7.3 Ejercicios

1–8 ■ Determinar sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información proporcionada.

1. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

2. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x en el cuadrante II

3. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$

4. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$

5. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, x en el cuadrante III

6. $\sec x = 2$, x en el cuadrante IV

7. $\tan x = -\frac{1}{3}$, $\cos x > 0$

8. $\cot x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x > 0$

9–14 ■ Aplique las fórmulas para reducir la potencia y poder volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno, como en el ejemplo 4.

9. $\operatorname{sen}^4 x$

10. $\cos^4 x$

11. $\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x$

12. $\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x$

13. $\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

14. $\cos^6 x$

15–26 ■ Utilice una fórmula apropiada de mitad de ángulo o semiángulo para determinar el valor exacto de la expresión.

15. sen 15°

16. tan 15°

17. tan 22.5°

18. sen 75°

19. cos 165°

20. cos 112.5°

21. $\tan \dfrac{\pi}{8}$

22. $\cos \dfrac{3\pi}{8}$

23. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

24. $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

25. $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{8}$

26. $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

27–32 ■ Simplifique la expresión mediante la aplicación de una fórmula del ángulo doble o una fórmula del semiángulo.

27. a) $2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ **b)** $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

28. a) $\dfrac{2 \tan 7°}{1 - \tan^2 7°}$ **b)** $\dfrac{2 \tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

29. a) $\cos^2 34° - \operatorname{sen}^2 34°$ **b)** $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

30. a) $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ **b)** $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

31. a) $\dfrac{\operatorname{sen} 8°}{1 + \cos 8°}$ **b)** $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

32. a) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

33. Utilice la fórmula de la adición para el caso del seno con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para el caso del seno.

34. Aplique la fórmula de la adición para la tangente con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para la tangente.

35–40 ■ Calcule $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$ y $\tan \dfrac{x}{2}$ a partir de la información proporcionada.

35. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0° < x < 90°$

36. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$

37. $\csc x = 3$, $90° < x < 180°$

38. $\tan x = 1$, $0° < x < 90°$

39. $\sec x = \frac{3}{2}$, $270° < x < 360°$

40. $\cot x = 5$, $180° < x < 270°$

41–46 ■ Exprese el producto en la forma de una suma

41. $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$

42. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

43. $\cos x \operatorname{sen} 4x$

44. $\cos 5x \cos 3x$

45. $3 \cos 4x \cos 7x$

46. $11 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4}$

47–52 ■ Escriba la suma como un producto

47. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

48. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

49. $\cos 4x - \cos 6x$

50. $\cos 9x + \cos 2x$

51. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$

52. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

53–58 ■ Calcule el valor del producto o suma.

53. $2 \operatorname{sen} 52.5° \operatorname{sen} 97.5°$

54. $3 \cos 37.5° \cos 7.5°$

55. $\cos 37.5° \operatorname{sen} 7.5°$

56. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

57. $\cos 255° - \cos 195°$

58. $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

59–76 ■ Demuestre la identidad.

59. $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

60. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

61. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

62. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

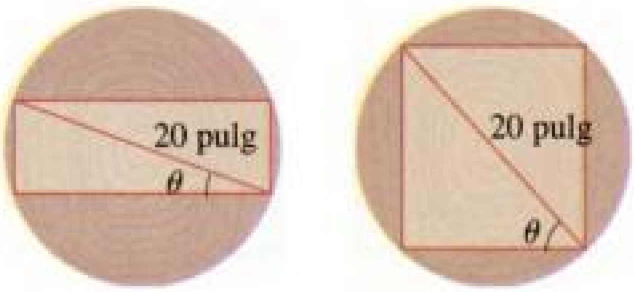
63. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

64. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

65. $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

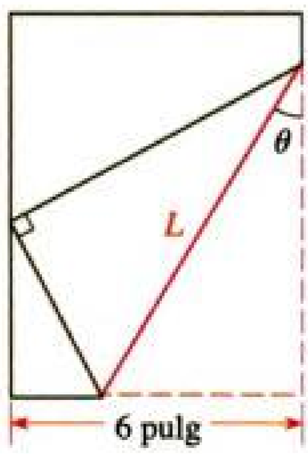
66. $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

b) Muestre que el área máxima de sección transversal de la viga es 200 in^2. [*Sugerencia*: aplique el hecho de que sen u alcanza su valor máximo en $u = \pi/2$.]



92. Longitud del doblez La esquina inferior derecha de una pieza de papel de 6 pulg de ancho se dobla a la izquierda como se muestra. La longitud L del doblez depende del ángulo θ. Demuestre que

$$L = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}$$



93. Mezcla de sonidos Cuando se tocan juntas dos notas puras cuyas frecuencias son muy cercanas, sus sonidos interfieren para producir *batimientos*; es decir, la intensidad o amplitud del sonido aumenta y disminuye en forma alterna. Si las dos notas son

$$f_1(t) = \cos 11t \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \cos 13t$$

el sonido resultante es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

a) Grafique la función $y = f(t)$.

b) Verifique que $f(t) = 2\cos t\cos 12t$.

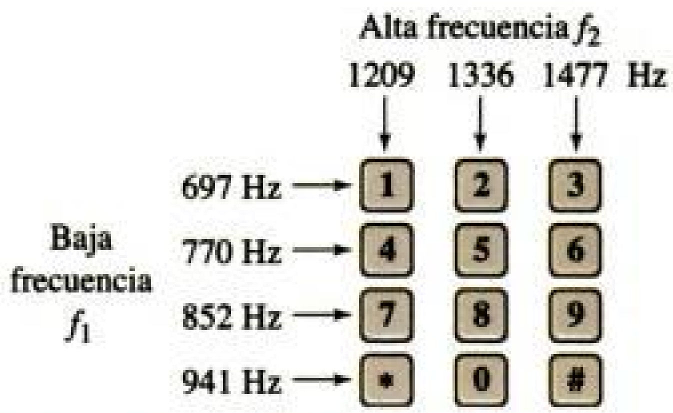
c) Grafique $y = 2\cos t$ y $y = -2\cos t$, junto con la gráfica del inciso a), en el mismo rectángulo de visión. ¿Describen estas gráficas la variación en la intensidad del sonido?

94. Teléfonos por tonos Cuando se presiona una tecla en un teléfono por tonos, se generan dos tonos puros, los cuales se combinan para producir un sonido que identifica exclusivamente a esa tecla. En la figura se muestra la frecuencia baja f_1 y la frecuencia alta f_2 asociadas con cada una de las teclas. Al presionar una tecla se produce la onda sonora $y = \operatorname{sen}(2\pi f_1 t) + \operatorname{sen}(2\pi f_2 t)$.

a) Determine la función que modela el sonido generado cuando se presiona la tecla 4.

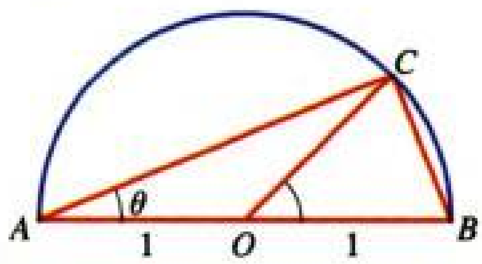
b) Aplique la fórmula de suma-a-producto para expresar el sonido que produce la tecla 4 como un producto de una función seno y una función coseno.

c) Grafique la onda sonora generada por la tecla 4 desde $t = 0$ a $t = 0.006$ s.



Descubrimiento • Debate

95. Demostración geométrica de una fórmula para el ángulo doble Use la figura para demostrar que $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.



Sugerencia: calcule el área del triángulo ABC de dos maneras distintas. Son necesarios los hechos siguientes de la geometría:

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, de modo que $\angle ACB$ es un ángulo recto.

El ángulo central que subtiende la cuerda de un círculo es el doble del ángulo que subtiende la cuerda en el círculo, de modo que $\angle BOC$ es 2θ.

7.4 Funciones trigonométricas inversas

Si f es una función uno a uno o biunívoca con dominio A y rango B, entonces su inversa f^{-1} es la función con dominio B y rango A definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

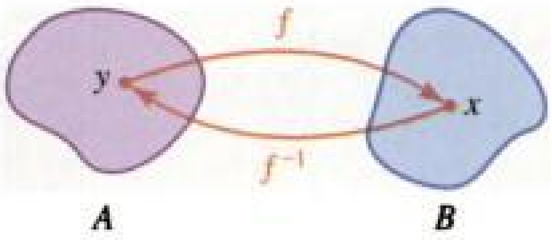


Figura 1
$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

(Véase la sección 2.8.) En otras palabras, f^{-1} es la regla que invierte la acción de f. En la figura 1 se representa gráficamente la acción de f y de f^{-1}.

Para que una función tenga una inversa, debe ser uno a uno. Puesto que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen inversas. No obstante, es posible limitar los dominios de las funciones trigonométricas de tal manera que las funciones resultantes sean uno a uno o biunívocas.

La función inversa del seno

Primero consideremos la función seno. Hay muchas maneras de restringir el dominio del seno de modo que la nueva función sea uno a uno. Una manera natural de hacerlo es limitar el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón de esta elección es que el seno alcanza cada uno de estos valores exactamente una vez en este intervalo. Como podemos observar en la figura 2, en este dominio restringido la función seno es uno a uno (por la Prueba de la recta horizontal), de modo que tiene una inversa.

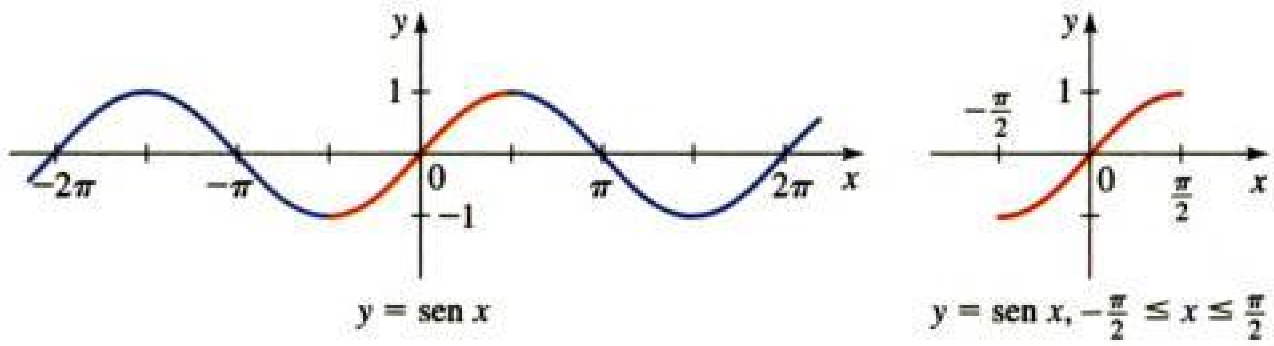


Figura 2

La inversa de la función seno es la función sen^{-1} definida por

$$\text{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}\, y = x$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. La gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ se muestra en la figura 3, y se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ en la recta $y = x$.

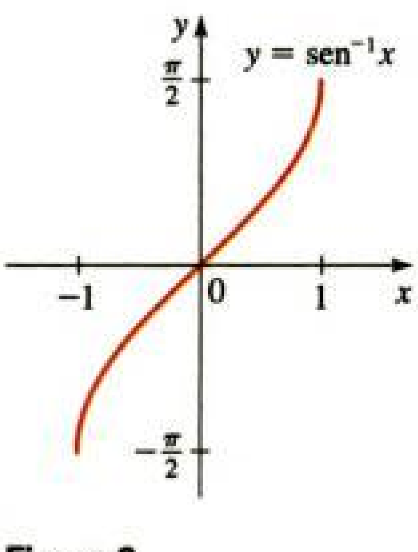


Figura 3

Definición de la función inversa del seno

La **función inversa del seno** es la función $\textbf{sen}^{-1}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$ definido por

$$\text{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}\, y = x$$

La función inversa del seno también se llama **arco seno** y se escribe como **arcsen**.

Por consiguiente, $\text{sen}^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es* x. En otras palabras, $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$. De hecho, a partir de las propiedades generales de las funciones inversas estudiadas en la sección 2.8, tenemos las relaciones siguientes.

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 1 Evaluación de la función inversa seno

Determine: a) $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, b) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y c) $\text{sen}^{-1}\frac{3}{2}$.

Solución

a) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$. Por lo tanto, $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Por lo tanto, $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$.

c) Como $\frac{3}{2} > 1$, no está en el dominio de $\text{sen}^{-1}x$, de modo que $\text{sen}^{-1}\frac{3}{2}$ no está definido. ■

Ejemplo 2 Uso de una calculadora para evaluar el seno inverso

Calcule los valores aproximados de a) $\text{sen}^{-1}(0.82)$ y b) $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3}$.

Solución Puesto que ningún múltiplo racional de π tiene un seno de 0.82, $\frac{1}{3}$, usamos una calculadora para encontrar un valor aproximado. Usamos las teclas $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{SEN}}$, o bien, $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$, o bien, $\boxed{\text{ARC SEN}}$ de la calculadora (la calculadora debe estar en modo radianes), y obtenemos

a) $\text{sen}^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ b) $\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.33984$ ■

Ejemplo 3 Combinación de funciones trigonométricas y sus inversas

Calcule $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$.

Solución 1 Es fácil determinar $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$. De hecho, de acuerdo con las propiedades de las funciones inversas, este valor es exactamente $\frac{3}{5}$. Para determinar $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$, se le reduce al problema más fácil de escribir la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Como $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$, $\cos u$ es positiva y podemos escribir

$$\cos u = +\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}$$

Por lo tanto,

$$\cos\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right)}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

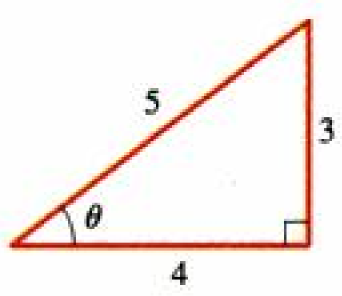


Figura 4

Solución 2 Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces, θ es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{3}{5}$. Interpretemos a θ como un ángulo y dibujemos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos, cuyo cateto opuesto mide 3 y la hipotenusa mide 5 (véase la figura 4). El cateto restante del triángulo se determina mediante el teorema de Pitágoras y resulta ser 4. Según la figura, tenemos

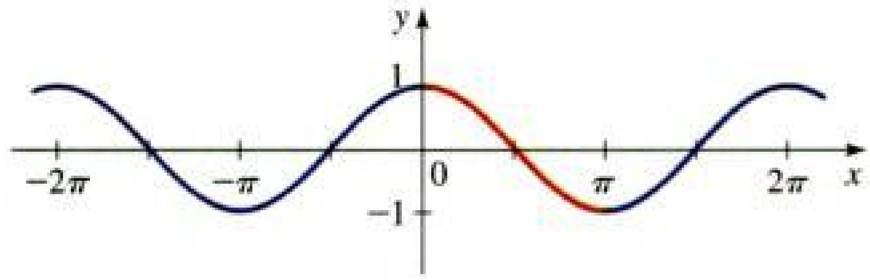
$$\cos\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \cos\theta = \tfrac{4}{5}$$ ■

A partir de la solución 2 del ejemplo 3 podemos calcular inmediatamente los valores de las otras funciones trigonométricas de $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}$ del triángulo. Por lo tanto,

$$\tan\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{3}{4} \qquad \sec\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{5}{4} \qquad \csc\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{5}{3}$$

La función inversa del coseno

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno, por lo que tiene una inversa. Elegimos este intervalo porque en él el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez (véase la figura 5).



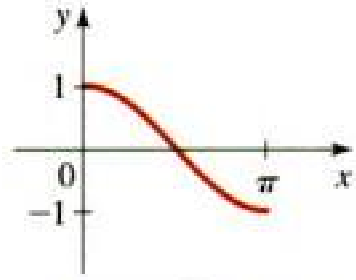


Figura 5

Definición de la función inversa del coseno

La **función inversa del coseno** es la función $\cos^{-1}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ definido por

$$\cos^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

La función inversa del coseno también se denomina **arco coseno** y se escribe **arccos**.

Por consiguiente, $y = \cos^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[0, \pi]$ *cuyo coseno es* x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades de las funciones inversas.

$\cos(\cos^{-1}x) = x$	para $-1 \le x \le 1$
$\cos^{-1}(\cos x) = x$	para $0 \le x \le \pi$

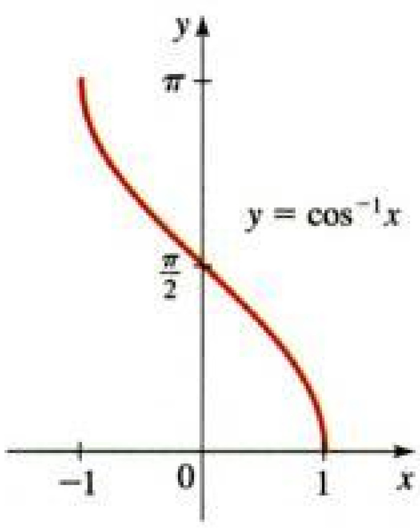


Figura 6

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ se ilustra en la figura 6; se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, en la recta $y = x$.

Ejemplo 4 Evaluación de la función inversa del coseno

Calcule: a) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$, b) $\cos^{-1}0$ y c) $\cos^{-1}\frac{5}{7}$.

Solución

a) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/6$. Por lo tanto, $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0 es $\pi/2$. Por lo tanto, $\cos^{-1}0 = \pi/2$.

c) Como ningún múltiplo racional de π tiene coseno $\frac{5}{7}$, usamos una calculadora en el modo radianes para determinar su valor aproximado: $\cos^{-1}\frac{5}{7} \approx 0.77519$. ■

Ejemplo 5 Combinación de funciones trigonométricas y sus inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$ y $\tan(\cos^{-1}x)$ como expresiones algebraicas en x para $-1 \le x \le 1$.

Solución 1 Sea $u = \cos^{-1}x$. Es necesario encontrar sen u y tan u en términos de x. Como en el ejemplo 3, la idea en este caso es escribir el seno y la tangente en términos del coseno. Tenemos que

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1-\cos^2 u} \qquad \text{y} \qquad \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$$

Para elegir los signos adecuados, observe que u está en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1}x$. Como sen u es positivo en este intervalo, el signo $+$ es la elección correcta. Al sustituir $u = \cos^{-1}x$ en las ecuaciones mostradas y aplicar la relación $\cos(\cos^{-1}x) = x$ tenemos

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

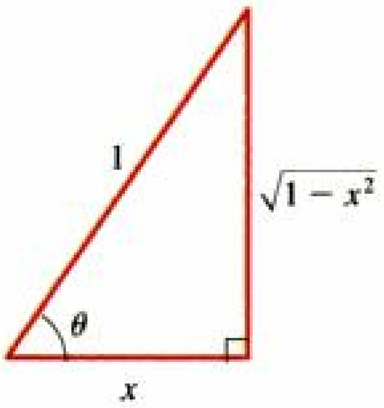


Figura 7
$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$

Solución 2 Sea $\theta = \cos^{-1}x$, de modo que $\cos\theta = x$. En la figura 7 hay un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ, cateto adyacente x e hipotenusa igual a 1. Según el teorema de Pitágoras, el cateto faltante mide $\sqrt{1-x^2}$. De acuerdo con la figura,

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \blacksquare$$

NOTA En la solución 2 del ejemplo 5 podría parecer que como estamos dibujando, el ángulo $\theta = \cos^{-1}x$ debe ser agudo. Pero resulta que el método del triángulo funciona para cualquier θ y para cualquier x. Los dominios y los rangos de las seis funciones trigonométricas inversas han sido escogidos de tal manera que podemos usar siempre un triángulo para determinar $S(T^{-1}(x))$, donde S y T son funciones trigonométricas cualquiera.

Ejemplo 6 Combinación de función trigonométrica y una inversa

Escriba $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x para $-1 \le x \le 1$.

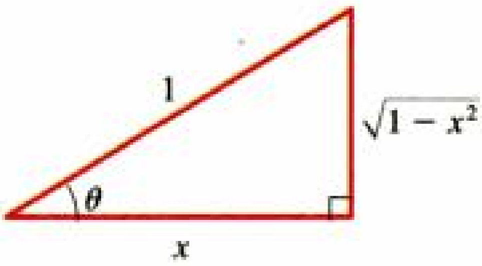


Figura 8
$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}x$ y dibuje un triángulo como el mostrado en la figura 8. Necesitamos determinar sen 2θ, pero a partir del triángulo podemos determinar funciones trigonométricas sólo de θ, no de 2θ. La identidad del ángulo doble para el seno es útil en este caso. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x) &= \operatorname{sen} 2\theta \\
&= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta && \text{Fórmula para el ángulo doble} \\
&= 2\left(\sqrt{1-x^2}\right)x && \text{Según el triángulo} \\
&= 2x\sqrt{1-x^2} && \blacksquare
\end{aligned}$$

La función inversa de la tangente

Restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con objeto de obtener una función uno a uno.

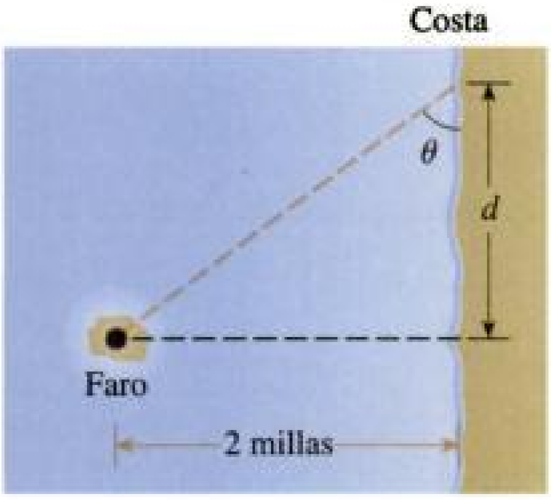


Figura 10

Ejemplo 8 El ángulo de un rayo de luz

Un faro está situado en una isla que está a dos millas fuera de la costa (véase la figura 10). Exprese el ángulo formado por el haz de luz y la costa en términos de la distancia d en la figura.

Solución A partir de la figura vemos que $\tan \theta = 2/d$. Si obtenemos la tangente inversa de ambos miembros, tenemos

$$\tan^{-1}(\tan \theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de cancelación}$$

■

Las funciones inversas de la secante, cosecante y cotangente

Refiérase al ejercicio 59 en donde se trata la determinación de las funciones trigonométricas inversas mediante una calculadora.

Para definir las funciones inversas de las funciones secante, cosecante y cotangente, restringimos el dominio de cada función a un conjunto en el cual dicha función es uno a uno y en el cual alcanza todos sus valores. Cualquier intervalo que cumpla estos criterios es adecuado, pero elegimos limitar el dominio de manera que se simplifique la elección del signo en los cálculos que se relacionan con funciones trigonométricas inversas. Las elecciones que efectuamos son también adecuadas para el cálculo infinitesimal. Esto explica la restricción aparentemente extraña de los dominios de las funciones secante y cosecante. La sección finaliza con las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente con sus dominios restringidos y las gráficas de las funciones inversas (figuras 11 a 13).

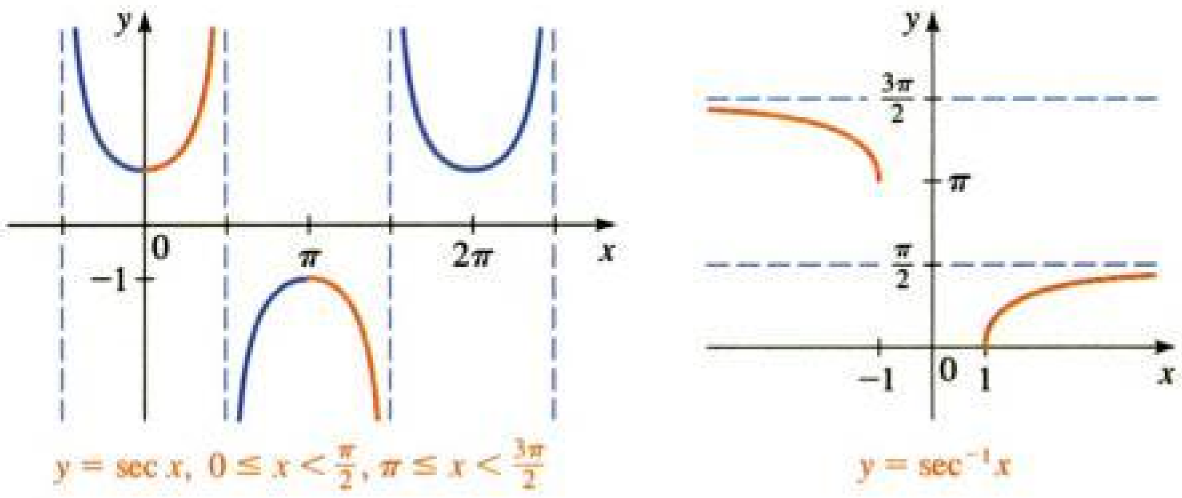


Figura 11
La función secante inversa

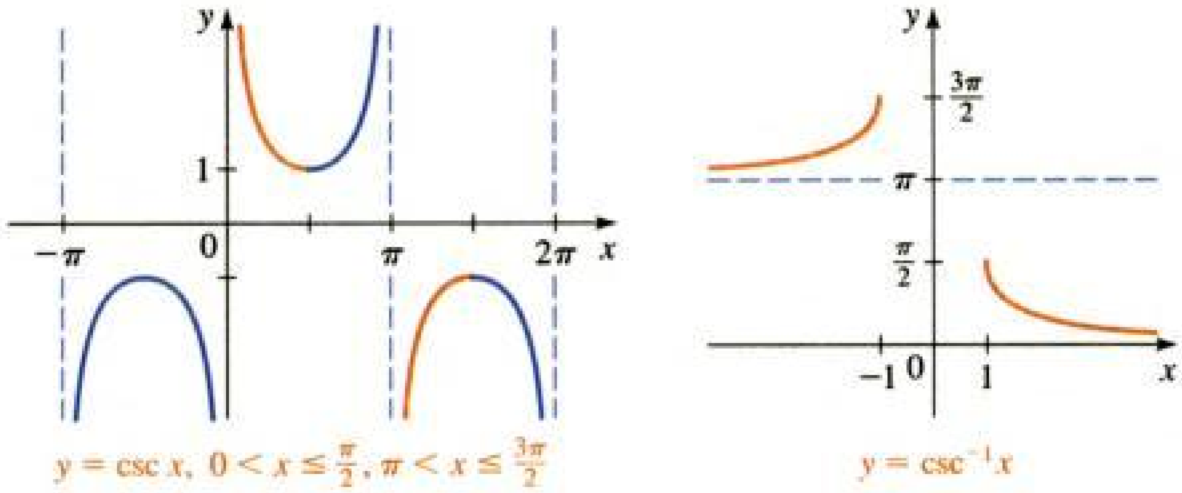


Figura 12
La función cosecante inversa

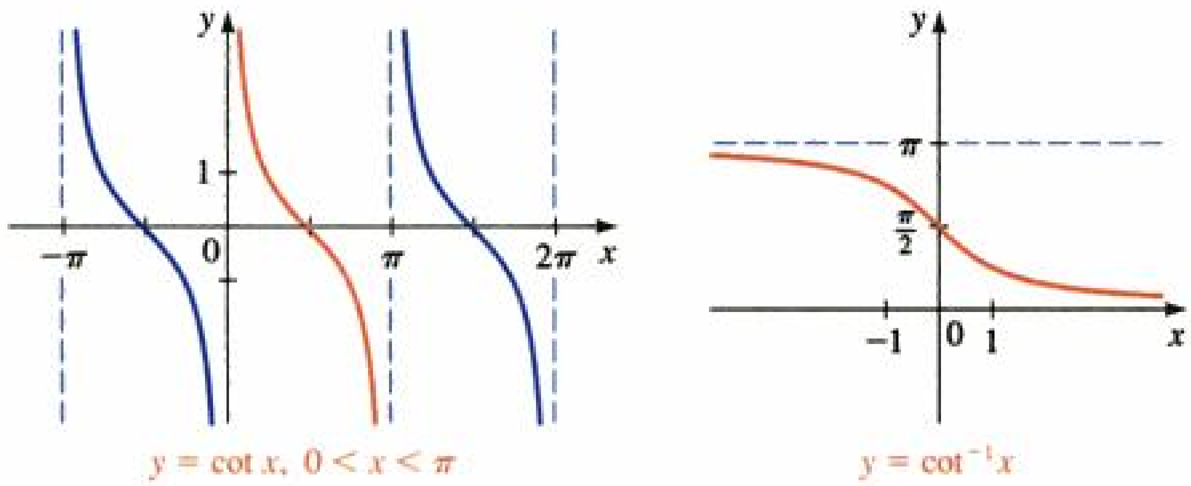


Figura 13
La función cotangente inversa

7.4 Ejercicios

1–8 ■ Calcule el valor exacto de cada una de las expresiones, si está definida.

1. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$ **b)** $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ **c)** $\cos^{-1}2$

2. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. **a)** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **b)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{3}$

5. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}1$ **b)** $\cos^{-1}1$ **c)** $\cos^{-1}(-1)$

6. **a)** $\tan^{-1}1$ **b)** $\tan^{-1}(-1)$ **c)** $\tan^{-1}0$

7. **a)** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

8. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}0$ **b)** $\cos^{-1}0$ **c)** $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

9–12 ■ Por medio de una calculadora halle un valor aproximado de cada una de las expresiones con cinco cifras decimales, si está definida.

9. **a)** $\operatorname{sen}^{-1}(0.13844)$
b) $\cos^{-1}(-0.92761)$

10. **a)** $\cos^{-1}(0.31187)$
b) $\tan^{-1}(26.23110)$

11. **a)** $\tan^{-1}(1.23456)$
b) $\operatorname{sen}^{-1}(1.23456)$

12. **a)** $\cos^{-1}(-0.25713)$
b) $\tan^{-1}(-0.25713)$

13–28 ■ Calcule el valor exacto de la expresión, si está definida.

13. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4})$

14. $\cos(\cos^{-1}\frac{2}{3})$

15. $\tan(\tan^{-1}5)$

16. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}5)$

17. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$

18. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$

19. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

20. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

21. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

22. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

23. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2})$

24. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}0)$

25. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

26. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27. $\tan^{-1}\left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

28. $\cos^{-1}\left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$

29–40 ■ Evalúe las expresiones dibujando un triángulo, como en la solución 2 del ejemplo 3.

29. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

30. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5}\right)$

31. $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1} \frac{12}{5}\right)$

32. $\cos(\tan^{-1} 5)$

33. $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13}\right)$

34. $\csc\left(\cos^{-1} \frac{7}{25}\right)$

35. $\cos(\tan^{-1} 2)$

36. $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3}\right)$

37. $\operatorname{sen}\left(2 \cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

38. $\tan\left(2 \tan^{-1} \frac{5}{13}\right)$

39. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{1}{2}\right)$

40. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5} - \cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

41–48 ■ Vuelva a escribir las expresiones en forma de una expresión algebraica en x.

41. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$

42. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

43. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$

44. $\cos(\tan^{-1} x)$

45. $\cos(2 \tan^{-1} x)$

46. $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$

47. $\cos(\cos^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} x)$

48. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x - \operatorname{sen}^{-1} x)$

49–50 ■ **a)** Grafique la función y plantee una conjetura, y **b)** demuestre que la conjetura planteada es verdadera.

49. $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$

50. $y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$

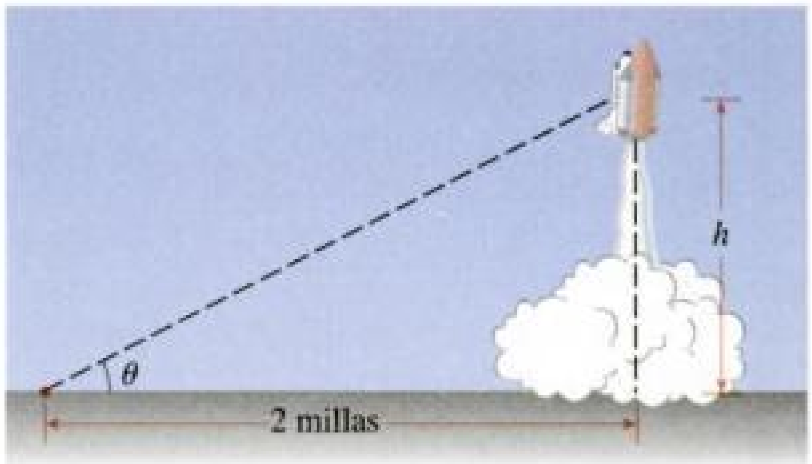
51–52 ■ **a)** Por medio de una calculadora o una computadora determine todas las soluciones de la ecuación con dos cifras decimales y **b)** encuentre la solución exacta.

51. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \frac{\pi}{4}$

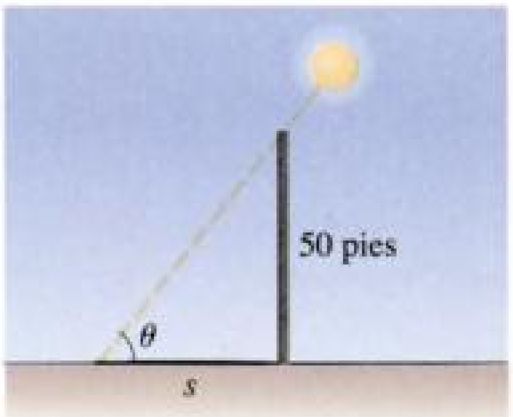
52. $\operatorname{sen}^{-1} x - \cos^{-1} x = 0$

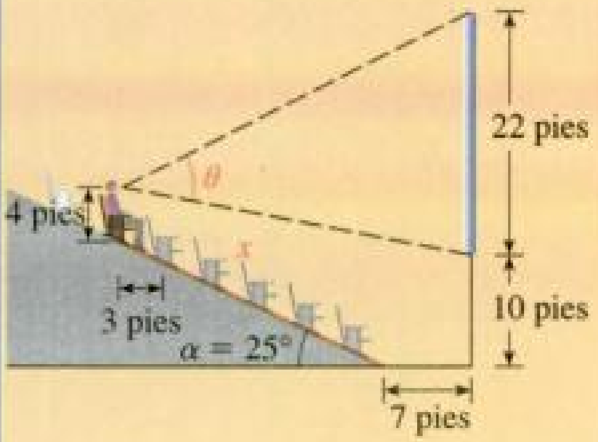
Aplicaciones

53. **Altura del transbordador espacial** Un observador mira al transbordador a dos millas de la plataforma de lanzamiento.
   a) Exprese la altura del transbordador espacial en función del ángulo de elevación θ.
   b) Exprese el ángulo de elevación θ en función de la altura h del transbordador espacial



54. **Altura de un poste** Un poste de 50 pies arroja una sombra como se ilustra en la figura.
   a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol en función del largo s de la sombra.
   b) Calcule el ángulo θ de la elevación del Sol cuando la sombra mide 20 pies de largo





2. Ahora suponga que, si empezamos en la primera hilera de asientos, el piso del área donde se encuentran éstos se eleva con un ángulo $a = 25°$ con respecto a la horizontal, y la distancia inclinada hasta donde usted se sienta es x, como se muestra en la figura.

a) Utilice la ley de los cosenos para demostrar que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - 484}{2ab}\right)$$

donde

$$a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$$

y

$$b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 6)^2$$

b) Utilice una calculadora o una computadora para graficar θ en función de x, y estimar el valor de x que hace máximo a θ. ¿En qué hilera se debe sentar? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta hilera?

7.5 Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

La primera ecuación es una *identidad*, es decir, es cierta para todo valor de la variable x. Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x. Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea cierta. Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado del signo igual. Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Solución Empezamos por aislar sen x.

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 1 se ilustra una representación gráfica de las soluciones.

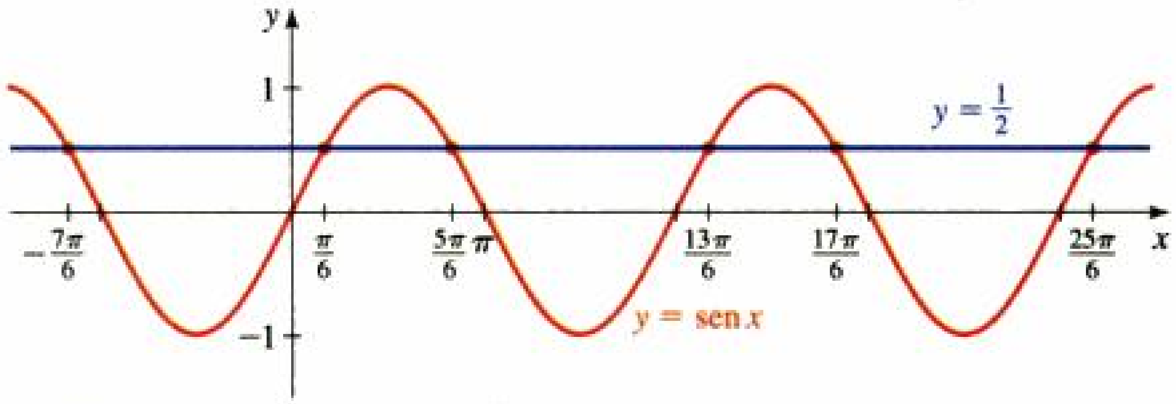


Figura 1 ■

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Solución Empezamos por aislar a $\tan x$.

$$\begin{aligned} \tan^2 x - 3 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ \tan^2 x &= 3 && \text{Suma de 3} \\ \tan x &= \pm\sqrt{3} && \text{Obtención de las raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otras soluciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Ejemplo 3 Determinación de los puntos de intersección

Calcule los valores de x en los cuales se cortan las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

Solución 1: Gráfica

Las gráficas se cortan donde $f(x) = g(x)$. En la figura 2 se ilustra $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = \cos x$ en la misma pantalla, para x entre 0 y 2π. Al usar TRACE o el comando `Intersect` en la calculadora para graficar, observamos que los dos puntos de corte en este intervalo se presentan donde $x \approx 0.785$ y $x \approx 3.927$. Como el seno y el coseno son periódicos en el periodo 2π, los puntos de intersección se presentan donde

$$x \approx 0.785 + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x \approx 3.927 + 2k\pi$$

Matemáticas en el mundo moderno

Getty Images

Pronóstico del tiempo

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que predecir el tiempo de mañana. Investigan patrones climáticos de larga duración, el adelgazamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. Pero el pronóstico diario del clima es aún una parte principal de la meteorología. Su valor se mide por las innumerables vidas humanas que se salvan todos los años gracias a los pronósticos exactos de huracanes, tempestades de nieve y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX los matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aunque este modelo funcionó al principio, fue imposible predecir patrones futuros del clima mediante este modelo debido a la dificultad de medir con exactitud todas las variables y resolver todas las ecuaciones. En la actualidad, los nuevos modelos matemáticos combinados con simulaciones en computadoras de alta velocidad han mejorado en forma notable la predicción del clima. Como resultado, se han evitado muchas muertes así como desastres económicos. Los matemáticos del National Oceanographic and Atmospheric Administration, NOAA (Centro Nacional de Oceanografía y de la Atmósfera) investigan en forma continua mejores métodos para pronosticar el clima..

Puesto que el coseno tiene periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el caso de la primera ecuación, son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. La segunda ecuación no tiene soluciones porque $\cos x$ nunca es mayor que 1. Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Ejemplo 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$.

Solución Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{sen} x &= 2\cos^2 x && \text{Ecuación dada}\\
1 + \operatorname{sen} x &= 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) && \text{Identidad pitagórica}\\
2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 &= 0 && \text{Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación}\\
(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) &= 0 && \text{Factorización}\\
2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 &= 0 && \text{Todos los factores se igualan a } 0\\
\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x &= -1 && \text{Determinación de } \operatorname{sen} x\\
x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x &= \frac{3\pi}{2} && \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)
\end{aligned}$$

Ecuación de tipo cuadrático

$$2S^2 + S - 1 = 0$$
$$(2S - 1)(S + 1) = 0$$

Como el periodo del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ■

Ejemplo 6 Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$.

Solución El primer término es una función de $2x$ y el segundo es una función de x, de modo que empezamos por usar una identidad trigonométrica para volver a escribir el primer término sólo en función de x.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2x - \cos x &= 0 && \text{Ecuación dada}\\
2\operatorname{sen} x\cos x - \cos x &= 0 && \text{Fórmula del ángulo doble}\\
\cos x\,(2\operatorname{sen} x - 1) &= 0 && \text{Factorización}
\end{aligned}$$

Solución

a) Empezamos por aislar tan $(x/2)$.

$$\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{División entre } \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{Determinación de } \frac{x}{2} \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como la tangente tiene periodo π, para obtener todas las soluciones adicionamos cualquier múltiplo entero de π a esta solución. Por lo tanto, las soluciones son de la forma.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Al multiplicar por 2, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso a) que están en el intervalo $[0, 4\pi)$ corresponden a $k = 0$ y $k = 1$. Para todos los otros valores de k, los valores correspondientes de x quedan fuera de este intervalo. Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

■

Aplicación de las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas

Hasta este momento, todas las ecuaciones que hemos resuelto tienen soluciones como $\pi/4$, $\pi/3$, $5\pi/6$ y así sucesivamente. Pudimos calcular las soluciones a partir de los valores especiales de las funciones trigonométricas que hemos memorizado. A continuación consideramos ecuaciones cuya solución requiere que usemos las funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo 10 Aplicación de las funciones trigonométricas inversas

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$.

Solución Empezamos por factorizar el primer miembro.

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$\tan x - 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad \tan x + 1 = 0 \qquad \text{Se iguala cada factor a 0}$$

$$\tan x = 2 \quad \text{o bien} \quad \tan x = -1 \qquad \text{Determinación de tan } x$$

$$x = \tan^{-1} 2 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ecuación de tipo cuadrático

$$T^2 - T - 2 = 0$$

$$(T - 2)(T + 1) = 0$$

21. $\operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x + 3$

22. $3 \tan^3 x = \tan x$

23. $\operatorname{sen}^2 x = 4 - 2\cos^2 x$

24. $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

25. $2 \operatorname{sen} 3x + 1 = 0$

26. $2\cos 2x + 1 = 0$

27. $\sec 4x - 2 = 0$

28. $\sqrt{3} \tan 3x + 1 = 0$

29. $\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = \cos 2x$

30. $\cos 3x = \operatorname{sen} 3x$

31. $\cos \dfrac{x}{2} - 1 = 0$

32. $2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{3} + \sqrt{3} = 0$

33. $\tan \dfrac{x}{4} + \sqrt{3} = 0$

34. $\sec \dfrac{x}{2} = \cos \dfrac{x}{2}$

35. $\tan^5 x - 9 \tan x = 0$

36. $3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

37. $4 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x - 2\cos x - 1 = 0$

38. $\operatorname{sen} 2x = 2 \tan 2x$

39. $\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x = 0$

40. $\sec x - \tan x = \cos x$

41–48 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

41. $2\cos 3x = 1$

42. $3\csc^2 x = 4$

43. $2 \operatorname{sen} x \tan x - \tan x = 1 - 2 \operatorname{sen} x$

44. $\sec x \tan x - \cos x \cot x = \operatorname{sen} x$

45. $\tan x - 3\cot x = 0$

46. $2\operatorname{sen}^2 x - \cos x = 1$

47. $\tan 3x + 1 = \sec 3x$

48. $3\sec^2 x + 4\cos^2 x = 7$

49–56 ■ **a)** Determine todas las soluciones de la ecuación. **b)** Mediante una calculadora resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$, y proporcione cinco cifras decimales.

49. $\cos x = 0.4$

50. $2\tan x = 13$

51. $\sec x - 5 = 0$

52. $3 \operatorname{sen} x = 7\cos x$

53. $5\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

54. $2 \operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

55. $3\operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 2 = 0$

56. $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$

57–60 ■ Grafique f y g en los mismos ejes y encuentre sus puntos de intersección.

57. $f(x) = 3\cos x + 1, \quad g(x) = \cos x - 1$

58. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad g(x) = 2 \operatorname{sen} 2x + 1$

59. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \sqrt{3}$

60. $f(x) = \operatorname{sen} x - 1, \quad g(x) = \cos x$

61–64 ■ Aplique una fórmula de adición o de sustracción para simplificar la ecuación. Después determine todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

61. $\cos x \cos 3x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = 0$

62. $\cos x \cos 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

63. $\operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$

64. $\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = 0$

65–68 ■ Aplique una fórmula para el ángulo doble o para el ángulo mitad para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

65. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$

66. $\tan \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$

67. $\cos 2x + \cos x = 2$

68. $\tan x + \cot x = 4 \operatorname{sen} 2x$

69–72 ■ Resuelva la ecuación aplicando primero una fórmula suma-a-producto.

69. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 0$

70. $\cos 5x - \cos 7x = 0$

71. $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

72. $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = \cos 4x$

73–78 ■ Mediante una calculadora para graficar o una computadora calcule las soluciones de la ecuación con dos cifras decimales.

73. $\operatorname{sen} 2x = x$

74. $\cos x = \dfrac{x}{3}$

75. $2^{\operatorname{sen} x} = x$

76. $\operatorname{sen} x = x^3$

77. $\dfrac{\cos x}{1 + x^2} = x^2$

78. $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Aplicaciones

79. **Alcance de un proyectil** Si un proyectil se dispara con velocidad v_0 y un ángulo θ, entonces su *alcance*, la distancia horizontal que recorre en pies está modelada por la función

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}$$

(Véase la página 818.). Si $v_0 = 2200$ pies/s, ¿qué ángulo en grados se debe elegir para que el proyectil dé en el blanco en el suelo a 5000 pies de distancia?

80. **Vibraciones amortiguadas** El desplazamiento de un resorte que está vibrando en movimiento armónico amortiguado se representa por medio de

$$y = 4e^{-3t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

Calcule los tiempos en que el resorte se encuentra en su posición de equilibrio ($y = 0$).

81. **Refracción de la luz** Se ha observado desde tiempos antiguos que la luz se desvía o refracta cuando pasa de un medio a otro, por ejemplo, del aire al agua. Si v_1 es la velocidad

Enfoque en el modelado

Ondas progresivas y estacionarias

Ya aprendimos que la posición de una partícula en movimiento armónico simple se describe mediante una función de la forma $y = A \text{ sen } \omega t$ (véase la sección 5.5). Por ejemplo, si una cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo como en la figura 1, entonces el punto rojo en la cuerda se desplaza hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. Claro, lo mismo es cierto para todos los puntos de la cuerda.

Figura 1

¿Qué función describe la forma de toda la cuerda? Si fijamos un instante en el tiempo ($t = 0$) y tomamos una fotografía de la cuerda, obtenemos la forma de la figura 2, la cual está modelada por

$$y = A \text{ sen } kx$$

donde y es la altura de la cuerda por arriba del eje x en el punto x.

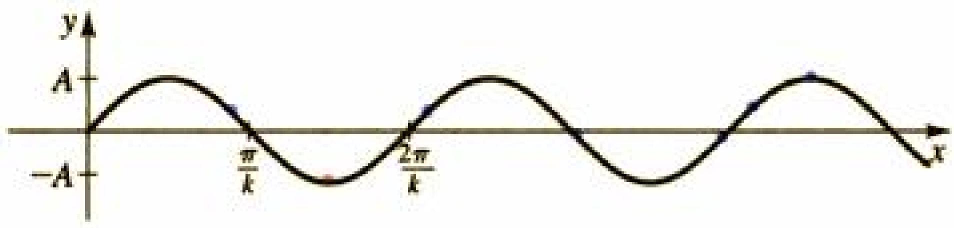


Figura 2
$y = A \text{ sen } kx$

Ondas progresivas

Si tomamos una fotografía de la cuerda en otros instantes, como en la figura 3, parece que las ondas de la cuerda viajan, es decir, se desplazan hacia la derecha.

Figura 3

La **velocidad** de la onda es la rapidez a la cual se mueve hacia la derecha. Si la onda tiene una velocidad v, entonces se mueve a la derecha una distancia vt en el tiempo t. Entonces la gráfica de la onda desplazada en el tiempo t es

$$y(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt)$$

Esta función representa la posición de cualquier punto x en la cuerda en cualquier momento. Utilizamos la notación $y(x, t)$ para indicar que la función depende de las *dos* variables x y t. En seguida se ilustra cómo esta función modela el movimiento de la cuerda.

- **Si fijamos x,** entonces $y(x, t)$ es una función sólo de t, lo cual da la posición del punto fijo x en el tiempo t.
- **Si fijamos t,** entonces $y(x, t)$ es una función sólo de x, cuya gráfica es la forma de la cuerda en el tiempo fijo t.

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

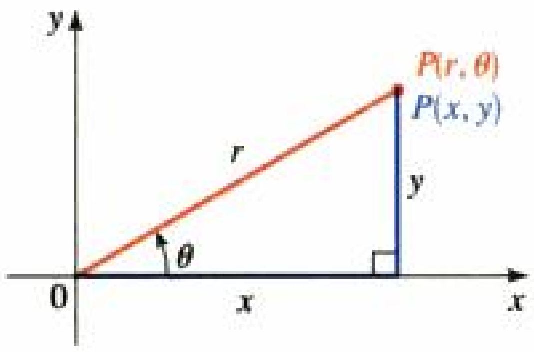


Figura 6

Con frecuencia surgen situaciones en las que es necesario considerar al mismo tiempo coordenadas polares y rectangulares. La conexión entre los dos sistemas se ilustra en la figura 6, donde el eje polar coincide con el eje x positivo. Las fórmulas en el siguiente cuadro se obtienen de la figura por medio de las definiciones de funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. (Aunque se ha ilustrado el caso donde $r > 0$ y θ es agudo, las fórmulas se cumplen para cualquier ángulo θ y para cualquier valor de r.)

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

1. Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares, use las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

2. Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares, use las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Ejemplo 3 Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre coordenadas rectangulares para el punto que tiene coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$.

Solución Puesto que $r = 4$ y $\theta = 2\pi/3$, se tiene

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Así, el punto tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2\sqrt{3})$. ■

Ejemplo 4 Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Encuentre coordenadas polares para el punto que tiene coordenadas rectangulares $(2, -2)$.

Solución Con $x = 2$, $y = -2$, se obtiene

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

por lo tanto $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$. También

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

así que $\theta = 3\pi/4$ o $-\pi/4$. Puesto que el punto $(2, -2)$ se encuentra en el cuadrante IV (véase la figura 7), se puede representar en coordenadas polares como $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$ o $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$. ■

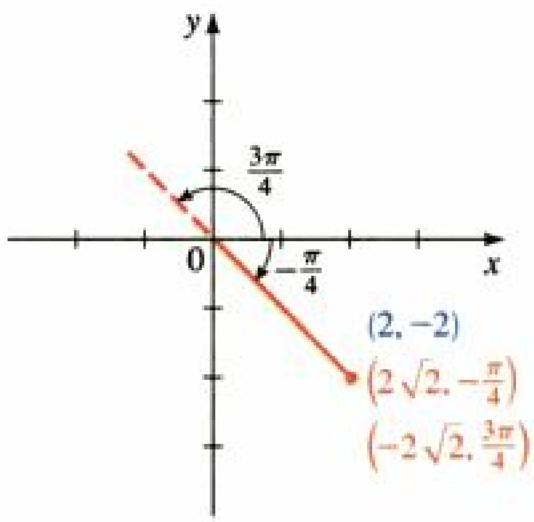


Figura 7

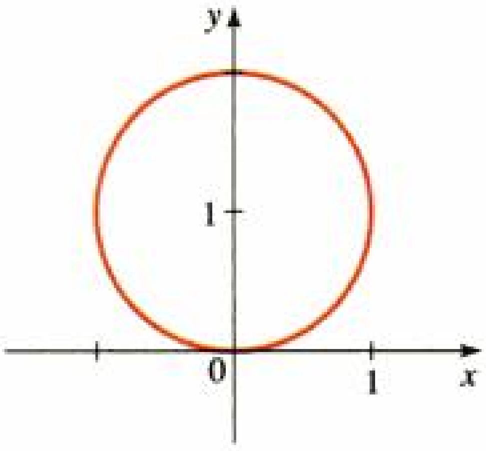


Figura 9

b) Se multiplican ambos lados de la ecuación por r, porque entonces se pueden usar las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y r sen $\theta = y$.

$$r^2 = 2r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Multiplique por } r$$
$$x^2 + y^2 = 2y \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r \operatorname{sen} \theta = y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \text{Reste } 2y$$
$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \qquad \text{Complete el cuadrado en } y$$

Esta es la ecuación de un círculo de radio 1 centrado en el punto (0, 1). Se grafica en la figura 9.

c) Se multiplican primero ambos lados de la ecuación por r.

$$r^2 = 2r + 2r \cos \theta$$

Con $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r \cos \theta$, se pueden convertir dos de los términos de la ecuación en coordenadas rectangulares, pero eliminar la r restante requiere más trabajo:

$$x^2 + y^2 = 2r + 2x \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r \cos \theta = x$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 2r \qquad \text{Reste } 2x$$
$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos miembros}$$
$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

En este caso, la ecuación rectangular es más complicada que la ecuación polar. Aunque no se puede determinar con facilidad la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular, se verá en la sección siguiente cómo graficarla usando la ecuación polar. ■

8.1 Ejercicios

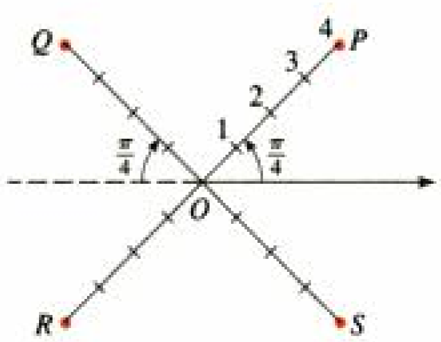
1–6 ■ Grafique el punto que tienen las coordenadas polares dadas.

1. $(4, \pi/4)$ **2.** $(1, 0)$ **3.** $(6, -7\pi/6)$
4. $(3, -2\pi/3)$ **5.** $(-2, 4\pi/3)$ **6.** $(-5, -17\pi/6)$

7–12 ■ Grafique el punto que tienen las coordenadas polares dadas. Luego de otras dos representaciones del punto en coordenadas polares, una con $r < 0$ y la otra con $r > 0$.

7. $(3, \pi/2)$ **8.** $(2, 3\pi/4)$ **9.** $(-1, 7\pi/6)$
10. $(-2, -\pi/3)$ **11.** $(-5, 0)$ **12.** $(3, 1)$

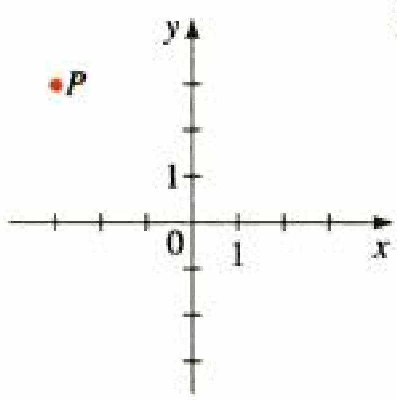
13–20 ■ Determine cuál punto de la figura, P, Q, R o S tiene las coordenadas polares dadas.



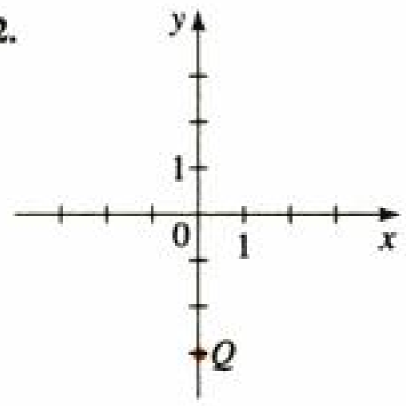
13. $(4, 3\pi/4)$ **14.** $(4, -3\pi/4)$
15. $(-4, -\pi/4)$ **16.** $(-4, 13\pi/4)$
17. $(4, -23\pi/4)$ **18.** $(-4, 23\pi/4)$
19. $(-4, 101\pi/4)$ **20.** $(4, 103\pi/4)$

21–22 ■ Se grafica un punto en forma rectangular. Encuentre las coordenadas polares para el punto, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

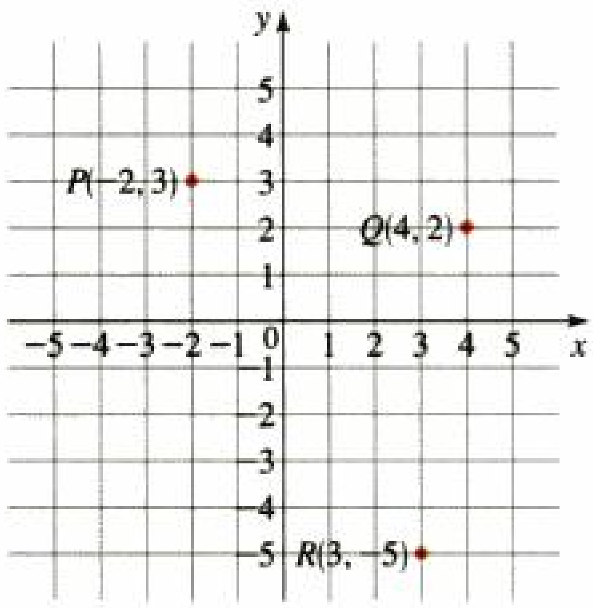
21.



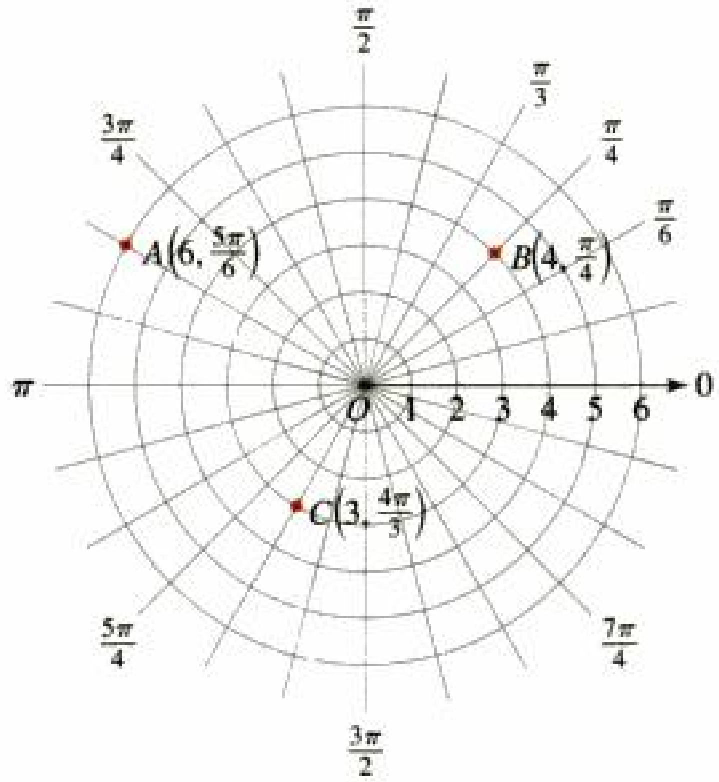
22.



el polo y los rayos que salen del polo, como en la figura 1b). Se usarán tales cuadrículas como ayuda para bosquejar gráficas polares.



a) Cuadrícula para coordenadas rectangulares



b) Cuadrícula para coordenadas polares

Figura 1

En los ejemplos 1 y 2 se puede observar que los círculos centrados en el origen y las rectas que pasan por el origen tienen ecuaciones particularmente simples en coordenadas polares.

Ejemplo 1 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación $r = 3$ y exprese la ecuación en coordenadas polares.

Solución La gráfica consta de los puntos cuya coordenada r es 3, es decir, los puntos que están a 3 unidades del origen. Así que la gráfica es un círculo de radio 3 centrado en el origen, como se muestra en la figura 2.

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$r^2 = 3^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{Sustituya } r^2 = x^2 + y^2$$

Por lo tanto la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = 9$. ■

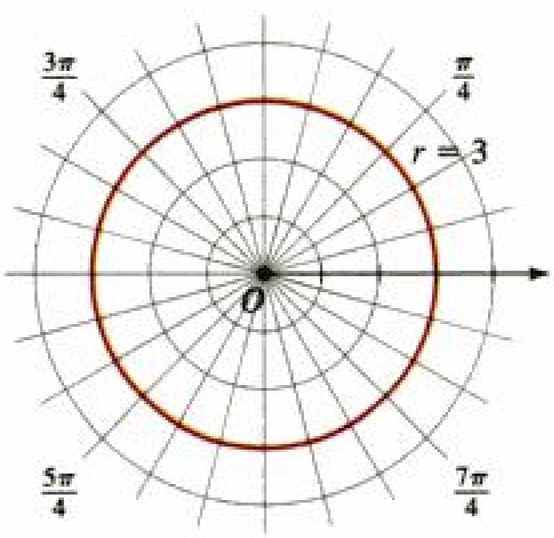


Figura 2

En general, la gráfica de la ecuación $r = a$ es un círculo de radio $|a|$ centrado en el origen. Al elevar al cuadrado ambos lados de esta ecuación, se puede observar que la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = a^2$.

Ejemplo 2 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/3$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

Solución La gráfica consiste en los puntos cuya coordenada θ es $\pi/3$. Esta es la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar (véase

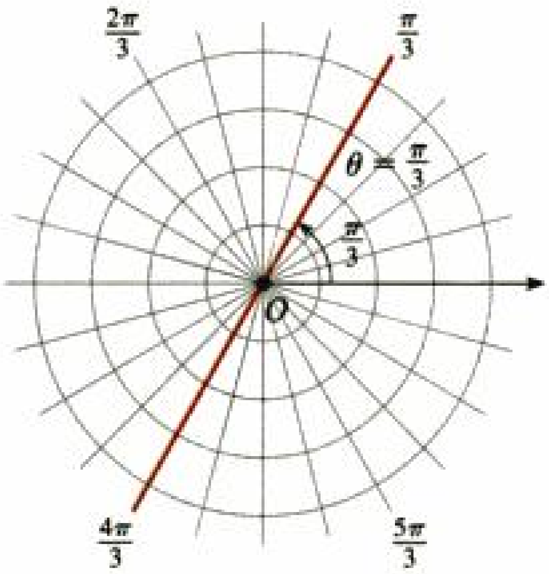


Figura 3

la figura 3). Observe que los puntos $(r, \pi/3)$ en la recta con $r > 0$ se encuentra en el cuadrante I, mientras que aquellos con $r < 0$ se localizan en el cuadrante III. Si el punto (x, y) está en esta recta, entonces

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Así, la ecuación rectangular de la recta de $y = \sqrt{3}\,x$. ■

Para bosquejar una curva polar cuya gráfica no es tan obvia como las de los ejemplos anteriores, se grafican puntos calculados para una cantidad suficiente de valores de θ y luego se unen en una curva continua. (Esto es lo que se hizo cuando se aprendió a graficar funciones en coordenadas rectangulares.)

Ejemplo 3 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación polar $r = 2\,\text{sen}\,\theta$.

Solución Se usa primero la ecuación para determinar las coordenadas polares de varios puntos en la curva. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 2\,\text{sen}\,\theta$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Se grafican estos puntos en la figura 4 y luego se unen para bosquejar la curva. La gráfica aparece como un círculo. Se han empleado valores de θ sólo entre 0 y π, puesto que se habrían obtenido los mismos puntos (esta vez expresado con coordenadas r negativas) si se permite que θ varíe de π a 2π.

La ecuación polar $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ en coordenadas rectangulares es

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

(Véase la sección 8.1, ejemplo 6b). De la forma rectangular de la ecuación se puede observar que la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en (0, 1).)

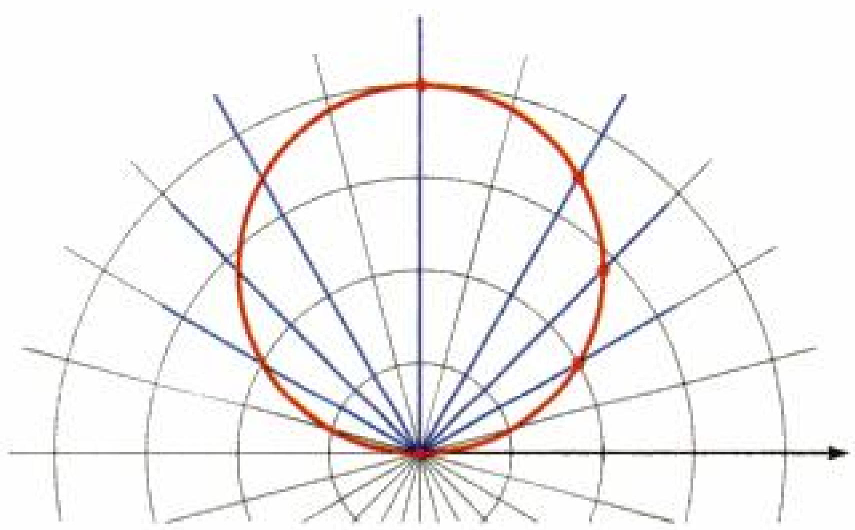


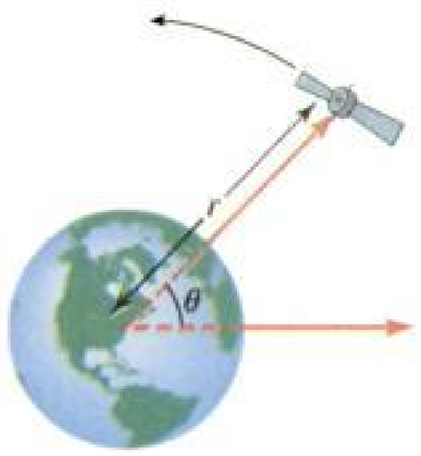
Figura 4
$r = 2\,\text{sen}\,\theta$ ■

En general, las gráficas de ecuaciones de la forma

$$r = 2a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad r = 2a\cos\theta$$

son círculos con radio $|a|$ centrados en los puntos con coordenadas polares $(a, \pi/2)$ y $(a, 0)$, respectivamente.

b) ¿Para qué ángulo θ el satélite está más cerca de la Tierra? Encuentre la altura del satélite arriba de la superficie de la Tierra para este valor de θ.



54. Una órbita inestable La órbita descrita en el ejercicio 53 es estable porque el satélite recorre la misma trayectoria una y otra vez a medida que se incrementa θ. Suponga que un meteoro choca con el satélite y cambia su órbita a

$$r = \frac{22500\left(1 - \dfrac{\theta}{40}\right)}{4 - \cos\theta}$$

a) En la misma pantalla de visión, grafique el círculo $r = 3960$ y la nueva ecuación de órbita, con θ creciente de 0 a 3π. Describa el nuevo movimiento del satélite.

b) Use la característica TRACE de su calculadora para hallar el valor de θ en el momento en que el satélite choca contra la Tierra.

Descubrimiento • Debate

55. Una transformación de gráficas polares ¿Cómo están relacionadas las gráficas de $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

56. Elegir un sistema de coordenadas conveniente Compare la ecuación polar del círculo $r = 2$ con su ecuación en coordenadas rectangulares. ¿En qué sistema coordenado es más simple la ecuación? Haga lo mismo para la ecuación de la rosa de cuatro hojas $r = \text{sen}\,2\theta$. ¿Cuál sistema coordenado elegiría para estudiar estas curvas?

57. Elegir un sistema de coordenadas conveniente Compare la ecuación rectangular de la recta $y = 2$ con su ecuación polar. ¿En qué sistema coordenado es más simple la ecuación? ¿Qué sistema de coordenadas elegiría para estudiar rectas?

8.3 Forma polar de números complejos; teorema de DeMoivre

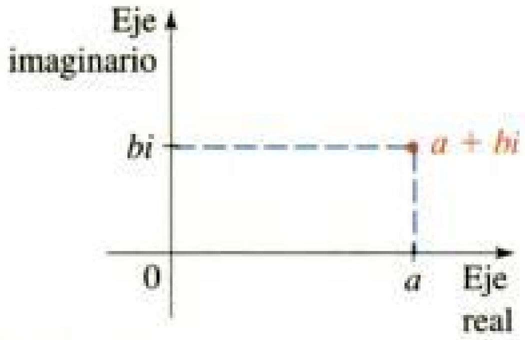


Figura 1

En esta sección se representan números complejos en forma polar (o trigonométrica). Esto permite hallar las n raíces de números complejos. Para describir la forma polar de números complejos, primero se debe aprender a trabajar con números complejos en forma gráfica.

Graficación de números complejos

Para graficar números reales o conjuntos de números reales, se ha estado usando la recta numérica, que tiene sólo una dimensión. Sin embargo, los números complejos tienen dos componentes: una parte real y una parte imaginaria. Esto hace pensar que son necesarios dos ejes para graficar números complejos: uno para la parte real y otro para la parte imaginaria. A éstos se les denomina **eje real** y **eje imaginario**, respectivamente. El plano determinado por estos dos ejes se llama **plano complejo.** Para graficar el número complejo $a + bi$, se traza el par ordenado de números (a, b) en este plano, como indica la figura 1.

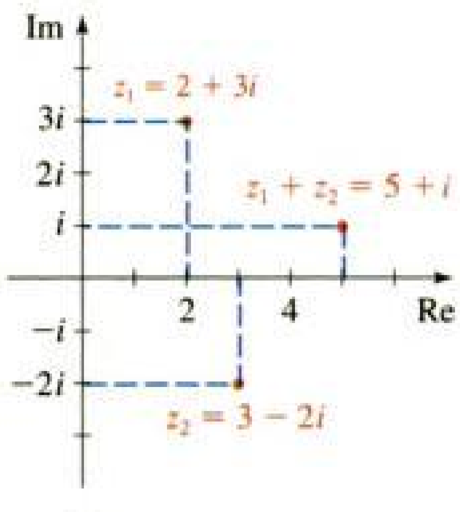


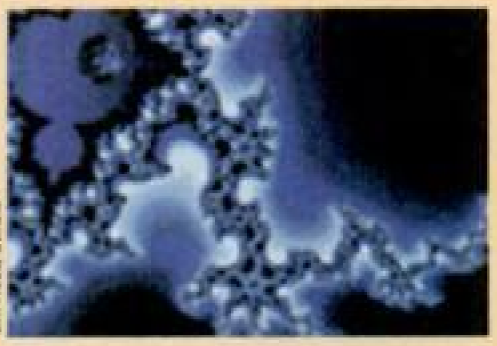
Figura 2

Ejemplo 1 Graficación de números complejos

Grafique los números complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$ y $z_1 + z_2$.

Solución Se tiene $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = 5 + i$. La gráfica se muestra en la figura 2. ■

Matemáticas en el mundo moderno



Bill Ross/Corbis

Fractales

Muchas de las cosas que se modelan en este libro tienen formas regulares predecibles. Pero avances recientes en las matemáticas han hecho posible modelar formas en apariencia aleatorias, o incluso caóticas, como las de una nube, una flama oscilante, una montaña o una costa accidentada. Las herramientas básicas en este tipo de modelado son los fractales inventados por el matemático Benoit Mandelbrot. Un *fractal* es una forma geométrica construida a partir de una forma básica al modificar la escala y repetir la forma indefinidamente de acuerdo con una regla dada. Los fractales tienen detalle infinito; esto significa que mientras más se aproxime, más ve. También son *similares a sí mismos*; es decir, al ampliar una porción del fractal se ven los mismos detalles de la forma original. Debido a sus bellas formas, los directores de cine emplean fractales para crear paisajes ficticios y fondos exóticos.

Aunque un fractal es una forma compleja, se produce de acuerdo con reglas muy simples (véase la página 605). Esta propiedad de los fractales se explota en un proceso de almacenar fotografías en una computadora, conocido como *compresión de imágenes fractales*. En este proceso una fotografía se guarda como una forma básica simple y una regla; repetir la forma de acuerdo con la regla produce la fotografía original. Este es un método de almacenaje extremadamente eficaz; esa es la manera cómo miles de fotografías a color se pueden poner en un solo disco compacto.

Ejemplo 6 Multiplicación y división de números complejos

Sean

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Encuentre a) $z_1 z_2$ y b) z_1/z_2.

Solución

a) Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2)(5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 10\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Para aproximar la respuesta se usa una calculadora en el modo de radianes y se obtiene

$$z_1 z_2 \approx 10(-0.2588 + 0.9659i) = -2.588 + 9.659i$$

b) Por la fórmula de la división

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Con una calculadora en el modo de radianes se obtiene la respuesta aproximada:

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \tfrac{2}{5}(0.9659 - 0.2588i) = 0.3864 - 0.1035i$$ ■

Teorema de DeMoivre

El empleo repetido del uso de la fórmula de la multiplicación da la siguiente fórmula útil para elevar un número complejo a una potencia n para cualquier entero positivo n.

Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, entonces para cualquier entero n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

Este teorema dice: *para tomar la n-ésima potencia de un número complejo, se toma la n-ésima potencia del módulo y se multiplica el argumento por n.*

■ **Demostración** Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned} z^2 = zz &= r^2[\cos(\theta + \theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta) \end{aligned}$$

Ejemplo 9 Hallar las raíces cúbicas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$ y grafíquelas en el plano complejo.

Solución Primero se escribe z en forma polar usando grados. Se tiene $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45°$. Así,

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

Al aplicar la fórmula para raíces n-ésimas (en grados) con $n = 3$, se encuentra que las raíces cúbicas de z son de la forma

$(2\sqrt{2})^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Se suma $360°/3 = 120°$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_k = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2$. Así, las tres raíces cúbicas son

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \approx 1.366 + 0.366i$$
$$w_1 = \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = -1 + i$$
$$w_2 = \sqrt{2}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°) \approx -0.366 - 1.366i$$

Las tres raíces cúbicas de z se grafican en la figura 10. Estas raíces están igualmente espaciadas en un círculo de radio $\sqrt{2}$. ■

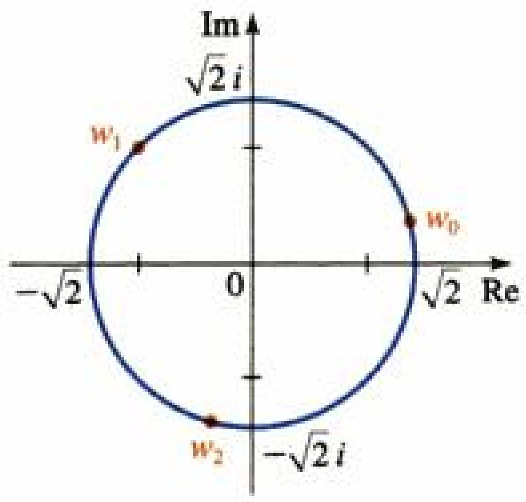


Figura 10
Las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$

Ejemplo 10 Resolver una ecuación usando la fórmula de raíz n-ésima

Resuelva la ecuación $z^6 + 64 = 0$.

Solución Esta ecuación se puede escribir como $z^6 = -64$. Entonces, las soluciones son las raíces sextas de -64, halladas en el ejemplo 8. ■

8.3 Ejercicios

1–8 ■ Grafique el número complejo y encuentre su módulo.

1. $4i$ **2.** $-3i$

3. -2 **4.** 6

5. $5 + 2i$ **6.** $7 - 3i$

7. $\sqrt{3} + i$ **8.** $-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

9. $\frac{3 + 4i}{5}$ **10.** $\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

11–12 ■ Bosqueje el número complejo z y también bosqueje $2z$, $-z$ y $\frac{1}{2}z$ en el mismo plano complejo.

11. $z = 1 + i$ **12.** $z = -1 + i\sqrt{3}$

13–14 ■ Bosqueje el número complejo z y su conjugado complejo en el mismo plano complejo.

13. $z = 8 + 2i$ **14.** $z = -5 + 6i$

15–16 ■ Bosqueje z_1, z_2, $z_1 + z_2$ y z_1z_2 en el mismo plano complejo.

15. $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2 + i$

16. $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 - 3i$

17–24 ■ Bosqueje el conjunto en el plano complejo.

17. $\{z = a + bi \mid a \le 0, b \ge 0\}$

18. $\{z = a + bi \mid a > 1, b > 1\}$

19. $\{z \mid |z| = 3\}$ **20.** $\{z \mid |z| \ge 1\}$

21. $\{z \mid |z| < 2\}$ **22.** $\{z \mid 2 \le |z| \le 5\}$

23. $\{z = a + bi \mid a + b < 2\}$

24. $\{z = a + bi \mid a \ge b\}$

25–48 ■ Escriba el número complejo en forma polar con argumento θ entre 0 y 2π.

25. $1 + i$ **26.** $1 + \sqrt{3}\,i$ **27.** $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

28. $1 - i$ **29.** $2\sqrt{3} - 2i$ **30.** $-1 + i$

31. $-3i$ **32.** $-3 - 3\sqrt{3}\,i$ **33.** $5 + 5i$

34. 4 **35.** $4\sqrt{3} - 4i$ **36.** $8i$

37. -20 **38.** $\sqrt{3} + i$ **39.** $3 + 4i$

40. $i(2 - 2i)$ **41.** $3i(1 + i)$ **42.** $2(1 - i)$

43. $4(\sqrt{3} + i)$ **44.** $-3 - 3i$ **45.** $2 + i$

46. $3 + \sqrt{3}\,i$ **47.** $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ **48.** $-\pi i$

49–56 ■ Encuentre el producto z_1z_2 y el cociente z_1/z_2. Exprese su respuesta en forma polar.

49. $z_1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi,\quad z_2 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}$

50. $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4},\quad z_2 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{4}$

51. $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right),\quad z_2 = 5\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

52. $z_1 = 7\left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\dfrac{9\pi}{8}\right),\quad z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$

53. $z_1 = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$,
$z_2 = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$

54. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)$,
$z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$

55. $z_1 = 4(\cos 200° + i\,\text{sen}\,200°)$,
$z_2 = 25(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$

56. $z_1 = \frac{4}{5}(\cos 25° + i\,\text{sen}\,25°)$,
$z_2 = \frac{1}{5}(\cos 155° + i\,\text{sen}\,155°)$

57–64 ■ Escriba z_1 y z_2 en forma polar, y luego encuentre el producto z_1z_2 y los cocientes z_1/z_2 y $1/z_1$.

57. $z_1 = \sqrt{3} + i,\quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

58. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i,\quad z_2 = 1 - i$

59. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i,\quad z_2 = -1 + i$

60. $z_1 = -\sqrt{2}\,i,\quad z_2 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

61. $z_1 = 5 + 5i,\quad z_2 = 4$ **62.** $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i,\quad z_2 = 8i$

63. $z_1 = -20,\quad z_2 = \sqrt{3} + i$ **64.** $z_1 = 3 + 4i,\quad z_2 = 2 - 2i$

65–76 ■ Encuentre la potencia indicada por medio del teorema de DeMoivre.

65. $(1 + i)^{20}$ **66.** $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

67. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **68.** $(1 - i)^8$

69. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{12}$ **70.** $(\sqrt{3} - i)^{-10}$

71. $(2 - 2i)^8$ **72.** $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

73. $(-1 - i)^7$ **74.** $(3 + \sqrt{3}\,i)^4$

75. $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$ **76.** $(1 - i)^{-8}$

77–86 ■ Encuentre las raíces indicadas y grafique las raíces en el plano complejo.

77. Las raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$

78. Las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$

79. Las raíces cuartas de $-81i$ **80.** Las raíces quintas de 32

81. Las raíces octavas de 1 **82.** Las raíces cúbicas de $1 + i$

83. Las raíces cúbicas de i **84.** Las raíces quintas de i

85. Las raíces cuartas de -1

86. Las raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

87–92 ■ Resuelva la ecuación.

87. $z^4 + 1 = 0$ **88.** $z^8 - i = 0$

89. $z^3 - 4\sqrt{3} - 4i = 0$ **90.** $z^6 - 1 = 0$

91. $z^3 + 1 = -i$ **92.** $z^3 - 1 = 0$

93. **a)** Sea $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\dfrac{2\pi}{n}$ donde n es un entero positivo. Muestre que $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$ son las n distintas raíces n-ésimas de 1.

b) Si $z \neq 0$ es cualquier número complejo y $s^n = z$, muestre que las n distintas raíces n-ésimas de z son

$$s,\ sw,\ sw^2,\ sw^3,\ \ldots,\ sw^{n-1}$$

Descubrimiento • Debate

94. Sumas de raíces de la unidad Encuentre los valores exactos de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 93) y luego súmelas. Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál considera que sea la suma de las raíces n-ésimas de 1, para cualquier n?

95. Productos de las raíces de la unidad Encuentre el producto de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 93). Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál cree que sea el producto de las raíces n-ésimas de 1, para cualquier n?

96. Coeficientes complejos y la fórmula cuadrática La fórmula cuadrática funciona si los coeficientes de la ecuación son reales o complejos. Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática y, si es necesario, el teorema de DeMoivre.

a) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$

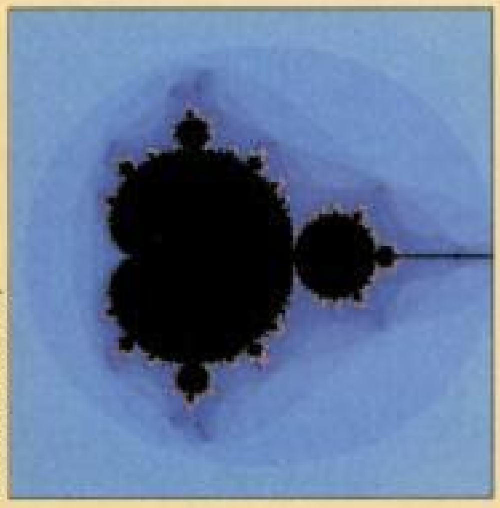
b) $z^2 - iz + 1 = 0$

c) $z^2 - (2 - i)z - \frac{1}{4}i = 0$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

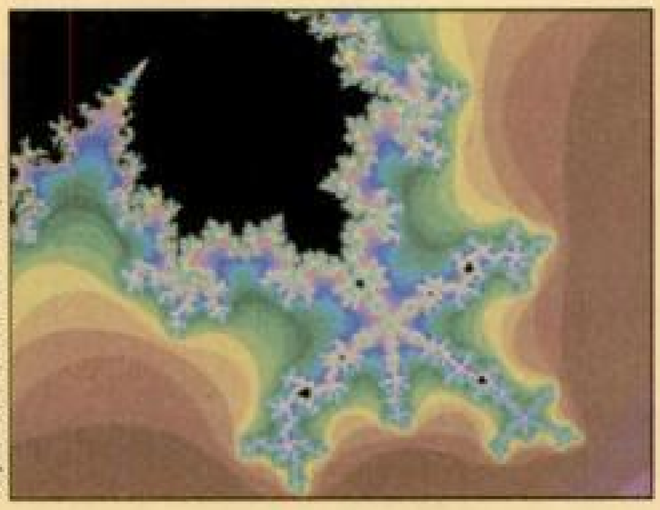
Fractales

Los fractales son objetos geométricos que exhiben más y más detalles a medida que se amplifican (véase *Matemáticas en el mundo moderno* en la página 600). Muchos fractales se pueden describir al iterar funciones de números complejos. El fractal más famoso se ilustra en las figuras 1 y 2. Se llama *conjunto de Mandelbrot*, en honor de Benoit Mandelbrot, el matemático que lo descubrió en la década de 1950.



Cortesía de David Dewey

Figura 1
Conjunto de Mandelbrot



Stephen Gerard/Photo Researchers, Inc.

Figura 2
Detalle del conjunto de Mandelbrot

Aquí está cómo se define el conjunto de Mandelbrot. Elija un número complejo c, defina la función cuadrática compleja

$$f(z) = z^2 + c$$

Empezando con $z_0 = 0$, se forman las iteraciones de f como sigue:

$$\begin{aligned} z_1 &= f(0) = c \\ z_2 &= f(f(0)) = f(c) = c^2 + c \\ z_3 &= f(f(f(0))) = f(c^2 + c) = (c^2 + c)^2 + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

Conforme se continúa calculando las iteraciones, una de dos cosas sucederán, dependiendo del valor de c. Cualquiera de las iteraciones $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$ forman un conjunto acotado (es decir, el módulo de las iteraciones son menos que algún número fijo K), o de otro modo, con el tiempo se harán cada vez más grandes sin cota. Los cálculos de la tabla de la página 606 muestran que para $c = 0.1 + 0.2i$, las iteraciones finalmente se estabilizan alrededor de $0.05 + 0.22i$, mientras que para $c = 1 - i$, las iteraciones rápidamente se vuelven tan grandes que una calculadora no puede manejarlas.

1. Use su calculadora como se describe en el margen de la página 606 para decidir si el número complejo c está en el conjunto de Mandelbrot. (Para el inciso f), calcule por lo menos 60 iteraciones.)

   a) $c = 1$ b) $c = -1$

   c) $c = -0.7 + 0.15i$ d) $c = 0.5 + 0.5i$

   e) $c = i$ f) $c = -1.0404 + 0.2509i$

2. Use el programa `MANDLBRT` con un rectángulo de visión más pequeño para aumentar una porción del conjunto de Mandelbrot cerca de su borde. (Guarde la imagen final en un lugar diferente si desea mantener completa la imagen de Mandelbrot en "1".) ¿Ve más detalle?

3. a) Escriba un programa de calculadora que tome como una entrada un número complejo c, itere la función $f(z) = z^2 + c$ unas cien veces y luego dé el siguiente resultado:

   - "`NO ACOTADA EN` N", si z_N es la primera iteración cuyo módulo es mayor que 2
   - "`ACOTADA`" si cada iteración de z_1 a z_{100} tiene módulo menor o igual a 2

   En el primer caso, el número c no está en el conjunto de Mandelbrot y el índice N indica la rapidez con la que la iteración se vuelve no acotada. En el segundo caso, es probable que c esté en el conjunto de Mandelbrot.

   b) Use su programa para probar cada uno de los números del problema 1.

   c) Elija otros números complejos y use su programa para probarlos.

8.4 Vectores

En aplicaciones de matemáticas, ciertas cantidades se determinan por completo por su magnitud; por ejemplo, longitud, masa, área, temperatura y energía. Se habla de una longitud de 5 m o una masa de 3 kg; sólo es necesario un número para describir cada una de estas cantidades. Tal cantidad se llama **escalar**.

Por otro lado, para describir el desplazamiento de un objeto, se requieren dos números: la *magnitud* y la *dirección* del desplazamiento. Para describir la velocidad de un objeto en movimiento, se debe especificar tanto la *velocidad* como la *dirección* del recorrido. Cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza que se relacionan con magnitud así como dirección se llaman *cantidades dirigidas*. Una forma de representar tales cantidades matemáticamente es a través del uso de *vectores*.

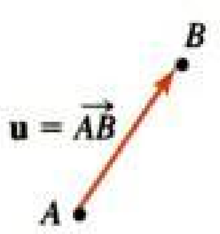


Figura 1

Descripción geométrica de vectores

Un **vector** en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Se bosqueja un vector como se muestra en la figura 1 con una flecha para especificar la dirección. Este vector se denota por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el **punto inicial** y B es el **punto**

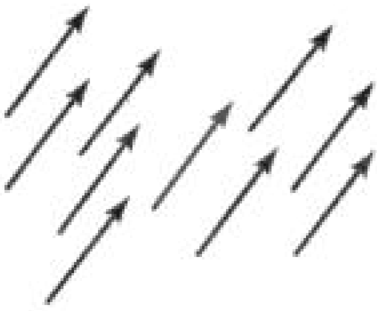


Figura 2

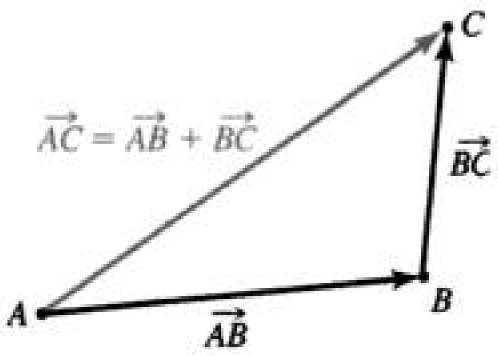


Figura 3

terminal del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta AB se conoce como la **magnitud** o **longitud** del vector y se denota mediante $|\overrightarrow{AB}|$. Se usan letras en negritas para denotar vectores. Así, se escribe $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

Se considera que dos vectores son **iguales** si tienen igual magnitud y la misma dirección. Por lo tanto, los vectores de la figura 2 son iguales. Esta definición de igualdad tiene sentido si se imagina que un vector representa un desplazamiento. Dos desplazamientos de este tipo son los mismos si tienen magnitudes iguales y la misma dirección. Así, los vectores de la figura 2 se pueden imaginar como el *mismo* desplazamiento aplicado a objetos en lugares distintos del plano.

Si el desplazamiento $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ va seguido del desplazamiento $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$ como se muestra en la figura 3. En otras palabras, el desplazamiento simple representado por el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo efecto que los otros dos desplazamientos juntos. Se llama al vector $\overrightarrow{AC}$ la **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se escribe $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (El **vector cero**, denotado por $\mathbf{0}$, no representa ningún desplazamiento.) Así, para hallar la suma de dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se bosquejan vectores iguales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con el punto inicial de uno en el punto terminal del otro (véase la figura 4a)). Si se dibujan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ empezando en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que es la diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como se ilustra en la figura 4b).

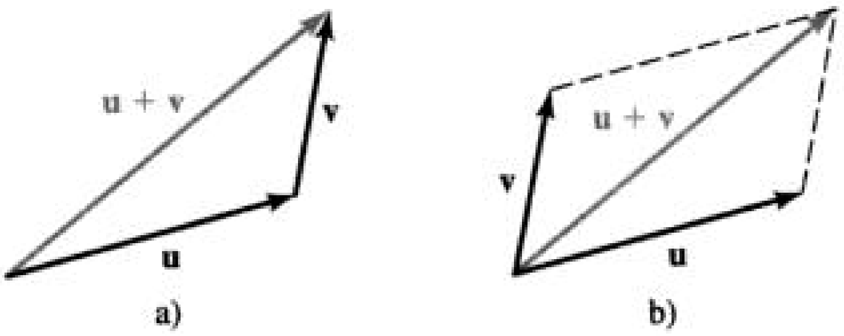


Figura 4
Suma de vectores

Si a es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, se define un nuevo vector $a\mathbf{v}$ como sigue: el vector $a\mathbf{v}$ tiene magnitud $|a||\mathbf{v}|$ y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $a > 0$ o la dirección opuesta si $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector es cero. Este proceso se llama **multiplicación de un vector por un escalar**. Multiplicar un vector por un escalar tiene el mismo efecto de alargar o acortar el vector. En la figura 5 se muestran gráficas del vector $a\mathbf{v}$ para diferentes valores de a. Se escribe el vector $(-1)\mathbf{v}$ como $-\mathbf{v}$. Así, $-\mathbf{v}$ es el vector con la misma longitud que $\mathbf{v}$ pero con la dirección opuesta.

La **diferencia** de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define por $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. La figura 6 muestra que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la otra diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

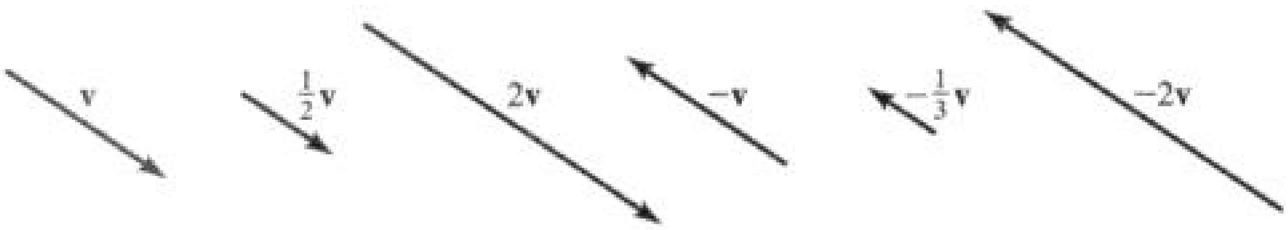


Figura 5
Multiplicación de un vector por un escalar

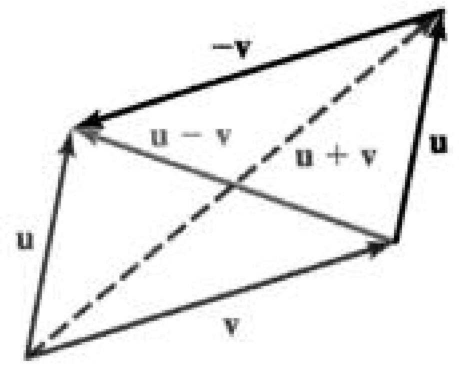


Figura 6
Resta de vector

Vectores en el plano coordenado

Hasta aquí se han estudiado los vectores de manera geométrica. Al colocar un vector en el plano de coordenadas, es posible describirlo de manera analítica (es decir, por medio de componentes). En la figura 7a), para ir del punto inicial del vector **v** al punto terminal, se va a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. Se representa a **v** como un par ordenado de números reales.

Observe la distinción entre el *vector* $\langle a, b\rangle$ y el *punto* (a, b).

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$

donde a es la **componente horizontal** de **v** y b es la **componente vertical** de **v**. Recuerde que un vector representa una magnitud y una dirección, no una flecha particular en el plano. Así, el vector $\langle a, b\rangle$ tiene muchas representaciones distintas, lo cual depende de su punto inicial (véase la figura 7b)).

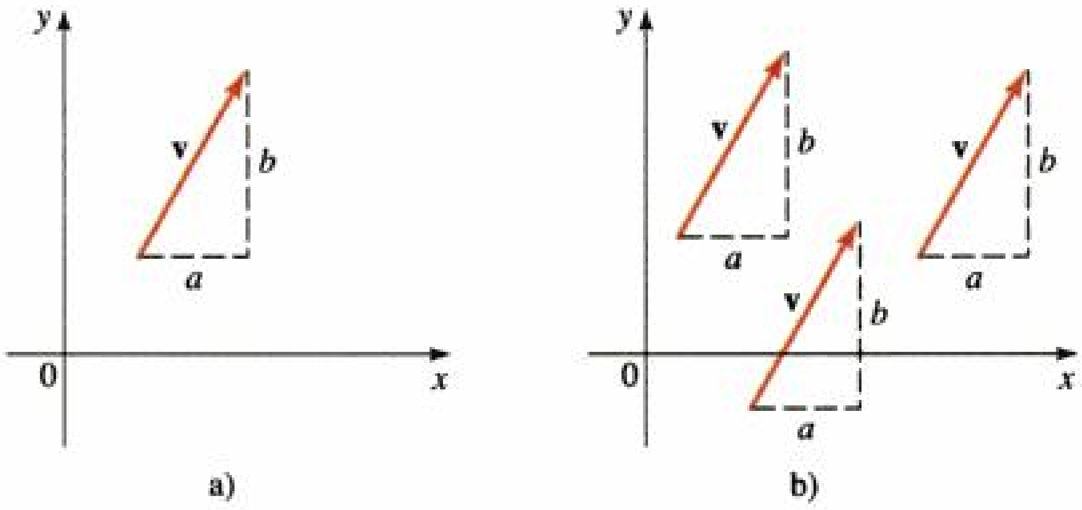


Figura 7

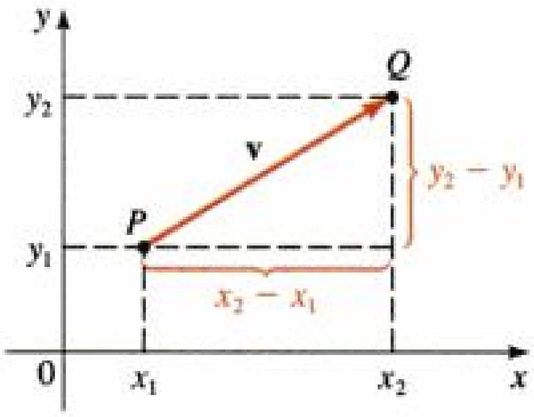


Figura 8

Si se usa la figura 8, la relación entre una representación geométrica de un vector y la analítica se puede expresar como sigue.

Forma de componentes de un vector

Si un vector **v** se representa en el plano con punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

Ejemplo 1 Descripción de vectores en forma de componentes

a) Encuentre la forma de componentes del vector **u** con punto inicial $(-2, 5)$ y punto terminal $(3, 7)$.

b) Si el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 7\rangle$ se bosqueja con punto inicial $(2, 4)$, ¿cuál es su punto terminal?

c) Bosqueje representaciones del vector $\mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle$ con puntos iniciales en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 4)$.

Solución

a) El vector deseado es

$$\mathbf{u} = \langle 3 - (-2), 7 - 5\rangle = \langle 5, 2\rangle$$

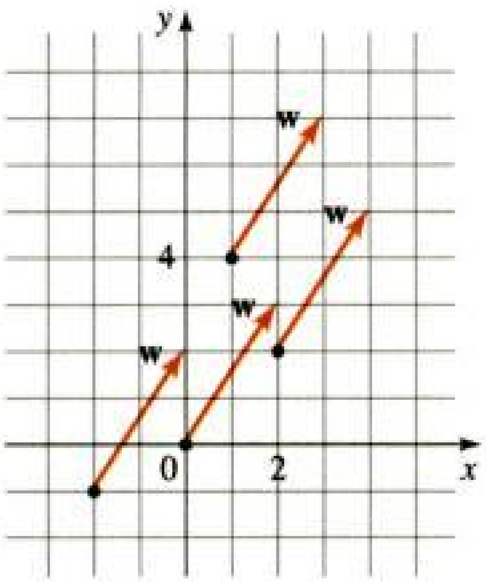


Figura 9

b) Sea (x, y) el punto terminal de **v**. Entonces,

$$\langle x - 2, y - 4 \rangle = \langle 3, 7 \rangle$$

Por lo tanto $x - 2 = 3$ y $y - 4 = 7$ o $x = 5$ y $y = 11$. El punto terminal es $(5, 11)$

c) Las representaciones del vector **w** se bosquejan en la figura 9. ■

Ahora se dan las definiciones analíticas de las distintas operaciones en vectores que se han descrito en forma geométrica. Se comienza con la igualdad de vectores. Se dice que dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Para los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, esto significa que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. En otras palabras, dos vectores son **iguales** si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Así, las flechas de la figura 7b) representan el mismo vector, como las flechas de la figura 9.

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura 10, se obtiene la siguiente fórmula para la magnitud de un vector.

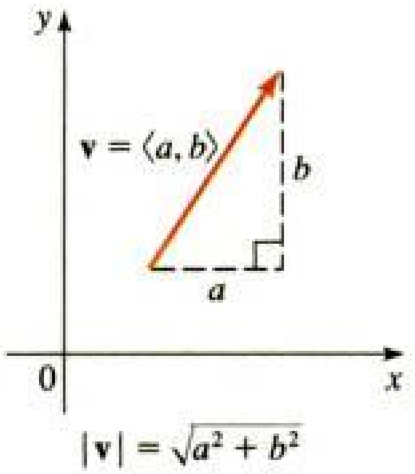


Figura 10

Magnitud de un vector

La **magnitud** o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 2 Magnitudes de vectores

Encuentre la magnitud de cada vector.

a) $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ b) $\mathbf{v} = \langle 5, 0 \rangle$ c) $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

Solución

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ ■

Las siguientes definiciones de suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores corresponden a las descripciones geométricas antes dadas. En la figura 11 se muestra cómo la definición analítica de suma corresponde a la geométrica.

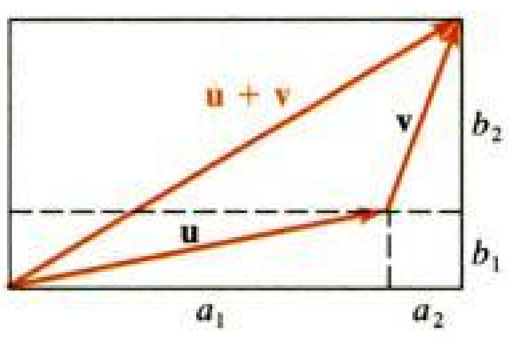


Figura 11

Operaciones algebraicas en vectores

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, cb_1 \rangle, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7 Calcular una ruta

Una mujer bota una lancha desde la orilla de un río recto y quiere desembarcar en el punto directamente en la orilla opuesta. Si la velocidad de la lancha (con respecto al agua) es de 10 millas/h y el río fluye al este a la velocidad de 5 millas/h, ¿en qué dirección debe dirigir la lancha a fin de llegar al punto deseado?

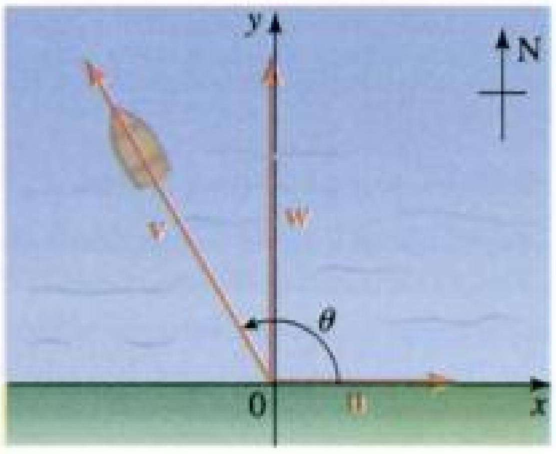


Figura 16

Solución Se elige un sistema coordenado con el origen en el punto inicial de la lancha como se muestra en la figura 16. Sean **u** y **v** las velocidades del río y la lancha, respectivamente. Es claro que $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}$ y, puesto que la velocidad de la lancha es de 10 millas/h, se tiene $|\mathbf{v}| = 10$, por lo tanto

$$\mathbf{v} = (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$$

donde el ángulo θ es como se muestra en la figura 16. El curso verdadero de la lancha está dado por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} + (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}\\ &= (5 + 10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Puesto que la mujer quiere tocar tierra en un punto directamente opuesto al río, su dirección debe tener un componente horizontal 0. En otras palabras, se debe elegir θ de tal manera que

$$\begin{aligned}5 + 10\cos\theta &= 0\\ \cos\theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= 120°\end{aligned}$$

Por consiguiente, ella debe dirigir la lancha en la dirección $\theta = 120°$ (o N 30° W). ■

La **fuerza** también está representada por un vector. De manera intuitiva, se puede considerar que la fuerza describe la acción de empujar o jalar un objeto, por ejemplo, un empuje horizontal de un libro por una mesa o la atracción hacia abajo de la gravedad terrestre sobre una pelota. La fuerza se mide en libras (o en newtons, en el sistema métrico). Por ejemplo, un hombre que pesa 200 libras ejerce una fuerza de 200 lb hacia abajo sobre el suelo. Si varias fuerzas actúan sobre un objeto, la **fuerza resultante** que experimenta el objeto es la suma vectorial de estas fuerzas.

Ejemplo 8 Fuerza resultante

Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con magnitudes 10 y 20 lb, respectivamente, actúan sobre un objeto en un punto P como se ilustra en la figura 17. Encuentre la fuerza resultante que actúa en P.

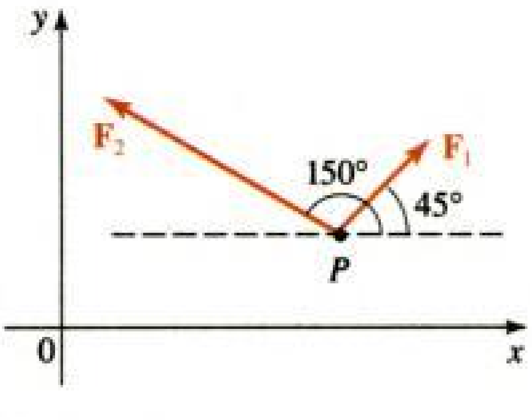


Figura 17

Solución Se escribe $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en la forma de componentes:

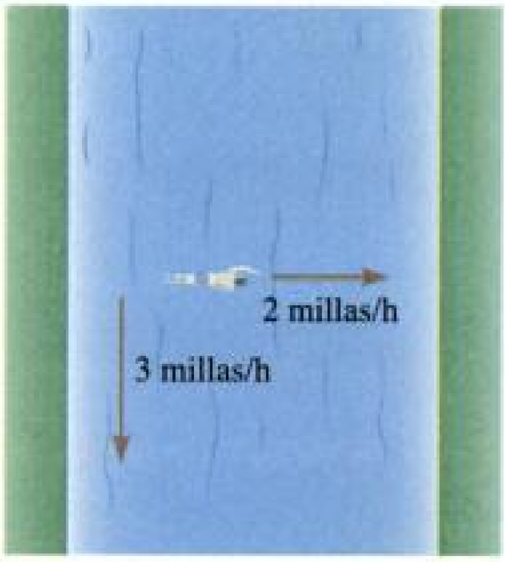
$$\mathbf{F}_1 = (10\cos 45°)\mathbf{i} + (10\operatorname{sen} 45°)\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} = 5\sqrt{2}\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= (20\cos 150°)\mathbf{i} + (20\operatorname{sen} 150°)\mathbf{j} = -20\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 20\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}\\ &= -10\sqrt{3}\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\end{aligned}$$

30° respecto del suelo. Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

40. Componentes de una velocidad Un avión de propulsión vuela en dirección N 20° E con una velocidad de 500 millas/h. Encuentre las componentes norte y este de la velocidad.

41. Velocidad Un río fluye al sur a 3 millas/h. Un nadador que intenta cruzar el río se dirige al este nadando a 2 millas/h respecto al agua. Encuentre la velocidad verdadera del nadador como un vector.



42. Velocidad Un salmón migratorio se dirige en la dirección N 45° E, nadando a 5 millas/h respecto al agua. Las corrientes que prevalecen en el océano fluyen al este a 3 millas/h. Encuentre la velocidad verdadera del pez como un vector.

43. Velocidad verdadera de un avión Un piloto dirige su avión al este. El avión tiene una velocidad de 425 millas/h respecto al aire. El viento sopla al norte con una velocidad de 40 millas/h.

a) Exprese la velocidad del viento como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del avión respecto al aire como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad verdadera del avión como un vector.

d) Determine la velocidad y dirección verdaderas del avión.

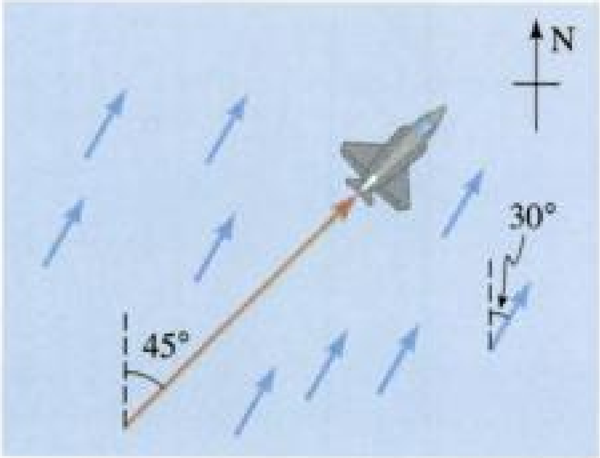
44. Velocidad verdadera de un avión Un avión que vuela por un viento que fluye a una velocidad de 55 millas/h en la dirección N 30° E (véase la figura). El avión tiene una velocidad de 765 millas/h respecto al aire, y el piloto dirige al avión en la dirección N 45° E.

a) Exprese la velocidad del viento como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del avión respecto al aire como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad del avión como un vector.

d) Determine la verdadera velocidad y la dirección del avión.



45. Velocidad verdadera de un avión Encuentre la velocidad y la dirección verdaderas del avión del ejercicio 44 si el piloto dirige el avión en la dirección N 30° W.

46. Velocidad verdadera de un avión ¿En qué dirección debe dirigir el avión el piloto del ejercicio 44 para que el curso verdadero sea al norte?

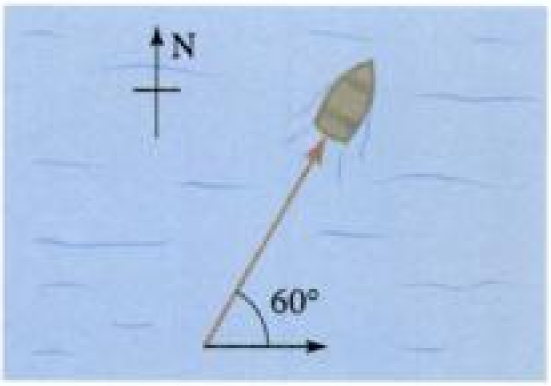
47. Velocidad de un bote Un río recto fluye al este a una velocidad de 10 millas/h. Un navegador comienza en la orilla sur del río y se dirige en la dirección 60° desde la orilla (véase la figura). El bote tiene una velocidad de 20 millas/h respecto al agua.

a) Exprese la velocidad del río como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del bote respecto al agua como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad verdadera del bote.

d) Determine la velocidad y dirección verdaderas del bote.



48. Velocidad de un bote El navegador del ejercicio 47 quiere llegar a un punto en la orilla norte del río directamente opuesto al punto de partida. ¿En qué dirección debe dirigir el bote?

49. Velocidad de un bote Un bote va en dirección N 72° E. La velocidad del bote respecto al agua es de 24 millas/h. El agua fluye directamente hacia el sur. Se observa que la dirección verdadera del bote es hacia el este.

a) Exprese la velocidad del bote respecto al agua como un vector en la forma de componentes.

Definición del producto punto

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$ son vectores, entonces su **producto punto**, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, se define como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Así que para hallar el producto punto de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se multiplican las componentes correspondientes y se suman. El producto punto *no* es un vector; es un número real o escalar.

Ejemplo 1 Cálculo de productos punto

a) Si $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 5 \rangle$ entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(5) = 2$$

b) Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(5) + (1)(-6) = 4$$

■

Las demostraciones de las siguientes propiedades del producto punto se deducen con facilidad de la definición.

Propiedades del producto punto

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
4. $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

■ **Demostración** Se prueba sólo la última propiedad. Las demostraciones de las otras se dejan como ejercicios. Sea $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle a, b \rangle \cdot \langle a, b \rangle = a^2 + b^2 = |\mathbf{u}|^2$$

■

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores trácelos con puntos iniciales en el origen. Se define al **ángulo θ entre u y v** como el más pequeño de los ángulos formado por estas representaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (véase la figura 1). Así, $0 \leq \theta \leq \pi$. El siguiente teorema relaciona el ángulo entre dos vectores con su producto punto.

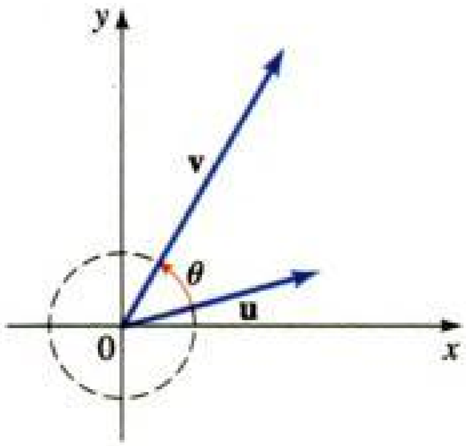


Figura 1

Teorema del producto punto

Si θ es el ángulo entre dos vectores no cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

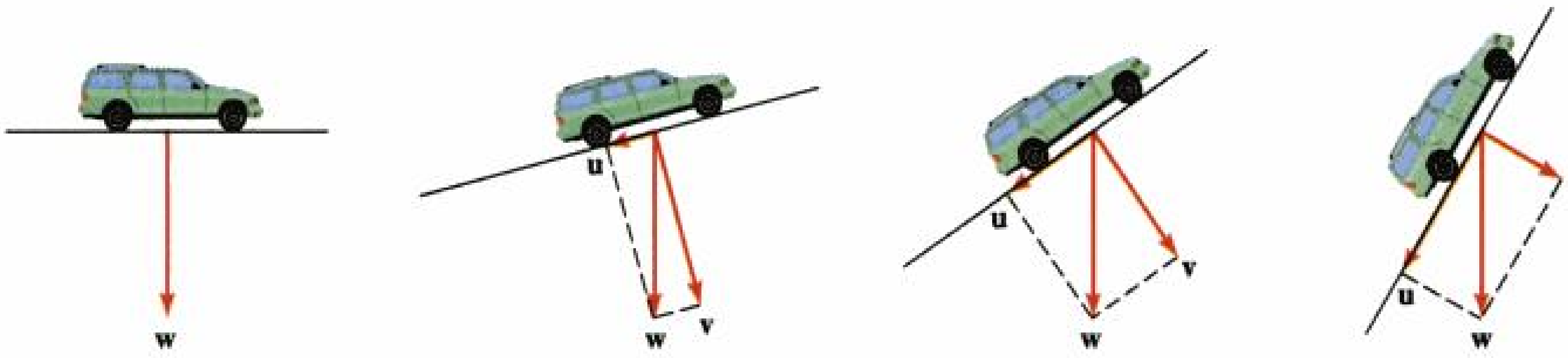


Figura 4

Ejemplo 4 Resolver una fuerza en componentes

Un automóvil que pesa 3000 lb se estaciona en una entrada que tiene una inclinación de 15° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura 5.

a) Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que el automóvil se vaya hacia atrás.

b) Encuentre la magnitud de la fuerza que experimenta la entrada debido al peso del automóvil.

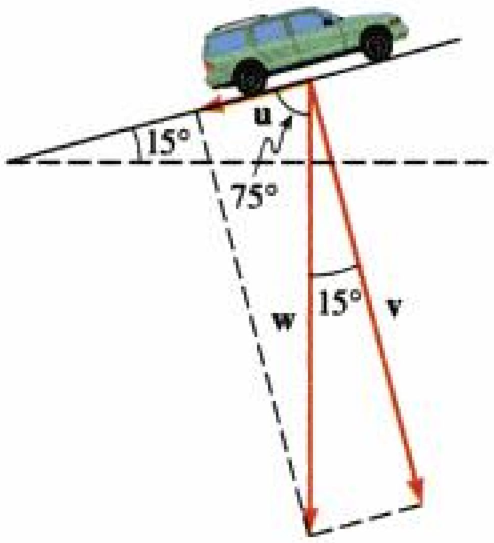


Figura 5

Solución El automóvil ejerce una fuerza **w** de 3000 lb directamente hacia abajo. Se resuelve **w** en la suma de dos vectores **u** y **v**, uno paralelo a la superficie de la entrada y el otro perpendicular a ésta, como se ilustra en la figura 5.

a) La magnitud de la parte de la fuerza **w** que causa que el automóvil ruede hacia abajo de la entrada es

$$|\mathbf{u}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{u} = 3000 \cos 75° \approx 776$$

Por consiguiente, la fuerza necesaria para evitar que el automóvil se vaya hacia atrás es de alrededor de 776 lb.

b) La magnitud de la fuerza que ejerce el automóvil en la entrada es

$$|\mathbf{v}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = 3000 \cos 15° \approx 2898$$

La fuerza que experimenta la entrada es de casi 2898 lb. ■

La componente de **u** a lo largo de **v** se puede calcular por medio de producto punto:

$$|\mathbf{u}| \cos\theta = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Se ha mostrado lo siguiente.

Cálculo de componentes

La componente de **u** a lo largo de **v** es $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

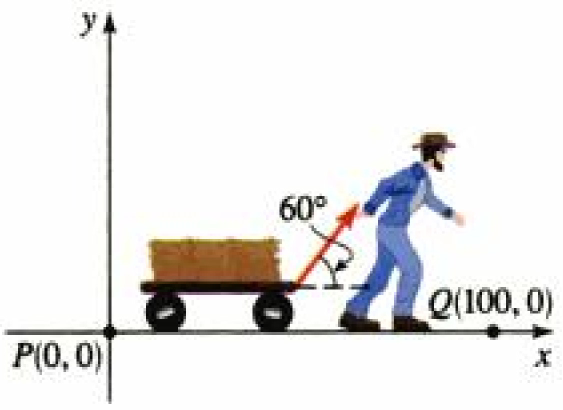


Figura 8

Ejemplo 8 Calcular el trabajo

Una persona jala un carro horizontalmente ejerciendo una fuerza de 20 lb en la manija. Si la manija forma un ángulo de 60° con la horizontal, encuentre el trabajo hecho al mover el carro 100 pies.

Solución Se elige un sistema coordenado con el origen en la posición inicial del carro (véase la figura 8). Es decir, el carro se mueve del punto $P(0, 0)$ al punto $Q(100, 0)$. El vector que representa este desplazamiento es

$$\mathbf{D} = 100\mathbf{i}$$

La fuerza sobre la manija se puede escribir en términos de las componentes (véase la sección 8.4 como

$$\mathbf{F} = (20\cos 60°)\mathbf{i} + (20\,\mathrm{sen}\,60°)\mathbf{j} = 10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\mathbf{j}$$

De modo que el trabajo hecho es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = (10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\mathbf{j})\cdot(100\mathbf{i}) = 1000 \text{ pies-lb}$$ ■

8.5 Ejercicios

1–8 ■ Encuentre **a)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y **b)** el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ hasta el grado más próximo.

1. $\mathbf{u} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$

3. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle -6, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$

5. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = -5\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$

8. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

9–14 ■ Determine si los vectores dados son ortogonales.

9. $\mathbf{u} = \langle 6, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0\rangle$

11. $\mathbf{u} = \langle -2, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$

12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{j}$

13. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

15–18 ■ Encuentre la cantidad indicada, suponiendo que $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

15. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

16. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w})$

17. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

18. $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$

19–22 ■ Encuentre la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$

20. $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$

21. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

22. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

23–28 ■ **a)** Calcule $\mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$. **b)** Resuelva $\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle 7, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

25. $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -3\rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle 11, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -2\rangle$

27. $\mathbf{u} = \langle 2, 9\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

29–32 ■ Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto de P a Q.

29. $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(3, 8)$

30. $\mathbf{F} = 400\mathbf{i} + 50\mathbf{j}$; $P(-1, 1)$, $Q(200, 1)$

31. $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $P(2, 3)$, $Q(6, -2)$

32. $\mathbf{F} = -4\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$; $P(0, 10)$, $Q(5, 25)$

33–36 ■ Sean **u**, **v** y **w** vectores y a un escalar. Pruebe la propiedad dada.

33. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

34. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

35. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

36. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$

37. Muestre que los vectores $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ son ortogonales.

38. Evalúe $\mathbf{v} \cdot \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

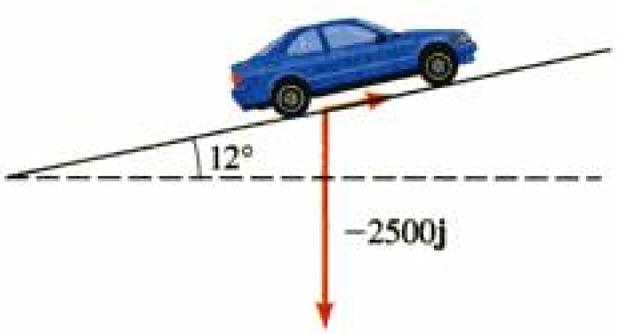
Aplicaciones

39. Trabajo La fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ mueve un objeto 4 pies a lo largo del eje x en la dirección positiva. Encuentre el trabajo hecho si la unidad de fuerza es la libra.

40. Trabajo Una fuerza constante $\mathbf{F} = \langle 2, 8 \rangle$ mueve un objeto a lo largo de una recta desde el punto $(2, 5)$ hasta el punto $(11, 13)$. Encuentre el trabajo hecho si la distancia se mide en pies y la fuerza se mide en libras.

41. Trabajo Una cortadora de césped es empujada una distancia de 200 pies a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza constante de 50 lb. La manija de la podadora se mantiene a un ángulo de 30° desde la horizontal (véase la figura). Encuentre el trabajo hecho

42. Trabajo Cierto automóvil es conducido 500 pies sobre una carretera que está inclinada 12° respecto de la horizontal, como se muestra en la figura. El automóvil pesa 2500 lb. Así, la gravedad actúa hacia abajo sobre el automóvil con una fuerza constante $\mathbf{F} = -2500\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo que realiza el automóvil para vencer la gravedad.



43. Fuerza Un automóvil está sobre una entrada que está inclinada 25° respecto a la horizontal. Si el automóvil pesa 2755 lb, encuentre la fuerza requerida para evitar que ruede hacia atrás.

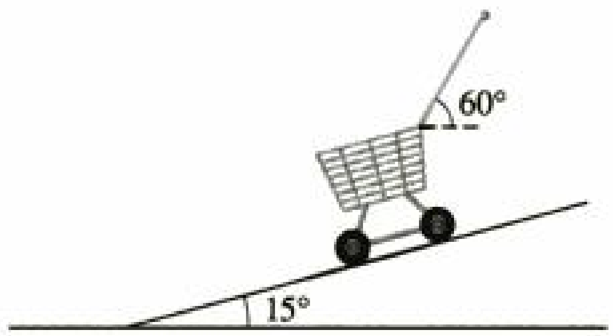
44. Force Un automóvil está sobre una entrada que está inclinada 10° respecto a la horizontal. Se requiere una fuerza de 490 lb para evitar que el automóvil ruede hacia atrás.

a) Determine el peso del automóvil.

b) Calcule la fuerza que ejerce el automóvil contra la entrada.

45. Fuerza Un paquete que pesa 200 lb se coloca sobre un plano inclinado. Si una fuerza de 80 lb es suficiente para evitar que se deslice el paquete, determine el ángulo de inclinación del plano. (Ignore los efectos de la fricción.)

46. Fuerza Un carro que pesa 40 lb se coloca sobre una rampa inclinada 15° respecto a la horizontal. El carro está sostenido por una cuerda la cual tiene un ángulo de 60° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza que debe ejercer la cuerda sobre el carro para evitar que ruede por la rampa.



Descubrimiento • Debate

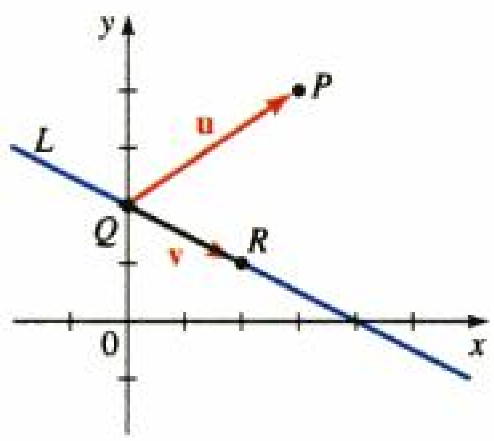
47. Distancia desde un punto a una recta Sea L la recta $2x + 4y = 8$ y sea P el punto $(3, 4)$.

a) Muestre que los puntos $Q(0, 2)$ y $R(2, 1)$ se ubican sobre L.

b) Sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{QP}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$, como se muestra en la figura. Encuentre $\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

c) Bosqueje una gráfica que explique por qué $|\mathbf{u} - \mathbf{w}|$ es la distancia de P a L. Determine la distancia.

d) Escriba un párrafo corto que describa los pasos necesarios para hallar la distancia de un punto a una recta.



PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

J. L. Amos/SuperStock

Navegar contra el viento

Los navegantes dependen del viento para propulsar sus embarcaciones. ¿Pero qué pasa si el viento sopla en una dirección opuesta a la que quieren ir? Aunque obviamente es imposible navegar directamente en contra del viento, *es* posible navegar en cierto ángulo *hacia* el viento. Entonces *cambiando de dirección*, es decir, al ir zigzagueando en lados alternos de la dirección del viento, un navegante puede avanzar contra el viento (véase la figura 1).

Figura 1
Cambio de dirección

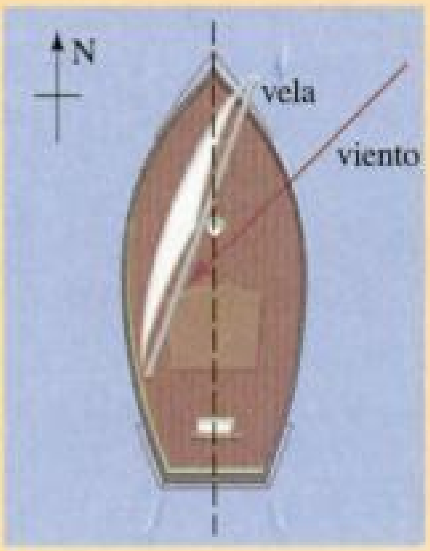


Figura 2

¿Cómo se debe alinear la vela para propulsar la embarcación en la dirección deseada hacia el viento? Esta pregunta se puede contestar modelando el viento como un vector y estudiando sus componentes a lo largo de la quilla y la vela.

Por ejemplo, suponga que un velero que se dirige al norte tiene su vela inclinada en la dirección N 20° E. El viento sopla hacia la vela en la dirección S 45° W con una fuerza de magnitud F (véase la figura 2).

1. Muestre que la fuerza eficaz del viento sobre la vela es F sen 25º. Esto se puede hacer al hallar las componentes del viento paralelas a la vela y perpendiculares a ella. La componente paralela a la vela se desliza y no propulsa a la embarcación. Sólo la componente perpendicular empuja contra la vela.

2. Si la quilla de la embarcación está alineada al norte, ¿qué fracción de la fuerza F propulsa a la embarcación? Sólo la componente de la fuerza hallada en el problema 1 paralela a la quilla propulsa a la embarcación.

   (En la realidad, otros factores, incluyendo las propiedades aerodinámicas de la embarcación, tienen influencia en la rapidez de la embarcación.)

3. Si un bote con dirección norte tiene su vela inclinada en la dirección N α° E, y el viento sopla con fuerza F en la dirección S β° W donde $0 < \alpha < \beta < 180$, encuentre una fórmula para la magnitud de la fuerza que en realidad impulsa a la embarcación.

8 Repaso

Revisión de conceptos

1. Describa cómo las coordenadas polares representan la posición de un punto en el plano
2. a) ¿Qué ecuaciones utiliza para cambiar de coordenadas rectangulares a polares?
   b) ¿Qué ecuaciones utiliza para cambiar de coordenadas rectangulares a polares?
3. ¿Cómo traza la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$?
4. ¿Qué tipo de curva tiene una ecuación polar de la forma dada?
   a) $r = a\cos\theta$ o $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$
   b) $r = a(1 \pm \cos\theta)$ o $r = a(1 \pm \mathrm{sen}\,\theta)$
   c) $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$
   d) $r = a\cos n\theta$ o $r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$
5. ¿Cómo grafica un número complejo z? ¿Cuál es la forma polar de un número complejo z? ¿Cuál es el módulo de z? ¿Cuál es el argumento de z?
6. a) ¿Cómo multiplica dos números complejos si están dados en forma polar?
   b) ¿Cómo divide dos números de este tipo?
7. a) Exprese el teorema de DeMoivre.
   b) ¿Cómo encuentra las raíces n-ésimas de un número complejo?
8. a) ¿Cuál es la diferencia entre un escalar y un vector?
   b) Dibuje un diagrama para mostrar cómo sumar dos vectores.
   c) Dibuje un diagrama para mostrar cómo restar dos vectores.
   d) Dibuje un diagrama para mostrar cómo multiplicar un vector por los escalares $2, \frac{1}{2}, -2$ y $-\frac{1}{2}$.
9. Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$ y c es un escalar, escriba expresiones para $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$ y $|\mathbf{u}|$.
10. a) Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, escriba $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
    b) Escriba las componentes de $\mathbf{v}$ en términos de la magnitud y dirección de $\mathbf{v}$.
11. Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$, ¿cuál es el producto punto de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$?
12. a) ¿Cómo usa el producto punto para hallar el ángulo entre dos vectores?
    b) ¿Cómo usa el producto punto para determinar si dos vectores son perpendiculares?
13. ¿Cuál es la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$ y cómo la calcula?
14. ¿Cuál es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y cómo la calcula?
15. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D}$?

Ejercicios

1–6 ■ Se da un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares. **a)** Grafique el punto P. **b)** Encuentre coordenadas rectangulares para P.

1. $\left(12, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\left(8, -\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$
4. $\left(-\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
5. $\left(4\sqrt{3}, -\frac{5\pi}{3}\right)$
6. $\left(-6\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

7–12 ■ Se da un punto $P(x, y)$ en coordenadas rectangulares.
a) Grafique el punto P.
b) Hallar las coordenadas polares para P con $r \geq 0$.
c) Encuentre las coordenadas polares para P con $r \leq 0$.

7. $(8, 8)$
8. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$
9. $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$
10. $(3\sqrt{3}, 3)$
11. $(-3, \sqrt{3})$
12. $(4, -4)$

13–16 ■ **a)** Convierta la ecuación a coordenadas polares y simplifique. **b)** Grafique la ecuación. [*Sugerencia*: use la forma de la ecuación que encuentre más fácil graficar.]

13. $x + y = 4$
14. $xy = 1$
15. $x^2 + y^2 = 4x + 4y$
16. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

17–24 ■ **a)** Bosqueje la gráfica de la ecuación polar. **b)** Exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $r = 3 + 3\cos\theta$
18. $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$
19. $r = 2\,\mathrm{sen}\,2\theta$
20. $r = 4\cos 3\theta$
21. $r^2 = \sec 2\theta$
22. $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$
23. $r = \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$
24. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

25–28 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la ecuación polar. Elija el dominio de θ para asegurarse de que produce la gráfica completa.

25. $r = \cos(\theta/3)$ **26.** $r = \text{sen}(9\theta/4)$

27. $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

28. $r = \theta\ \text{sen}\ \theta, \quad -6\pi \leq \theta \leq 6\pi$

29–34 ■ Se da un número complejo.

a) Grafique el número complejo en el plano complejo.

b) Encuentre el módulo y el argumento.

c) Escriba el número en forma polar.

29. $4 + 4i$ **30.** $-10i$

31. $5 + 3i$ **32.** $1 + \sqrt{3}i$

33. $-1 + i$ **34.** -20

35–38 ■ Use el teorema de DeMoivre para hallar la potencia indicada.

35. $(1 - \sqrt{3}i)^4$ **36.** $(1 + i)^8$

37. $(\sqrt{3} + i)^{-4}$ **38.** $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

39–42 ■ Encuentre las raíces indicadas.

39. Las raíces cuadradas de $-16i$

40. Las raíces cúbicas de $4 + 4\sqrt{3}i$

41. Las raíces sextas de 1 **42.** Las raíces octavas de i

43–44 ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

43. $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 1\rangle$ **44.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

45. Encuentre el vector $\mathbf{u}$ con punto inicial $P(0, 3)$ y punto terminal $Q(3, -1)$.

46. Encuentre el vector $\mathbf{u}$ que tiene longitud $|\mathbf{u}| = 20$ y dirección $\theta = 60°$.

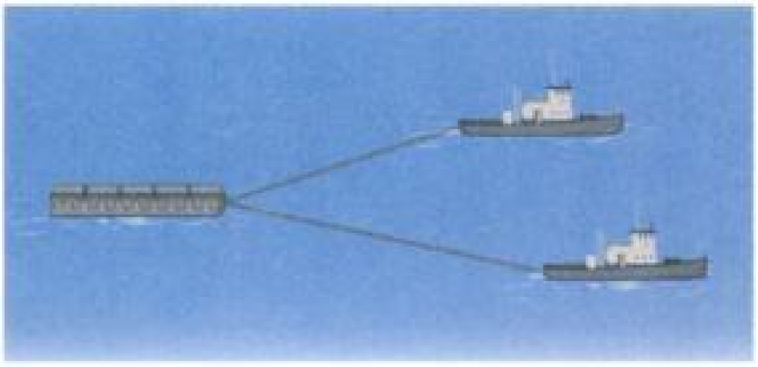
47. Si el vector $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ se coloca en el plano con su punto inicial $P(5, 6)$, encuentre su punto terminal.

48. Encuentre la dirección del vector $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

49. Dos remolcadores están jalando una barcaza. Uno jala con una fuerza de 2.0×10^4 lb en la dirección N 50° E y el otro con una fuerza de 3.4×10^4 lb en la dirección S 75° E.

a) Encuentre la fuerza resultante sobre la barcaza como un vector.

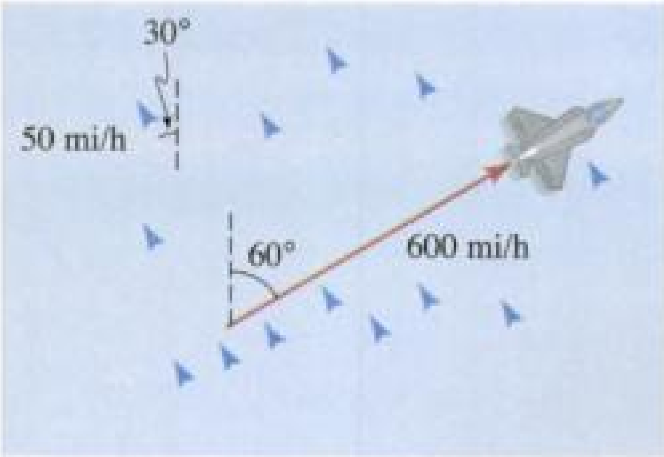
b) Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



50. Un avión va con rumbo al N 60° E a una velocidad de 600 millas/h respecto al aire. Un viento comienza a soplar en la dirección N 30° W a 50 millas/h.

a) Encuentre la velocidad del avión como un vector.

b) Encuentre la velocidad verdadera y la dirección del avión.



51–54 ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

51. $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 9, -8\rangle$

52. $\mathbf{u} = \langle 5, 12\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 10, -4\rangle$

53. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

54. $\mathbf{u} = 10\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

55–58 ■ ¿Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ ortogonales? En caso contrario, encuentre el ángulo entre ellos.

55. $\mathbf{u} = \langle -4, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$

56. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 6\rangle$

57. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

59–60 ■ Se dan los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

a) Encuentre el componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

b) Encuentre $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

c) Resuelva $\mathbf{u}$ en dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

59. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 6, -1\rangle$

60. $\mathbf{u} = \langle -8, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 20, 20\rangle$

61. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(1, 1)$ al punto $(7, -1)$.

62. Una fuerza $\mathbf{F}$ con magnitud de 240 lb mueve un objeto en la dirección del vector $\mathbf{D}$ una distancia de 20 pies. Si el trabajo hecho es 3800 pies-libra, encuentre el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{D}$.

8 Evaluación

1. **a)** Convierta el punto cuyas coordenadas polares son $(8, 5\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

b) Encuentre dos representaciones en coordenadas polares para el punto en coordenadas rectangulares $(-6, 2\sqrt{3})$, una con $r > 0$ y otra con $r < 0$, y ambas con $0 \leq \theta < 2\pi$.

2. **a)** Grafique la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$. ¿Qué tipo de curva es ésta?

b) Convierta la ecuación a coordenadas rectangulares.

3. Sea $z = 1 + \sqrt{3}i$.

a) Grafique z en el plano complejo.

b) Escriba z en forma polar.

c) Encuentre el número complejo z^9.

4. Sea $z_1 = 4\left(\cos \dfrac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}\right)$ y $z_2 = 2\left(\cos \dfrac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Encuentre $z_1 z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

5. Encuentre las raíces cúbicas de $27i$ y bosquéjelas en el plano complejo.

6. Sea **u** el vector con punto inicial $P(3, -1)$ y punto terminal $Q(-3, 9)$.

a) Exprese **u** en términos de **i** y **j**.

b) Encuentre la longitud de **u**.

7. Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 2\rangle$.

a) Encuentre $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

b) Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

c) Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

d) ¿**u** y **v** son perpendiculares?

8. Sea $\mathbf{u} = \langle -4\sqrt{3}, 4\rangle$.

a) Grafique **u** con punto inicial $(0, 0)$.

b) Encuentre la longitud y dirección de **u**.

9. Un río fluye al este a 8 millas/h. Una persona dirige su lancha de motor en una dirección N 30° E en el río. La velocidad de la lancha con respecto al agua es de 12 millas/h.

a) Exprese la velocidad verdadera del motor como un vector.

b) Encuentre la velocidad y dirección verdaderas de la lancha.

10. Sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

a) Encuentre el ángulo entre **u** y **v**.

b) Encuentre la componente de **u** a lo largo de **v**.

c) Encuentre $\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

11. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(2, 2)$ al punto $(7, -13)$.

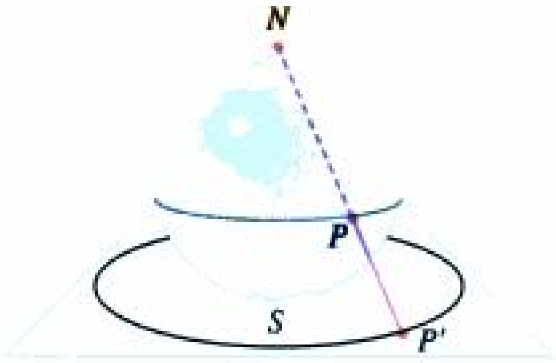


Figura 3

El punto P sobre la superficie de la Tierra se proyecta sobre el punto P' sobre el plano mediante un rayo desde el polo norte.

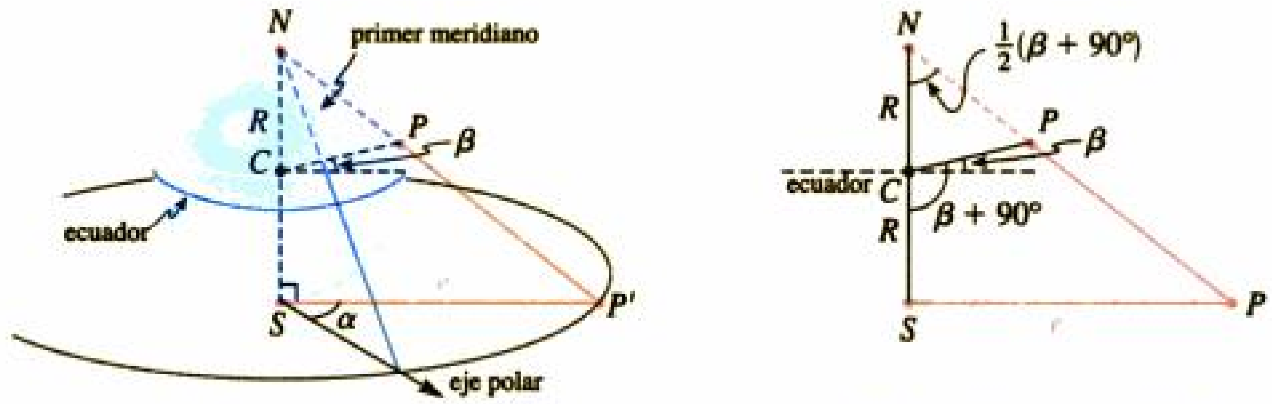
Proyección estereográfica

En la **proyección estereográfica** se imagina a la Tierra colocada en el plano coordenado con el polo sur en el origen. Los puntos sobre la Tierra están proyectados sobre el plano mediante rayos que emanan del polo norte (véase la figura 3). La Tierra se coloca de modo que el primer meridiano (longitud 0º) corresponda al eje polar. Como se muestra en la figura 4a), un punto P sobre la Tierra en la longitud $\alpha°$ E y latitud $\beta°$ N se proyecta sobre el punto $P'(r, \theta)$ cuyas coordenadas polares son

$$r = 2R\tan\left(\frac{\beta}{2} + 45°\right)$$

$$\theta = \alpha$$

En la figura 4b) se muestra cómo se obtiene la primera de estas fórmulas



a) Proyección estereográfica

b) Sección transversal de la proyección estereográfica

Figura 4

En la figura 5 se muestra un mapa estereográfico del hemisferio sur.

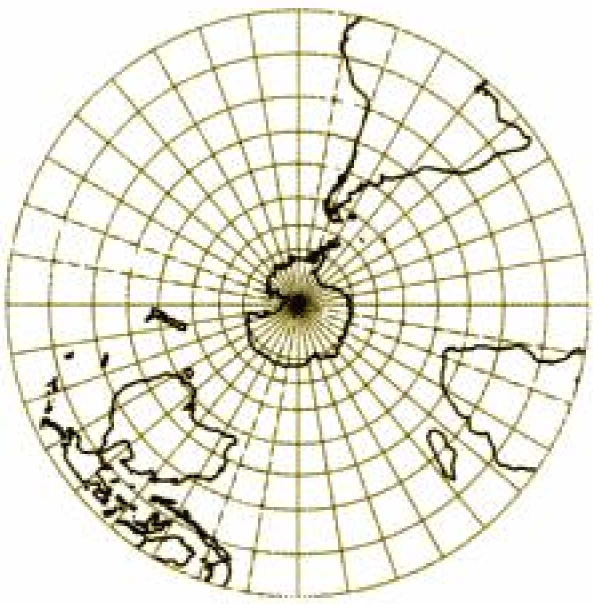
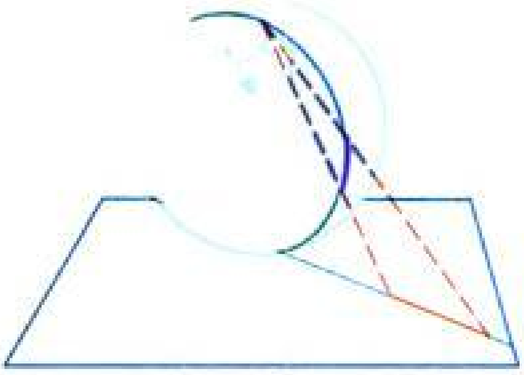


Figura 5

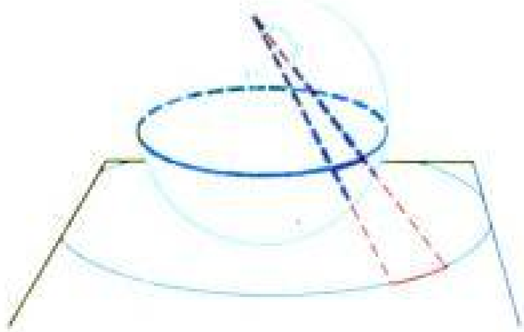
Proyección estereográfica del hemisferio sur

7–8 ■ La proyección estereográfica también alarga las distancias, mientras más lejos estén del polo sur, más se alargan las distancias. En estos problemas se encuentran los factores por los que las distancias están distorsionadas en la proyección estereográfica en varios lugares.

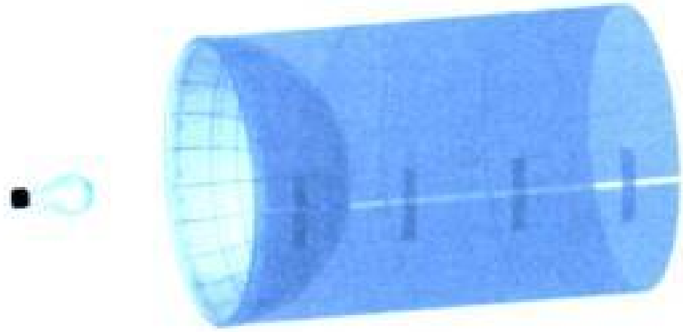


7. **Distancias proyectadas** Encuentre la relación entre la distancia proyectada sobre el plano y la distancia real en la esfera entre las latitudes dadas a lo largo de un meridiano (véase la figura a la izquierda).
   a) Entre la latitud 20° y 21° S
   b) Entre la latitud 40° y 41° S
   c) Entre la latitud 80° y 81° S

8. **Distancias proyectadas** Encuentre la relación entre la distancia proyectada sobre el plano y la distancia sobre la esfera a lo largo de la paralela de latitud dada entre dos puntos que están apartados 1° de latitud (véase la figura).
   a) Latitud 20° S
   b) Latitud 40° S
   c) Latitud 80° S



9. **Líneas de latitud y longitud** En este proyecto se ve cómo la proyección transfiere líneas de latitud y longitud desde una esfera a una superficie plana. Se necesitará un tazón de vidrio redondo, papel de calcar y una fuente de luz (un bombillo pequeño transparente). Use un marcador negro para trazar líneas igualmente espaciadas de latitud y longitud en el exterior del tazón.
   a) Para modelar la proyección estereográfica, coloque el tazón sobre una hoja de papel de calcar y use la fuente de luz como se muestra en la figura a la izquierda.
   b) Para modelar la proyección cilíndrica, envuelva el papel de calcar alrededor del tazón y use la fuente de luz como se muestra en la figura siguiente.

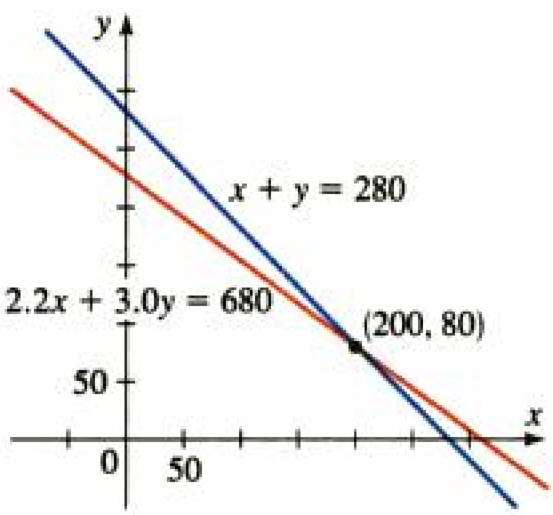


10. **Otras proyecciones** Hay muchas otras proyecciones de mapas, como la proyección cónica de Albers, la azimutal, la cilíndrica de igual área de Behrmann, las proyecciones isográficas y ortográficas de Gall, la proyección gnómica, la proyección equivalente de Lambert, la de Mercator, la de Mollweide, la rectangular y la sinusoidal. Investigue una de estas proyecciones en su biblioteca o en la Internet y escriba un informe que explique cómo se construye el mapa y que describa sus ventajas y desventajas.

9 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Esquema del capítulo

Muchas de las situaciones del mundo real tienen demasiadas variables como para ser modeladas por una *sola* ecuación. Por ejemplo, el clima depende de muchas variables, como la temperatura, velocidad del viento, presión del aire, humedad, y así sucesivamente. Para modelar el clima, y predecirlo, los científicos usan muchas ecuaciones, y cada una de ellas contiene varias variables. Estos sistemas de ecuaciones *trabajan juntos* para describir el clima. Los sistemas de ecuaciones con cientos o hasta miles de variables se usan también ampliamente en las industrias de los viajes aéreos y las telecomunicaciones para establecer horarios consistentes y para determinar rutas eficaces para las llamadas telefónicas. Para entender cómo surgen estos sistemas, consideremos el siguiente ejemplo sencillo.



Podemos resolver este sistema en forma gráfica. El punto (200, 80) queda en la gráfica de cada una de las ecuaciones, de modo que satisface ambas ecuaciones.

Una gasolinería vende gasolina regular a 2.20 dólares cada galón y gasolina premium a 3.00 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron? Si hacemos que x y y sean las cantidades vendidas de galones de gasolina regular y de gasolina premium, respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \quad y = 280 & \text{Ecuación de los galones} \\ 2.20x + 3.00y = 680 & \text{Ecuación de los dólares} \end{cases}$$

Estas ecuaciones *trabajan juntas* para que podamos calcular x y y; ninguna ecuación sola puede señalar el valor de x o de y. Los valores $x = 200$ y $y = 80$ cumplen *ambas* ecuaciones, de modo que son una solución del sistema. Por consiguiente, la gasolinería vendió 200 galones de gasolina regular y 80 galones de gasolina premium.

También podemos representar un sistema lineal mediante un acomodo rectangular de números que se llama matriz. La *matriz aumentada* del sistema anterior es

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 280 \\ 2.20 & 3.00 & 680 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \textbf{Ecuación de los galones} \\ \textbf{Ecuación de los dólares} \end{array}$$

La matriz aumentada contiene la misma información que el sistema, pero de manera más simple. Una de las ideas importantes en este capítulo es pensar en una matriz como un objeto simple, de modo que lo denotamos por medio de una sola letra como A, B, C, etcétera. Podemos sumar, restar y multiplicar matrices, igual que con los números ordinarios. Pondremos atención especial a la multiplicación de matrices, la cual se define de una manera que, a veces, parece complicada al principio, pero que permite escribir un sistema lineal como una simple *ecuación matricial*

$$AX = B$$

donde X es una matriz desconocida. Como verá, resolver esta ecuación matricial para determinar la matriz X es similar a resolver una ecuación algebraica $ax = b$ para determinar la cantidad x.

En este capítulo consideramos muchas aplicaciones de matrices, sin olvidar la aplicación al crecimiento de la población (*¿Sobrevivirán las especies?*, página 688) y las imágenes por medio de computadoras (*Imágenes mediante computadora I*, página 700).

9.1 Sistemas de ecuaciones

En esta sección estudiamos la manera de resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aprendemos tres métodos distintos para resolver dichos sistemas: por sustitución, por eliminación y por métodos gráficos.

Sistemas de ecuaciones y sus soluciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que contiene las mismas variables. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores de las variables que hacen que *cada una* de las ecuaciones del sistema se cumpla. **Resolver** un sistema quiere decir encontrar todas las soluciones del sistema.

En seguida se da un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✓	$3 + 4(1) = 7$ ✓

La solución se puede expresar también como el par ordenado (3, 1).

Hay que observar que las gráficas de las ecuaciones 1 y 2 son rectas (véase la figura 1). Puesto que la solución (3, 1) cumple cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) está en cada una de las rectas. Entonces, este es el punto de intersección de las dos rectas.

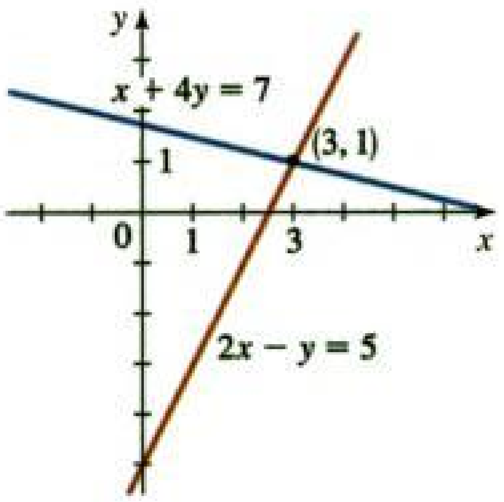


Figura 1

Método de sustitución

En el método de sustitución empezamos con una ecuación del sistema y despejamos una variable, que queda en términos de la otra variable. En el recuadro siguiente se describe el procedimiento.

Método de sustitución

1. **Despejar una variable.** Escoger una ecuación y despejar una de las variables.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión que determinó en el paso 1 en la otra ecuación para obtener una ecuación con una variable, luego resuélvala para obtener el valor de esa variable.
3. **Sustituir en la ecuación de la variable despejada.** Sustituya el valor que encontró en el paso 2 en la expresión que encontró en el paso 1 para determinar la variable faltante.

Ejemplo 1 Método de sustitución

Calcule todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Se despeja y de la primera ecuación.

Despejar una variable

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despejar } y \text{ en la ecuación 1}$$

En seguida se sustituye el valor de y en la segunda ecuación y se determina x:

Sustituir

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustitución de } y = 1 - 2x \text{ en la ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Desarrollo} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplificación} \\ -5x &= 10 && \text{Resta de 4} \\ x &= -2 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Luego se sustituye $x = -2$ en la ecuación de $y = 1 - 2x$:

Sustituir en la variable despejada

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Por lo tanto, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. En la figura 2 se puede observar que las gráficas de las dos ecuaciones se cortan en el punto $(-2, 5)$.

Compruebe su respuesta

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

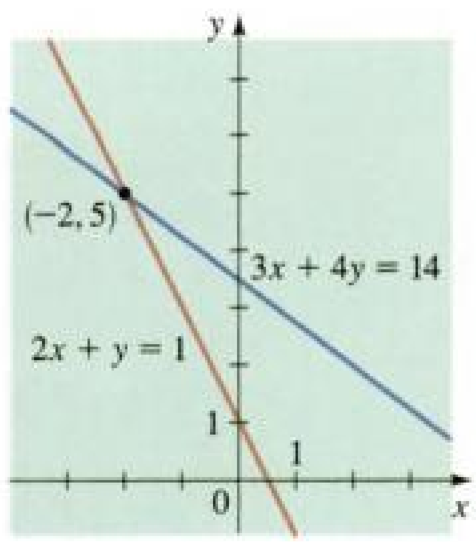


Figura 2

Ejemplo 2 Método de sustitución

Calcule todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - y = 10 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Iniciamos despejando y de la segunda ecuación.

Despejar una variable

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despeje } y \text{ de la ecuación 2}$$

Luego se sustituye el valor de y en la primera ecuación y se determina el valor de x:

Sustitución

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustitución de } y = 3x - 10 \text{ en la ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Desarrollo} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplificación} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorización} \\ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x &= 6 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Ahora se sustituyen estos valores de x en la ecuación $y = 3x - 10$.

Sustitución en la variable despejada

Para $x = 0$: $\quad y = 3(0) - 10 = -10 \qquad$ Sustitución

Para $x = 6$: $\quad y = 3(6) - 10 = 8 \qquad$ Sustitución

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; en la figura 3 se ilustra que las gráficas se cortan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

Compruebe su respuesta

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \quad \checkmark$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \quad \checkmark$$

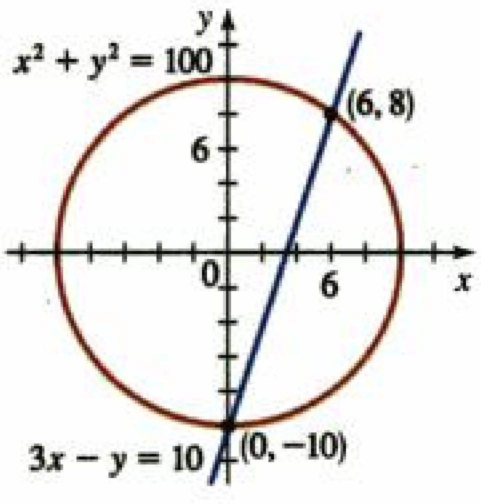


Figura 3

■

Método de eliminación

Para resolver un sistema por medio del método de eliminación, se trata de combinar las ecuaciones usando sumas o diferencias para eliminar una de las variables.

Método de eliminación

1. **Ajustar los coeficientes.** Se multiplica una o más de las ecuaciones por cantidades adecuadas de modo que el coeficiente de una variable de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Se suman las dos ecuaciones para eliminar una variable, luego se resuelve para determinar el valor de la variable restante.
3. **Sustituir.** Se sustituye el valor que determinó en el paso 2 en una de las ecuaciones originales, y se resuelve para determinar el valor de la variable restante.

Ejemplo 3 Método de eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Puesto que los coeficientes de los términos con y son negativos, se pueden sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ \underline{x - 2y = 2} \end{cases} & & \text{Sistema} \\ 4x \qquad = 16 & & \text{Suma} \\ x = 4 & & \text{Determinación de } x \end{array}$$

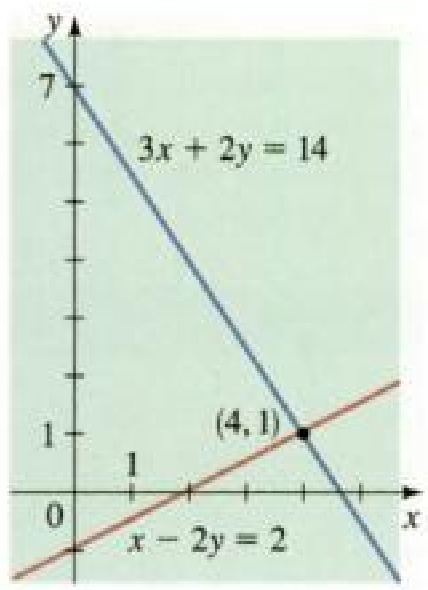


Figura 4

Ahora se sustituye $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y se determina y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rll} x - 2y = 2 & & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y = 2 & & \text{Sustitución de } x = 4 \text{ en la ecuación 2} \\ -2y = -2 & & \text{Resta de 4} \\ y = 1 & & \text{Determinación de } y \end{array}$$

La solución es $(4, 1)$. En la figura 4 se muestra que las gráficas de las ecuaciones que forman el sistema se cortan en el punto $(4, 1)$. ■

Ejemplo 4 Método de eliminación

Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 26 & \text{Ecuación 1} \\ 5x^2 + 7y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Elegimos eliminar el término de x, así que multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3. Entonces sumamos las dos ecuaciones y determinamos el valor de y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 15x^2 + 10y = 130 \\ \underline{-15x^2 - 21y = -9} \end{cases} & & \text{5 por ecuación 1} \\ & & \text{(−3) por ecuación 2} \\ -11y = 121 & & \text{Suma} \\ y = -11 & & \text{Determinación de } y \end{array}$$

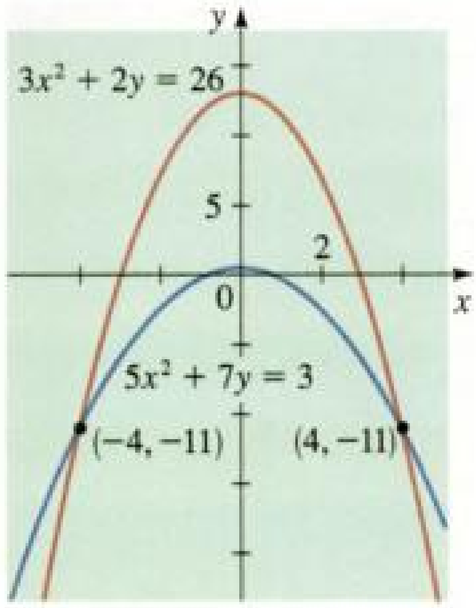


Figura 5

Las gráficas de las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ se llaman *parábolas*; véase la sección 2.5.

Ahora se sustituye $y = -11$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, $3x^2 + 2y = 26$, y se determina x:

$$3x^2 + 2(-11) = 26 \qquad \text{Sustitución de } y = -11 \text{ en la ecuación 1}$$

$$3x^2 = 48 \qquad \text{Suma de 22}$$

$$x^2 = 16 \qquad \text{División entre 3}$$

$$x = -4 \quad \text{o bien} \quad x = 4 \qquad \text{Determinación de } x$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Las gráficas de ambas ecuaciones son parábolas. En la figura 5 se muestra que las gráficas se cortan en los dos puntos $(-4, -11)$ y $(4, -11)$. ■

Compruebe su respuesta

$x = -4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(-4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(-4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

$x = 4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

Método gráfico

En el **método gráfico** se usa una calculadora para graficar o una computadora para resolver el sistema de ecuaciones. Observe que con muchas de las calculadoras para graficar, cualquier ecuación se debe expresar primero en términos de una o más funciones de la forma $y = f(x)$ antes de que podamos usar la calculadora para graficarla. No todas las ecuaciones se pueden expresar fácilmente en esta forma, de modo que no todos los sistemas se pueden resolver mediante este método.

Método gráfico

1. **Grafique cada ecuación.** Exprese cada ecuación en la forma en que la acepte la calculadora, despejando y para que quede todo en términos de x. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Calcule los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

A veces es más conveniente despejar x de las ecuaciones. En ese caso, en el paso 1 grafique x en función de y.

Ejemplo 5 Método gráfico

Determine todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Solución Despeje y en términos de x para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

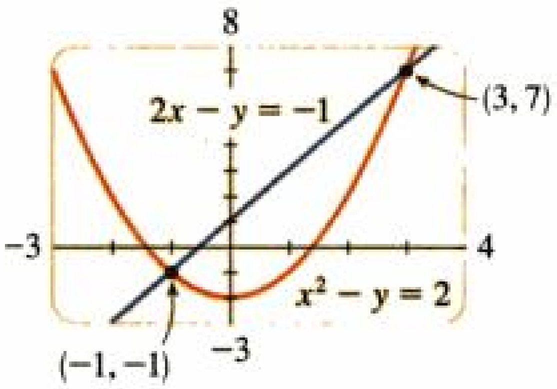


Figura 6

En la figura 6 se ilustra que las gráficas de estas ecuaciones se cortan en los dos puntos. Si nos acercamos, vemos que las soluciones son

$$(-1, -1) \qquad \text{y} \qquad (3, 7)$$ ■

Compruebe su respuesta

$x = -1, y = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) = 2 \\ 2(-1) - (-1) = -1 \end{cases} \checkmark$$

$x = 3, y = 7$:

$$\begin{cases} 3^2 - 7 = 2 \\ 2(3) - 7 = -1 \end{cases} \checkmark$$

Ejemplo 6 Resolución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico

Calcule todas las soluciones del sistema con una cifra decimal.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & \text{Ecuación 1} \\ y = 2x^2 - 5x & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia y la segunda es una parábola. Para graficar la circunferencia en una calculadora es necesario despejar y (véase la sección 2.3).

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 12 - x^2 \qquad \text{Aislamiento de } y^2 \text{ en el primer miembro}$$

$$y = \pm\sqrt{12 - x^2} \qquad \text{Cálculo de raíces cuadradas}$$

Para graficar la circunferencia, es necesario graficar ambas funciones:

$$y = \sqrt{12 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{12 - x^2}$$

En la figura 7 la gráfica de la circunferencia se muestra en rojo y la parábola en azul. Las gráficas se cortan en los cuadrantes I y II. Efectuamos un acercamiento o aplicamos el comando `Intersect`, y observamos que los puntos de intersección son $(-0.559, 3.419)$ y $(2.847, 1.974)$. Asimismo, parece que hay otro punto de intersección en el cuadrante IV. No obstante, cuando efectuamos un acercamiento, observamos que las curvas se acercan mucho entre sí, pero no se cortan (véase la figura 8). Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones, que son las siguientes con una cifra decimal

$$(-0.6, 3.4) \qquad \text{y} \qquad (2.8, 2.0)$$

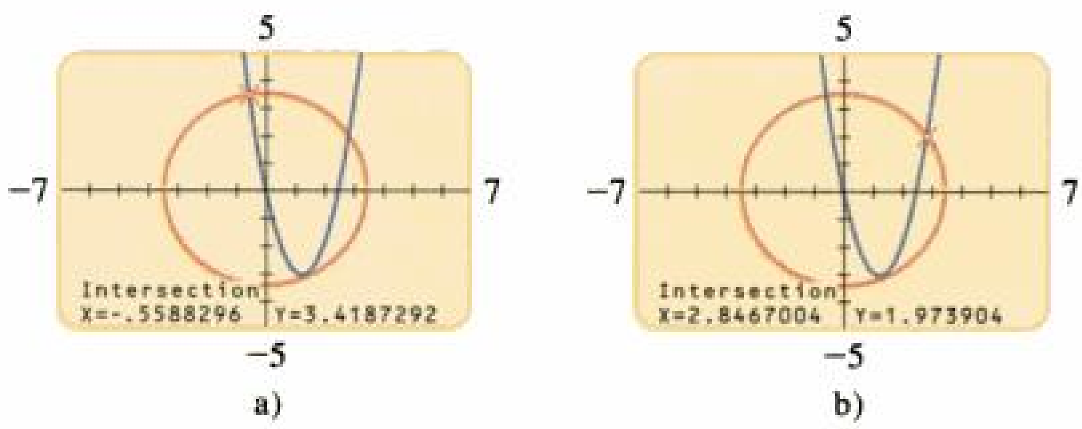


Figura 7
$x^2 + y^2 = 12, y = 2x^2 - 5x$

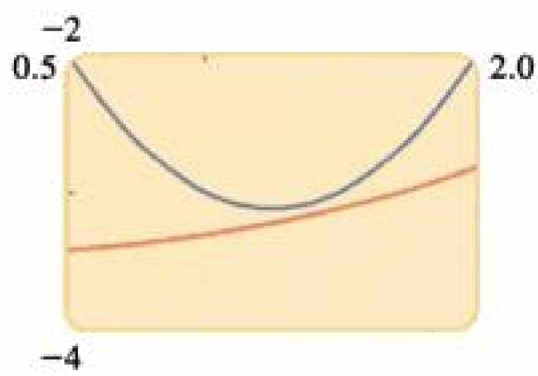


Figura 8
Acercamiento ■

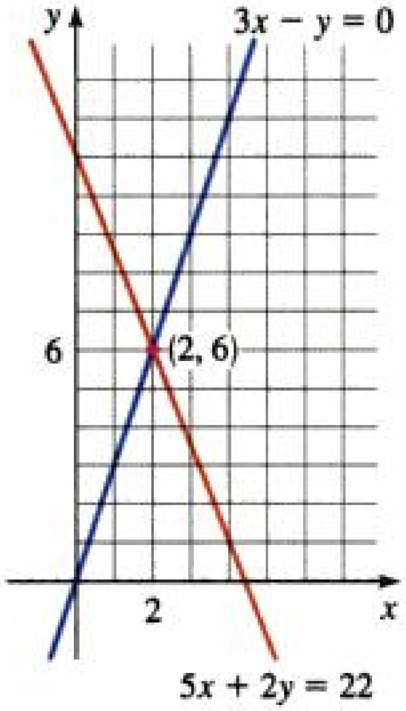


Figura 2

Compruebe su respuesta

$x = 2, y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad ✓$$

Ejemplo 1 Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Eliminamos y a partir de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} & & \begin{array}{l} \text{2 × ecuación 1} \\ \\ \end{array} \\ \hline 11x \quad = 22 & & \text{Suma} \\ x = 2 & & \text{Despeje de } x \end{array}$$

En seguida sustituimos en la primera ecuación y determinamos y:

$$\begin{array}{rl} 6(2) - 2y = 0 & \text{Sustitución } x = 2 \\ -2y = -12 & \text{Resta de } 6 \times 2 = 12 \\ y = 6 & \text{Determinación de } y \end{array}$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la figura 2 muestra que las rectas del sistema se cortan en el punto (2, 6). ■

Ejemplo 2 Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Esta vez tratamos de determinar una combinación adecuada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. Al multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 tenemos

$$\begin{array}{rl} \begin{cases} 24x - 6y = 15 \\ -24x + 6y = 14 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{3 × ecuación 1} \\ \text{2 × ecuación 2} \end{array} \\ \hline 0 = 29 & \text{Suma} \end{array}$$

En este caso, al sumar las dos ecuaciones se eliminan tanto x *como* y, y terminamos con $0 = 29$, lo cual obviamente es falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de modo que el sistema no tiene solución. En la figura 3 se ilustra que las rectas del sistema son paralelas y no se cortan. El sistema es inconsistente. ■

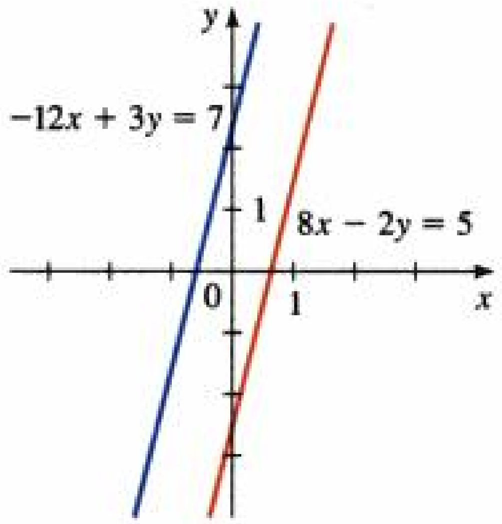


Figura 3

Ejemplo 3 Un sistema lineal con cantidad infinita de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones a fin de eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{ecuación 2} \end{cases}$$

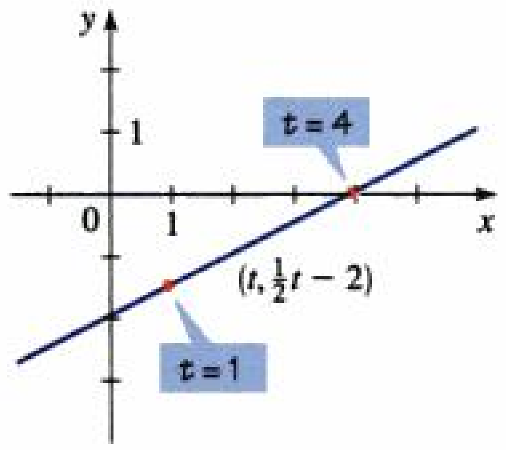


Figura 4

Se puede observar que las dos ecuaciones en el sistema original son simplemente modos distintos de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta son una solución del sistema. Al escribir la ecuación en la forma de ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Entonces, si t representa cualquier número real, se puede escribir la solución como

$$x = t$$
$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

Asimismo, se puede escribir la solución en la forma de par ordenado como

$$(t, \tfrac{1}{2}t - 2)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (véase la figura 4). ∎

En el ejemplo 3, para llegar a soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, se obtiene la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Si $t = 4$, se obtiene la solución $(4, 0)$. Para cada valor de t tenemos una solución diferente. (Véase la figura 4.)

Modelado con sistemas lineales

Con frecuencia, cuando se utilizan ecuaciones para resolver problemas relacionados con la ciencia o con otros campos, se obtienen sistemas como los que hemos estudiado. Cuando se modela con sistemas de ecuaciones, se usan los criterios siguientes, similares a los de la sección 1.6.

Criterios para modelar con sistemas de ecuaciones

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide determinar. Por lo regular, se determinan mediante una lectura cuidadosa de las preguntas planteadas al final del problema. Introduzca la notación para las variables: nómbrelas x y y u otras letras.
2. **Expresar todas las cantidades desconocidas en función de las variables.** Lea el problema una vez más y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en función de las variables que definió en el paso 1.
3. **Plantear un sistema de ecuaciones.** Encuentre los hechos decisivos en el problema que dan las relaciones entre las expresiones que determinó en el paso 2. Plantee un sistema de ecuaciones, o modelo, que exprese estas relaciones.
4. **Resolver el sistema e interpretar los resultados.** Resuelva el sistema que encontró en el paso 3, compruebe sus soluciones y dé la respuesta final en la forma de una oración que responda a la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 5 Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol añadiendo una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante contiene ahora 16% de alcohol, con la que llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y de la solución de alcohol utiliza?

Solución Puesto que se piden las cantidades de vino y de alcohol, hacemos

Identifique las variables

$$x = \text{cantidad de vino utilizada (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol usada (L)}$$

De acuerdo con el hecho de que el vino contiene 10% de alcohol y la solución 70% de alcohol, se tiene lo siguiente:

Exprese todas las cantidades desconocidas en función de la variable

En lenguaje común	En lenguaje algebraico
Cantidad de vino usado (L)	x
Cantidad de solución de alcohol usada (L)	y
Cantidad de alcohol en el vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero está combinando, por lo que

$$x + y = 1000$$

Asimismo, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol con el que contribuye el vino y la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplificación}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplicación por 2 para eliminar decimales}$$

Por lo tanto, tenemos el sistema

Plantee un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Cuando se efectúa la diferencia entre la primera ecuación y la segunda se elimina la variable x, y tenemos entonces

Resuelva el sistema

$$6y = 600 \qquad \text{Resta de la ecuación 1 de la ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Determinación de } y$$

Luego se sustituye $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x:

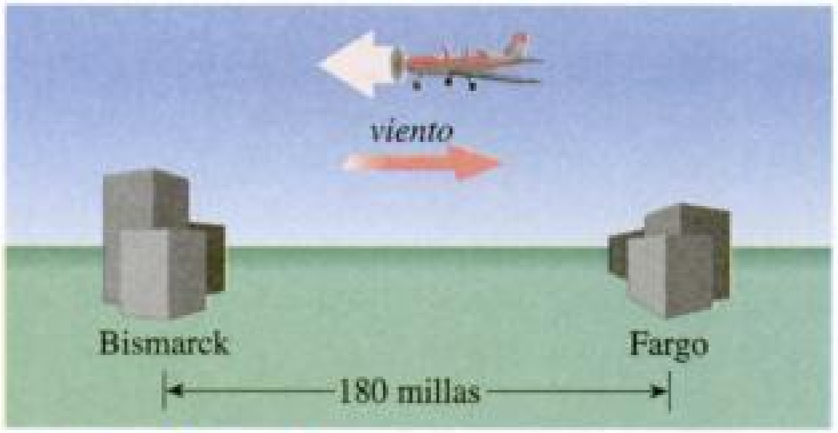
$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustitución de } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Determinación de } x$$

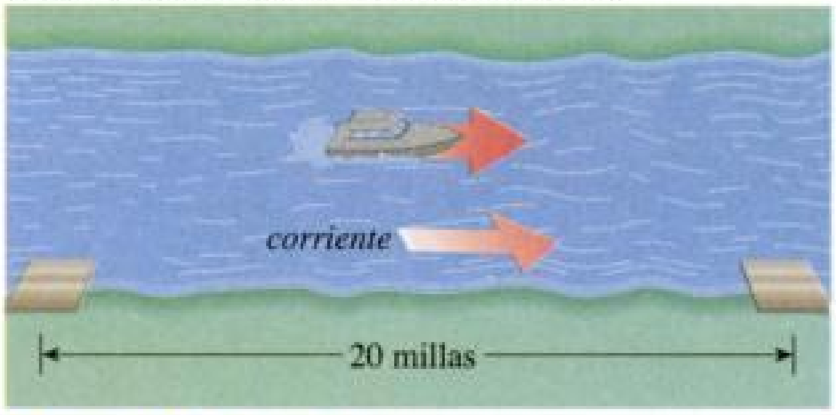
El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol. ■

reunió por las tarifas de la entrada fue 5050 dólares. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron?

47. Velocidad de un aeroplano Un hombre vuela en un pequeño aeroplano desde Fargo hasta Bismarck, en Dakota del Norte, que representa una distancia de 180 millas. Como vuela con viento en contra, el viaje dura 2 horas. De regreso, el viento sigue soplando a la misma velocidad, de modo que el viaje de retorno dura sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con el viento en calma y cuál es la velocidad del viento?



48. Velocidad de un bote Un bote que va por un río viaja durante una hora aguas abajo entre dos puntos, que están separados 20 millas. El viaje de regreso, contra la corriente, dura 2 h 30 min. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación y cuál es la velocidad de la corriente en el río?



49. Ejercicio de *aeróbicos* Una mujer se mantiene en forma viajando en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes dedicó media hora a cada actividad, y recorrió un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes, corrió durante 12 min y anduvo en bicicleta 45 min, y recorrió un total de 16 millas. Si suponemos que sus velocidades al correr y al andar en bicicleta no cambian día con día, calcule dichas velocidades.

50. Problema de mezclas Un biólogo tiene dos soluciones de salmuera. Una contiene 5% de sal y la otra, 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal.

51. Nutrición Una investigadora ejecuta un experimento para probar una hipótesis que relaciona los nutrientes niacina y retinol. Todos los días alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta precisa de 32 unidades de niacina y 22 000 unidades de retinol. Utiliza dos tipos de alimentos comerciales. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo. El alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento debe administrar a su grupo de ratas todos los días?

52. Mezcla de café Un cliente de una cafetería compra una mezcla de dos tipos de café: uno proveniente de Kenia que cuesta 3.50 dólares cada libra y uno de Sri Lanka, que cuesta 5.60 dólares la libra. Compra tres libras de la mezcla, que le cuesta 11.55 dólares. ¿Cuántas libras de cada clase de café van en la mezcla?

53. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes recipientes de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. Al mezclar 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda obtiene una mezcla que es ácido al 15%, en tanto que 100 mL de la primera mezclada con 500 mL de la segunda da una mezcla de ácido al $12\frac{1}{2}\%$. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

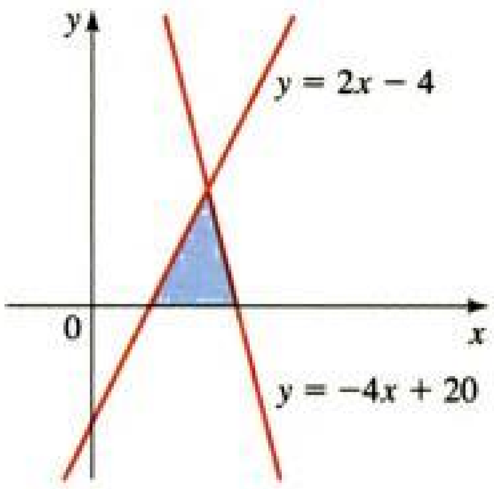
54. Inversiones Una mujer invierte un total de 20 000 dólares en dos cuentas, una da 5% y la otra 8% de interés simple al año. Su interés anual es 1180 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

55. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas. En una recibe 6% y en la otra 10% de interés simple por año. Pone el doble en la cuenta de menor rendimiento por ser la de menor riesgo. Su interés anual es 3520 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

56. Distancia, velocidad y tiempo John y Mary salen de su casa al mismo tiempo, pero toman direcciones opuestas. John guía su automóvil a 40 millas/hora. El recorrido de Mary toma 15 min más que el de John. ¿Cuánto tiempo maneja cada uno de ellos su automóvil?

57. Problema de números La suma de los números de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Determinar el número

58. Área de un triángulo Calcule el área de un triángulo que se encuentra en el primer cuadrante y cuya base queda sobre el eje de las x; además, está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



Descubrimiento • Debate

59. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o *recta de regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Ya estudiamos esta recta en *Enfoque en el modelado* (véase la página 240). Por medio del cálculo infinitesimal se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta