) ¿Cuál es la distancia entre el plano y el arco?

b) ¿Cuál es la distancia entre un punto sobre el suelo directamente abajo del avión y el arco?

47. Desviación de un rayo láser Un rayo láser se dirigirá hacia el centro de la Luna, pero se desvía 0.5° de su trayectoria deseada.

a) ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su objetivo asignado cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas).

b) El radio de la Luna mide alrededor de 1000 millas. ¿El rayo choca con la Luna?

48. Distancia al mar Desde la parte superior de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión respecto a un barco en el océano es de 23°. ¿Qué tan lejos está el barco desde la base del faro?

49. Escalera apoyada Una escalera de 20 pies se apoya contra un edificio de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera sobre el edificio?

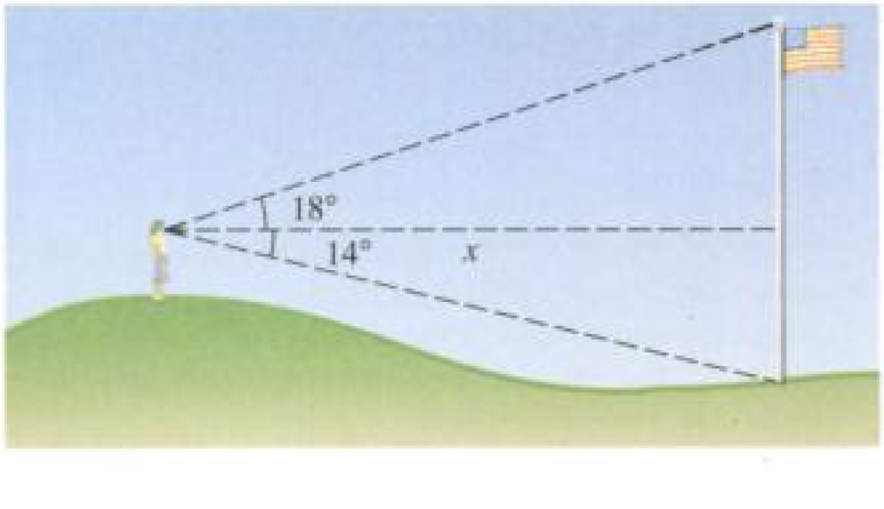
50. Escalera apoyada Una escalera de 20 pies se apoya sobre un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿Qué altura alcanza la escalera sobre el edificio?

51. Ángulo del Sol Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

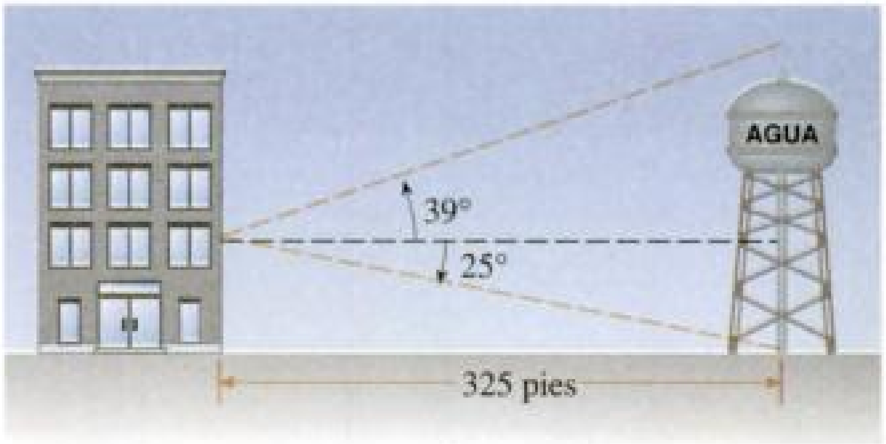
52. Altura de una torre Un cable de sujeción de 600 pies se une a la parte superior de una torre de comunicaciones. Si el alambre forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

53. Elevación de una cometa Una persona yace sobre la playa, volando una cometa. Mantiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo, y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda mide 450 pies de largo, ¿cuál es la altura de la cometa arriba del nivel del suelo?

54. Cálculo de una distancia Una mujer parada sobre una colina ve un asta de bandera que sabe tiene 60 pies de altura. El ángulo de depresión respecto de la parte inferior del asta es 14° y el ángulo de elevación respecto de la parte superior del asta es de 18°. Encuentre la distancia x desde el asta.



55. Altura de una torre Una torre de agua se localiza a 325 pies de un edificio (véase la figura). Desde una ventana en el edificio, un observador nota que el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 39° y que el ángulo de depresión respecto a la base de la torre es de 25°. ¿Qué tan alta es la torre? ¿A qué altura está la ventana?



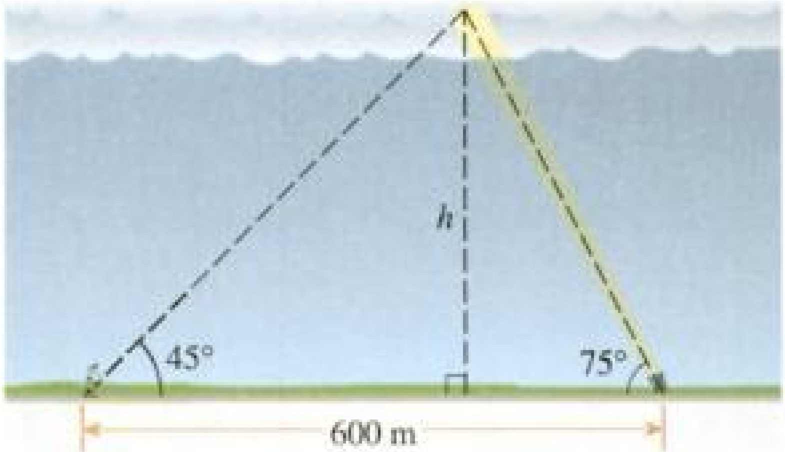
56. Cálculo de una distancia Un aeroplano vuela a una altura de 5150 pies directamente arriba de una carretera recta. Dos automovilistas conducen en la carretera en lados opuestos del avión, y el ángulo de depresión respecto a un automóvil es 35° y respecto al otro es 52°. ¿Cuál es la distancia que separa a los automóviles?

57. Cálculo de una distancia Si ambos automóviles del ejercicio 56 están en un lado del avión y si el ángulo de depresión respecto a un automóvil es de 38° y respecto al otro es de 52°, ¿qué tan apartados están los automóviles?

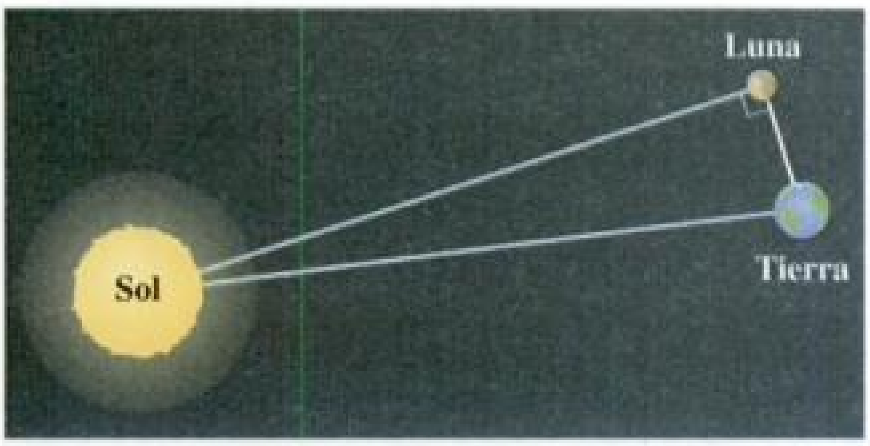
58. Altura de un globo Un globo de aire caliente flota arriba de una carretera recta. Para estimar su altura respecto al nivel del suelo, los aeronautas miden de manera simultánea el ángulo de depresión respecto a dos postes de kilometraje consecutivos sobre la carretera del mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿Cuál es la altitud del globo?

59. Altura de una montaña Para estimar la altura de una montaña arriba de una llanura plana, el ángulo de elevación hasta la parte superior de la montaña es 32°. Mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la llanura, se encuentra que el ángulo de elevación es 35°. Estime la altura de la montaña.

60. Altura de una cubierta de nubes Para medir la altura de la cubierta de nubes en un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75° desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45°. Determine la altura h de la cubierta de nubes.



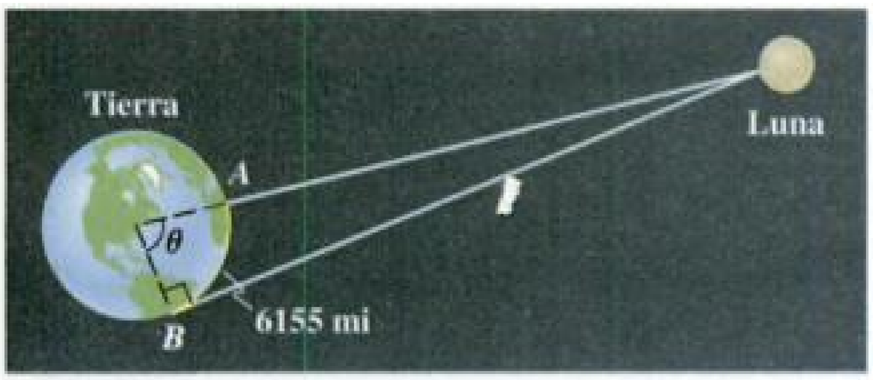
61. **Distancia al Sol** Cuando la Luna se encuentra exactamente en la fase de media luna, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (véase la figura). En ese momento el ángulo que forman el Sol, la Tierra y la Luna es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.



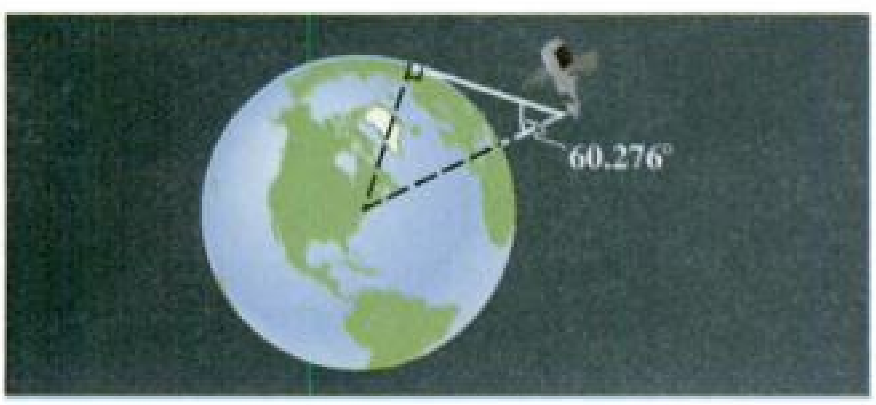
62. **Distancia a la Luna** Para hallar la distancia al Sol como en el ejercicio 61, se necesita conocer la distancia a la Luna. A continuación se da una manera para estimar esa distancia: cuando se ve que la Luna está en su cenit en un punto A sobre la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto B (véase la figura). Los puntos A y B están separados 6155 millas, y el radio de la Tierra mide 3960 millas.

a) Encuentre el ángulo θ en grados.

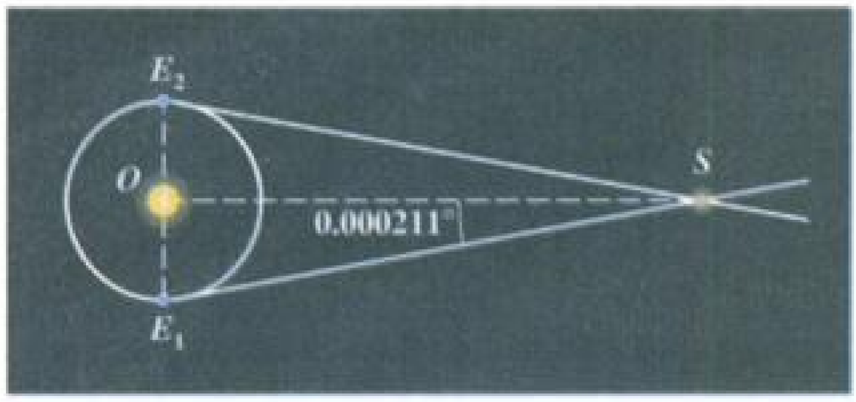
b) Estime la distancia del punto A a la Luna.



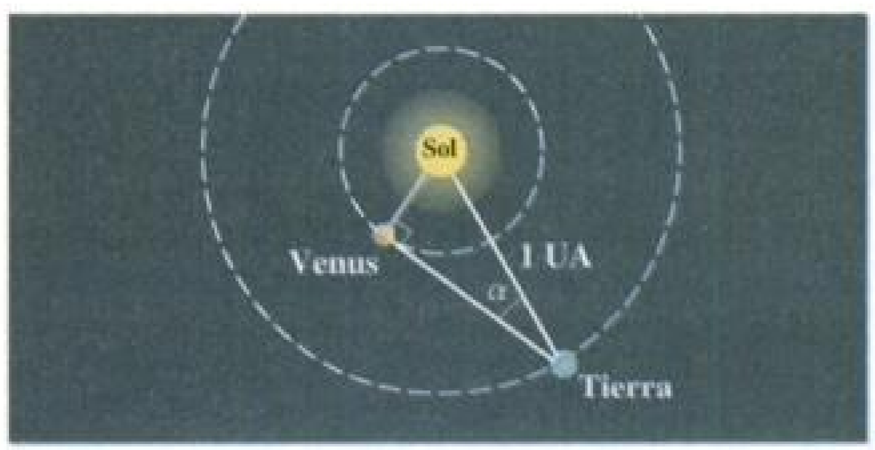
63. **Radio de la Tierra** En el ejercicio 72 de la sección 6.1 se dio un método para determinar el radio de la Tierra. A continuación se describe un método más moderno: desde un satélite a 600 millas arriba de la Tierra, se observa que el ángulo formado por la vertical y la línea de visión al horizonte es 60.276°. Use esta información para hallar el radio de la Tierra.



64. **Paralaje** Para hallar la distancia a estrellas cercanas, se usa el método de paralaje. La idea es hallar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para esto, se observa a la estrella en dos tiempos distintos separados exactamente seis meses, y se registra su cambio de posición aparente. De estas dos observaciones, se puede calcular $\angle E_1SE_2$ (Los tiempos se eligen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea lo más grande posible, lo que garantiza que $\angle E_1OS$ sea 90°.) El ángulo E_1SO se denomina *paralaje* de la estrella. Alpha Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como 9.3×10^7 millas.)



65. **Distancia de Venus al Sol** La **elongación** α de un planeta es el ángulo que forman el planeta, la Tierra y el Sol (véase la figura). Cuando Venus alcanza su elongación máxima de 46.3°, la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con un ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



Descubrimiento • Discusión

66. **Triángulos semejantes** Si dos triángulos son similares, ¿qué propiedades comparten? Explique cómo estas propiedades hacen posible definir relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

6.3 Funciones trigonométricas de ángulos

En la sección precedente se definieron relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Aquí se amplían las relaciones trigonométricas a todos los ángulos definiendo las funciones trigonométricas de ángulos. Con estas funciones se pueden resolver problemas prácticos en los que los ángulos no necesariamente son agudos.

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se muestra en la figura 1a). Coloque θ en la posición estándar como se muestra en la figura 1b).

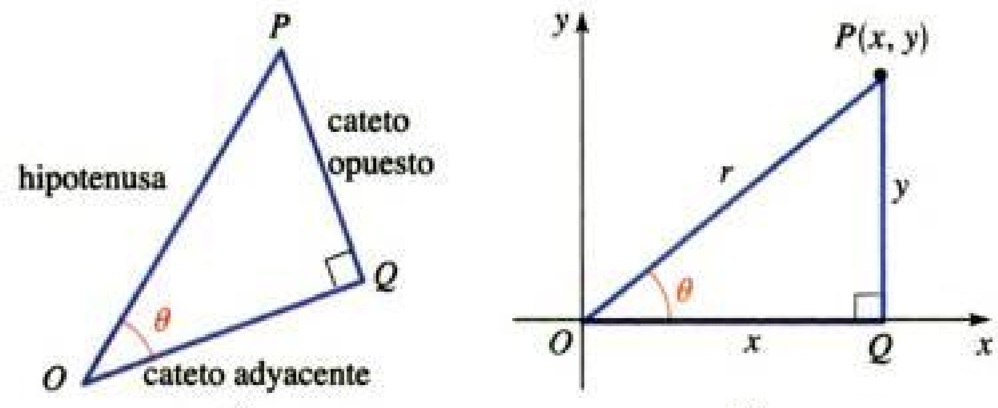


Figura 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el cateto opuesto tiene longitud y y el cateto adyacente tiene longitud x. Por medio del teorema de Pitágoras se puede observar que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar de la misma forma.

Estas observaciones permiten ampliar las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Se definen las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (véase la figura 2).

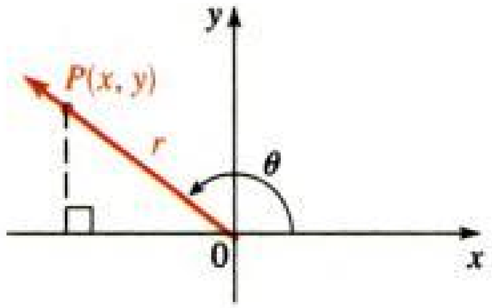


Figura 2

Definición de funciones trigonométricas

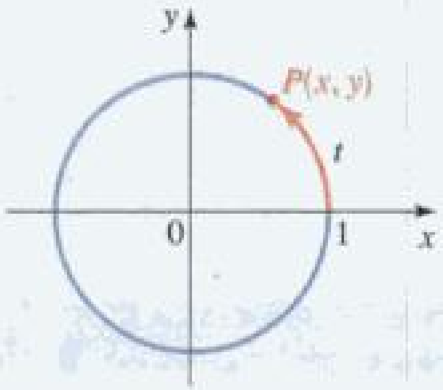
Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto sobre el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

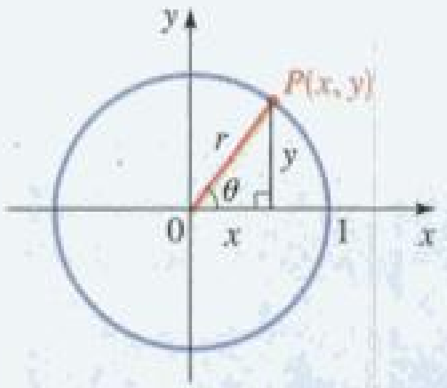
Relación con las funciones trigonométricas de números reales

Es posible que ya haya estudiado las funciones trigonométricas definidas por medio del círculo unitario (capítulo 5). Para ver cómo se relacionan las funciones trigonométricas de un *ángulo*, se comenzará con el círculo unitario en el plano coordenado.



$P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto sobre la circunferencia determinado por un arco de longitud t en el círculo unitario. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro del círculo. Si se baja una perpendicular de P sobre el punto Q sobre el eje x, el triángulo ΔOPQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y, como se muestra en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo rectángulo

Ahora, por la definición de las funciones trigonométricas del *número real t*, se tiene

$$\operatorname{sen} t = y$$

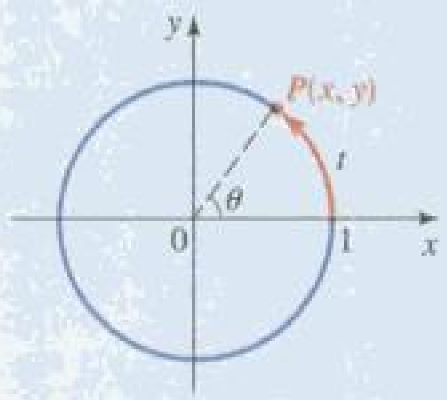
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ, se tiene

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Véase la figura a continuación.) Al comparar las dos formas de definir las funciones trigonométricas, podemos observar que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un determinado número real (el número real es la medida en radianes de θ en un caso o la longitud t de un arco en el otro).



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces se estudia trigonometría en dos formas distintas? Debido a que aplicaciones diferentes requieren que las funciones trigonométricas sean consideradas de forma diferente. (Véanse *Enfoque en el modelado*, páginas 459, 522 y 575 y las secciones 6.2, 6.4 y 6.5.)

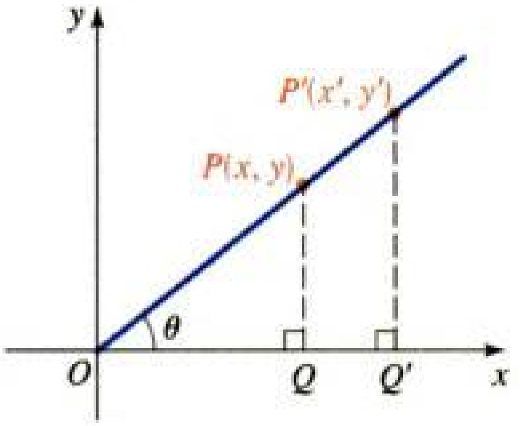


Figura 3

El siguiente dispositivo nemotécnico se puede usar para recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: todas, seno, tangente o coseno.

Esto se puede recordar como "Todas las Señoritas Toman Cálculo".

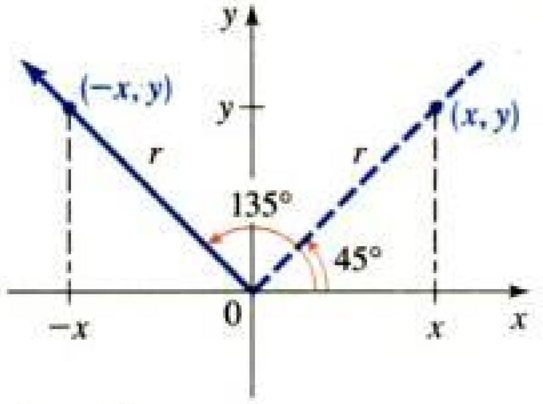


Figura 4

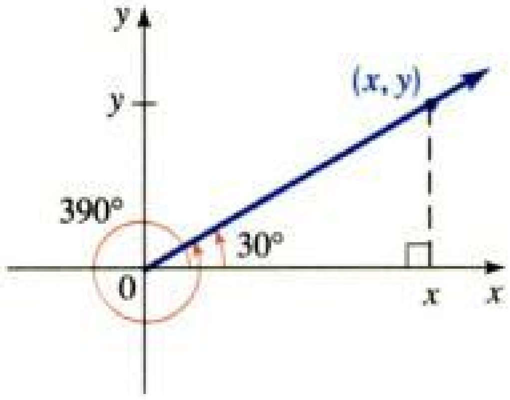


Figura 5

Puesto que la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los que podrían no estar definidas las funciones trigonométricas son los ángulos para los que la coordenada x o y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Estos son los **ángulos de un cuadrante**, ángulos que son coterminales con los ejes coordenados.

Es un hecho crucial que los valores de las funciones trigonométricas *no* dependen de la elección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto sobre el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son similares.

Evaluación de funciones trigonométricas a cualquier ángulo

De la definición se puede observar que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el cuadrante I. Esto es porque x y y son positivos en este cuadrante. [Por supuesto, r es positivo siempre, puesto que es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Sin embargo, si el lado terminal de θ está en el cuadrante II, entonces x es negativa y y es positiva. Así, en el cuadrante II las funciones sen θ csc θ son positivas, y las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar los otros elementos de la tabla siguiente.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Ahora dirigiremos la atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 1 Hallar las funciones trigonométricas de ángulos

Hallar a) cos 135° y b) tan 390°.

Solución

a) De la figura 4 se puede observar que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$ y, puesto que $\cos 45° = \sqrt{2}/2$, se tiene

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la figura 5 es claro que $\tan 390° = \tan 30°$ y, puesto que $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, se tiene

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

■

Del ejemplo 1 se puede observar que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, que las funciones trigonométricas correspondientes de un ángulo agudo. Al ángulo agudo se le llamará *ángulo de referencia.*

Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo en posición estándar. El **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ relacionado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

En la figura 6 se muestra que para encontrar un ángulo de referencia es útil conocer el cuadrante en que se localiza el lado terminal del ángulo.

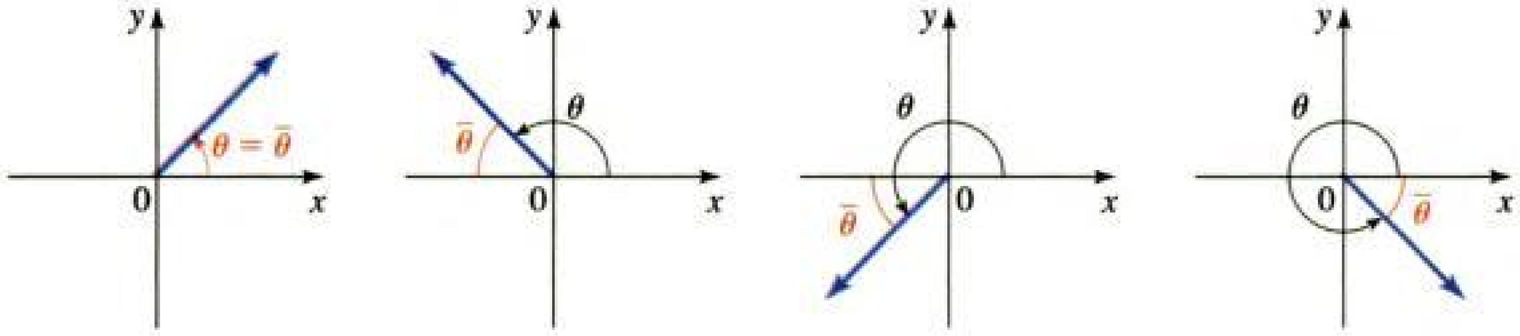


Figura 6
El ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ

Ejemplo 2 Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para a) $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y b) $\theta = 870°$.

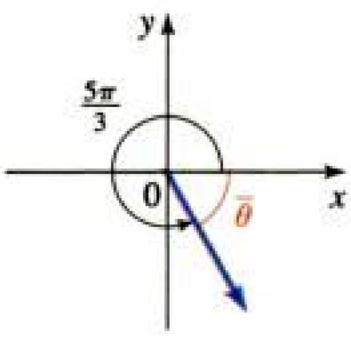


Figura 7

Solución

a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (véase la figura 7). Puesto que el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante IV, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Así, el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante II (véase la figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

■

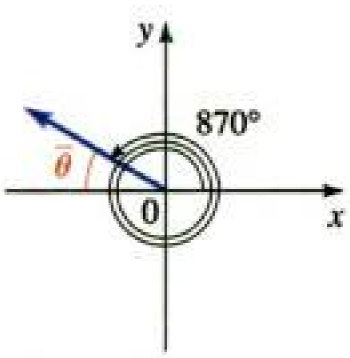


Figura 8

Evaluación de funciones trigonométricas para cualquier ángulo

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, se llevan a cabo los siguientes pasos.

1. Encuentre el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ relacionado con el ángulo θ.
2. Determine el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se localiza θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

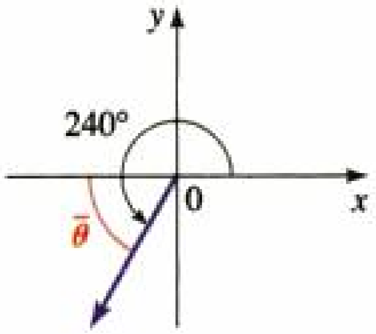


Figura 9

S	T
T	C

sen 240° es *negativo.*

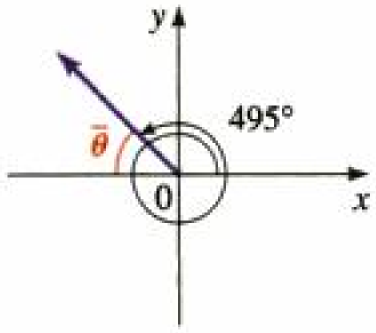


Figura 10

S	T
T	C

tan 495° *es negativa, por lo tanto* cot 495° *es negativa.*

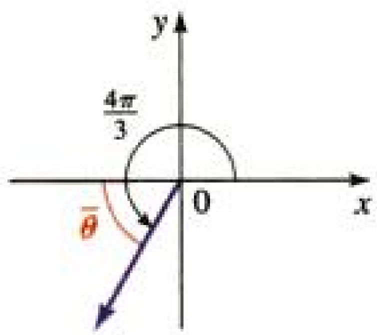


Figura 11

S	T
T	C

sen $\frac{16\pi}{3}$ *es negativa.*

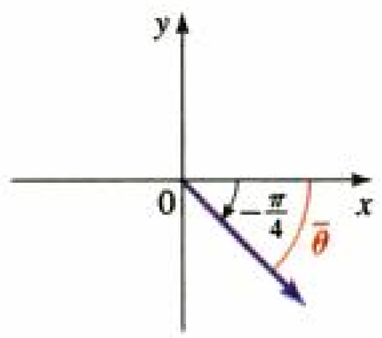


Figura 12

S	T
T	C

$\cos(-\frac{\pi}{4})$ *es positiva, por lo tanto* $\sec(-\frac{\pi}{4})$ *es positiva.*

Ejemplo 3 Cómo usar el ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre a) sen 240° y b) cot 495°.

Solución

a) Este ángulo tiene su lado terminal en el cuadrante III, como se muestra en la figura 9. Por lo tanto, el ángulo de referencia es 240° − 180° = 60°, y el valor de sen 240° es negativo. Así,

$$\operatorname{sen} 240° = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\operatorname{sen} 60°}_{\text{Ángulo de referencia}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) El ángulo 495° es coterminal con el ángulo 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante II, como se muestra en la figura 10. Por consiguiente, el ángulo de referencia es 180° − 135° = 45°, y el valor de cot 495° es negativo. Se tiene

$$\cot 495° = \underbrace{\cot 135°}_{\text{Ángulos coterminales}} = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\cot 45°}_{\text{Ángulo de referencia}} = -1$$

■

Ejemplo 4 Cómo usar el ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre a) $\operatorname{sen}\dfrac{16\pi}{3}$ y b) $\sec\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el cuadrante III (véase la figura 11). Así, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Puesto que el valor del seno es negativo en el cuadrante III, se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} = \underbrace{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}}_{\text{Ángulos coterminales}} = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}_{\text{Ángulo de referencia}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuadrante IV, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (véase la figura 12). Puesto que la secante es positiva en este cuadrante, se tiene

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{+}_{\text{Signo}}\underbrace{\sec\frac{\pi}{4}}_{\text{Ángulo de referencia}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por varias ecuaciones importantes llamadas **identidades trigonométricas.** Ya se han encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades todavía se cumplen para cualquier ángulo θ, siempre que estén definidos ambos miembros de la ecuación. Las identidades pitagóricas son una consecuencia del teorema de Pitágoras.*

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

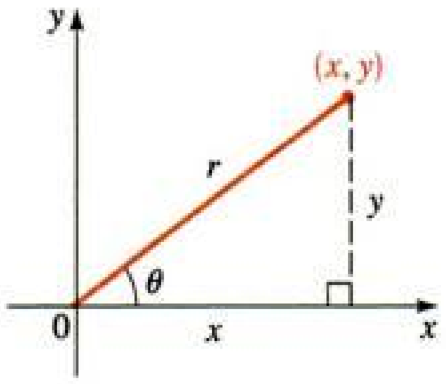


Figura 13

■ **Demostración** Se demostrará primero la identidad pitagórica. Si se utiliza $x^2 + y^2 = r^2$ (el teorema de Pitágoras) en la figura 13, se tiene

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Así, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (Aunque en la figura se indica un ángulo agudo, se debe comprobar que la demostración se cumple para todos los ángulos θ.) ■

Véanse los ejercicios 59 y 60 para las demostraciones de las otras dos identidades pitagóricas.

Ejemplo 5 Expresar una función trigonométrica en términos de otra

a) Exprese sen θ en términos de cos θ.

b) Exprese tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el cuadrante II.

Solución

a) A partir de la primera identidad pitagórica se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el cuadrante I o II, entonces sen θ es positivo y, en consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el cuadrante III o IV, sen θ es negativo y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

* Seguimos la convención usual de escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ para $(\operatorname{sen}\theta)^2$. En general, se escribe $\operatorname{sen}^n\theta$ para $(\operatorname{sen}\theta)^n$ para los enteros n excepto $n = -1$. En la sección 7.4 se asignará otro significado al exponente $n = -1$. Por supuesto, se aplica la misma convención a las otras cinco funciones trigonométricas.

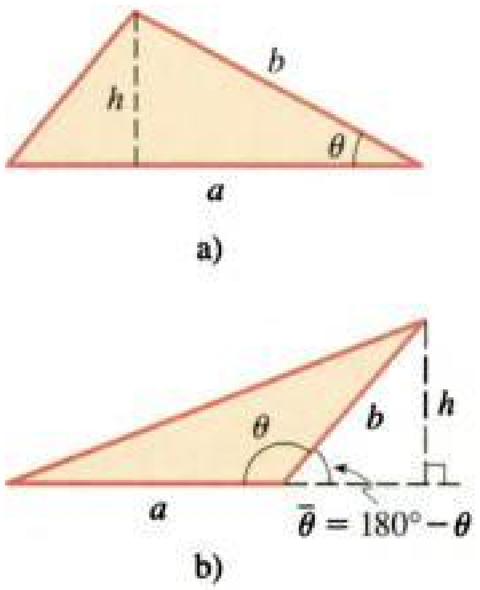


Figura 16

El área de un triángulo es $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Si se conocen dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, entonces se determina la altura por medio de las funciones trigonométricas, y de ésta se encuentra el área.

Si θ es un ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la figura 16(a) se determina mediante $h = b \operatorname{sen} \theta$. Así, el área es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la figura 16(b) se puede observar que la altura del triángulo es

$$h = b \operatorname{sen}(180° - \theta) = b \operatorname{sen} \theta$$

Esto es así porque el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Área de un triángulo

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ incluido es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Ejemplo 8 Hallar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo ABC mostrado en la figura 17.

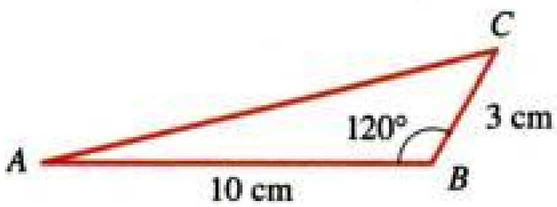


Figura 17

Solución El triángulo tiene lados de longitudes 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta \\ &= \tfrac{1}{2}(10)(3) \operatorname{sen} 120° \\ &= 15 \operatorname{sen} 60° \qquad \text{Ángulo de referencia} \\ &= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

■

6.3 Ejercicios

1–8 ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

1. a) 150° **b)** 330° **c)** −30°

2. a) 120° **b)** −210° **c)** 780°

3. a) 225° **b)** 810° **c)** −105°

4. a) 99° **b)** −199° **c)** 359°

5. a) $\frac{11\pi}{4}$ **b)** $-\frac{11\pi}{6}$ **c)** $\frac{11\pi}{3}$

6. a) $\frac{4\pi}{3}$ **b)** $\frac{33\pi}{4}$ **c)** $-\frac{23\pi}{6}$

7. a) $\frac{5\pi}{7}$ **b)** -1.4π **c)** 1.4

8. a) 2.3π **b)** 2.3 **c)** -10π

9–32 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

9. sen 150° **10.** sen 225° **11.** cos 135°

12. $\cos(-60°)$ **13.** $\tan(-60°)$ **14.** sec 300°

15. $\csc(-630°)$ **16.** cot 210° **17.** cos 570°

18. sec 120° **19.** tan 750° **20.** cos 660°

21. $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ **22.** $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$ **23.** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

24. $\cos \frac{7\pi}{3}$ **25.** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **26.** $\tan \frac{5\pi}{6}$

27. $\sec \frac{17\pi}{3}$ **28.** $\csc \frac{5\pi}{4}$ **29.** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

30. $\cos \frac{7\pi}{4}$ **31.** $\tan \frac{5\pi}{2}$ **32.** $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}$

33–36 ■ Encuentre el cuadrante en el que se localiza θ a partir de la información dada.

33. $\operatorname{sen} \theta < 0$ y $\cos \theta < 0$

34. $\tan \theta < 0$ y $\operatorname{sen} \theta < 0$

35. $\sec \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$

36. $\csc \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$

37–42 ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

37. $\tan \theta$, $\cos \theta$; θ en el cuadrante III

38. $\cot \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante II

39. $\cos \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante IV

40. $\sec \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante I

41. $\sec \theta$, $\tan \theta$; θ en el cuadrante II

42. $\csc \theta$, $\cot \theta$; θ en el cuadrante III

43–50 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

43. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante II

44. $\cos \theta = -\frac{7}{12}$, θ en el cuadrante III

45. $\tan \theta = -\frac{3}{4}$, $\cos \theta > 0$

46. $\sec \theta = 5$, $\operatorname{sen} \theta < 0$

47. $\csc \theta = 2$, θ en el cuadrante I

48. $\cot \theta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen} \theta < 0$

49. $\cos \theta = -\frac{2}{7}$, $\tan \theta < 0$

50. $\tan \theta = -4$, $\operatorname{sen} \theta > 0$

51. Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.

a) $\operatorname{sen} 2\theta$, $2 \operatorname{sen} \theta$ **b)** $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta$

c) $\operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen}(\theta^2)$

52. Encuentre el área del triángulo con lados de longitud 7 y 9 y ángulo incluido de 72°.

53. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 22 y ángulo incluido de 10°.

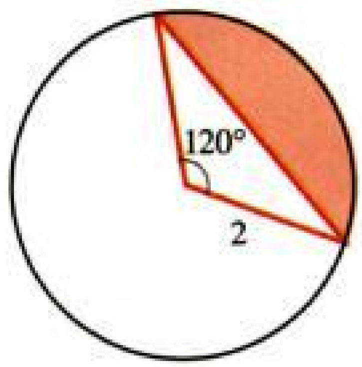
54. Encuentre el área de un triángulo equilátero con lado de longitud 10.

55. Un triángulo tiene un área de 16 in^2, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulg y 7 pulg. Encuentre el ángulo que incluyen estos dos lados.

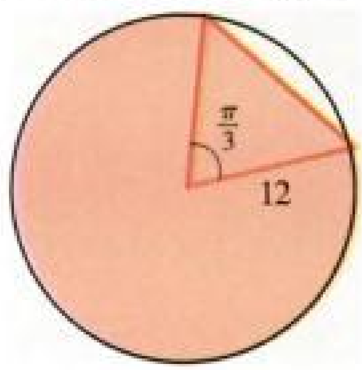
56. Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

57–58 ■ Encuentre el área de la región sombreada en la figura.

57.



58.



59. Use la primera identidad pitagórica para probar la segunda. [*Sugerencia*: divida entre $\cos^2\theta$.]

60. Use la primera identidad pitagórica para probar la tercera.

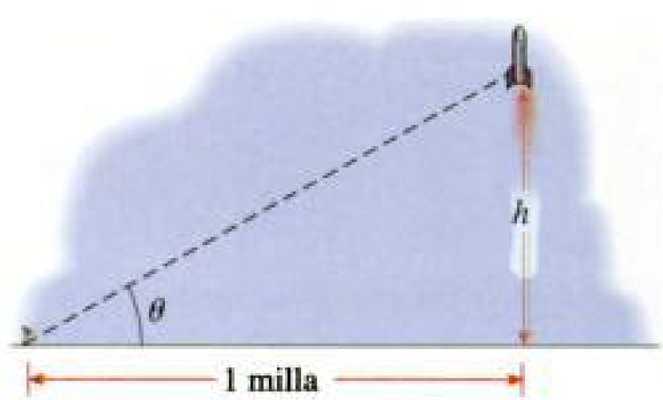
Aplicaciones

61. Altura de un cohete La trayectoria de un cohete en posición recta es seguida por un observador sobre el suelo a una milla de distancia.

a) Muestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5280 \tan \theta$.

b) Complete la tabla para encontrar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

θ	20°	60°	80°	85°
h				



68. Vuelta en una esquina Se lleva un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final del pasillo hay una vuelta en ángulo recto hacia un pasillo más estrecho de 6 pies de ancho.

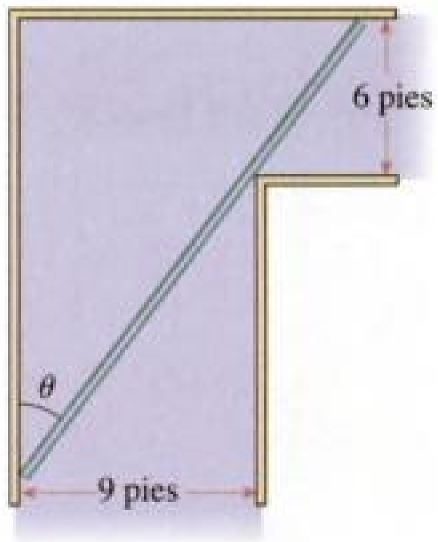
a) Muestre que la longitud del tubo de la figura se modeló mediante la función

$$L(\theta) = 9 \csc \theta + 6 \sec \theta$$

b) Grafique la función L para $0 < \theta < \pi/2$.

c) Encuentre el valor mínimo de la función L.

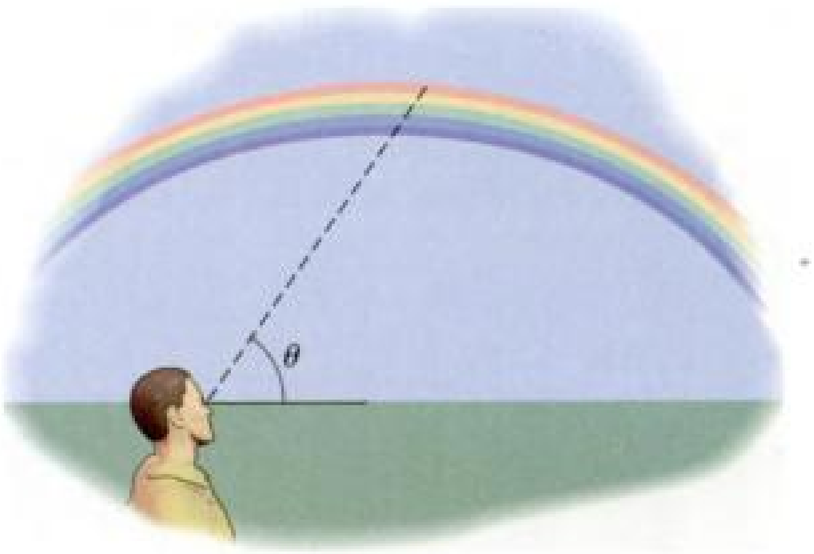
d) Explique por qué el valor de L que encontró en el inciso c) es la longitud del tubo más largo que puede ser llevado alrededor de la esquina.



69. Arco iris Los arco iris se forman cuando la luz solar de diferentes longitudes de onda (colores) se refracta y refleja en gotas de agua. El ángulo de elevación θ de un arco iris es siempre el mismo. Se puede demostrar que $\theta = 4\beta - 2\alpha$, donde

$$\operatorname{sen} \alpha = k \operatorname{sen} \beta$$

y $\alpha = 59.4°$ y $k = 1.33$ es el índice de refracción del agua. Use la información dada para encontrar el ángulo de elevación θ de un arco iris. (Para una explicación matemática de los arco iris véase *Calculus*, 5a ed. de James Stewart, páginas 288 y 289.)



Descubrimiento • Debate

70. Uso de una calculadora Para resolver cierto problema, se requiere hallar el seno de 4 rad. Su compañero usa su calculadora y le dice que

$$\operatorname{sen} 4 = 0.0697564737$$

En su calculadora usted obtiene

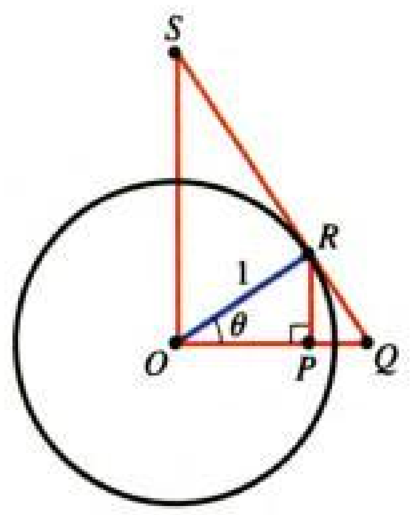
$$\operatorname{sen} 4 = -0.7568024953$$

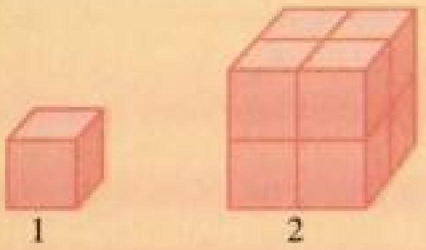
¿Qué está mal? ¿Qué error cometió su compañero?

71. Diagrama trigonométrico de Viète En el siglo XVI, el matemático francés François Viète (véase la página 49) publicó el siguiente diagrama notable. Cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es igual a la longitud de un segmento de recta en la figura. Por ejemplo, $\operatorname{sen} \theta = |PR|$, puesto que de $\triangle OPR$ se puede observar que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{|PR|}{|OR|} \\ &= \frac{|PR|}{1} \\ &= |PR|\end{aligned}$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas, encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud es igual al valor de la función en θ. (*Nota*: el radio del círculo es 1, el centro es O, el segmento QS es tangente al círculo en R y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.)





Si se duplica el lado de un cubo, su volumen se multiplica por 2^3.

8. a) Si dos cubos tienen relación de similitud s, muestre que sus volúmenes V_1 y V_2 tienen la propiedad de que $V_2 = s^3V_1$.

b) Si el lado de un cubo se multiplica por 10, ¿por cuál factor se multiplica el volumen?

c) ¿Cómo se puede usar el hecho de que un objeto sólido se puede "llenar" mediante cubos pequeños para mostrar que para dos sólidos cualesquiera con relación de similitud s, los volúmenes satisfacen $V_2 = s^3V_1$?

9. King Kong es 10 veces tan alto como Joe, un gorila de tamaño normal que pesa 300 lb. Si se supone que King Kong y Joe son similares, use los resultados de los problemas 7 y 8 para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto pesa King Kong?

b) Si la mano de Joe mide 13 pulg de largo, ¿cuánto mide la mano de King Kong?

c) Si hacer una camisa para Joe requiere 2 yardas cuadradas de tela, ¿cuánta tela requeriría una camisa para King Kong?

6.4 Ley de los senos

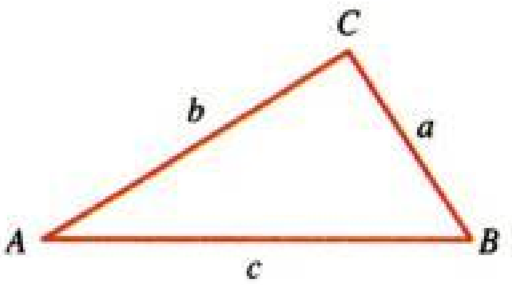
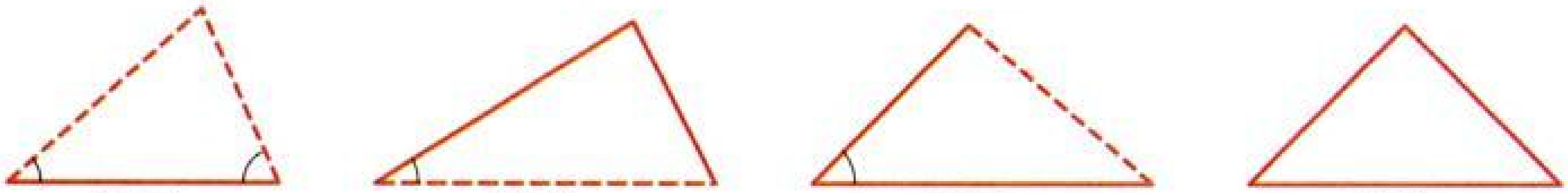


Figura 1

En la sección 6.2 se emplearon relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas se pueden usar también para resolver *triángulos oblicuos*, es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, se estudia primero la ley de los senos y luego la ley de los cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, se sigue la convención de marcar los ángulos de un triángulo como A, B, C y las longitudes de los lados opuestos correspondientes como a, b, c, como en la figura 1.

Para resolver el triángulo, es necesario conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para decidir si se tiene información suficiente, con frecuencia es útil hacer un bosquejo. Por ejemplo, si se dan dos ángulos y el lado incluido, entonces es claro que sólo se puede formar un solo triángulo (véase la figura 2a)). De manera similar, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces está determinado un solo triángulo (figura 2c)). Pero si se conocen los tres ángulos y ninguno de los lados, no se puede determinar de manera única el triángulo porque muchos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Por supuesto todos estos triángulos serían similares.) Así que no se considerará este último caso.



a) LAA b) LLA c) LAL d) LLL

Figura 2

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) siempre que por lo menos una de estas tres partes sea un lado. Así, las posibilidades, ilustradas en la figura 2, son como sigue.

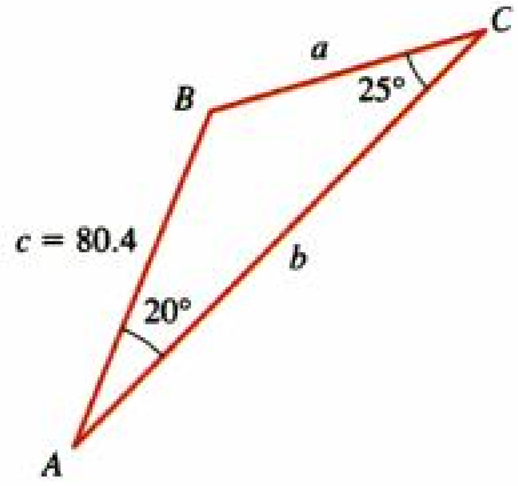


Figura 5

Ejemplo 2 Resolver un triángulo (LLA)

Resuelva el triángulo de la figura 5.

Solución Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Puesto que se conoce el lado c, para hallar el lado a se usa la relación

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

De manera similar, para encontrar b utilizamos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 135°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

■

El caso ambiguo

En los ejemplos 1 y 2 se determina un triángulo único por la información dada. Esto se cumple siempre para el caso 1 (LAA). Pero en el caso 2 (LLA) podría haber dos triángulos, un triángulo o ninguno con las propiedades dadas. Por esta razón, el caso 2 a veces se llama **caso ambiguo.** Para ver por qué esto es así, se muestran en la figura 6 las posibilidades cuando se dan el ángulo A y los lados a y b. En el inciso a) ninguna solución es posible, puesto que el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso c) dos soluciones son posibles y en el inciso d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. En los ejemplos siguientes se ilustran las posibilidades del caso 2.

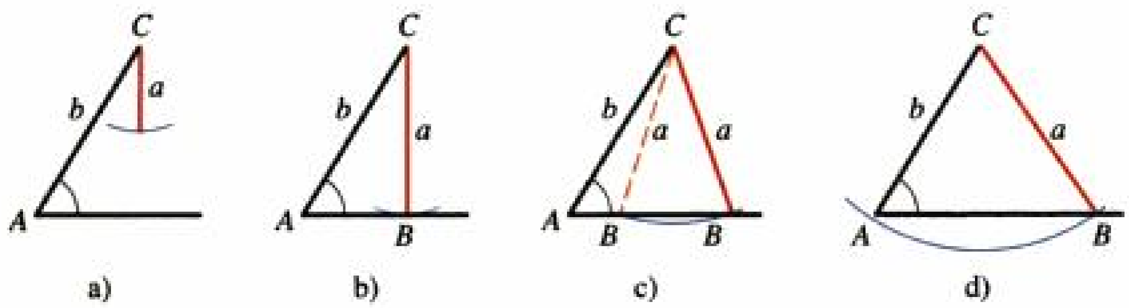


Figura 6
El caso ambiguo

Ejemplo 3 LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

Solución Primero se bosqueja el triángulo con la información que se tiene (véase la figura 7). El bosquejo es necesariamente tentativo puesto que aún no se conocen los otros ángulos. Sin embargo, ahora se pueden ver las posibilidades.

Se encuentra primero $\angle B$.

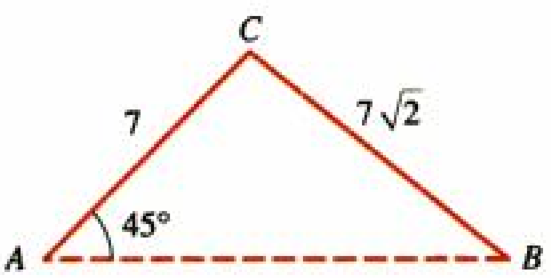


Figura 7

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \operatorname{sen} 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

Se consideran sólo ángulos más pequeños que 180°, puesto que ningún ángulo puede contener un ángulo de 180° o más grande.

¿Cuáles ángulos B tiene sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección anterior se sabe que hay dos ángulos más pequeños que 180° (estos son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que se sabe acerca del triángulo ABC? Puesto que $\angle A = 45°$, no se puede tener $\angle B = 150°$, porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$, y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora se puede hallar el lado c.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

■

En el ejemplo 3 hubo dos posibilidades para el ángulo B, y una de éstas no fue compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, se debe comprobar el ángulo y su complemento como posibilidades, porque cualquier ángulo más pequeño que 180° puede estar en el triángulo. Para decidir si cualquiera de las posibilidades funciona, se comprueba si la suma resultante de los ángulos excede 180°. Puede suceder, como en la figura 6(c), que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son soluciones del problema.

El *complemento* de un ángulo θ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

Alan Oddie/PhotoEdit

La **agrimensura** es un método de medición del suelo usado para elaborar mapas. Los agrimensores usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en el área de la cual se elaborará un mapa. Se inicia el proceso midiendo la longitud de una *línea base* entre dos estaciones de agrimensura. Entonces, usando un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera estación. Entonces se usan las leyes de los senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se utilizan como líneas base, y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método, la única distancia medida

(continúa)

Ejemplo 4 LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

Solución De la información dada se bosqueja el triángulo mostrado en la figura 8. Hay que observar que el lado a se puede dibujar en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la ley de los senos

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{248.6 \text{ sen } 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

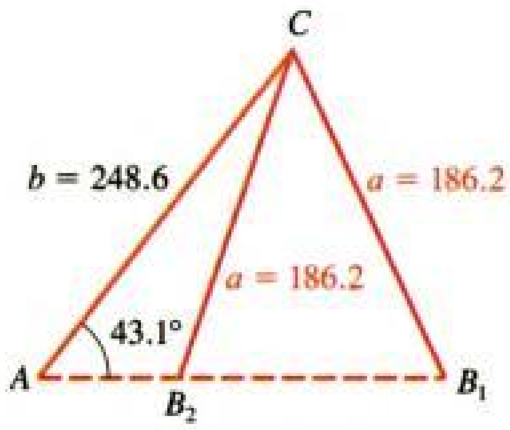
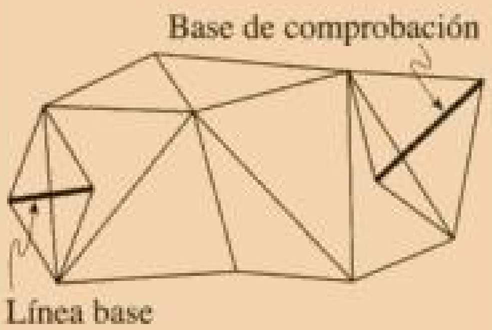


Figura 8

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tal que si sen $B = 0.91225$. Por medio de la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ en una calculadora (o $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SEN}}$ o $\boxed{\text{ARCSEN}}$), se encuentra que uno de estos ángulos es aproximadamente 65.8°. El otro es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Se denotan estos ángulos por B_1 y B_2, de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

es la línea base inicial; las otras distancias se calculan a partir de la ley de los senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los esfuerzos de mapeo más ambiciosos de todos los tiempos fue la gran medición trigonométrica de la India (véase el problema 8, página 525) que requirió varias expediciones y tomó un siglo completarla. La famosa expedición de 1823 conducida por **Sir George Everest**, duró 20 años. Para llegar se tuvo que pasar por terreno peligroso y encontrar a los temidos mosquitos portadores de la malaria, y por fin la expedición llegó al pie de los Himalayas. Una expedición posterior, por medio de triangulación, calculó la altura del pico más alto de los Himalayas como 29 002 pies. El nombre de la montaña fue asignado en honor de Sir George Everest.

Hoy día, con la ayuda de satélites, la altura del Monte Everest se estima en 29 028 pies. La concordancia muy cercana de estas dos estimaciones muestra la gran exactitud del método trigonométrico.

Así, dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: triángulo $A_1B_1C_1$ y triángulo $A_2B_2C_2$.

Resolver el triángulo $A_1B_1C_1$:

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A_1} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de los senos}$$

Resolver el triángulo $A_2B_2C_2$:

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Por tanto, $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A_2} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de los senos}$$

Los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ se muestran en la figura 9.

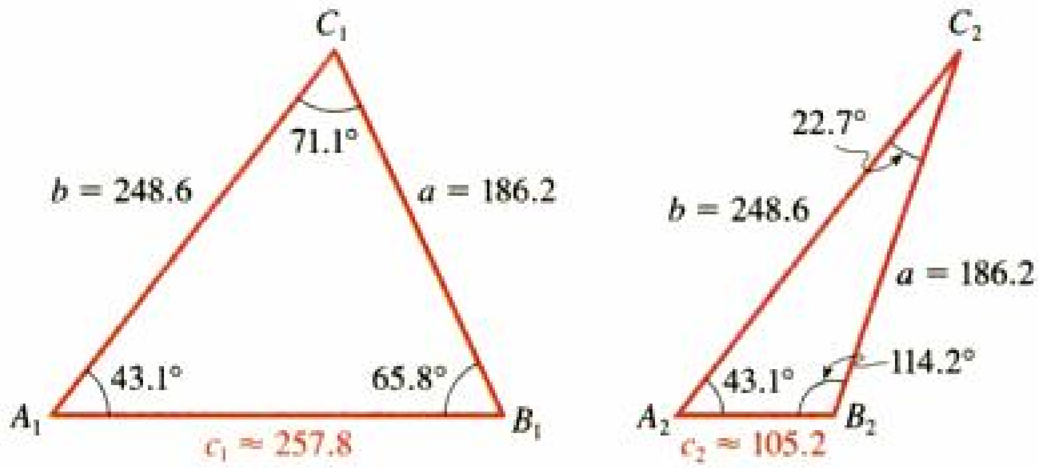


Figura 9 ■

En el ejemplo siguiente se presenta una situación para la cual ningún triángulo es compatible con los datos.

Ejemplo 5 LLA, caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

Solución Para organizar la información dada, se bosqueja el diagrama en la figura 10. Se intentará hallar $\angle B$. Se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen} 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor que 1, se concluye que ningún triángulo satisface las condiciones dadas en este problema. ■

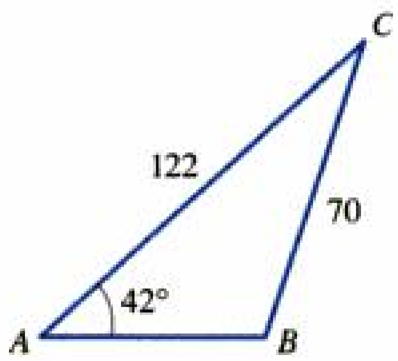
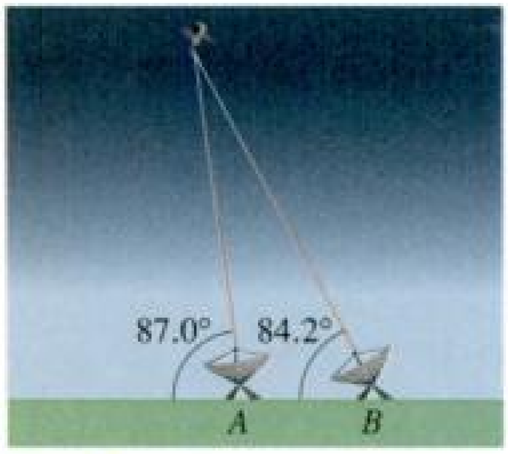


Figura 10

satélite está sobre una de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B son 87.0° y 84.2°, respectivamente.

a) ¿Qué tan lejos está el satélite de la estación A?

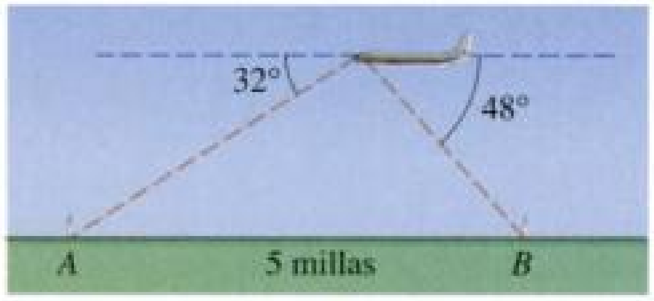
b) ¿A qué altura respecto del suelo está el satélite?



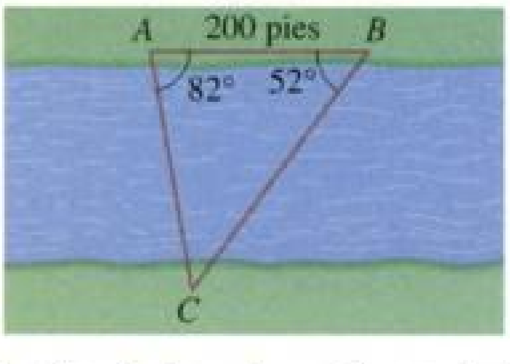
32. Vuelo de un avión Un piloto vuela sobre una carretera recta. Determina los ángulos de depresión hasta dos postes de medición de millaje apartados 5 millas, como 32° y 48°, según se ilustra en la figura.

a) Encuentre la distancia del avión al punto A.

b) Encuentre la elevación del avión.



33. Distancia a través de un río Para hallar la distancia a través de un río, una topógrafa elige los puntos A y B, que están separados 200 pies sobre un lado del río (véase la figura). La topógrafa elige entonces un punto de referencia C sobre el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.

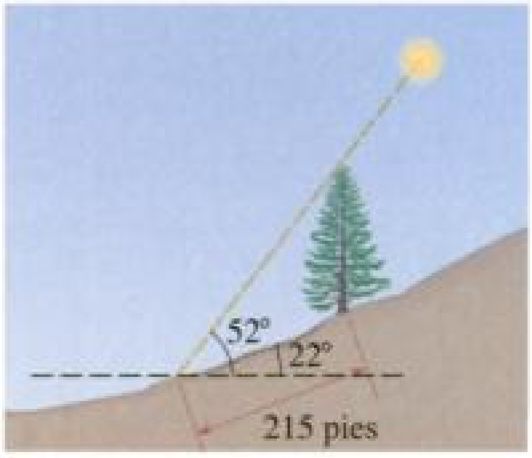


34. Distancia a través de un lago Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza un punto C sobre el suelo tal que $\angle CAB = 48.6°$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

35. La torre inclinada de Pisa El campanario de la catedral en Pisa, Italia, se inclina 5.6° desde la vertical. Una turista se para a 105 m de su base, con la inclinación de la torre directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación hasta la parte superior de la torre como 29.2°. Encuentre la longitud de la torre hasta el metro más próximo.

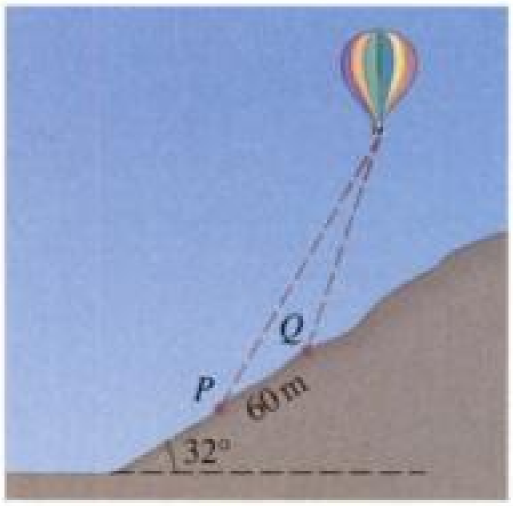
36. Antena de radio Una antena de radio de onda corta está apoyada por dos cables cuyas longitudes son 165 y 180 pies. Cada alambre está fijo a la parte superior de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿Qué tan apartados están los puntos de anclaje?

37. Altura de un árbol Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies colina abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es de 52°, encuentre la altura del árbol.

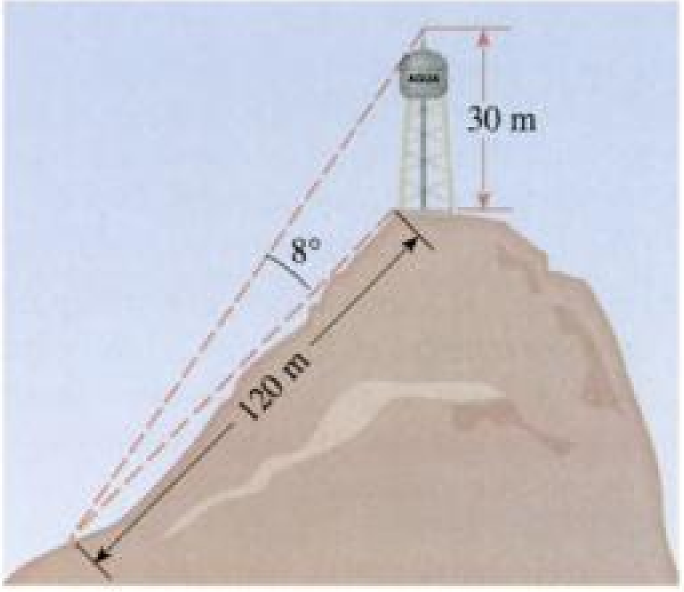


38. Longitud de un cable de sujeción Una torre de comunicaciones se localiza en la cima de una colina elevada, como se ilustra. El ángulo de inclinación de la colina es de 58°. Se fijará un cable de sujeción a la parte superior de la torre y al suelo, 100 m colina abajo de la base de la torre. El ángulo α en la figura se determina como 12°. Encuentre la longitud del cable requerido.

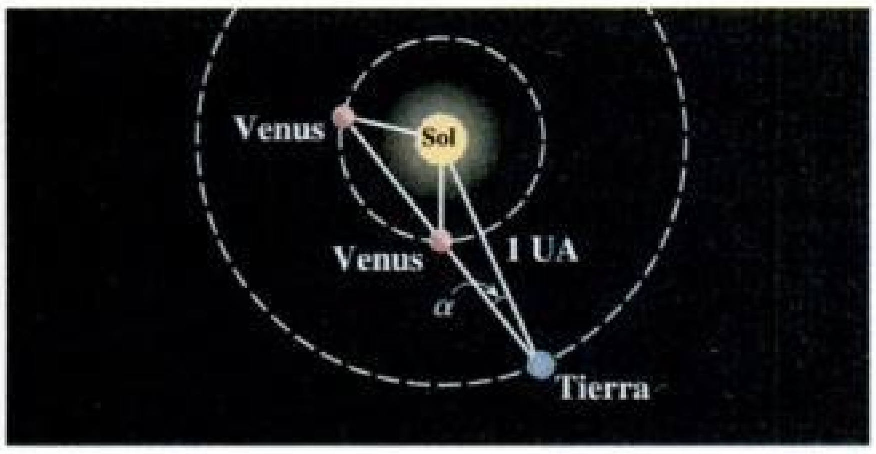
39. Cálculo de una distancia Observadores en P y Q están localizados en el lado de una colina que está inclinada 32° respecto de la horizontal, como se muestra. El observador en P determina el ángulo de elevación hasta un globo de aire caliente como 62°. Al mismo tiempo, el observador en Q mide el ángulo de elevación hasta el globo como 71°. Si P está 60 m colina abajo desde Q, encuentre la distancia de Q al globo.



40. Cálculo de un ángulo Una torre de agua de 30 m de alto se localiza en la cima de una colina. Desde una distancia de 120 m colina abajo, se observa que el ángulo entre la parte superior y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación de la colina.



41. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo que forman el planeta, la Tierra y el Sol (véase la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es de 0.723 UA (véase el ejercicio 65 de la sección 6.2). En cierto momento se encuentra que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las distancias posibles de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



42. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas se adhieren en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro D yace sobre una línea que pasa por los centros de las burbujas (véase la figura). También, los ángulos ACB y ACD miden cada uno 60°.

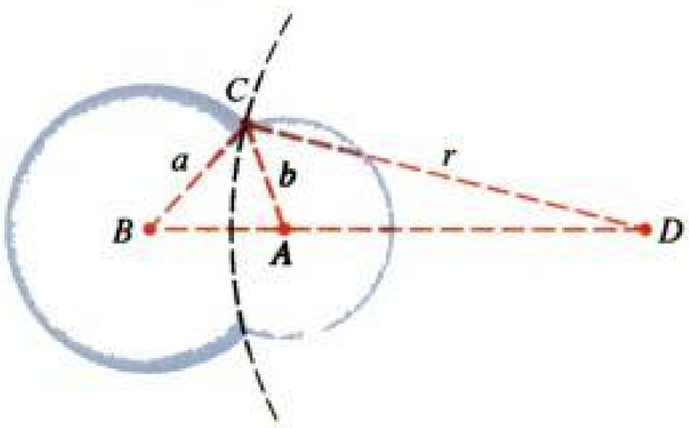
a) Muestre que el radio r de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia*: use la ley de los senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su complemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 y 3 cm.

c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



Descubrimiento • Debate

43. Número de soluciones en el caso ambiguo Se ha visto que al usar la ley de los senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una o ninguna. Bosqueje triángulos como los de la figura 6 para comprobar los criterios de la tabla para varias soluciones si se tiene $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene dos soluciones, una solución o ninguna.

6.5 Ley de los cosenos

La ley de los senos no se puede usar de manera directa para resolver triángulos si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados (éstos son los casos 3 y 4 de la sección anterior). En estos dos casos, se aplica la **ley de los cosenos.**

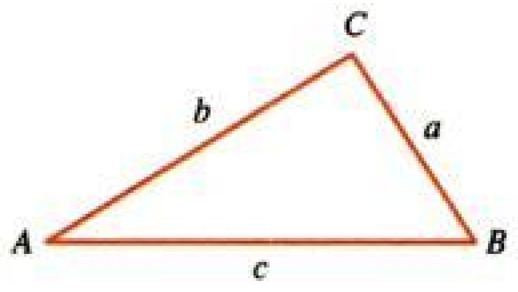


Figura 1

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC (véase la figura 1), se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

■ **Demostración** Para probar la ley de los cosenos, coloque el triángulo ABC de modo que $\angle A$ está en el origen, como se muestra en la figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \operatorname{sen} A)$, respectivamente. (Se debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si se dibuja el ángulo A como un ángulo agudo.) Con la fórmula de la distancia, se obtiene

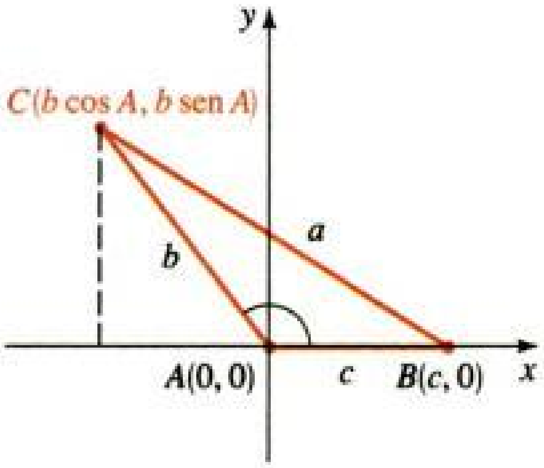


Figura 2

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera fórmula. Las otras dos formas se obtienen de la misma manera colocando cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y repitiendo el argumento anterior. ■

En palabras, la ley de los cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos del doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo incluido.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la ley de los cosenos se reduce al teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

Ejemplo 1 Longitud de un túnel

Se construirá un túnel por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura 3. Use los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

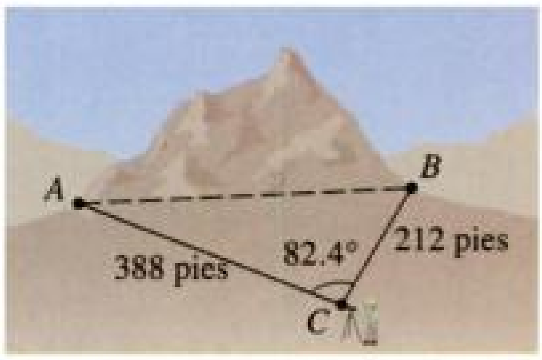


Figura 3

Solución Para aproximar la longitud c del túnel, se usa la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C && \text{Ley de los cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212) \cos 82.4° && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use una calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Saque la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Así, el túnel medirá alrededor de 417 pies de largo. ■

Navegación: dirección y rumbo

En navegación una dirección con frecuencia se da como un **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido a partir del norte o del sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (véase la figura 6).

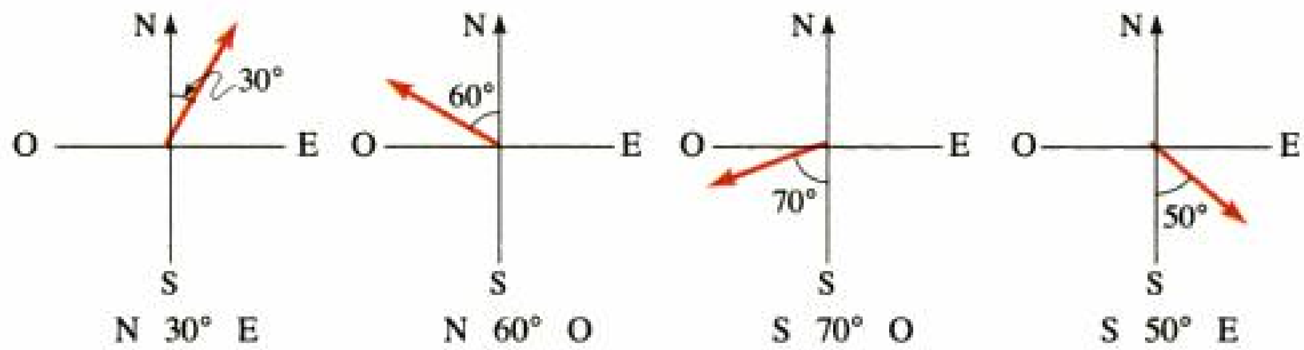


Figura 6

Ejemplo 4 Navegación

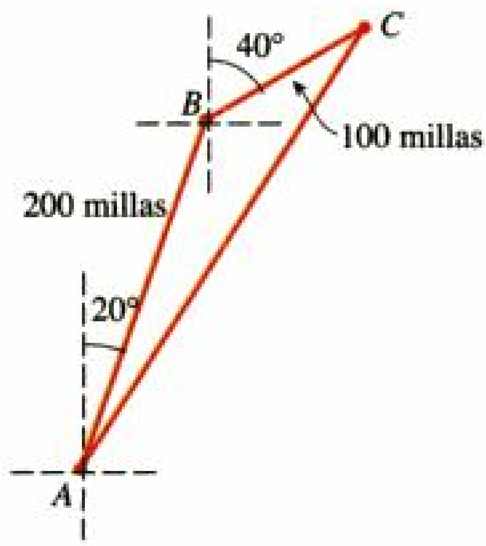


Figura 7

Un piloto parte de un aeropuerto y se dirige en dirección N 20° E, volando a 200 millas/h. Después de una hora, hace una corrección de curso y se dirige en la dirección N 40° E. Media hora después, un problema en el motor lo obliga a hacer un aterrizaje de emergencia.

a) Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto de aterrizaje final.

b) Encuentre el rumbo desde el aeropuerto hasta su punto final de aterrizaje.

Solución

a) En una hora el avión viaja 200 millas y en media hora viaja 100 millas, de modo que se puede graficar el curso del piloto como en la figura 7. Cuando hace su corrección de curso, vira 20° a la derecha, así que el ángulo entre los dos tramos de su viaje es 180° − 20° = 160°. Así que por la ley de los cosenos se tiene

$$\begin{aligned} b^2 &= 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160^\circ \\ &\approx 87\,587.70 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

b) Primero se usa la ley de los senos para hallar $\angle A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{100} = \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{295.95}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= 100 \cdot \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{295.95} \\ &\approx 0.11557 \end{aligned}$$

Otro ángulo con sen 0.11557 es $180^\circ - 6.636^\circ = 173.364^\circ$. Pero es evidente que es demasiado grande para que $\angle A$ esté en $\angle ABC$.

Si se usa la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ de una calculadora, se encuentra que $\angle A \approx 6.636^\circ$. De la figura 7 se puede observar que la línea del aeropuerto al sitio de aterrizaje final apunta en la dirección $20^\circ + 6.636^\circ = 26.636^\circ$ al este del norte. Por lo tanto, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E. ■

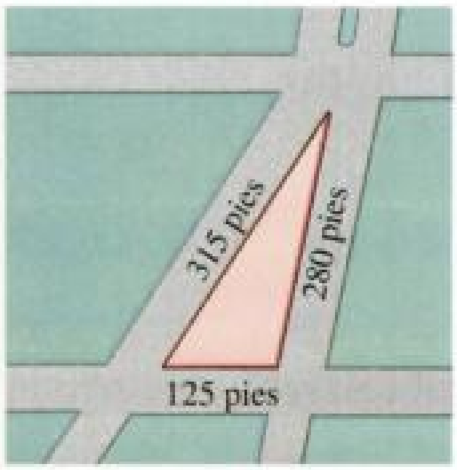


Figura 9

Ejemplo 5 Área de un lote

Un hombre de negocios desea comprar un lote triangular en un transitado lugar de la ciudad (véase la figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes son 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

Solución El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la fórmula de Heron el área es

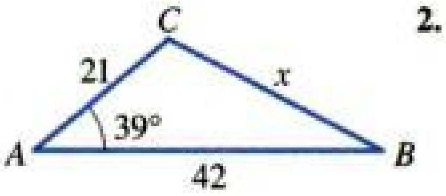
$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17\,451.6$$

Así, el área es aproximadamente 17 452 pies^2. ■

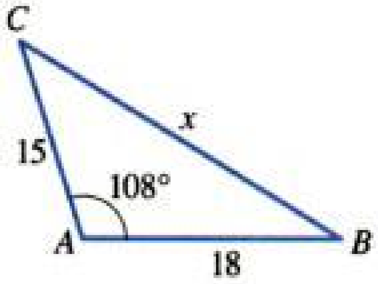
6.5 Ejercicios

1–8 ■ Use la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ.

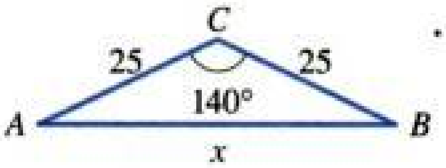
1.



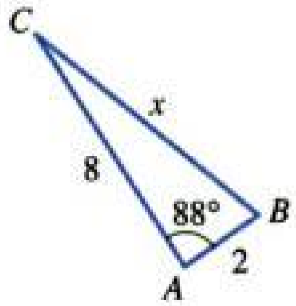
2.



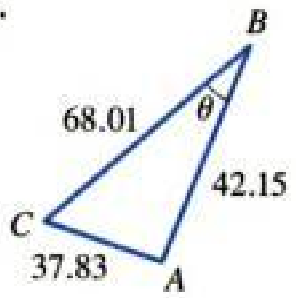
3.



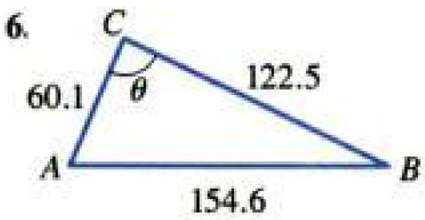
4.



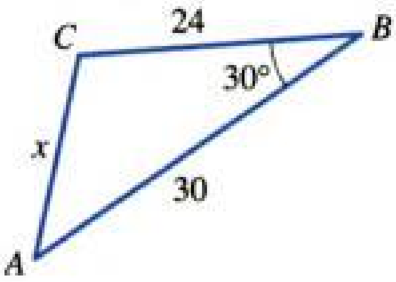
5.



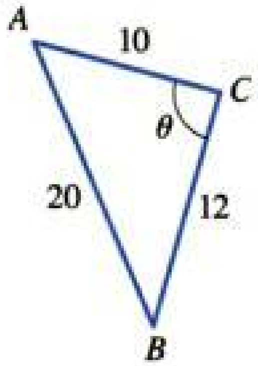
6.



7.



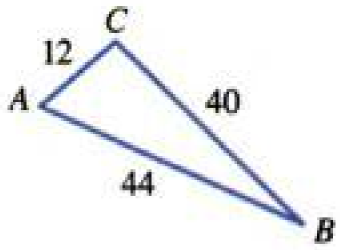
8.



9–18 ■ Resuelva el triángulo ABC.

9.

10.



11. $a = 3.0$, $b = 4.0$, $\angle C = 53°$

12. $b = 60$, $c = 30$, $\angle A = 70°$

13. $a = 20$, $b = 25$, $c = 22$

14. $a = 10$, $b = 12$, $c = 16$

15. $b = 125$, $c = 162$, $\angle B = 40°$

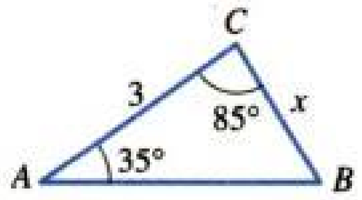
16. $a = 65$, $c = 50$, $\angle C = 52°$

17. $a = 50$, $b = 65$, $\angle A = 55°$

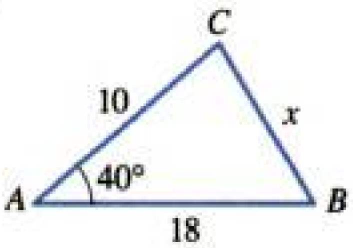
18. $a = 73.5$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 83°$

19–26 ■ Encuentre el lado indicado x o el ángulo θ. (Use la ley de los senos o la ley de los cosenos, según convenga.)

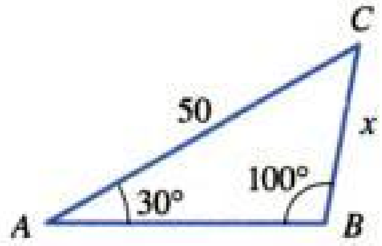
19.



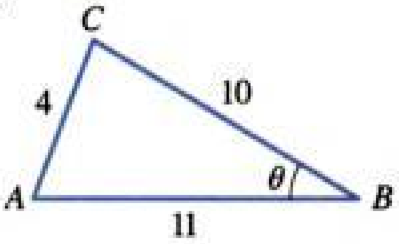
20.



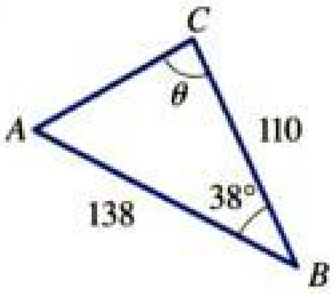
21.



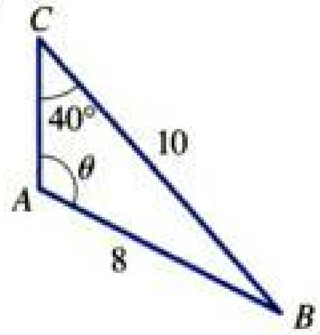
22.



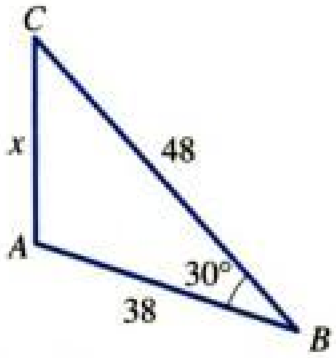
23.



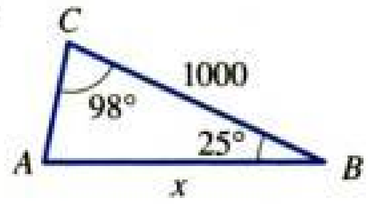
24.



25.



26.



27–30 ■ Encuentre el área del triángulo cuyos lados tiene las longitudes dadas.

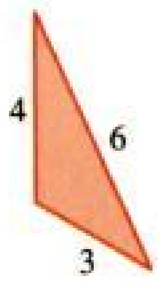
27. $a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15$ **28.** $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2$

29. $a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9$

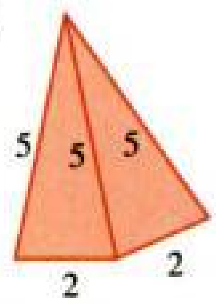
30. $a = 11, \quad b = 100, \quad c = 101$

31–34 ■ Encuentre el área de la figura sombreada, correcta hasta dos decimales.

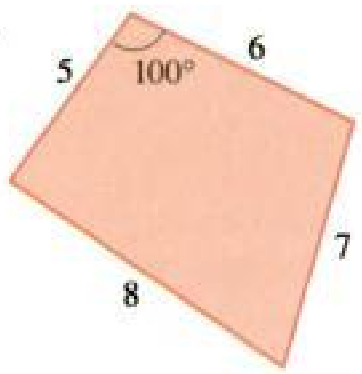
31.



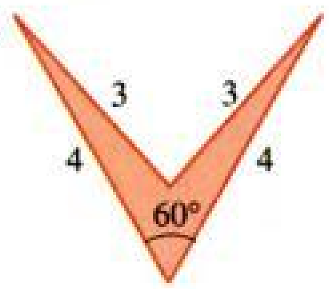
32.



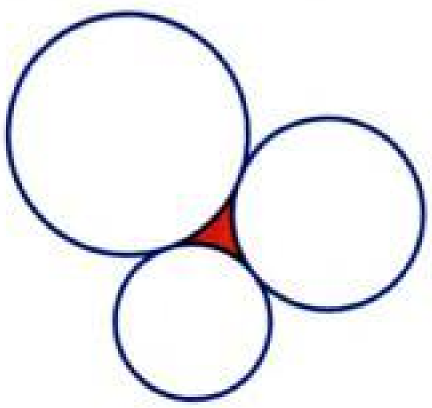
33.



34.



35. Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los tres círculos.



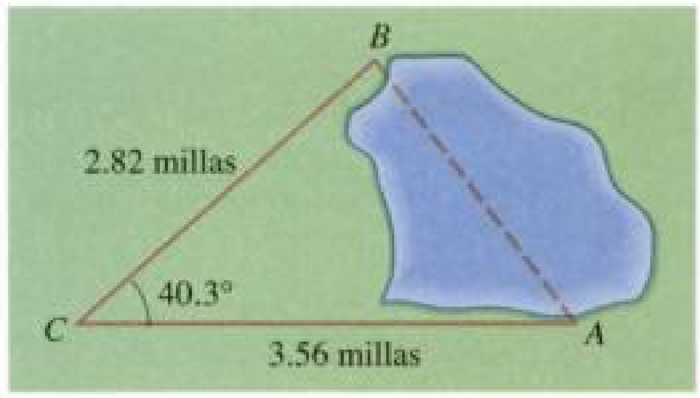
36. Pruebe que en el triángulo ABC

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

Éstas se llaman *leyes de proyección*. [*Sugerencia*: para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la ley de los cosenos y despeje a.]

Aplicaciones

37. Agrimensura Para hallar la distancia a través de un pequeño lago, un agrimensor ha tomado las mediciones mostradas. Encuentre la distancia a través de un lago por medio de esta información.



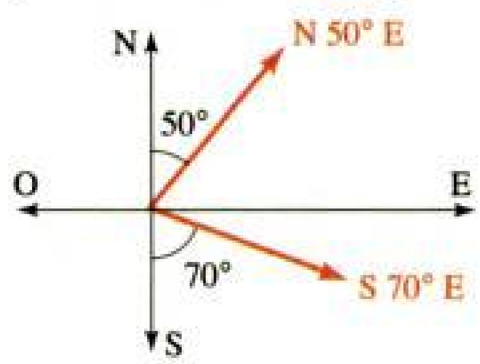
38. Geometría Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

39. Cálculo de una distancia Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 P.M., uno viaja a 50 millas/h y el otro a 30 millas/h. ¿Qué tan apartados están los automóviles a las 2:30 P.M.?

40. Cálculo de una distancia Un automóvil viaja a lo largo de una carretera, con rumbo este durante 1 h, luego viaja durante 30 minutos en otra carretera que se dirige al noreste. Si el automóvil ha mantenido una velocidad constante de 40 millas/h, ¿qué tan lejos está de su posición de partida?

41. Estimación Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 minutos. Después hace una corrección de curso, en dirección 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 h en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 millas/h, ¿qué tan lejos está de su punto de partida?

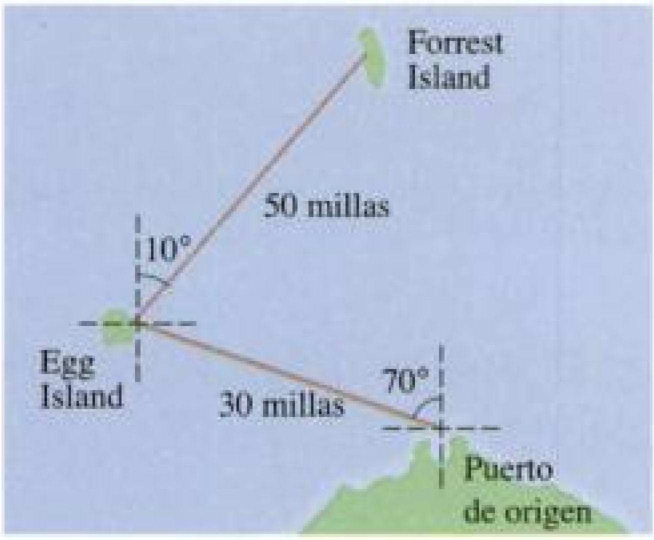
42. Navegación Dos botes salen del mismo puerto a la misma hora. Uno viaja a una velocidad de 30 millas/h en la dirección N 50° E y el otro viaja a una velocidad de 26 millas/h en una dirección S 70° E (véase la figura). ¿Qué tan apartados están los botes después de una hora?



43. **Navegación** Un pescador sale de su puerto de origen y se dirige en la dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. El siguiente día navega en dirección N 10° E durante 50 millas y llega a Forrest Island.

a) Encuentre la distancia entre el puerto de origen del pescador y Forrest Island.

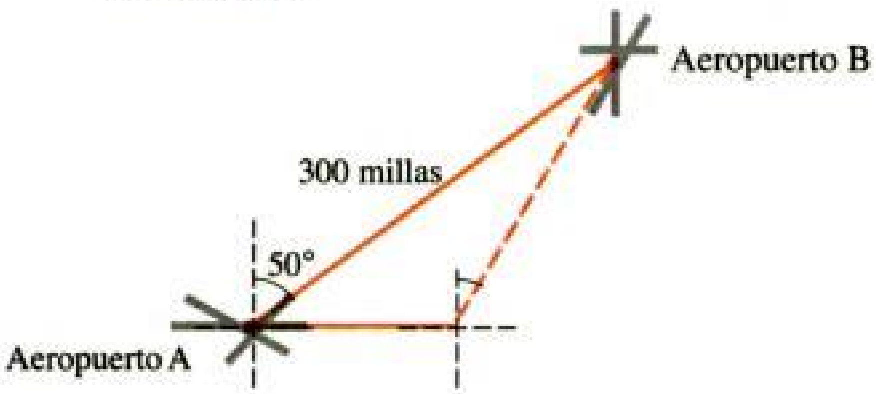
b) Encuentre el rumbo desde Forrest Island de regreso a su puerto de origen.



44. **Navegación** El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (véase la figura). Un piloto que desea volar de A a B vuela erróneamente al este a 200 millas/h durante 30 minutos, cuando nota su error.

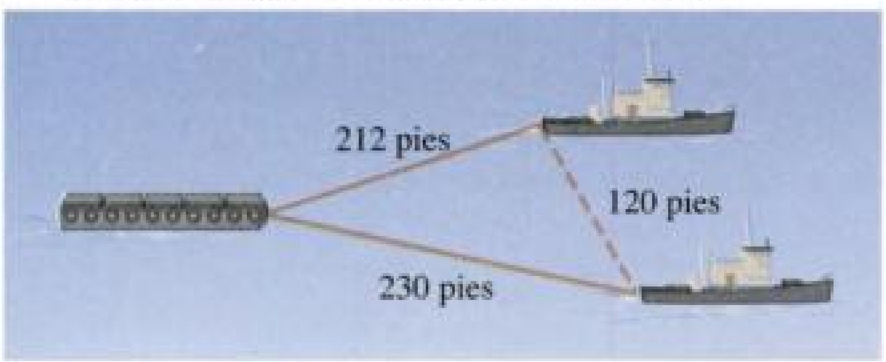
a) ¿Qué tan lejos está el piloto de su destino al momento de notar su error?

b) ¿En qué rumbo debe dirigir su avión a fin de llegar al aeropuerto B?

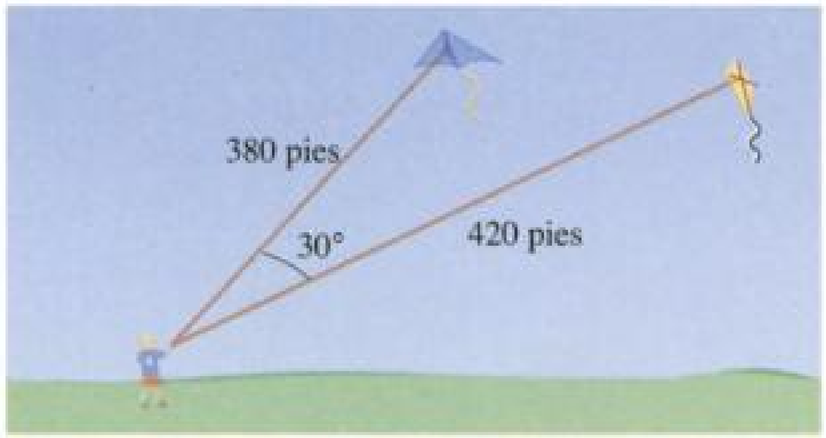


45. **Campo triangular** Un campo triangular tiene lados de longitudes 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

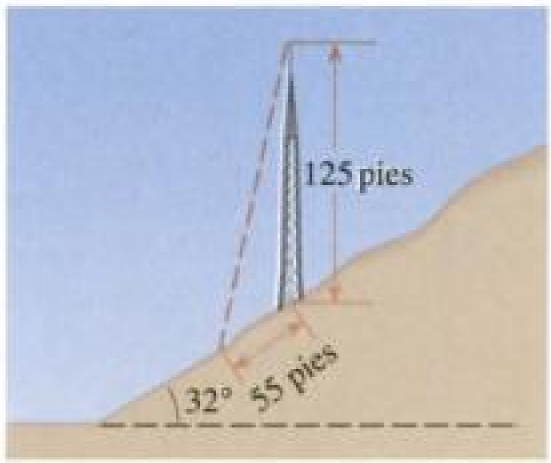
46. **Remolque de una barcaza** Dos remolcadores separados 120 pies jalan una barcaza, según se ilustra. Si la longitud de un cable es 212 pies y la longitud del otro es 230 pies, encuentre el ángulo formado por los dos cables.



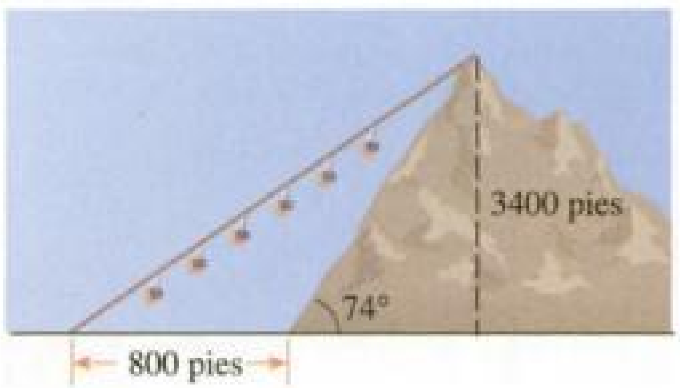
47. **Papalotes (cometas)** Un niño vuela dos cometas al mismo tiempo. Tiene 380 pies de línea hasta una cometa y 420 pies hasta la otra. El niño estima el ángulo entre las dos líneas como 30°. Aproxime la distancia entre las dos cometas.



48. **Aseguramiento de una torre** Una torre de 125 pies se localiza en la ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° respecto de la horizontal. Se fijará un alambre de sujeción a la parte superior de la torre y se anclará en un punto 55 pies colina abajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta de alambre necesario.

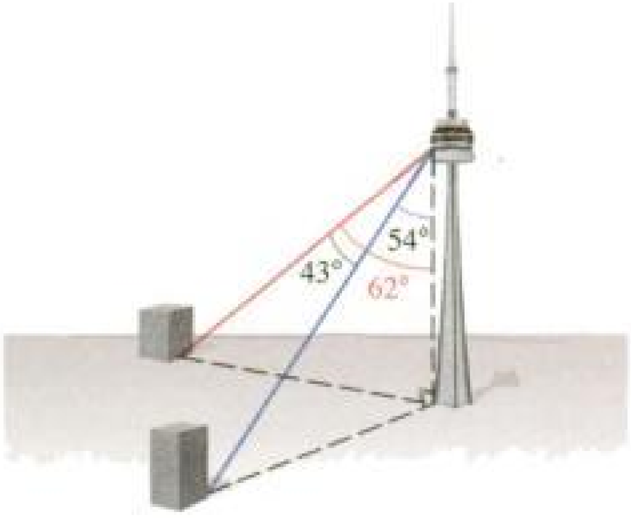


49. **Teleférico** Una montaña pronunciada tiene una inclinación de 74° respecto de la horizontal y se eleva 3400 pies sobre la llanura circundante. Se va a instalar un teleférico desde un punto a 800 pies de la base hasta la cima de la montaña, como se ilustra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.



50. **Torre CN** La torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura independiente más alta del mundo. Una mujer sobre la plataforma de observación, 1150 pies sobre el suelo, quiere determinar la distancia entre dos señales sobre el suelo. Ella observa que el ángulo que forman las líneas de visión hasta estas dos señales es de 43°. También observa que el ángulo entre la vertical y la línea de visión hasta una de las señales

es de 62° y hasta la otra señal es de 54°. Encuentre la distancia entre las dos señales.



51. **Valor del terreno** La tierra en el centro de Columbia está valuada en 20 dólares un pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

Descubrimiento • Debate

52. **Determinación de los ángulos de un triángulo** El párrafo que sigue a la solución del ejemplo 3 en la página 510 explica un método alternativo para hallar $\angle B$ y $\angle C$, por medio de las leyes de los senos. Use este método para resolver el triángulo del ejemplo. Encuentre primero $\angle B$ y luego $\angle C$. Explique cómo elige el valor apropiado para la medida de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere para resolver un problema de triángulo LAL, el que se explicó en el ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

6 Repaso

Revisión de conceptos

1. **a)** Explique la diferencia entre un ángulo positivo y un ángulo negativo.
   b) ¿Cómo se forma un ángulo de medida 1 grado?
   c) ¿Cómo se forma un ángulo de medida 1 radián?
   d) ¿Cómo se define la medida radián de un ángulo θ?
   e) ¿Cómo convierte de grados a radianes?
   f) ¿Cómo convierte de radianes a grados?
2. **a)** ¿Cuándo un ángulo está en posición estándar?
   b) ¿Cuándo dos ángulos son coterminales?
3. **a)** ¿Cuál es la longitud s de un arco de un círculo con radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes?
   b) ¿Cuál es el área A de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ radianes?
4. Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los catetos adyacente y opuesto y la hipotenusa.
5. ¿Qué significa resolver un triángulo?
6. Si θ es un ángulo en posición estándar, $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal y r es la distancia del origen a P, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.
7. ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes I, II, III y IV?
8. Si θ es un ángulo en posición estándar, ¿cuál es su ángulo de referencia θ?
9. **a)** Exprese las identidades recíprocas.
   b) Exprese las identidades pitagóricas.
10. **a)** ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a y b y con ángulo incluido θ?
    b) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a, b y c?
11. **a)** Exprese la ley de los senos.
    b) Exprese la ley de los cosenos.
12. Explique el caso ambiguo en la ley de los senos.

Ejercicios

1–2 ■ Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida en grados dada.

1. **a)** 60° **b)** 330° **c)** −135° **d)** −90°
2. **a)** 24° **b)** −330° **c)** 750° **d)** 5°

3–4 ■ Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida en radianes dada.

3. **a)** $\frac{5\pi}{2}$ **b)** $-\frac{\pi}{6}$ **c)** $\frac{9\pi}{4}$ **d)** 3.1

4. **a)** 8 **b)** $-\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{11\pi}{6}$ **d)** $\frac{3\pi}{5}$

5. Encuentre la longitud de un arco de un círculo de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 rad.

6. Determine la medida del ángulo central θ en un círculo de radio 5 pies si el ángulo es subtendido por un arco de longitud 7 pies.

7. Un arco circular de longitud 100 pies subtiende un ángulo central de 70°. Encuentre el radio del círculo.

8. ¿Cuántas revoluciones dará una rueda de automóvil de diámetro 28 pulgadas en un periodo de media hora si el automóvil viaja a 60 millas/h?

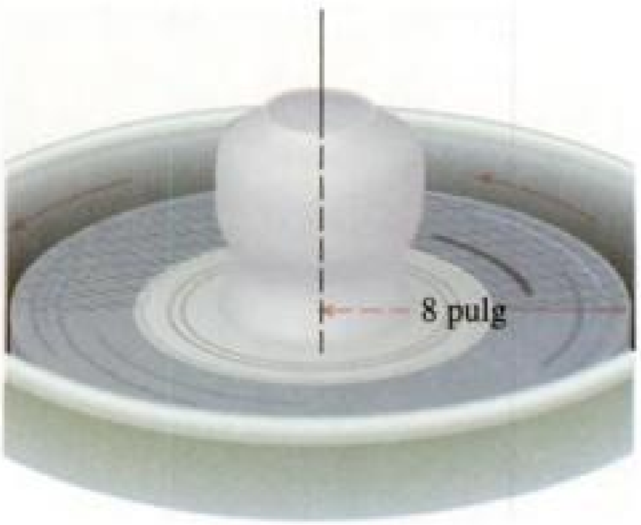
9. Nueva York y Los Ángeles están separadas 2450 millas. Encuentre el ángulo que subtiende el arco entre estas dos ciudades en el centro de la Tierra. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

10. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 5 m.

11. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 52° radianes en un círculo de radio de 200 pies.

12. Un sector en un círculo de radio 25 pies tiene un área de 125 pies^2. Encuentre el ángulo central del sector.

13. Un torno de alfarero con radio de 8 pulgadas gira a 150 rpm. Encuentre las velocidades angular y lineal de un punto en el borde de la rueda.



14. En una transmisión de automóvil una relación de engranaje g es la relación

$$g = \frac{\text{velocidad angular del motor}}{\text{velocidad angular de las ruedas}}$$

La velocidad angular del motor se muestra en el tacómetro (en rpm).

Cierto automóvil deportivo tiene ruedas con radio de 11 pulg. Sus relaciones de engranaje se muestran en la siguiente tabla. Suponga que el automóvil está en cuarta y que el tacómetro marca 3500 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del motor.

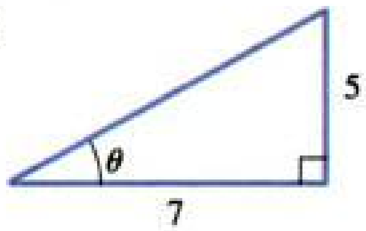
b) Encuentre la velocidad angular de las ruedas.

c) ¿A qué velocidad se desplaza el automóvil (en millas/h)?

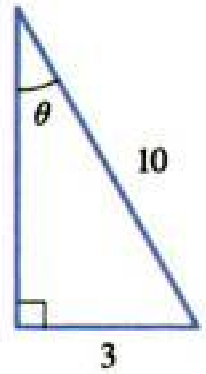
Velocidad	Relación
1a.	4.1
2a.	3.0
3a.	1.6
4a.	0.9
5a.	0.7

15–16 ■ Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas de θ.

15.

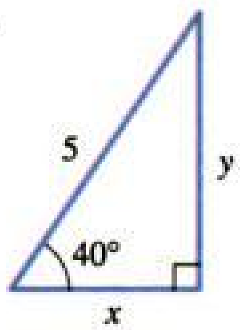


16.

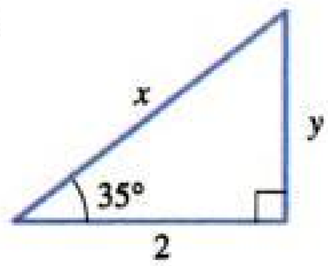


17–20 ■ Encuentre los lados marcados con x y y, correctos hasta dos decimales.

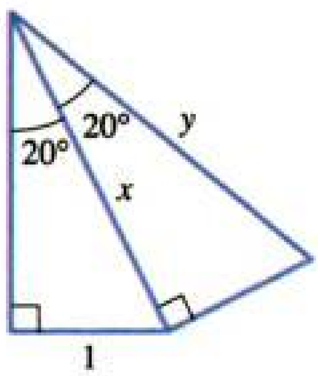
17.



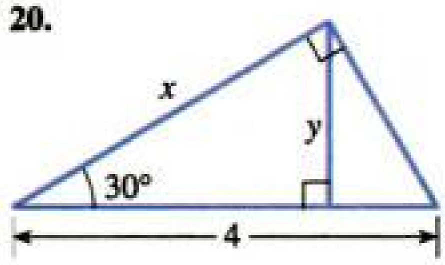
18.



19.

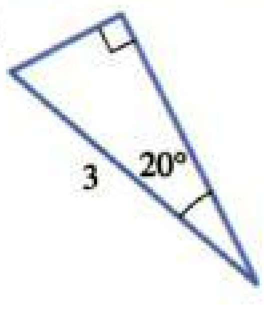


20.

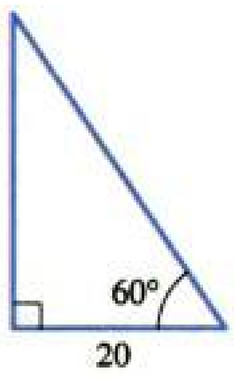


21–22 ■ Resuelva el triángulo.

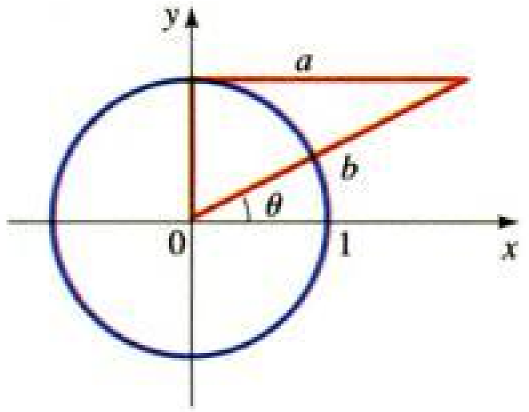
21.



22.



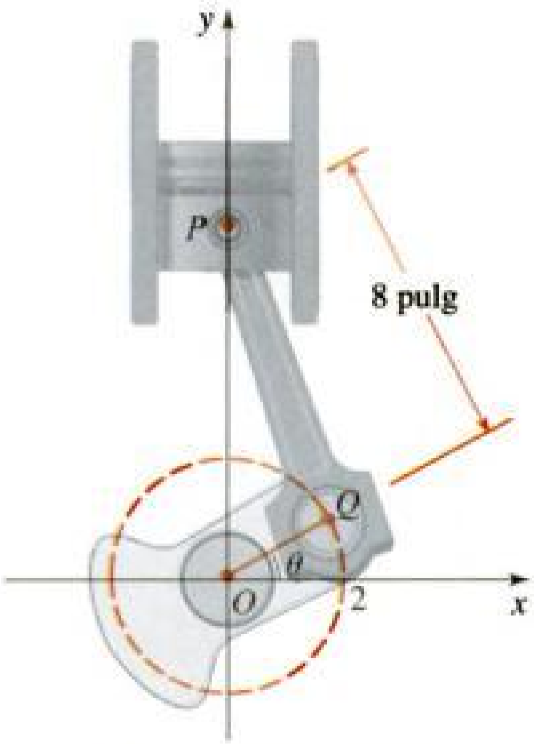
23. Exprese las longitudes a y b de la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



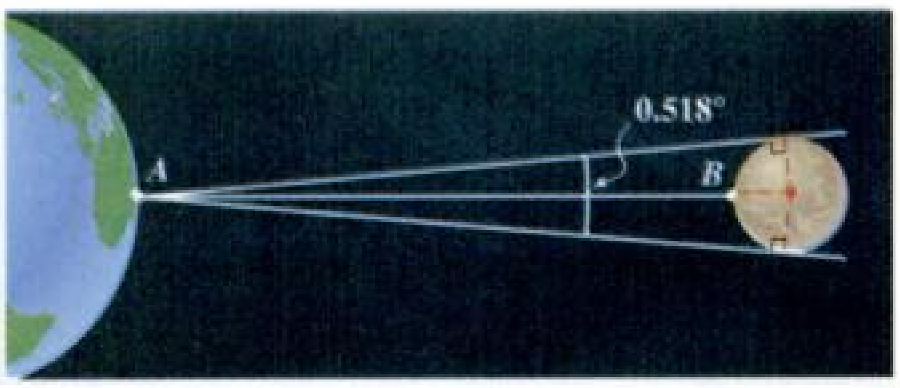
24. La torre autónoma más alta del mundo es la de CN en Toronto, Canadá. A una distancia de 1 km de su base, el ángulo de elevación hasta la parte superior de la torre es 28.81°. Encuentre la altura de la torre.

25. Encuentre el perímetro de un hexágono regular que está inscrito en un círculo de radio 8 m.

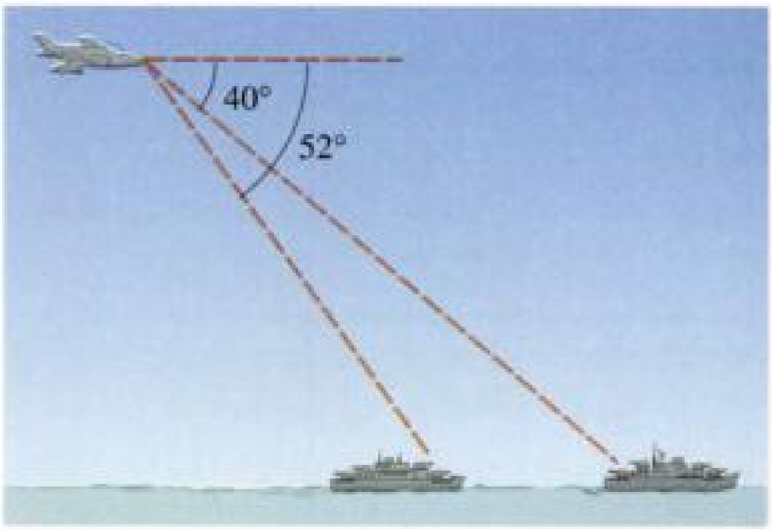
26. Los pistones de un motor de automóvil suben y bajan en forma repetida para hacer girar el cigüeñal, como se muestra. Encuentre la altura del punto P arriba del centro O del cigüeñal en términos del ángulo θ.



27. Visto desde la Tierra, el ángulo subtendido por la luna llena es 0.518°. Use esta información y el hecho de que la distancia AB de la Tierra a la Luna es de 236 900 millas para determinar el radio de la Luna.



28. Un piloto mide los ángulos de depresión hasta dos barcos como 40° y 52° (véase la figura). Si el piloto vuela a una altura de 35 000 pies, encuentre la distancia entre los dos barcos.



29–40 ■ Encuentre el valor exacto.

29. sen 315°

30. $\csc \dfrac{9\pi}{4}$

31. $\tan(-135°)$

32. $\cos \dfrac{5\pi}{6}$

33. $\cot\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$

34. sen 405°

35. $\cos 585°$

36. $\sec \dfrac{22\pi}{3}$

37. $\csc \dfrac{8\pi}{3}$

38. $\sec \dfrac{13\pi}{6}$

39. $\cot(-390°)$

40. $\tan \dfrac{23\pi}{4}$

41. Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si el punto $(-5, 12)$ está sobre el lado terminal de θ.

42. Encuentre sen θ si θ está en posición estándar y su lado terminal interseca el círculo de radio 1 centrado en el origen en el punto $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$.

43. Encuentre el ángulo agudo formado por la línea $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ y el eje x.

44. Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si su lado terminal está en el cuadrante III y es paralelo a la línea $4y - 2x - 1 = 0$.

45–48 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

45. $\tan\theta$, $\cos\theta$; θ en el cuadrante II

46. $\sec\theta$, sen θ; θ en el cuadrante III

47. $\tan^2\theta$, sen θ; θ en cualquier cuadrante

48. $\csc^2\theta \cos^2\theta$, sen θ; θ en cualquier cuadrante

49–52 ■ Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

49. $\tan\theta = \sqrt{7}/3, \quad \sec\theta = \frac{4}{3}$ **50.** $\sec\theta = \frac{41}{40}, \quad \csc\theta = -\frac{41}{9}$

51. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \quad \cos\theta < 0$ **52.** $\sec\theta = -\frac{13}{5}, \quad \tan\theta > 0$

53. Si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante II, encuentre $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

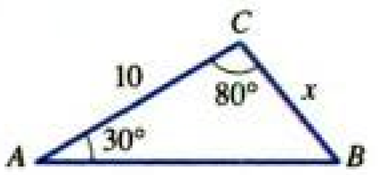
54. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante I, encuentre $\tan\theta + \sec\theta$.

55. Si $\tan\theta = -1$, encuentre $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

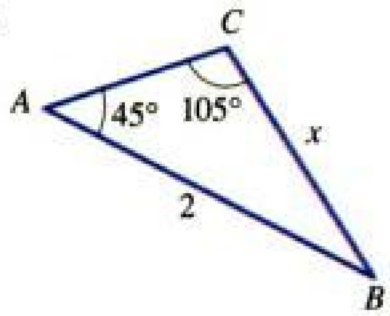
56. Si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, encuentre $\operatorname{sen} 2\theta$.

57–62 ■ Encuentre el lado marcado con x.

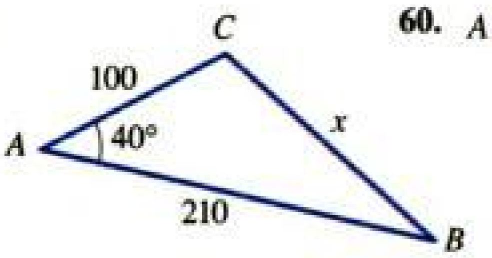
57.



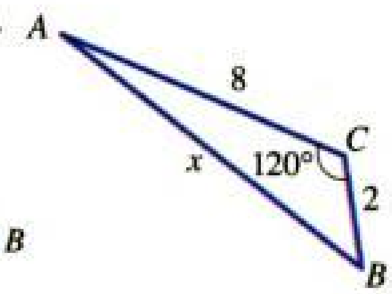
58.



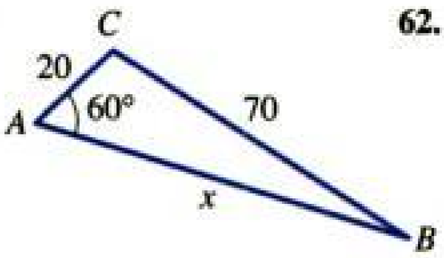
59.



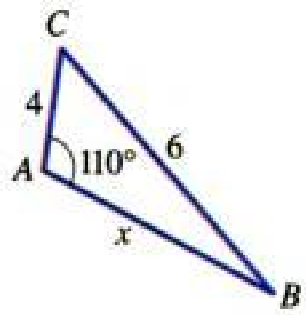
60.



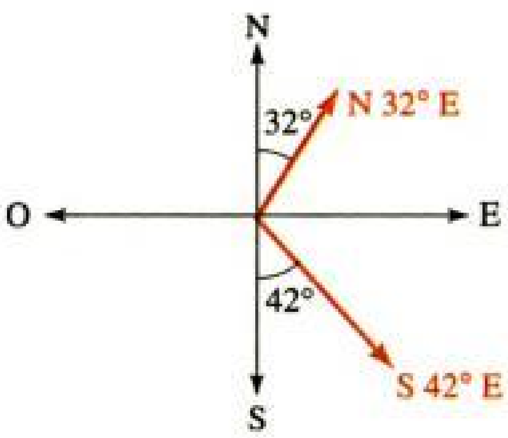
61.



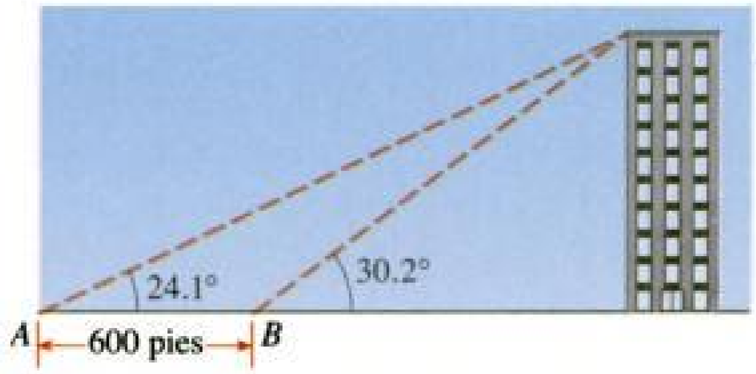
62.



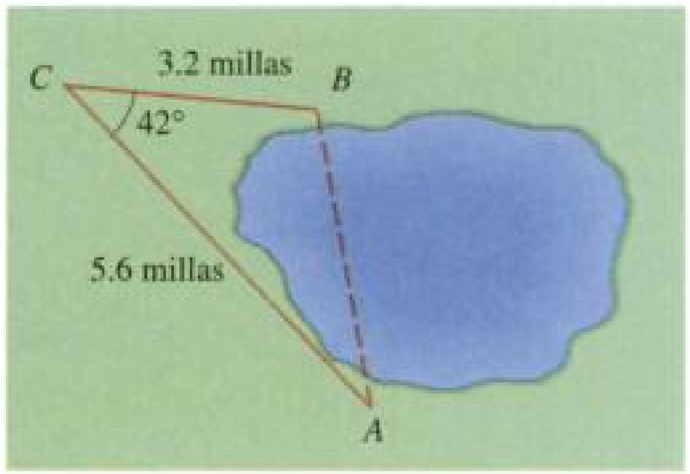
63. Dos naves salen de un puerto al mismo tiempo. Una viaja a 20 millas/h en dirección N 32° E y la otra viaja a 28 millas/h en dirección S 42° E (véase la figura). ¿Qué tan apartadas están las dos naves después de dos horas?



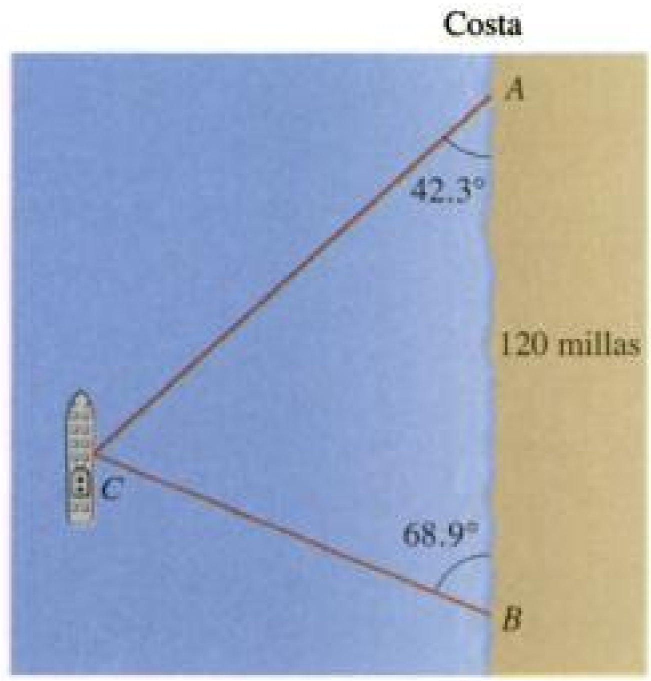
64. De un punto A sobre el suelo, el ángulo de elevación hasta la parte superior de un edificio alto es 24.1°. Desde el punto B, que está 600 pies más cerca del edificio, el ángulo de elevación se mide como 30.2°. Encuentre la altura del edificio.



65. Encuentre la distancia entre los puntos A y B en lados opuestos de un lago a partir de la información mostrada.



66. Un bote que cruza el océano pasa cerca de una costa recta. Los puntos A y B están apartados 120 millas en la costa, como se ilustra. Se encuentra que $\angle A = 42.3°$ y $\angle B = 68.9°$. Encuentre la distancia más corta del bote a la costa.

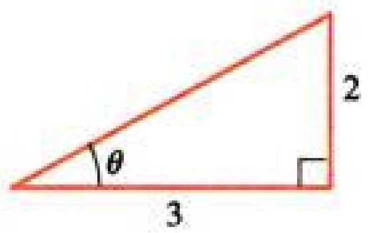


67. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 8 y 14 y ángulo incluido de 35°.

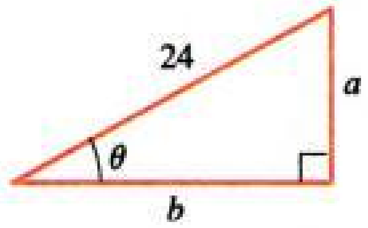
68. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 5, 6 y 8.

6 Evaluación

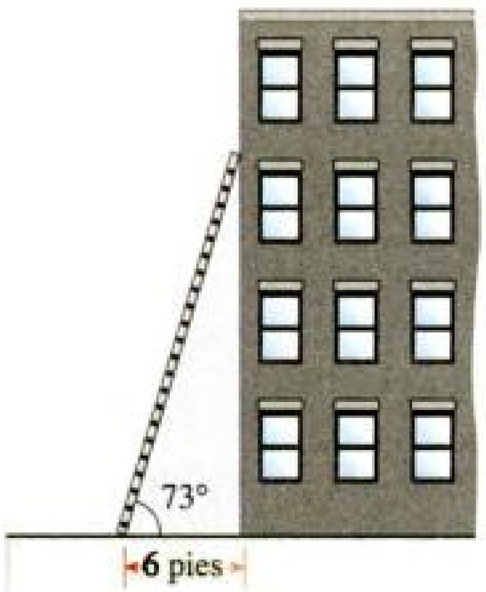
1. Encuentre la medida en radianes que corresponda a las medidas en grados 330° y −135°.
2. Encuentre las medidas en grados que correspondan a las medidas en radianes $\frac{4\pi}{3}$ y -1.3.
3. Las aspas del rotor de un helicóptero son 16 pies de largo y giran a 120 rpm.
   a) Encuentre la velocidad angular del rotor.
   b) Encuentre la velocidad lineal de un punto en la punta del aspa.
4. Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.
   a) sen 405°
   b) tan(−150°)
   c) $\sec \frac{5\pi}{3}$
   d) $\csc \frac{5\pi}{2}$
5. Encuentre $\tan \theta + \operatorname{sen} \theta$ para el ángulo θ mostrado.



6. Exprese las longitudes a y b mostradas en la figura en términos de θ.



7. Si $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante III, encuentre $\tan \theta \cot \theta + \csc \theta$.
8. Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}$ y $\tan \theta = -\frac{5}{12}$, encuentre $\sec \theta$.
9. Exprese $\tan \theta$ en términos de $\sec \theta$ para θ en el cuadrante II.
10. La base de la escalera de la figura está a 6 pies del edificio, y el ángulo formado por la escalera y el suelo es 73°. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?



Enfoque en el modelado

Agrimensura

¿Cómo se puede medir la altura de una montaña, o la distancia a través de un lago? Es evidente que podría ser difícil, inconveniente o imposible medir estas distancias de manera directa (es decir, por medio de una cinta o una vara). Por otro lado, es fácil medir *ángulos* hasta objetos distantes. Ahí es donde entra la trigonometría: las relaciones trigonométricas relacionan ángulos con distancias, de modo que se pueden usar para *calcular* distancias a partir de ángulos *medidos*. En este *Enfoque*, se examina cómo se usa la trigonometría para trazar el mapa de una ciudad. Los métodos modernos para la elaboración de mapas emplean satélites y el Sistema de Posicionamiento Global, pero las matemáticas siguen siendo el núcleo del proceso.

Mapeo de una ciudad

Un estudiante quiere trazar el mapa de su ciudad. Para construir un mapa exacto (o modelo a escala), necesita hallar las distancias entre varias señales de la ciudad. El estudiante hace las mediciones mostradas en la figura 1. Observe que sólo se mide una distancia, entre el ayuntamiento y el primer puente. Las otras mediciones son ángulos.

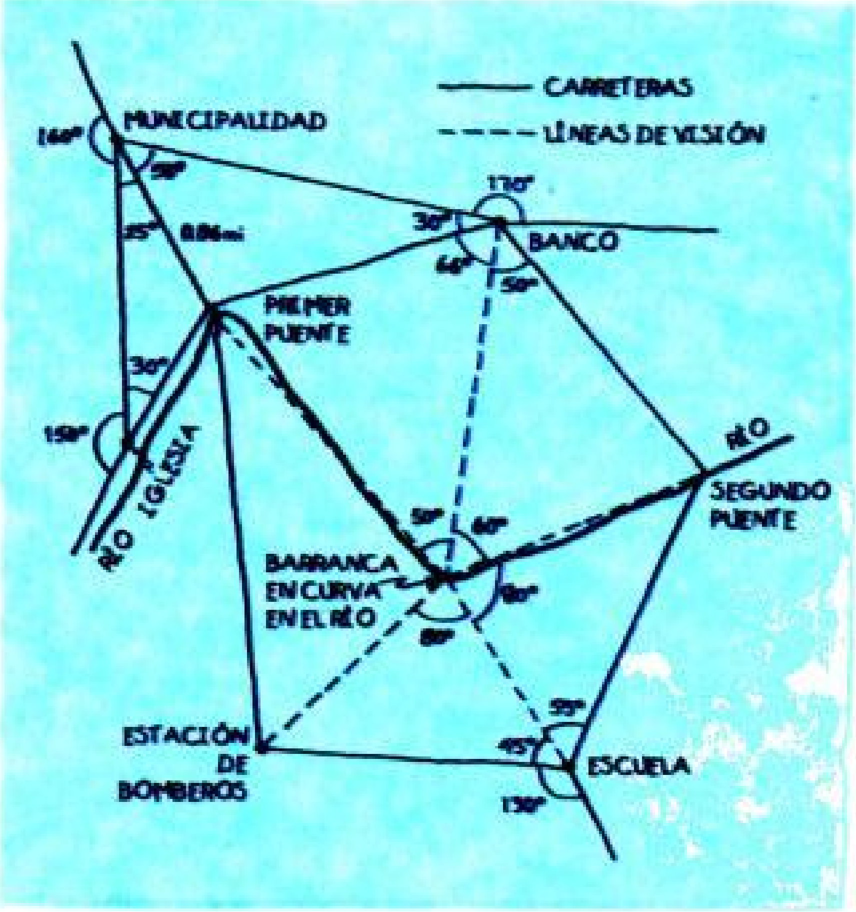


Figura 1

Las distancias entre otras señales ahora se pueden encontrar por medio de la ley de los senos para el triángulo con vértices en la municipalidad, el banco y el primer puente:

$$\frac{x}{\text{sen } 50°} = \frac{0.86}{\text{sen } 30°} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$x = \frac{0.86 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 30°} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 1.32 \text{ millas} \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Por lo tanto la distancia entre el banco y el primer puente es 1.32 millas.

La distancia hallada ahora se puede usar para encontrar las otras distancias. Por ejemplo, se encuentra la distancia y entre el banco y el barranco como sigue:

$$\frac{y}{\text{sen } 64°} = \frac{1.32}{\text{sen } 50°} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$y = \frac{1.32 \text{ sen } 64°}{\text{sen } 50°} \qquad \text{Despeje } y$$

$$\approx 1.55 \text{ millas} \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Continuando de este modo, se pueden calcular todas las distancias entre las señales mostradas en el bosquejo aproximado de la figura 1. Se puede usar esta información para trazar el mapa mostrado en la figura 2.

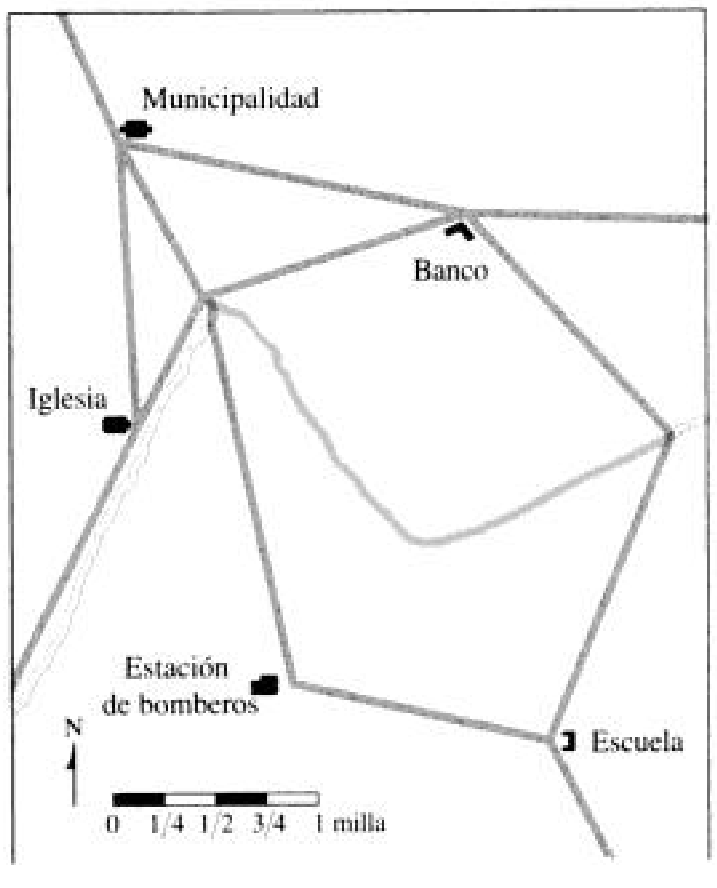


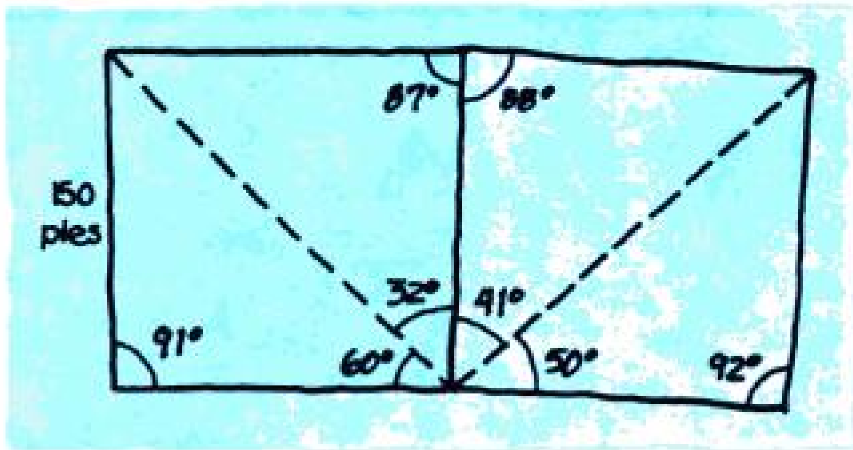
Figura 2

Para elaborar un mapa topográfico, se necesita medir la elevación. Este concepto se explora en los problemas 4-6.

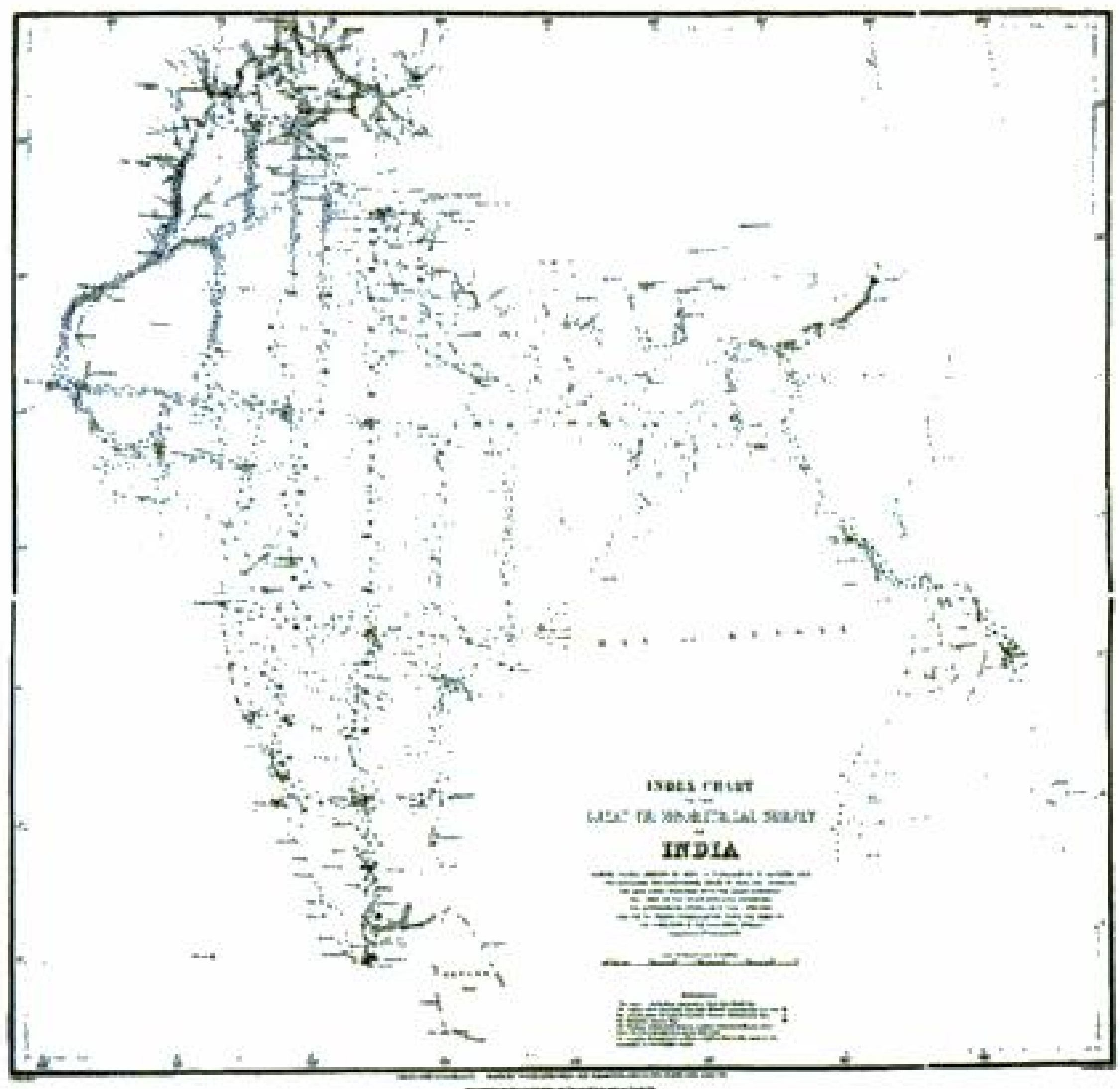
Problemas

1. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la iglesia y la municipalidad.
2. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la municipalidad y la escuela. (Necesitará hallar primero las otras distancias.)

7. **Levantamiento de lotes de edificios** Un topógrafo levanta el plano de dos lotes adyacentes y hace el siguiente bosquejo aproximado que muestra sus mediciones. Calcule las distancias mostradas en la figura y use su resultado para trazar un mapa exacto de los dos lotes.



8. **Gran medición de la India** La gran medición trigonométrica de la India fue uno de los proyectos de mapeo más inmensos jamás emprendidos (véase la nota al margen de la página 504). Realice alguna investigación en su biblioteca o en la Internet para aprender más acerca de la medición y escriba un informe de sus hallazgos.



British Library

7 Trigonometría analítica

Esquema del capítulo

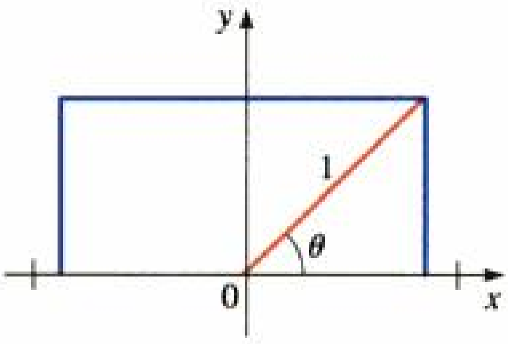
En los capítulos 5 y 6 estudiamos las propiedades gráficas y geométricas de las funciones trigonométricas. En este capítulo tratamos los aspectos algebraicos de la trigonometría, es decir, simplificación y factorización de expresiones y resolución de ecuaciones que contienen funciones trigonométricas. Las herramientas básicas en el álgebra de la trigonometría son las identidades trigonométricas.

Una *identidad trigonométrica* es una ecuación que contiene funciones trigonométricas que se cumplen para todos los valores de la variable. Por ejemplo, de acuerdo con las definiciones de seno y coseno se infiere que para cualquier θ tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

A continuación presentamos otras identidades que tratamos en este capítulo:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$$

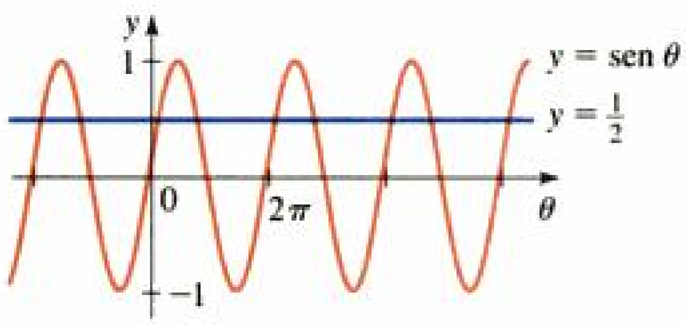


Al aplicar estas identidades podemos simplificar una expresión complicada que contenga funciones trigonométricas a una expresión mucho más simple, con lo que podemos entender mejor lo que significa la expresión. Por ejemplo, el área del rectángulo de la figura a la izquierda es $A = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, luego, al aplicar una de las identidades anteriores, vemos que $A = \operatorname{sen} 2\theta$.

Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación que contiene funciones trigonométricas. Por ejemplo, la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} = 0$$

es una ecuación trigonométrica. Para resolver esta ecuación necesitamos determinar todos los valores de θ que satisfacen la ecuación. Una gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ muestra que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ infinitamente, de modo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Dos de estas soluciones son $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$, y las otras soluciones las podemos calcular sumando múltiplos de 2π a dichas soluciones.



También tratamos las *funciones trigonométricas inversas*. Con objeto de definir la inversa de una función trigonométrica, primero limitamos su dominio a un intervalo en el cual la función es uno-a-uno. Por ejemplo, restringimos el dominio de la función seno a $[-\pi/2, \pi/2]$. En este intervalo sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, de modo que $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Ya veremos que estas funciones inversas son útiles al resolver ecuaciones trigonométricas.

En la sección de *Enfoque en el modelado* (página 575) estudiamos algunas aplicaciones de los conceptos de este capítulo al movimiento de las ondas.

7.1 Identidades trigonométricas

Empezamos por listar algunas de las identidades trigonométricas básicas. Hay más de ellas en los capítulos 5 y 6, y se le pide que demuestre las identidades de cofunciones en el ejercicio 100.

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen } x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \text{sen } u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades permiten plantear la misma expresión de diferentes maneras. Con frecuencia es posible volver a escribir de una manera mucho más simple una expresión que se ve complicada. Para simplificar las expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes y las fórmulas de productos especiales. Para simplificar expresiones trigonométricas usamos estas mismas técnicas junto con las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \sec t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

■

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

■

Demostración de identidades trigonométricas

Muchas identidades provienen de las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen, aprenderemos cómo demostrar que una ecuación trigonométrica es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación *no* es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable (o variables). Por consiguiente, la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.
2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

¡Atención! Para demostrar una identidad no ejecutamos las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación. Por ejemplo, si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

1) $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación

2) $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

la cual es evidentemente una identidad. ¿Esto significa que la ecuación original es una identidad? Claro que no. El problema en este caso es que la operación de elevar al cuadrado es **irreversible** en el sentido de que no podemos regresar a 1) a partir de 2) al calcular las raíces cuadradas, es decir, al invertir el procedimiento. Sólo operaciones que son reversibles transformarán necesariamente una identidad en una identidad.

Ejemplo 3 Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} \text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) & \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) & \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta & \text{Desarrollo} \\ &= \operatorname{sen}^2\theta = \text{SM} & \text{Identidad pitagórica} \end{aligned}$$ ■

En el ejemplo 3 no es fácil ver cómo transformar el segundo miembro en el primero, pero definitivamente es posible. Observe nada más que cada paso sea reversible. En otras palabras, si empezamos con la última expresión en la demostración y regresamos por cada uno de los pasos, el segundo miembro se transforma en el primero. Quizás esté de acuerdo en que es más difícil comprobar la identidad por este camino. Esta es la razón de por qué es mejor cambiar el lado más complicado de la identidad en el lado más sencillo.

Ejemplo 4 Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Solución Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{PM} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

■

Vea *Enfoque en la resolución de problemas* de las páginas 138 a 145.

En el ejemplo 5 existe "un elemento extra" en el problema al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión trigonométrica, elegida de modo que se pueda simplificar el resultado.

Ejemplo 5 Demostración de una identidad mediante la introducción de un elemento extra

Verificar la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

Solución Empezamos con el primer miembro y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \operatorname{sen} u$.

$$\begin{aligned}
\text{PM} &= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \\
&= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u} && \text{Multiplicación del numerador y del denominador por } 1 + \operatorname{sen} u \\
&= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u} && \text{Desarrollo del denominador}
\end{aligned}$$

Multiplicamos por $1 + \operatorname{sen} u$ porque sabemos por la fórmula de la diferencia de cuadrados que $(1 - \operatorname{sen} u)(1 + \operatorname{sen} u) = 1 - \operatorname{sen}^2 u$, y esto es justamente $\cos^2 u$, una expresión más sencilla.

63. $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$

64. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$

65. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$

66. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2 \csc x$

67. $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

68. $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x$

69. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$

70. $\dfrac{\tan v \operatorname{sen} v}{\tan v + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan v - \operatorname{sen} v}{\tan v \operatorname{sen} v}$

71. $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$

72. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} = \sec \theta + \tan \theta$

73. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta - \csc \theta}{\cos \theta - \cot \theta}$

74. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

75. $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$

76. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x \tan x$

77. $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x} = 2 \sec x$

78. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4 \tan x \sec x$

79. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

80. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

81. $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

82. $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

83. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$

84. $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \operatorname{sen} v \cos v$

85. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = (\tan x + \sec x)^2$

86. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

87. $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x$

88. $(\operatorname{sen} \alpha - \tan \alpha)(\cos \alpha - \cot \alpha) = (\cos \alpha - 1)(\operatorname{sen} \alpha - 1)$

89–94 ■ Efectúe la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica que se proporciona y simplifique (véase ejemplo 7). Suponga que $0 \le \theta < \pi/2$.

89. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x = \operatorname{sen} \theta$

90. $\sqrt{1 + x^2}, \quad x = \tan \theta$

91. $\sqrt{x^2 - 1}, \quad x = \sec \theta$

92. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}, \quad x = 2 \tan \theta$

93. $\sqrt{9 - x^2}, \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

94. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}, \quad x = 5 \sec \theta$

95–98 ■ Grafique f y g en el mismo rectángulo de visión. ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

95. $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad g(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

96. $f(x) = \tan x\,(1 + \operatorname{sen} x), \quad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

97. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2, \quad g(x) = 1$

98. $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x, \quad g(x) = 2 \cos^2 x - 1$

99. Demuestre que la ecuación no es una identidad.

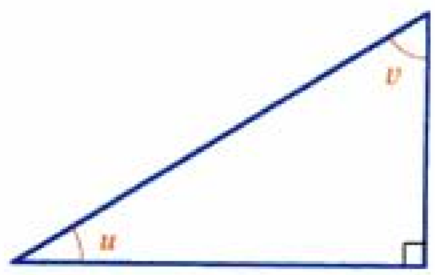
a) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$ **b)** $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

c) $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$

d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x + \sec x$

Descubrimiento • Debate

100. Identidades de cofunciones En el triángulo rectángulo que se muestra, explique por qué $v = (\pi/2) - u$. Explique además cómo puede obtener las seis identidades de cofunciones a partir de este triángulo para $0 < u < \pi/2$.



101. Gráficas e identidades Suponga que grafica dos funciones f y g en una calculadora o en una computadora, y que sus gráficas son idénticas en el rectángulo de visión. ¿Esto demuestra que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Explique.

102. Forme su propia identidad Si empieza con una expresión trigonométrica y la vuelve a escribir o la simplifica, entonces a hacer la expresión original igual a la que volvió a escribir obtiene una identidad trigonométrica. Por ejemplo, a partir del ejemplo 1 tenemos la identidad:

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \sec t$$

Aplique esta técnica para formar su propia identidad, luego proporciónela a sus compañeros de clase para que la comprueben.

7.2 Fórmulas de adición y sustracción

En seguida derivaremos identidades de funciones trigonométricas de sumas y diferencias.

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas para el seno:

$$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para el coseno:

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$
$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para la tangente:

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$
$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

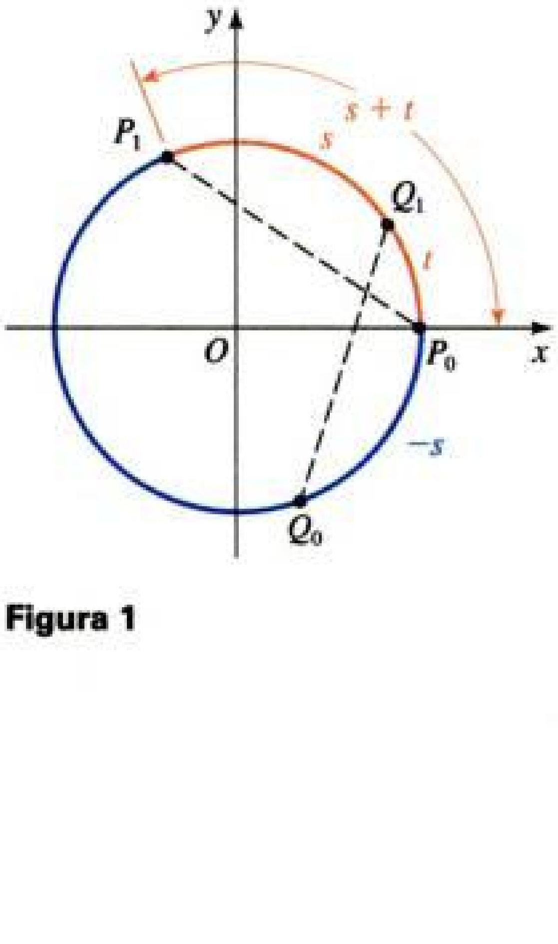


Figura 1

■ Demostración de la fórmula de la adición en el caso del coseno

Para demostrar la fórmula $\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ recurrimos a la figura 1. En la figura, las distancias t, $s + t$ y $-s$ están señaladas en el círculo unitario empezando en $P_0(1, 0)$ y finalizando en Q_1, P_1 y Q_0, respectivamente. Las coordenadas de estos puntos son

$$P_0(1, 0) \qquad Q_0(\cos(-s), \operatorname{sen}(-s))$$
$$P_1(\cos(s+t), \operatorname{sen}(s+t)) \qquad Q_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Puesto que $\cos(-s) = \cos s$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen} s$, se infiere que el punto Q_0 tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Obsérvese que las distancias entre P_0 y P_1 y entre Q_0 y Q_1 medidas a lo largo del arco del círculo son iguales. Como los arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, se infiere que $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Aplicando la fórmula de la distancia obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s+t) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(s+t) - 0]^2} = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y desarrollamos los cuadrados tenemos

esto se añade a 1

$$\cos^2(s+t) - 2\cos(s+t) + 1 + \operatorname{sen}^2(s+t)$$
$$= \cos^2 t - 2\cos s \cos t + \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 s$$

esto se añade a 1

esto se añade a 1

Al aplicar la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tres veces obtenemos

$$2 - 2\cos(s+t) = 2 - 2\cos s \cos t + 2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Para terminar, restamos 2 de cada miembro y dividimos entre -2 ambos miembros:

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

lo cual demuestra la fórmula de la adición para el caso del coseno. ■

Ejemplo 3 Demostración de una identidad de cofunciones

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Solución Por la fórmula de sustracción en el caso del coseno,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u \\ &= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 Demostración de una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

Solución Empezamos con el segundo miembro y usamos la fórmula de la adición para la tangente con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\text{SM} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x} \\ &= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{PM}\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo es un uso característico de las fórmulas de la adición y de la sustracción en el cálculo infinitesimal.

Ejemplo 5 Una identidad del cálculo infinitesimal

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, demuestre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Definición de } f \\ &= \frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Fórmula de la adición para el seno} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x\operatorname{sen} h}{h} && \text{Factorización} \\ &= \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) && \text{Separación de las fracciones}\end{aligned}$$

■

Expresiones de la forma A sen $x + B$ cos x

Podemos escribir expresiones de la forma A sen $x + B$ cos x en términos de una función trigonométrica sencilla usando la fórmula de la adición para el caso del seno. Por ejemplo, considere la expresión

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

Si hacemos $\phi = \pi/3$, entonces $\cos\phi = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}/2$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x &= \cos\phi\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi\cos x\\ &= \operatorname{sen}(x+\phi) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Podemos hacerlo porque los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}/2$ son precisamente el coseno y el seno de un cierto número particular, en este caso, $\pi/3$. Podemos aplicar la misma idea en general para escribir A sen $x + B$ cos x en la forma $k\operatorname{sen}(x+\phi)$. Empezamos por multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{A^2+B^2}$ para obtener

$$A\operatorname{sen} x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen} x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$$

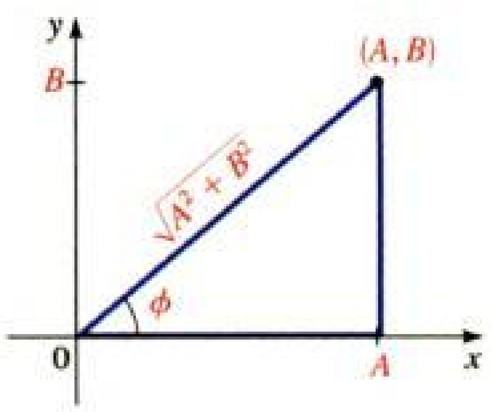


Figura 2

Necesitamos un número ϕ con la propiedad de que

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

En la figura 2 se ilustra que el punto (A, B) en el plano determina un número ϕ con esta propiedad, precisamente. Con esta ϕ, tenemos

$$\begin{aligned}A\operatorname{sen} x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}(\cos\phi\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi\cos x)\\ &= \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(x+\phi)\end{aligned}$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Sumas de senos y cosenos

Si A y B son números reales, entonces

$$A\operatorname{sen} x + B\cos x = k\operatorname{sen}(x+\phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2+B^2}$ y ϕ cumple con lo siguiente

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

23–40 ■ Demuestre la identidad.

23. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

24. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

25. $\operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x$ **26.** $\cos(x - \pi) = -\cos x$

27. $\tan(x - \pi) = \tan x$

28. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

29. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

30. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

31. $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2\cos x \operatorname{sen} y$

32. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$

33. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

34. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

35. $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

36. $1 - \tan x \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$

37. $\frac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan y$

38. $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

39. $\operatorname{sen}(x + y + z) = \operatorname{sen} x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

40. $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

41–44 ■ Escriba la función sólo en términos de seno.

41. $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$ **42.** $\operatorname{sen} x + \cos x$

43. $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$ **44.** $3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos \pi x$

45–46 ■ **a)** Exprese la función sólo en términos del seno.
b) Grafique la función.

45. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ **46.** $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$

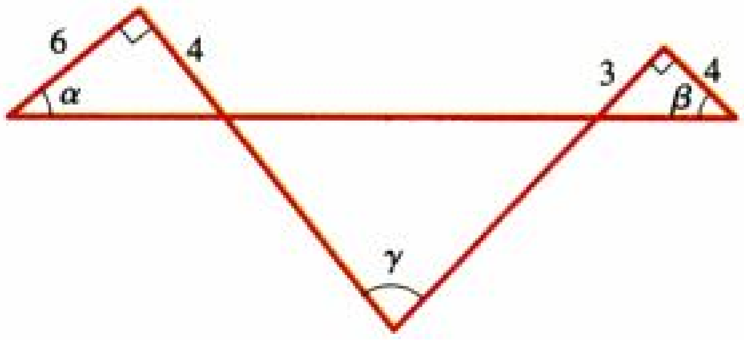
47. Demuestre que si $\beta - \alpha = \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0$$

48. Sea $g(x) = \cos x$. Demuestre que

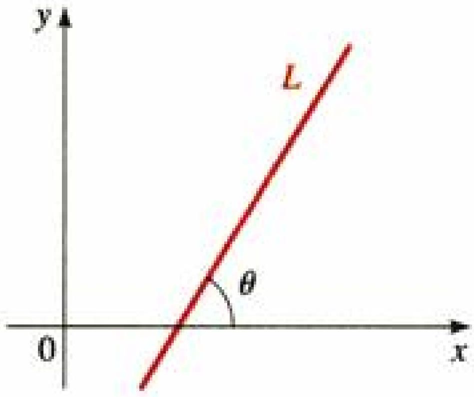
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

49. Refiérase a la figura. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$, y calcule $\tan \gamma$.



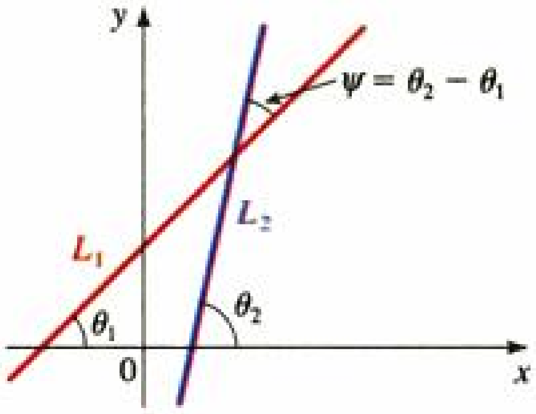
50. a) Si L es una recta en el plano y θ es el ángulo que forma la recta y el eje x como se muestra en la figura, demuestre que la pendiente m de la recta está dada por

$$m = \tan \theta$$



b) Sea L_1 y L_2 dos rectas no paralelas en el plano con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Sea ψ el ángulo agudo que forman las dos rectas (véase la figura). Demuestre que

$$\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



c) Calcule el ángulo agudo que forman las dos rectas

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1 \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{1}{2}x - 3$$

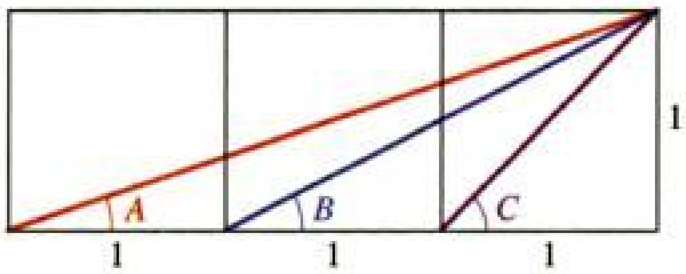
d) Demuestre que si dos rectas son perpendiculares, entonces la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra. [*Sugerencia*: primero encuentre una expresión para $\cot \psi$.]

51–52 ■ **a)** Grafique la función y plantee una conjetura, luego, **b)** demuestre que su conjetura es cierta.

51. $y = \operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

52. $y = -\frac{1}{2}[\cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)]$

53. Calcule $\angle A + \angle B + \angle C$ de la figura. [*Sugerencia*: primero aplique una fórmula de adición para encontrar $\tan(A + B)$.]



Aplicaciones

54. Adición de un eco Un dispositivo digital de retardo forma eco de una señal de entrada repitiéndola un tiempo fijo después de que la recibe. Si tal dispositivo recibe la nota pura $f_1(t) = 5 \operatorname{sen} t$ y repite la nota pura $f_2(t) = 5 \cos t$, entonces el sonido combinado $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

a) Grafique $y = f(t)$ y observe que la gráfica tiene la forma de una curva seno, $y = k \operatorname{sen}(t + \phi)$.

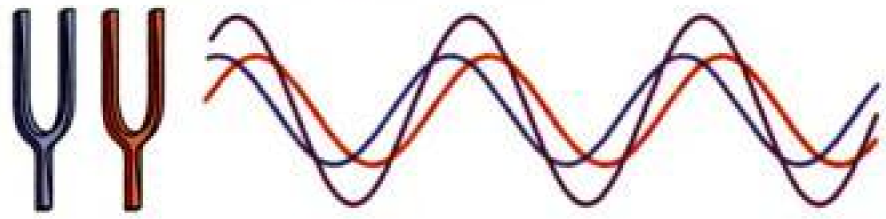
b) Calcule k y ϕ.

55. Interferencia Dos diapasones idénticos se pulsan: uno a una fracción de segundo después que el otro. Los sonidos generados son modelados mediante $f_1(t) = C \operatorname{sen} \omega t$ y $f_2(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Las dos ondas sonoras interfieren para producir un solo sonido modelado por la suma de estas funciones.

$$f(t) = C \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

a) Use la fórmula de la adición para el seno con el fin de demostrar que f se puede expresar en la forma $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$, donde A y B son constantes que dependen de α.

b) Suponga que $C = 10$ y $\alpha = \pi/3$. Calcule constantes k y ϕ para que $f(t) = k \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.



Descubrimiento • Debate

56. Fórmula de adición para el caso del seno En el texto demostramos sólo las fórmulas de adición y sustracción para el coseno. Aplique estas fórmulas y las identidades de las cofunciones

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para demostrar la fórmula de adición para el caso del seno. [*Sugerencia*: para empezar use la primera identidad de las cofunciones para escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(s + t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)\end{aligned}$$

y aplique la fórmula de la sustracción para el coseno.]

57. Fórmula de la adición para la tangente Aplique las fórmulas de la adición para el coseno y el seno con el objeto de demostrar la fórmula de la adición para la tangente. [*Sugerencia*: use

$$\tan(s + t) = \frac{\operatorname{sen}(s + t)}{\cos(s + t)}$$

y divida tanto el numerador como el denominador entre $\cos s \cos t$.]

7.3 Fórmulas para el ángulo doble, mitad de ángulo o semiángulo y producto-a-suma

Las identidades que estudiamos en esta sección son consecuencias de las fórmulas de adición. Las **fórmulas para el ángulo doble** permiten calcular valores de las funciones trigonométricas en $2x$ a partir de los valores en x. Las **fórmulas de la mitad de ángulo o semiángulo** relacionan valores de las funciones trigonométricas en $\frac{1}{2}x$ con sus valores en x. Las **fórmulas del producto-a-suma** relacionan productos de senos y cosenos con sumas de senos y cosenos.

Fórmulas para el ángulo doble

Las fórmulas en el recuadro siguiente son consecuencias inmediatas de las fórmulas de adición, que demostramos en la sección anterior.

Fórmulas para reducir las potencias

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

■ **Demostración** La primera fórmula se obtiene determinando $\operatorname{sen}^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. De igual manera, la segunda fórmula se obtiene calculando $\cos^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula se deduce de las primeras dos y de las identidades recíprocas:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \qquad ■$$

Ejemplo 4 Reducción de potencias en una expresión trigonométrica

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

Otra manera de obtener esta identidad es usar la fórmula del ángulo doble para el seno en la forma $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \qquad ■$$

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La elección del signo + o − depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Por consiguiente,
$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{21}/5}{\frac{2}{5}} = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$
■

Fórmulas del producto-a-suma

Es posible expresar el producto sen u cos v como una suma de funciones trigonométricas. Para comprenderlo, considere las fórmulas de adición y sustracción para el caso de la función seno:

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$
$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

Al sumar el primero y el segundo miembros a estas fórmulas tenemos

$$\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$$

Si dividimos entre 2 llegamos a la fórmula

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

Las otras tres **fórmulas del producto-a-suma** se deducen de una manera similar a partir de las fórmulas de adición.

Fórmulas del producto-a-suma

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$
$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$
$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$
$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

Ejemplo 7 Expresión en forma de producto-suma trigonométrico

Exprese sen $3x$ sen $5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

Solución Aplicamos la cuarta fórmula del producto-a-suma con $u = 3x$ y $v = 5x$ y el hecho de que el coseno es una función par para obtener

$$\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x = \tfrac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$
■

Las fórmulas del producto-a-suma también se pueden aplicar como fórmulas de suma-a-producto. Esto es posible porque el segundo miembro de cada fórmula del producto-a-suma es una suma y el primer miembro es un producto. Por ejemplo, si hacemos

$$u = \frac{x + y}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{x - y}{2}$$

en la primera fórmula del producto-a-suma, tenemos entonces

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y)$$

de modo que

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Las tres **fórmulas de suma-a-producto** restantes se obtienen de manera similar.

Fórmulas suma-a-producto

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Ejemplo 8 Expresión en la forma de un producto de una suma trigonométrica

Exprese sen $7x$ + sen $3x$ en la forma de un producto.

Solución La primera fórmula de suma-a-producto proporciona

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}7x+\operatorname{sen}3x&=2\operatorname{sen}\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}\\&=2\operatorname{sen}5x\cos 2x\end{aligned}$$

■

Ejemplo 9 Demostración de una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}{\cos 3x+\cos x}=\tan x$.

Solución Aplicamos la segunda fórmula de suma-a-producto al numerador y la tercera fórmula al denominador.

$$\begin{aligned}\text{PM}=\frac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}{\cos 3x+\cos x}&=\frac{2\cos\frac{3x+x}{2}\operatorname{sen}\frac{3x-x}{2}}{2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}} &&\text{Fórmulas de suma-a-producto}\\&=\frac{2\cos 2x\operatorname{sen}x}{2\cos 2x\cos x} &&\text{Simplificación}\\&=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\tan x=\text{SM} &&\text{Cancelación}\end{aligned}$$

■

7.3 Ejercicios

1–8 ■ Determinar sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información proporcionada.

1. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

2. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x en el cuadrante II

3. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$

4. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$

5. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, x en el cuadrante III

6. $\sec x = 2$, x en el cuadrante IV

7. $\tan x = -\frac{1}{3}$, $\cos x > 0$

8. $\cot x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x > 0$

9–14 ■ Aplique las fórmulas para reducir la potencia y poder volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno, como en el ejemplo 4.

9. $\operatorname{sen}^4 x$

10. $\cos^4 x$

11. $\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x$

12. $\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x$

13. $\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

14. $\cos^6 x$

15–26 ■ Utilice una fórmula apropiada de mitad de ángulo o semiángulo para determinar el valor exacto de la expresión.

15. sen 15°

16. tan 15°

17. tan 22.5°

18. sen 75°

19. cos 165°

20. cos 112.5°

21. $\tan \frac{\pi}{8}$

22. $\cos \frac{3\pi}{8}$

23. $\cos \frac{\pi}{12}$

24. $\tan \frac{5\pi}{12}$

25. $\operatorname{sen} \frac{9\pi}{8}$

26. $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}$

27–32 ■ Simplifique la expresión mediante la aplicación de una fórmula del ángulo doble o una fórmula del semiángulo.

27. **a)** $2 \operatorname{sen} 18^\circ \cos 18^\circ$ **b)** $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

28. **a)** $\dfrac{2 \tan 7^\circ}{1 - \tan^2 7^\circ}$ **b)** $\dfrac{2 \tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

29. **a)** $\cos^2 34^\circ - \operatorname{sen}^2 34^\circ$ **b)** $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

30. **a)** $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ **b)** $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

31. **a)** $\dfrac{\operatorname{sen} 8^\circ}{1 + \cos 8^\circ}$ **b)** $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

32. **a)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

33. Utilice la fórmula de la adición para el caso del seno con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para el caso del seno.

34. Aplique la fórmula de la adición para la tangente con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para la tangente.

35–40 ■ Calcule $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ y $\tan \frac{x}{2}$ a partir de la información proporcionada.

35. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0^\circ < x < 90^\circ$

36. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < x < 270^\circ$

37. $\csc x = 3$, $90^\circ < x < 180^\circ$

38. $\tan x = 1$, $0^\circ < x < 90^\circ$

39. $\sec x = \frac{3}{2}$, $270^\circ < x < 360^\circ$

40. $\cot x = 5$, $180^\circ < x < 270^\circ$

41–46 ■ Exprese el producto en la forma de una suma

41. $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$

42. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

43. $\cos x \operatorname{sen} 4x$

44. $\cos 5x \cos 3x$

45. $3 \cos 4x \cos 7x$

46. $11 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}$

47–52 ■ Escriba la suma como un producto

47. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

48. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

49. $\cos 4x - \cos 6x$

50. $\cos 9x + \cos 2x$

51. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$

52. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

53–58 ■ Calcule el valor del producto o suma.

53. $2 \operatorname{sen} 52.5^\circ \operatorname{sen} 97.5^\circ$

54. $3 \cos 37.5^\circ \cos 7.5^\circ$

55. $\cos 37.5^\circ \operatorname{sen} 7.5^\circ$

56. $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$

57. $\cos 255^\circ - \cos 195^\circ$

58. $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$

59–76 ■ Demuestre la identidad.

59. $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

60. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

61. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

62. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

63. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

64. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

65. $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

66. $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$