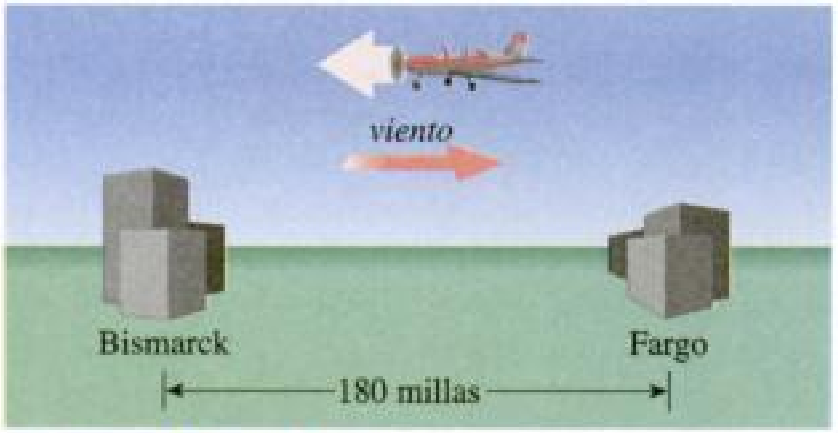
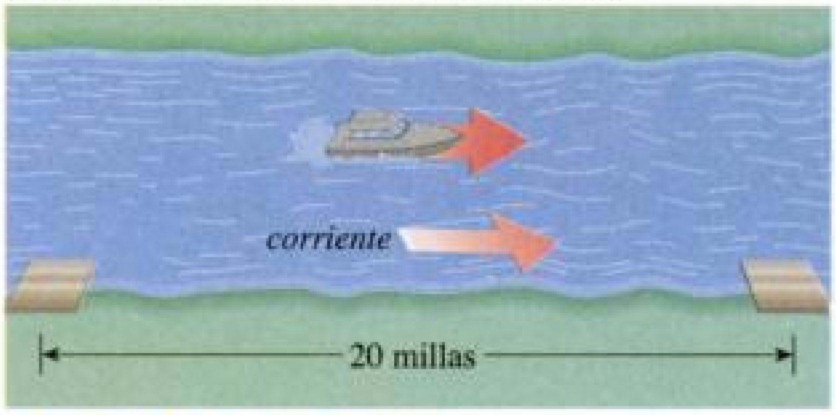
reunió por las tarifas de la entrada fue 5050 dólares. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron?

47. Velocidad de un aeroplano Un hombre vuela en un pequeño aeroplano desde Fargo hasta Bismarck, en Dakota del Norte, que representa una distancia de 180 millas. Como vuela con viento en contra, el viaje dura 2 horas. De regreso, el viento sigue soplando a la misma velocidad, de modo que el viaje de retorno dura sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con el viento en calma y cuál es la velocidad del viento?



48. Velocidad de un bote Un bote que va por un río viaja durante una hora aguas abajo entre dos puntos, que están separados 20 millas. El viaje de regreso, contra la corriente, dura 2 h 30 min. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación y cuál es la velocidad de la corriente en el río?



49. Ejercicio de *aeróbicos* Una mujer se mantiene en forma viajando en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes dedicó media hora a cada actividad, y recorrió un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes, corrió durante 12 min y anduvo en bicicleta 45 min, y recorrió un total de 16 millas. Si suponemos que sus velocidades al correr y al andar en bicicleta no cambian día con día, calcule dichas velocidades.

50. Problema de mezclas Un biólogo tiene dos soluciones de salmuera. Una contiene 5% de sal y la otra, 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal.

51. Nutrición Una investigadora ejecuta un experimento para probar una hipótesis que relaciona los nutrientes niacina y retinol. Todos los días alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta precisa de 32 unidades de niacina y 22 000 unidades de retinol. Utiliza dos tipos de alimentos comerciales. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo. El alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento debe administrar a su grupo de ratas todos los días?

52. Mezcla de café Un cliente de una cafetería compra una mezcla de dos tipos de café: uno proveniente de Kenia que cuesta 3.50 dólares cada libra y uno de Sri Lanka, que cuesta 5.60 dólares la libra. Compra tres libras de la mezcla, que le cuesta 11.55 dólares. ¿Cuántas libras de cada clase de café van en la mezcla?

53. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes recipientes de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. Al mezclar 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda obtiene una mezcla que es ácido al 15%, en tanto que 100 mL de la primera mezclada con 500 mL de la segunda da una mezcla de ácido al $12\frac{1}{2}\%$. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

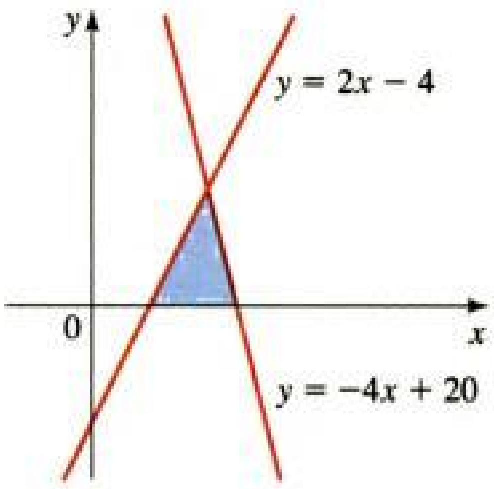
54. Inversiones Una mujer invierte un total de 20 000 dólares en dos cuentas, una da 5% y la otra 8% de interés simple al año. Su interés anual es 1180 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

55. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas. En una recibe 6% y en la otra 10% de interés simple por año. Pone el doble en la cuenta de menor rendimiento por ser la de menor riesgo. Su interés anual es 3520 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

56. Distancia, velocidad y tiempo John y Mary salen de su casa al mismo tiempo, pero toman direcciones opuestas. John guía su automóvil a 40 millas/hora. El recorrido de Mary toma 15 min más que el de John. ¿Cuánto tiempo maneja cada uno de ellos su automóvil?

57. Problema de números La suma de los números de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Determinar el número

58. Área de un triángulo Calcule el área de un triángulo que se encuentra en el primer cuadrante y cuya base queda sobre el eje de las x; además, está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



Descubrimiento • Debate

59. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o *recta de regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Ya estudiamos esta recta en *Enfoque en el modelado* (véase la página 240). Por medio del cálculo infinitesimal se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta

$y = ax + b$, donde los coeficientes a y b cumplen con el siguiente par de ecuaciones lineales. [La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ significa la suma de todas las x. Véase la sección 11.1 en donde hay una descripción completa de la notación ($\sum$).]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Por medio de estas ecuaciones calcule la recta de mínimos cuadrados para los puntos siguientes.

$$(1, 3),\quad (2, 5),\quad (3, 6),\quad (5, 6),\quad (7, 9)$$

Localice los puntos y trace la recta para confirmar que ésta se ajusta a los puntos. Si su calculadora determina rectas de regresión, verifique si genera la misma recta que las fórmulas.

9.3 Sistemas de ecuaciones lineales con varias variables

Una **ecuación lineal con n variables** es una ecuación que se puede expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables. Si tenemos sólo tres o cuatro variables, usamos por lo general x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3 y x_4. Dichas ecuaciones reciben el nombre de *lineales* porque si tenemos sólo dos variables la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. En seguida hay algunos ejemplos de ecuaciones con tres variables que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$6x_1 - 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = 10$	$x^2 + 3y - \sqrt{z} = 5$	No es lineal porque una variable está al cuadrado y hay una raíz cuadrada de otra.
$x + y + z = 2w - \frac{1}{2}$	$x_1x_2 + 6x_3 = -6$	No es lineal porque contiene un producto de variables.

En esta sección estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con tres o más variables.

Resolución de un sistema lineal

Los dos ejemplos que siguen ilustran sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. El segundo sistema es de **forma triangular**; es decir, la variable x no aparece en la segunda ecuación y las variables x y y no están en la tercera ecuación.

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

Un sistema de forma triangular

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Es fácil resolver un sistema que está en la forma triangular usando la sustitución. Entonces, el objetivo de esta sección es empezar con un sistema de ecuaciones lineales

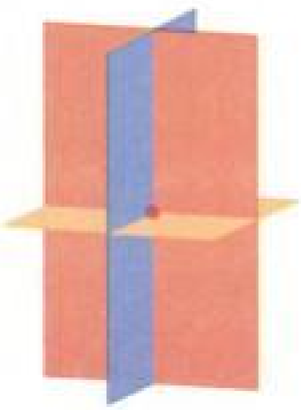
Número de soluciones de un sistema lineal

Al igual que en el caso de dos variables, un sistema de ecuaciones con varias variables puede tener una solución, ninguna solución, o bien, una cantidad infinita de soluciones. La interpretación gráfica de las soluciones de un sistema lineal es análoga a la de los sistemas de ecuaciones con dos variables (véase nota al margen).

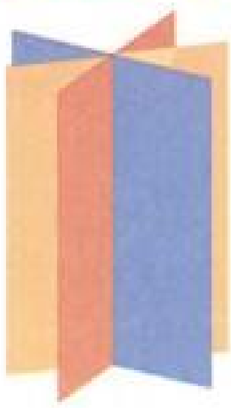
Intersección de tres planos

Cuando estudie cálculo o álgebra lineal, aprenderá que la gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano* en el sistema de coordenadas tridimensional. Por lo que toca a un sistema de tres ecuaciones con tres variables, surgen las situaciones siguientes:

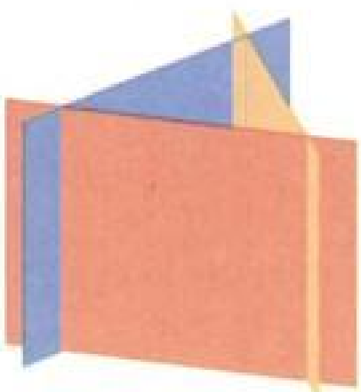
1. Los tres planos se cortan en un solo punto.
   El sistema tiene una solución única.



2. Los tres planos se cortan en más de un punto.
   El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.



3. Los tres planos carecen de un punto en común.
   El sistema no tiene solución.



Número de soluciones de un sistema lineal

Para el caso de un sistema de ecuaciones lineales, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente** y que un sistema con una cantidad infinita de soluciones es **dependiente**. Como se puede observar en el ejemplo siguiente, un sistema lineal no tiene solución si obtenemos una *ecuación falsa* después de aplicar la eliminación de Gauss al sistema.

Ejemplo 3 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema siguiente.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución Para poner este sistema en forma triangular, se empieza por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y de la tercera.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 & \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ -2y + 3z = 2 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora se elimina el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ 0 = -2 & \text{Ecuación 3} + (-1) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación establece que $0 = -2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

11–14 ■ Efectúe una operación en el sistema que permita eliminar la variable indicada. Escriba el sistema equivalente nuevo.

11. $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ Elimine el término en x de la segunda ecuación.

12. $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ -2x + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ Elimine el término en x de la segunda ecuación.

13. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ -4x + 5y + z = 10 \end{cases}$ Elimine el término en x de la tercera ecuación.

14. $\begin{cases} x - 4y + z = 3 \\ y - 3z = 10 \\ 3y - 8z = 24 \end{cases}$ Elimine el término en y de la tercera ecuación.

15–32 ■ Calcule la solución completa del sistema lineal o demuestre que es inconsistente.

15. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 5z = 8 \\ 2x - y - 2z = -7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -x + 2y + 5z = 4 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 6z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ y - 2z = -3 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

Aplicaciones

33–34 ▪ Finanzas Una inversionista tiene 100 000 dólares para invertir en tres tipos de bonos: corto plazo, plazo intermedio y largo plazo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de modo que se cumplan las condiciones dadas?

33. Los bonos de corto plazo dan un rendimiento de 4% anual, los bonos de plazo intermedio 5%, y los de largo plazo, 6%. La inversionista desea tener un ingreso anual total de 5.1%, con cantidades iguales invertidas en bonos de corto plazo y de plazo intermedio.

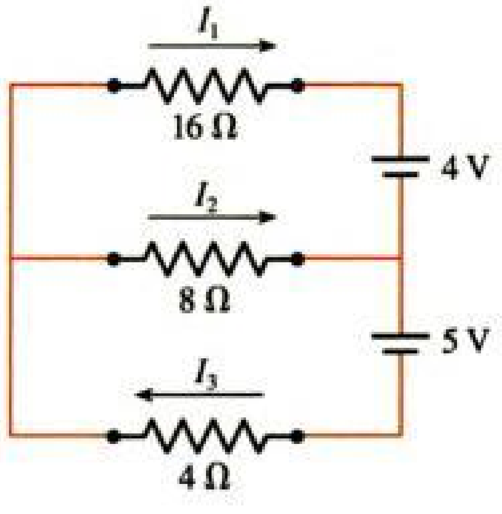
34. Los bonos de corto plazo dan un rendimiento de 4% al año, los bonos de plazo intermedio dan 6% y los de largo plazo dan 8%. La inversionista desea tener una utilidad anual total de 6700 dólares de su inversión, en la que invertiría cantidades iguales en los bonos de plazo intermedio y de largo plazo.

35. Nutrición Una bióloga está efectuando un experimento sobre los efectos de varias combinaciones de vitaminas. Quiere alimentar a cada uno de sus conejos de laboratorio con una dieta que contenga exactamente 9 mg de niacina, 14 mg de tiamina y 32 mg de riboflavina. Tiene tres tipos distintos de marcas comerciales de alimento; su contenido vitamínico por onza se proporciona en la tabla. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento deben comer todos los días los conejos para cumplir con los requisitos del experimento?

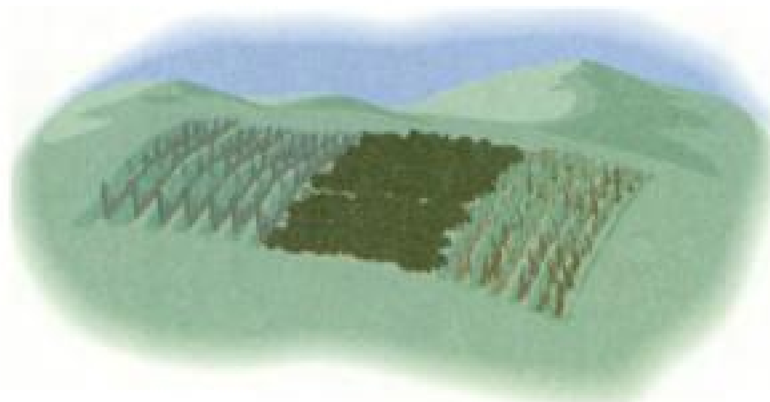
	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Niacina (mg)	2	3	1
Tiamina (mg)	3	1	3
Riboflavina (mg)	8	5	7

36. Electricidad Por medio de las leyes de Kirchhoff se puede demostrar que las corrientes I_1, I_2 e I_3 que pasan por las tres ramas del circuito de la figura cumplen con el sistema lineal dado. Resuelva el sistema para determinar I_1, I_2 e I_3.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$



37. Agricultura Un granjero tiene 1200 acres de tierra en los que cultiva maíz, trigo y soya. Le cuesta 45 dólares por cada acre cultivar maíz, 60 dólares cultivar trigo y 50 dólares si quiere soya. Debido a la demanda del mercado cultivará el doble de acres de trigo que de maíz. Ya destinó 63 750 dólares para los costos del cultivo de sus cereales. ¿Cuántos acres de cada cereal debe plantar?



38. Opciones de inversión Un inversionista posee tres grupos de acciones: A, B y C. Los precios de las acciones al cierre en tres días comerciales consecutivos se proporcionan en la tabla.

	Acciones A	Acciones B	Acciones C
Lunes	\$10	\$25	\$29
Martes	\$12	\$20	\$32
Miércoles	\$16	\$15	\$32

A pesar de la volatilidad en los precios de las acciones, el valor total de las acciones del inversionista permanece sin cambios en 74 000 dólares al final de cada uno de estos tres días. ¿Cuánto posee de cada acción el inversionista?

Descubrimiento • Debate

39. ¿Puede un sistema lineal tener exactamente dos soluciones?

a) Suponga que (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}, \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también una solución.

b) A partir del resultado del inciso a) demuestre que si el sistema tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Mejor ajuste y ajuste exacto

Dados varios puntos en el plano, podemos determinar la recta que mejor se ajusta a ellos (véase *Enfoque en el modelado*, página 239). Claro, no todos los puntos quedarán en la recta. Asimismo, podemos determinar el polinomio cuadrático que mejor se ajusta a los puntos. Una vez más, no todos los puntos quedarán en la gráfica del polinomio.

No obstante, si tenemos sólo dos puntos, entonces podemos determinar una recta que ajuste *exacto*, es decir, una recta que realmente pase por ambos puntos. De manera similar, dados tres puntos, no todos en la misma recta, podemos determinar el polinomio cuadrático de ajuste *exacto*. Por ejemplo, suponga que tenemos los tres puntos siguientes:

$$(-1, 6), \quad (1, 2), \quad (2, 3)$$

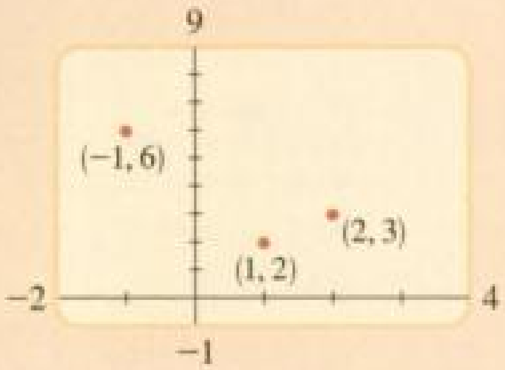


Figura 1

A partir de la figura 1 vemos que los puntos no quedan en una recta. Encontremos el polinomio cuadrático que se ajusta exactamente a estos puntos. El polinomio debe tener la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Es necesario determinar a, b y c de modo que la gráfica del polinomio resultante contenga los puntos dados. Al sustituir los puntos dados en la ecuación llegamos a lo siguiente.

Punto	Sustitución	Ecuación
$(-1, 6)$	$x = -1, \quad y = 6$	$6 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
$(1, 2)$	$x = 1, \quad y = 2$	$2 = a(1)^2 + b(1) + c$
$(2, 3)$	$x = 2, \quad y = 3$	$3 = a(2)^2 + b(2) + c$

Estas tres ecuaciones se simplifican en el sistema siguiente

$$\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

Al aplicar la eliminación de Gauss obtenemos la solución $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$. Entonces, el polinomio requerido es

$$y = x^2 - 2x + 3$$

De acuerdo con la figura 2 vemos que la gráfica del polinomio pasa por los puntos dados.

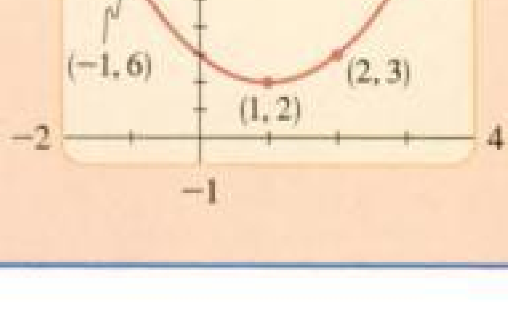


Figura 2

1. Determine el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos dados.

   a) $(-2, 3)$, $(-1, 1)$, $(1, 9)$

   b) $(-1, -3)$, $(2, 0)$, $(3, -3)$

2. Determinar el polinomio cúbico $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica pasa por los puntos dados.

   a) $(-1, -4)$, $(1, 2)$, $(2, 11)$, $(3, 32)$

   b) $(-2, 10)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(3, 45)$

3. Se lanza hacia arriba una piedra con velocidad v desde una altura h. Su elevación d por arriba del suelo en el tiempo t está representada por

$$d = at^2 + vt + h$$

La elevación se mide en tres tiempos diferentes como se muestra a continuación.

Tiempo (s)	1.0	2.0	6.0
Elevación (pies)	144	192	64

   a) Determine las constantes a, v y h.

   b) Determine la elevación de la piedra cuando $t = 4$ s.

4. a) Encuentre la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos dados. Esta es la curva cuadrática que se ajusta *exactamente*. Grafique los puntos y la curva cuadrática que encontró.

$$(-2, 10),\quad (1, -5),\quad (2, -6),\quad (4, -2)$$

   b) Ahora use el comando `QuadReg` de su calculadora para determinar la curva cuadrática que *mejor* se ajusta a los puntos del inciso a). ¿Cómo es en comparación con la función que encontró en el inciso a)?

   c) Muestre que ninguna función cuadrática pasa por los puntos

$$(-2, 11),\quad (1, -6),\quad (2, -5),\quad (4, -1)$$

   d) Use el comando `QuadReg` de su calculadora para determinar la curva cuadrática que mejor se ajusta a los puntos del inciso b). Grafique los puntos y la curva cuadrática que halló.

   e) Explique qué tanto difiere la curva de ajuste exacto de la curva de mejor ajuste.

Forma escalonada y forma escalonada reducida de una matriz

Una matriz está en la **forma escalonada** si cumple con las condiciones siguientes.

1. El primer número no cero de cada renglón, de izquierda a derecha, es 1. Se denomina **elemento principal.**
2. El elemento principal de cada renglón está a la derecha del elemento principal en el renglón inmediatamente arriba de él.
3. Todos los renglones que constan totalmente de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Una matriz está en la **forma escalonada reducida** si está en la forma escalonada y además cumple con las condiciones siguientes.

4. Todos los números por arriba y por abajo de cada elemento principal es 0.

En las matrices siguientes la primera matriz está en la forma escalonada reducida, pero la segunda está sólo en la forma escalonada. La tercera matriz no está en la forma escalonada. Los elementos en rojo son los elementos principales.

Forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales tienen ceros por arriba y por abajo de ellos.

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos.

No está en la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales no se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos.

A continuación se presenta una forma sistemática de poner una matriz en la forma escalonada efectuando operaciones elementales con los renglones:

- El principio es obtener un 1 en la parte superior izquierda. Luego obtenemos ceros abajo de ese 1 sumando múltiplos adecuados del primer renglón a los renglones abajo de él.
- A continuación, se obtiene un 1 principal en el siguiente renglón y luego formamos ceros abajo de ese 1.
- En cada etapa es necesario tener la seguridad que cada elemento principal está a la derecha del elemento principal que se encuentra en el renglón superior; reacomode los renglones si es necesario.
- Continúe este proceso hasta que tenga una matriz escalonada.

El proceso funciona como se indica en seguida en una matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Tras que la matriz aumentada está en la forma escalonada, podemos resolver el sistema lineal correspondiente mediante sustitución. Esta técnica se denomina **eliminación de Gauss,** en honor a su inventor, el matemático alemán C. F. Gauss (véase la página 294).

Resolución de un sistema usando la eliminación de Gauss

1. **Matriz aumentada.** Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. **Forma escalonada.** Aplique las operaciones elementales en los renglones para cambiar la matriz aumentada a la forma escalonada.
3. **Sustitución.** Escriba el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada de la matriz aumentada y resuelva por sustitución.

Ejemplo 3 Resolución de un sistema usando la forma escalonada

Resuelva un sistema de ecuaciones usando la eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

Solución Primero se escribe la matriz aumentada del sistema y, luego, efectuamos operaciones elementales con los renglones para llegar a la forma escalonada.

Aquí necesitamos un 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$

Aquí necesitamos ceros.

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 1 aquí.

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 0 aquí.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 1 aquí.

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en la forma escalonada, y el sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 4z = -7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Recurrimos a la sustitución para resolver el sistema

$$\begin{aligned} y + 4(-2) &= -7 && \textit{Sustitución de } z = -2 \textit{ en la ecuación 2} \\ y &= 1 && \textit{Determinación de } y \\ x + 2(1) - (-2) &= 1 && \textit{Sustitución de } y = 1 \textit{ y } z = -2 \textit{ en la ecuación 1} \\ x &= -3 && \textit{Determinación de } x \end{aligned}$$

Entonces, la solución del sistema es $(-3, 1, -2)$. ■

```
ref([A])
   [[1 2 -1 1 ]
    [0 1 2  -3]
    [0 0 1  -2]]
```

Figura 1

Las calculadoras que grafican poseen un comando "*row-echelon form*" (forma escalonada) que convierte a una matriz en la forma escalonada. (En la TI-83, el comando es `ref`.) En el caso de la matriz aumentada del ejemplo 3, el comando `ref` proporciona el resultado que se ilustra en la figura 1. Observe que la forma escalonada que se obtiene mediante la calculadora es diferente al que se llegó en el ejemplo 3. La razón es que la calculadora utilizada ejecuta operaciones distintas a las que efectuamos. Debe comprobar que la forma escalonada de su calculadora es la misma solución que la del libro.

Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en la forma escalonada *reducida*, entonces no necesitamos sustituir para resolver el sistema. Para expresar una matriz en la forma escalonada reducida seguimos los pasos siguientes.

- Efectuamos operaciones elementales con los renglones para poner la matriz en la forma escalonada.
- Obtenemos ceros arriba de cada elemento principal añadiendo múltiplos del renglón que contiene ese elemento a los renglones que se encuentran arriba de él. Empezamos con el último elemento principal y trabajamos hacia arriba.

En seguida se muestra cómo funciona el proceso en una matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Aplicar la forma escalonada reducida para resolver un sistema recibe el nombre de **eliminación de Gauss-Jordan.** Ilustramos este proceso en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4 Resolución de un sistema usando la forma escalonada reducida

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales, usando la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

Solución En el ejemplo se aplica la eliminación de Gauss a la matriz aumentada de este sistema para obtener una matriz equivalente en la forma escalonada. Se continúa efectuando operaciones elementales en los renglones de la última matriz del ejemplo 3 para llegar a una matriz equivalente en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aquí son necesarios unos ceros

$$\xrightarrow[R_1 + R_3 \to R_1]{R_2 - 4R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aquí necesitamos un 0

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz equivalente en la forma escalonada reducida, por lo que el sistema de ecuaciones equivalente es

Puesto que el sistema está en la forma escalonada reducida, no se requiere la sustitución para llegar a la solución.

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

De donde llegamos en forma inmediata a la solución $(-3, 1, -2)$. ■

```
rref([A])
    [[1 0 0 -3]
     [0 1 0 1 ]
     [0 0 1 -2]]
```

Figura 2

Las calculadoras que proporcionan gráficas también tienen un comando que convierte una matriz en la forma escalonada reducida. (En la TI-83, este comando es `rref`.) En el caso de la matriz aumentada del ejemplo 4, el comando `rref` proporciona los resultados que se ilustran en la figura 2. La calculadora proporciona la misma forma escalonada reducida que la obtenida en el ejemplo 4. La razón es que cada matriz tiene una forma escalonada reducida *única*.

Sistemas inconsistentes y dependientes

Los sistemas de ecuaciones lineales que estudiamos en los ejemplos 1 a 4 tienen exactamente una solución. Pero de acuerdo con la sección 9.3, un sistema lineal puede tener una solución, ninguna solución o una cantidad infinita de soluciones. Por fortuna, la forma escalonada de un sistema nos permite determinar de cuál de estos casos se trata, como se explica en el siguiente recuadro.

Primero es necesario presentar unos términos. Una **variable principal** de un sistema lineal es una que corresponde al elemento principal en la forma escalonada de la matriz aumentada del sistema.

Las soluciones de un sistema lineal en la forma escalonada

Suponga que la matriz aumentada de un sistema lineal se transformó mediante la eliminación de Gauss en la forma escalonada. Entonces, uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. **Ninguna solución.** Si la forma escalonada contiene un renglón que representa la ecuación $0 = c$ donde c no es cero, entonces el sistema no tiene solución. Un sistema sin solución se llama **inconsistente**.
2. **Una solución.** Si cada variable en la forma escalonada es una variable principal, entonces el sistema tiene exactamente una solución, que se determina mediante sustitución o por medio de la eliminación de Gauss-Jordan.
3. **Cantidad infinita de soluciones.** Si las variables en la forma escalonada no son variables principales, y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. En este caso, el sistema se denomina dependiente. El sistema se resuelve convirtiendo la matriz en la forma escalonada reducida y después las variables principales se expresan en función de las variables no principales. Las variables no principales pueden tomar cualquier valor de número real.

Las matrices que siguen, todas en la forma escalonada, ilustran los tres casos descritos en el recuadro.

Sin solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La última ecuación dice que $0 = 1$.

Una solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Cada variable es una variable principal.

Cantidad infinita de soluciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La z no es una variable principal.

Ejemplo 5 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

Solución Se transforma el sistema en la forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
ref([A])
[[1 -2.5 2.5 7  ]
 [0 1    1   -10]
 [0 0    0    1 ]]
```

Figura 3

Esta última matriz está en la forma escalonada, de modo que se puede detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si pasamos el último renglón de nuevo a la forma de ecuación, se obtiene $0x + 0y + 0z = 1$, o bien, $0 = 1$, lo cual es falso. Sin importar los valores que escojamos para x, y y z, la última ecuación nunca dará un enunciado verdadero. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

En la figura 3 se ilustra la forma escalonada que proporciona la calculadora TI-83 para la matriz aumentada del ejemplo 5. Debe comprobar que da la misma solución.

Ejemplo 6 Un sistema con una cantidad infinita de soluciones

Determine la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

Solución Transformamos el sistema en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0 = 0$. Esta ecuación es siempre verdadera, sin que importe qué valores tomen x, y y z. Como la ecuación no añade información nueva con respecto a las variables, se puede eliminar del sistema. De modo que la última matriz corresponde al sistema

Forma escalonada reducida que se obtiene en la calculadora TI-83

```
rref([A])
   [[1 0 -7 -5]
    [0 1 -3 1 ]
    [0 0 0  0 ]]
```

$$\begin{cases} x - 7z = -5 & \text{Ecuación 1} \\ y - 3z = 1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Variables principales

En seguida se determinan las variables principales x y y en función de la variable no principal z:

$$x = 7z - 5 \qquad \text{Despeje de } x \text{ de la ecuación 1}$$

$$y = 3z + 1 \qquad \text{Despeje de } y \text{ de la ecuación 2}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen los mismos elementos en los mismos lugares.

Matrices iguales

$$\begin{bmatrix} \sqrt{4} & 2^2 & e^0 \\ 0.5 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices diferentes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y sólo si tienen la misma dimensión $m \times n$, y los elementos correspondientes son iguales, es decir,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1 Matrices iguales

Determine a, b, c y d si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Puesto que las dos matrices son iguales, los elementos correspondientes deben ser iguales. Así debemos tener $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ y $d = 2$. ■

Adición, sustracción y multiplicación escalar de matrices

Dos matrices se pueden sumar o restar si tienen la misma dimensión. De no ser así, la suma o la diferencia no está definida. Se suman o restan las matrices sumando o restando elementos correspondientes. Para multiplicar una matriz por un número, se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número. Esto se llama *producto escalar*.

Adición, sustracción y producto escalar de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de igual dimensión $m \times n$ y sea c cualquier número real.

1. La **suma** $A + B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al sumar elementos correspondientes de A y B.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2. La **diferencia** $A - B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al restar elementos correspondientes de A y B.

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

3. El **producto escalar** cA es la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.

$$cA = [ca_{ij}]$$

De igual manera calculamos los elementos restantes del producto:

Elemento	**Producto interior de:**	**Valor**	**Matriz producto**
c_{12}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 17$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & \\ & & \end{bmatrix}$
c_{13}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 23$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ & & \end{bmatrix}$
c_{21}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & & \end{bmatrix}$
c_{22}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot 5 + 0 \cdot 4 = -5$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & \end{bmatrix}$
c_{23}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 7 = -2$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, tenemos $AB = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

No son iguales, por lo tanto el producto no está definido

$2 \times 3 \quad 2 \times 2$

El producto BA no está definido porque las dimensiones de B y A son

$$2 \times 3 \quad \text{y} \quad 2 \times 2$$

Los dos números interiores no son iguales, de modo que los renglones y las columnas no corresponderían al tratar de calcular el producto. ■

```
[A]*[B]
    [[-1 17 23]
     [1  -5 -2]]
```

Figura 1

Las calculadoras gráficas y las computadoras son capaces de ejecutar operaciones algebraicas con matrices. Por ejemplo, si introducimos los datos de las matrices del ejemplo 4 en las variables de la matriz [A] y [B] en la calculadora TI-83, entonces ésta determina el producto como se muestra en la figura 1.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Aunque el producto de matrices no es conmutativo, sí sigue las propiedades asociativa y distributiva

Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean A, B y C matrices para las cuales los productos siguientes están definidos. Entonces

$A(BC) = (AB)C$ Propiedad asociativa

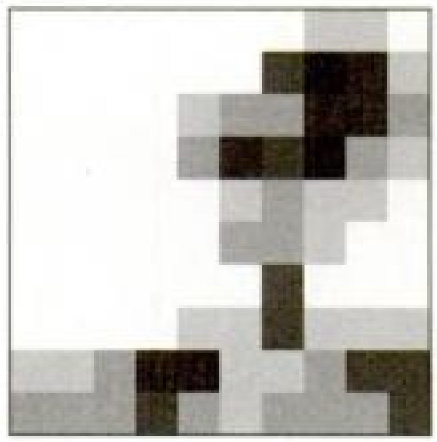
$A(B + C) = AB + AC$
$(B + C)A = BA + CA$ Propiedad distributiva

talla o rejilla que usamos es muy amplia y no proporciona una buena resolución de la imagen. En la práctica, las cámaras digitales de alta resolución disponibles en la actualidad utilizan matrices con dimensiones de 2048×2048 o mayores.

Una vez que la imagen está almacenada en una matriz, se puede manipular efectuando operaciones matriciales. Por ejemplo, para oscurecer la imagen, sumamos una constante a cada elemento de la matriz. Para aclarar la imagen, restamos. Para incrementar el contraste, oscurecemos las zonas más oscuras y aclaramos las más claras, de modo que podríamos sumar 1 a cada elemento que sea 4, 5 o 6, y restar 1 de cada elemento que se desee 1, 2 o 3. Obsérvese que no podemos oscurecer un elemento de valor 7 o aclarar uno de valor 0. Al aplicar este proceso a la matriz de la figura 3c) se genera una nueva matriz de la figura 4a). Esto genera la imagen de alto contraste que se ilustra en la figura 4b).

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&7&6&1\\ 0&0&0&0&1&2&2&6&6&2\\ 0&0&0&0&2&6&5&7&2&1\\ 0&0&0&0&0&1&2&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&5&1&1&1\\ 1&1&2&6&6&1&1&2&5&5\\ 2&2&2&5&2&1&2&2&2&5 \end{bmatrix}$$

a) Matriz modificada para aumentar el contraste



b) Imagen de alto contraste

Figura 4

Otras maneras de representar y manipular imágenes usando matrices se estudian en el *Proyecto Descubrimiento* de las páginas 700 y 792.

9.5 Ejercicios

1–2 ■ Determine si las matrices A y B son iguales.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \ln 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ \sqrt{4} & \frac{6}{2} \end{bmatrix}$

3–10 ■ Ejecute operaciones con las matrices o si es imposible explique la razón.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

5. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

48. **a)** Demuestre que si A y B son matrices 2×2, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

b) Si A y B son matrices 2×2, es necesariamente cierto que

$$(A + B)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AB + B^2$$

Aplicaciones

49. Ventas de bocadillos Una pequeña cadena que vende hamburguesas, *hot dogs* y malteadas posee restaurantes en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim. Cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la matriz siguiente.

Cantidad de bocadillos vendidos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Santa Mónica} & \text{Long Beach} & \text{Anaheim} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Hamburguesas} \\ \text{Hot dogs} \\ \text{Malteadas} \end{array} & \begin{bmatrix} 4000 & 1000 & 3500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 700 & 500 & 9000 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

El precio de cada bocadillo se proporciona en la matriz siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamburguesas} & \text{Hot dog} & \text{Malteadas} \\ [\$0.90 & \$0.80 & \$1.10] = B \end{array}$$

a) Calcule el producto BA.

b) Interprete los elementos de la matriz producto BA.

50. Ganancias por la fabricación de automóviles Un fabricante de automóviles de lujo tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Produce tres modelos, y la producción diaria se presenta en la matriz siguiente.

Automóviles producidos diario

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Modelo K} & \text{Modelo R} & \text{Modelo W} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Auburn} \\ \text{Biloxi} \\ \text{Chattanooga} \end{array} & \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

Debido a los incrementos de los salarios, las ganancias de febrero fueron menores que las de enero. La ganancia por automóvil se tabula por modelo en la matriz siguiente.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Enero} & \text{Febrero} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Modelo K} \\ \text{Modelo R} \\ \text{Modelo W} \end{array} & \begin{bmatrix} \$1000 & \$500 \\ \$2000 & \$1200 \\ \$1500 & \$1000 \end{bmatrix} = B \end{array}$$

a) Calcule AB.

b) Si suponemos que los vehículos producidos se vendieron, ¿cuál fue la ganancia diaria en enero en la planta de Biloxi?

c) ¿Cuál fue la ganancia diaria por las tres plantas en febrero?

51. Empacado de productos de jitomate Jaeger Foods produce salsa y pasta de jitomate, y las empaca en recipientes pequeños, medios, grandes y gigantes. La matriz A proporciona el tamaño en onzas de cada recipiente.

$$\begin{array}{r cccc} & \text{Pequeño} & \text{Medio} & \text{Grandes} & \text{Gigante} \\ \text{Onzas} & [6 & 10 & 14 & 28] = A \end{array}$$

La matriz B tabula la producción de un día de salsa y pasta de jitomate.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Latas de salsa} & \text{Latas de pasta} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Pequeño} \\ \text{Medio} \\ \text{Grande} \\ \text{Gigante} \end{array} & \begin{bmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 1500 \\ 2500 & 1000 \\ 1000 & 500 \end{bmatrix} = B \end{array}$$

a) Calcule el producto de AB.

b) Interprete los elementos de la matriz producto AB.

52. **Ventas de productos** Los tres hijos de un granjero, Amy, Beth y Chad atienden tres puestos al lado de la carretera durante los meses del verano. Un fin de semana, todos venden sandías, calabaza amarilla y jitomates. Las matrices A y B tabulan la cantidad de libras de cada uno de los productos vendidos por cada uno de los hijos en el sábado y el domingo.

Sábado

$$\begin{array}{l} \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabazas} & \text{Jitomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 30 \\ 60 & 30 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Domingo

$$\begin{array}{l} \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabazas} & \text{Jitomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 35 & 20 & 20 \\ 60 & 25 & 30 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

La matriz C proporciona los precios por libra, en dólares, de cada tipo de producto que venden

Precio por libra

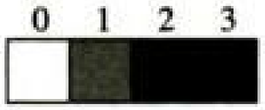
$$\begin{array}{r} \text{Sandías} \\ \text{Calabazas} \\ \text{Jitomates} \end{array} \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix} = C$$

Efectúe las siguientes operaciones con las matrices e interprete los elementos en cada resultado.

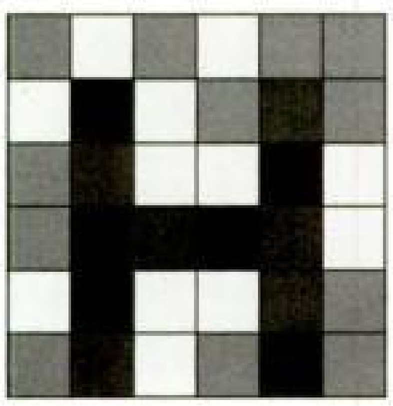
a) AC **b)** BC **c)** $A + B$ **d)** $(A + B)C$

53. **Imágenes digitales** A continuación se muestra una escala de grises de cuatro niveles

0 1 2 3



a) Utilice la escala de grises para encontrar una matriz 6×6 que representa digitalmente la imagen de la figura.



b) Determine una matriz que represente una versión más oscura de la imagen de la figura.

c) El **negativo** de una imagen se obtiene invirtiendo luz y oscuridad, como en el negativo de una fotografía. Determine la matriz que representa el negativo de la imagen en la figura. ¿Cómo cambiará usted los elementos de la matriz para crear el negativo?

d) Incremente el contraste de la imagen cambiando cada 1 en 0 y cada 2 en 3 en la matriz que encontró en el inciso b). Dibuje la imagen representada por la matriz resultante. ¿Se aclara la imagen?

e) Dibuje la imagen representada por la matriz I. ¿Es capaz de identificar lo que es? Si no es así, trate de aumentar el contraste.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descubrimiento • Debate

54. **¿Cuándo están definidos ambos productos?** ¿Qué debe ser cierto con respecto a las dimensiones de las matrices A y B si ambos productos AB y BA están definidos?

55. **Potencias de una matriz** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

56. **Potencias de una matriz** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

57. **Raíces cuadradas de matrices** Una raíz cuadrada de una matriz B es una matriz A con la propiedad de que $A^2 = B$. (Es la misma definición que para la raíz cuadrada de un número.) Calcule tantas raíces como pueda de cada matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

[*Sugerencia:* Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, escriba las ecuaciones que a, b, c y d tendrían que satisfacer si A es la raíz cuadrada de la matriz dada.]

Ejemplo 1 **Matrices identidad**

Los siguientes productos de matrices muestran cómo al multiplicar una matriz por una matriz identidad de la dimensión adecuada no modifica a la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

■

Si A y B son matrices $n \times n$, y si $AB = BA = I_n$, entonces se dice que B es la inversa de A, y se escribe $B = A^{-1}$. El concepto de la inversa de una matriz es análogo al del recíproco de un número.

Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} que sea $n \times n$ con la propiedad de que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces decimos que A^{-1} es la **inversa** de A.

Ejemplo 2 **Comprobación de que una matriz es una inversa**

Verifique que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Se efectúan las multiplicaciones de matrices para mostrar que $AB = I$ y que $BA = I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1(-5) & 2(-1) + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 3 + 3(-5) & 5(-1) + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-1)5 & 3\cdot 1 + (-1)3 \\ (-5)2 + 2\cdot 5 & (-5)1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Determinación de la inversa de una matriz 2 × 2

La regla siguiente proporciona una manera sencilla de determinar la inversa de una matriz 2×2, cuando existe. En el caso de matrices grandes, hay un procedimiento más general para determinar inversas, el cual se trata más adelante en esta sección.

Inversa de una matriz 2 × 2

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces A no tiene inversa.

Ya demostramos que la ecuación matricial $AX = B$ se puede resolver mediante el método siguiente.

Resolución de una ecuación matricial

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ cuya inversa es A^{-1} y si X es una matriz variable y B una matriz conocida, ambas con n renglones, entonces la solución de la ecuación matricial

$$AX = B$$

está dada por

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo 6 Resolución de un sistema usando la inversa de una matriz

a) Escriba el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.

b) Resuelva el sistema determinando la solución de la ecuación matricial.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$$

Solución

a) Se escribe el sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}}_{B}$$

b) Si se aplica la regla para determinar la inversa de la matriz 2×2, obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(-6) - (-5)3} \begin{bmatrix} -6 & -(-5) \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación matricial por esta matriz inversa, se obtiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Entonces $x = 30$ y $y = 9$. ■

Aplicaciones

Suponga que es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Entonces, transformar los sistemas en ecuaciones matriciales proporciona una manera eficaz de llegar a las soluciones porque sólo necesitamos encontrar una vez la inversa de la matriz de coeficientes. Este procedimiento es conveniente en particular si usamos una calculadora de gráficas para efectuar las operaciones con matrices, como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 7 Modelado de las cantidades de nutrientes necesarias usando ecuaciones matriciales

El dueño de una tienda de animales alimenta a hamsters y jerbos con diferentes mezclas de tres tipos de alimento para roedores: KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow. Quiere alimentar a sus animales con la cantidad correcta de cada marca para cumplir exactamente con las necesidades diarias de proteínas, grasas y carbohidratos. Suponga que los hamsters requieren todos los días 340 mg de proteínas, 280 mg de grasa y 440 mg de carbohidratos, y los jerbos necesitan 480 mg de proteínas, 360 mg de grasa y 680 mg de carbohidratos. La cantidad de cada nutriente, en miligramos, en un gramo de cada marca se proporciona en la tabla siguiente. ¿Cuántos gramos de cada marca debe dar diariamente el dueño de la tienda a sus hamsters y jerbos con el fin de cumplir con las necesidades nutricionales?

	KayDee Food	Pet Pellets	Rodent Chow
Proteína (mg)	10	0	20
Grasas (mg)	10	20	10
Carbohidratos (mg)	5	10	30

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades en gramos de KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow que deben comer los hamsters y y_1, y_2 y y_3 las cantidades correspondientes para los jerbos. Luego resolvemos las ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para los hamsters}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para los jerbos}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Matemáticas en el mundo moderno

Volvox/Index Stock

Ecología matemática

En los años setenta del siglo XX, las ballenas jorobadas se convirtieron en un punto de controversia. Los ambientalistas opinaban que la caza de ballenas amenazaba a estos animales con una inminente extinción: los cazadores de ballenas consideraron que su medio de subsistencia se veía amenazado por los intentos de detener la cacería de ballenas. ¿Realmente la caza de ballenas amenaza con extinguirlas? ¿Qué nivel de caza es seguro para garantizar la supervivencia de las ballenas? Estas preguntas ocasionaron que los matemáticos estudiaran con mayor detenimiento los patrones poblacionales de las ballenas y otras especies.

Ya por los años veinte del siglo pasado, Alfred J. Lotka y Vito Volterra crearon el campo de la biología matemática que planteaba los modelos predador/presa. Sus modelos, los cuales se apoyan en una rama de las matemáticas llamada ecuaciones diferenciales, toman en cuenta la velocidad a la cual el predador consume a su presa y la tasa de crecimiento de cada población. Tenga en cuenta que cuando el predador se come a su presa, la población de la presa disminuye; esto significa que hay menos alimento para los predadores, de modo que su población empieza a decrecer; con menos predadores, la población de las presas empieza a incrementarse, y así sucesivamente. Por lo regular, se genera un estado de equilibrio, y las dos

(continúa)

poblaciones alternan entre un mínimo y un máximo. Observe que si los predadores se comen a su presa demasiado rápido se quedarán sin alimento y se encaminan a su propia extinción.

Desde la época de Lotka y Volterra se han desarrollado modelos matemáticos más detallados de las poblaciones de animales. Por lo que toca a muchas especies, la población se divide en varias etapas: inmaduros, juveniles, adultos, etcétera. La proporción de cada etapa que sobrevive o se reproduce en un tiempo dado se introduce en una matriz, que se llama matriz de transición. Luego se usa la multiplicación de matrices para predecir la población en los periodos exitosos. (Véase el *Proyecto para un descubrimiento*, página 688.)

Como se puede observar, el poder de las matemáticas para modelar y predecir es una herramienta invaluable en el debate actual sobre el ambiente.

Luego se pueden escribir estas ecuaciones matriciales como

$$AX = B \qquad \text{Ecuación para los hamsters}$$

$$AY = C \qquad \text{Ecuación para los jerbos}$$

Se quiere determinar X y Y, así que se multiplican ambos miembros de cada ecuación por A^{-1}, la inversa de la matriz de los coeficientes. Podemos determinar A^{-1} en forma manual, pero es mejor usar una calculadora graficadora como se muestra en la figura 3.

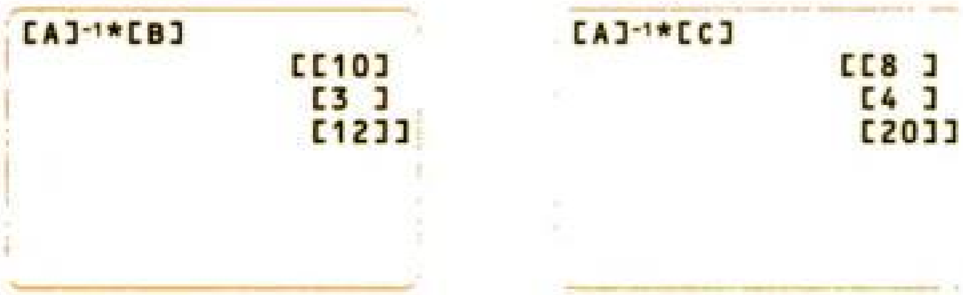


Figura 3 a) b)

De acuerdo con los resultados que da la calculadora vemos que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad Y = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, cada hamster debe comer diario 10 g de KayDee Food, 3 g de Pet Pellets y 12 g de Rodent Chow, y cada jerbo debe comer todos los días 8 g de KayDee Food, 4 g de Pet Pellets y 20 g de Rodent Chow. ■

9.6 Ejercicios

1–4 ■ Calcule los productos AB y BA para verificar que B es la inversa de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -12 & 14 & 11 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5–6 ■ Determine la inversa de la matriz y verifique que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ y $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

5. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

7–22 ■ Determine la inversa de la matriz, si existe.

7. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0.4 & -1.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

23–30 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones transformándolo en una ecuación matricial y usando la inversa de la matriz de los coeficientes como en el ejemplo 6. Use las inversas de los ejercicios 7 a 10, 15, 16, 19 y 21.

23. $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ -5x - 13y = 20 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -7x + 4y = 0 \\ 8x - 5y = 100 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x + 7y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -2y + 2z = 12 \\ 3x + y + 3z = -2 \\ x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 2y + 3w = 0 \\ y + z + w = 1 \\ y + w = 2 \\ x + 2y + 2w = 3 \end{cases}$

31–36 ■ Mediante una calculadora que puede ejecutar operaciones con las matrices resuelva el sistema, como en el ejemplo 7.

31. $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 5z = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ 5x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 12x + \frac{1}{2}y - 7z = 21 \\ 11x - 2y + 3z = 43 \\ 13x + y - 4z = 29 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 4 \\ x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = 7 \\ x + y - z = -6 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + y - 3w = 0 \\ x - 2z = 8 \\ 2y - z + w = 5 \\ 2x + 3y - 2w = 13 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x - y + z - w = 5 \\ x + 2y + 3z + 4w = 26 \\ x - 2y + 3z - 4w = 2 \end{cases}$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Imágenes mediante computadora I

El álgebra de matrices es la herramienta fundamental que se usa en la computadora para manipular imágenes en la pantalla. Vemos cómo la multiplicación de matrices se puede usar para "mover" un punto en el plano hasta un lugar determinado. Al combinar dichos movimientos podemos estirar, comprimir, girar y hacer otro tipo de transformaciones en una figura, como vemos en las imágenes que siguen.

Imagen   Comprimida   Girada   Alargamiento

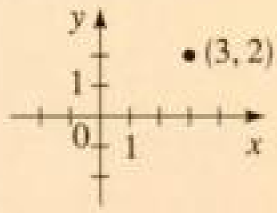
Puntos que se desplazan en el plano

Representemos el punto (x, y) en el plano mediante la matriz 2×1:

$$(x, y) \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el punto (3, 2) en la figura se representa con la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

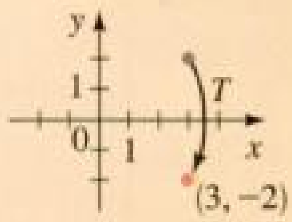


Al multiplicar por una matriz 2×2 el punto se *mueve* en el plano. Por ejemplo, si

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces al multiplicar P por T tenemos

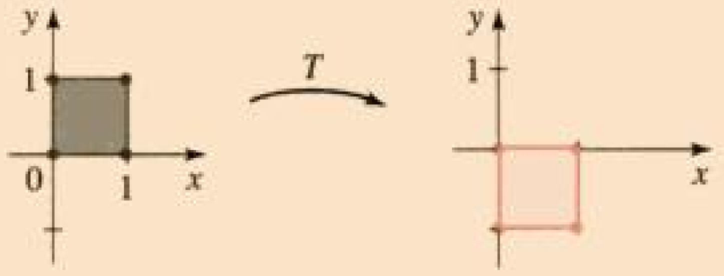
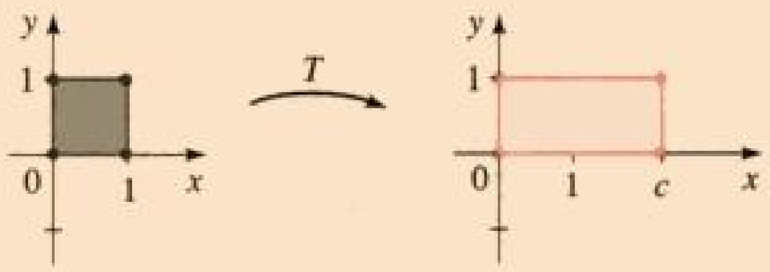
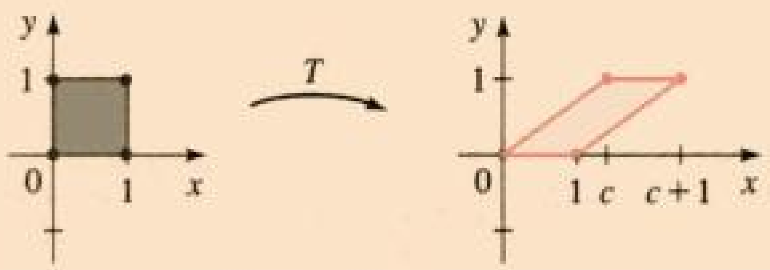
$$TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Vemos que el punto (3, 2) se desplazó al punto (3, −2). En general, la multiplicación por esta matriz T refleja puntos en el eje x. Si cada uno de los puntos de una imagen se multiplica por esta matriz, entonces la imagen completa cambia bruscamente de arriba hacia abajo con respecto al eje x. La multiplicación matricial "transforma" un punto en otro punto nuevo en el plano. Por esta razón, una matriz usada de esta manera se llama **transformación.**

En la tabla 1 se proporcionan algunas transformaciones y sus efectos en el cuadrado gris en el primer cuadrante.

Tabla 1

Transformación matricial	Efecto
$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Reflexión en el eje x	
$T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Expansión, o bien, contracción en la dirección del eje x	
$T = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Cortante o alargamiento sesgado en la dirección x	

Imágenes que se desplazan en el plano

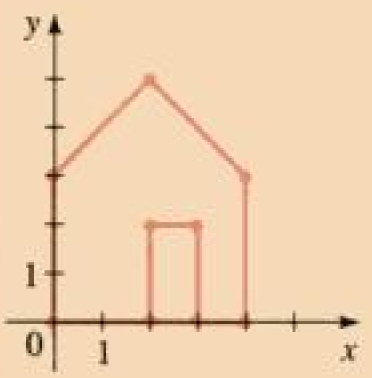


Figura 1

Los dibujos sencillos de línea como la casita de la figura 1 consisten en una colección de vértices que se unen mediante segmentos de recta. La imagen completa de la figura 1 se puede representar en una computadora mediante la **matriz de datos** 2×11

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas de D representan los vértices de la imagen. Para dibujar la casa unimos los puntos sucesivos (columnas) de D mediante segmentos de recta. Luego podemos transformar la casa entera si multiplicamos D por una matriz adecuada de transformación. Por ejemplo, si aplicamos la transformación de cortante $T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos la siguiente matriz

$$TD = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1.5 & 4.5 & 5.5 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Determine T^{-1}.

c) ¿Qué efecto tiene T^{-1} en el cuadrado gris?

d) ¿Qué sucede en el cuadrado si primero aplicamos T y luego T^{-1}?

4. a) Sea $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Qué efecto tiene T en el cuadrado gris de la tabla 1?

b) Sea $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. ¿Qué efecto tiene S en el cuadrado gris de la tabla 1?

c) Aplique S a los vértices del cuadrado y luego aplique T al resultado. ¿Cuál es el efecto de la transformación combinada?

d) Determine la matriz producto $W = TS$.

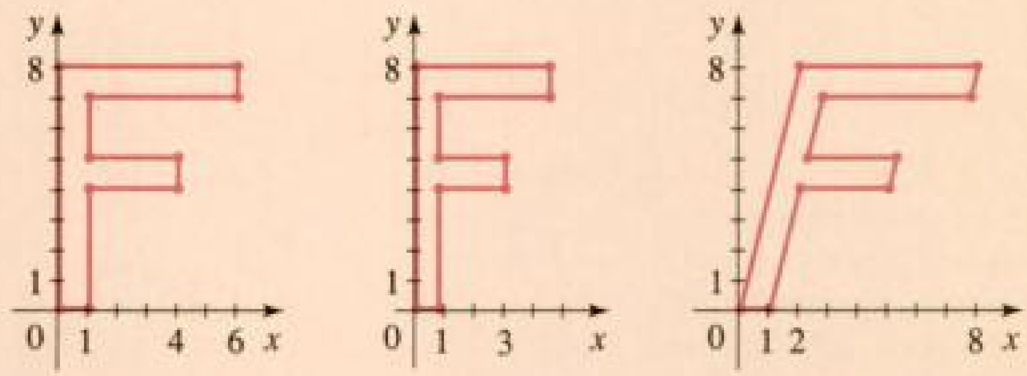
e) Aplique la transformación W al cuadrado. Compare con el resultado final del inciso c). ¿Qué observa?

5. La figura muestra tres versiones de la letra **F**. La segunda se obtiene de la primera encogiéndola horizontalmente por un factor de 0.75, y la tercera es el resultado de estirar la primera, es decir, aplicarle horizontalmente un cortante, en un factor de 0.25.

a) Determine una matriz de datos D para la primera letra **F**.

b) Encuentre la matriz de transformación T que convierte la primera **F** en la segunda. Calcule TD y verifique que es una matriz de datos para la segunda **F.**

c) Calcule la matriz de transformación S que convierte la primera **F** en la tercera. Calcule también SD y compruebe que es una matriz de datos para la tercera **F**.



6. He aquí una matriz de datos para un dibujo de línea.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dibuje la imagen que representa D.

b) Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule el producto matricial TD y dibuje la imagen que representa este producto. ¿Cuál es el efecto de la transformación T?

c) Exprese T como un producto de matriz de cortante y una matriz de reflexión. (Véase el problema 2.)

Criterio de inversibilidad

Si A es una matriz cuadrada, entonces A tiene una inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

No demostraremos este hecho, pero a partir de la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 (página 704) usted puede observar por qué es verdadero en el caso de 2×2.

Ejemplo 4 Uso del determinante para mostrar que una matriz no es invertible

Demuestre que la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución Empezamos por calcular el determinante de A. Puesto que todos menos uno de los elementos de segundo renglón son cero, expandimos el determinante a partir del segundo renglón. Si así lo hacemos, de acuerdo con la siguiente ecuación vemos que sólo el cofactor A_{24} tendrá que ser calculado.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 0 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{24} = 3A_{24} \\
&= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Expandir esto a partir de la columna 3} \\
&= 3(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3(-2)(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0
\end{aligned}$$

Como el determinante de A es cero, A no puede tener una inversa, de acuerdo con el criterio de la inversibilidad. ■

Transformaciones de renglones y columnas

El ejemplo anterior muestra que si expandimos un determinante con respecto a un renglón o una columna que contiene muchos ceros, el trabajo se reduce en forma notable porque no tenemos que evaluar los cofactores de los elementos que son cero. Con frecuencia, el principio siguiente simplifica el proceso de calcular un determinante mediante la introducción de ceros sin cambiar su valor.

Para eliminar la variable y, multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b, y restamos.

$$\begin{array}{r} adx + bdy = rd \\ bcx + bdy = bs \\ \hline adx - bcx = rd - bs \end{array}$$

Al factorizar el primer miembro, obtenemos $(ad - bc)x = rd - bs$. Si suponemos que $ad - bc \neq 0$, ya podemos encontrar el valor de x:

$$x = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

De igual manera, determinamos que

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}$$

El numerador y el denominador de las fracciones de x y de y son determinantes de matrices 2×2. Entonces podemos expresar la solución del sistema usando determinantes como sigue.

Regla de Cramer para sistemas con dos variables

El sistema lineal

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

tiene como solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

siempre que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Si usamos la notación

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D_x = \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

Reemplace la primera columna de D por r y s.

Reemplace la segunda columna de D por r y s.

podemos escribir la solución del sistema como

$$\boxed{x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad \text{y} \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}}$$

Emmy Noether (1882-1935) fue uno de los matemáticos más destacados de los inicios del siglo XX. Su trabajo innovador en álgebra abstracta proporcionó gran parte de los cimientos de este campo, y su trabajo en la teoría invariante fue esencial en la formulación de la teoría general de la relatividad de Einstein. Aunque a las mujeres no se les permitía estudiar en las universidades alemanas en esa época, ella tomó cursos como oyente y continuó hasta que recibió un doctorado *summa cum laude* en Erlangen, a pesar de la oposición del Consejo Académico, el cual declaró que las mujeres estudiantes "desmantelarían todo el orden académico". Posteriormente fue maestra de matemáticas en Göttingen, Moscú y Frankfurt. En 1933 abandonó Alemania para escapar de la persecución de los nazis, y aceptó trabajar en el Bryn Mawr College en los suburbios de Filadelfia. Fue maestra allí y en el Institute for Advanced Study de Princeton, Nueva Jersey, hasta su temprana muerte en 1935.

Ejemplo 6 Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema con dos variables

Aplique la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y = -1 \\ x + 8y = 2 \end{cases}$$

Solución En el caso de este sistema tenemos

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 6\cdot 1 = 10$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)8 - 6\cdot 2 = -20$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - (-1)1 = 5$$

La solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

■

La regla de Cramer se puede generalizar para que se aplique a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n variables en el cual el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Como ya vimos en la sección anterior, cualquiera de tales sistemas se puede escribir en la forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por analogía con la deducción de la regla de Cramer en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, sea D la matriz de coeficientes de este sistema, y D_{x_i}, la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima columna de D por los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que aparece a la derecha del signo de igual. Entonces la regla siguiente proporciona la solución del sistema.

Regla de Cramer

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ equivale a la ecuación matricial $DX = B$, y si $|D| \neq 0$, entonces sus soluciones son

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

donde D_{xi} es la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima columna de D por la matriz B $n \times 1$.

9.7 Ejercicios

1–8 ■ Determine el determinante de la matriz, si existe.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2.2 & -1.4 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

9–14 ■ Evalúe el menor y el cofactor mediante la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9. M_{11}, A_{11} **10.** M_{33}, A_{33} **11.** M_{12}, A_{12}

12. M_{13}, A_{13} **13.** M_{23}, A_{23} **14.** M_{32}, A_{32}

15–22 ■ Encuentre el determinante de la matriz. Investigue si la matriz tiene inversa, pero no la calcule.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

23–26 ■ Evalúe el determinante por medio de operaciones en los renglones o en las columnas siempre que sea posible para simplificar el trabajo.

23. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 10 & 8 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

27. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Evalúe $\det(B)$ por expansión del segundo renglón.

b) Encuentre $\det(B)$ por expansión de la tercera columna.

c) ¿Concuerdan sus resultados del inciso a) y del inciso b)?

28. Considere el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -3x - 6y + 5z = 8 \\ 2x + 6y + 9z = 7 \end{cases}$$

a) Verifique que $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ es una una solución del sistema.

b) Halle el determinante de la matriz de coeficientes.

c) Sin resolver el sistema determine si hay otras soluciones.

d) ¿Se puede utilizar la regla de Cramer para resolver este sistema? ¿Por qué si o por qué no?

29–44 ■ Aplique la regla de Cramer para resolver un sistema.

29. $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 6x + 12y = 33 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 0.4 \\ 1.2x + 1.6y = 3.2 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 10x - 17y = 21 \\ 20x - 31y = 39 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 5x - 3y + z = 6 \\ 4y - 6z = 22 \\ 7x + 10y = -13 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} -2a + c = 2 \\ a + 2b - c = 9 \\ 3a + 5b + 2c = 22 \end{cases}$

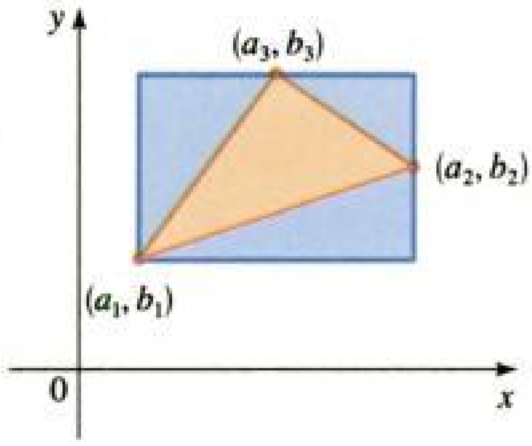
39. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{10} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{2}z = \frac{11}{10} \\ x - \frac{4}{5}y + z = \frac{9}{5} \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 3z = 19 \\ 4y + 7z = 17 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 3y + 5z = 4 \\ 2x - z = 10 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x + y - z = 8 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}$

b) Calcule el área del triángulo rojo mediante la diferencia de áreas de los tres triángulos azules y el área del rectángulo.

c) Mediante esta respuesta del inciso b) muestre que el área del triángulo rojo está dada por

$$\text{área} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$



60. Puntos colineales y determinantes

a) Si tres puntos quedan sobre una recta, ¿cuál es el área del "triángulo" que definen? Utilice la respuesta a esta pregunta junto con la fórmula del determinante que da el área de un triángulo para explicar por qué los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3) son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Utilice un determinante para verificar si cada conjunto de puntos es colineal. Grafíquelos para comprobar su respuesta.

i) $(-6, 4), (2, 10), (6, 13)$

ii) $(-5, 10), (2, 6), (15, -2)$

61. Ecuación de una recta en forma de determinante

a) Mediante el resultado del ejercicio 60a) muestre que la ecuación de la recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Utilice el resultado del inciso a) para encontrar una ecuación para la recta que contiene los puntos $(20, 50)$ y $(-10, 25)$.

62. Matrices con determinante cero Utilice la definición de determinante y las operaciones elementales con renglones y columnas para explicar por qué el determinante de las matrices de los tipos siguientes es 0.

a) Una matriz con un renglón o una columna que consiste totalmente en ceros.

b) Una matriz con dos renglones iguales o dos columnas iguales

c) Una matriz en la cual un renglón es múltiplo de otro renglón, o bien, una columna es un múltiplo de otra columna.

63. Resolución de sistemas lineales Suponga que tiene que resolver un sistema lineal con cinco ecuaciones y cinco variables sin la ayuda de calculadora ni computadora. ¿Qué método preferiría: la regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Escriba una breve explicación acerca de las razones que sustentan su respuesta.

9.8 Fracciones parciales

Para escribir una suma o diferencia de expresiones fraccionarias como una sola fracción, se busca un denominador común. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{(2x+1)+(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{3x}{2x^2-x-1}$$

Común denominador →

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{3x}{2x^2-x-1}$$

← Fracciones parciales

Pero para el caso de algunas aplicaciones del álgebra al cálculo, es necesario revisar este proceso, es decir, se debe expresar una fracción como $3x/(2x^2 - x - 1)$ como la suma de fracciones más sencillas $1/(x-1)$ y $1/(2x+1)$. Estas fracciones más sencillas se llaman *fracciones parciales*. En esta sección se estudia la manera de determinarlas.

Ejemplo 2 Factores lineales repetidos

Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}$.

Solución Como el factor $x - 1$ se repite tres veces en el denominador, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Al multiplicar ambos miembros por el común denominador, $x(x-1)^3$, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \\ &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + C(x^2 - x) + Dx && \text{Desarrollo} \\ &= (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A && \text{Separación de términos semejantes} \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{Coeficientes de } x^3 \\ -3A - 2B + C = 1 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ 3A + B - C + D = 0 & \text{Coeficientes de } x \\ -A = 1 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

Si se reacomodan estas ecuaciones poniendo la última en primer lugar, podemos ver con facilidad, usando la sustitución, que la solución al sistema es $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, y, entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

■

Caso 3: El denominador tiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite

Suponga que la factorización de $Q(x)$ contiene el factor cuadrático $ax^2 + bx + c$, el cual ya no se puede factorizar más. Entonces, en correspondencia con lo anterior, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo 3 Factores cuadráticos distintos

Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$.

Solución Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, la cual no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Al multiplicar por $x(x^2 + 4)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Luego de igualar los coeficientes tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 2 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ C = -1 & \text{Coeficientes de } x \\ 4A = 4 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

y entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

■

Caso 4: El denominador tiene un factor cuadrático irreducible repetido

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene al factor $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ ya no se puede factorizar más. Entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Ejemplo 4 Factores cuadráticos repetidos

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

Solución

$$\begin{aligned} &\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3} \\ &\quad = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 + 2} + \frac{Hx + I}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Jx + K}{(x^2 + 2)^3} \end{aligned}$$

■

Para determinar los valores de A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y K del ejemplo 4, se tendría que resolver un sistema de 11 ecuaciones lineales. Es posible hacerlo, ¡pero se requeriría una gran cantidad de trabajo!

Las técnicas que ya explicamos en esta sección se aplican sólo a funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las cuales el grado de P es menor que el grado de Q. Si no es el caso, entonces es necesario usar primero la división larga para dividir Q entre P.

39. $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 - x + 1}{x(x^2+1)^2}$ 40. $\dfrac{2x^2 - x + 8}{(x^2+4)^2}$

41. $\dfrac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

42. $\dfrac{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 4x + 12}{(x-2)^2(x^2+2)}$

43. Determine A y B en términos de a y b:

$$\frac{ax+b}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

44. Determine A, B, C y D en términos de a y b:

$$\frac{ax^3+bx^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Descubrimiento • Debate

45. **Identificación de las descomposiciones de fracciones parciales** Para cada expresión, determine si ya es una descomposición en fracciones parciales o si se puede descomponer más.

a) $\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$ d) $\dfrac{x+2}{(x^2+1)^2}$

46. **Ensamble y desensamble de fracciones parciales** La expresión siguiente es una descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

Utilice un común denominador para combinar los términos de una fracción. Luego aplique las técnicas de esta sección para determinar su descomposición en fracciones parciales. ¿Obtuvo de nuevo la expresión original?

9.9 Sistemas de desigualdades

En esta sección estudiamos los sistemas de desigualdades con dos variables desde el punto de vista gráfico.

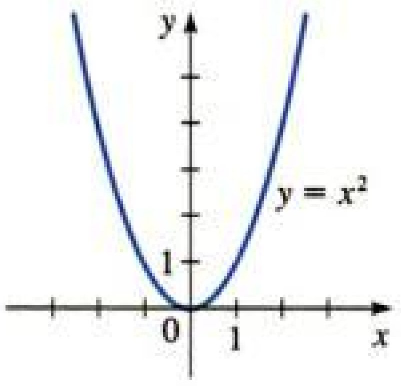


Figura 1

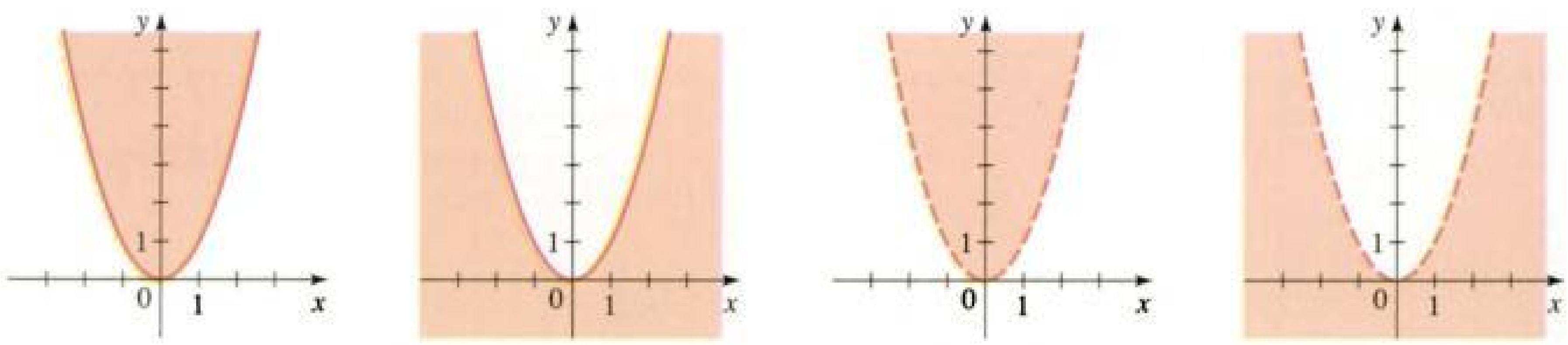
Gráfica de una desigualdad

Iniciamos considerando la gráfica de una desigualdad sencilla. Ya sabemos que la gráfica de $y = x^2$, por ejemplo, es la *parábola* de la figura 1. Si reemplazamos el signo igual por el símbolo $\geq$, obtenemos la *desigualdad*

$$y \geq x^2$$

Su gráfica consiste no sólo en la parábola de la figura 1, sino también en todos los puntos cuya coordenada y es *mayor* que x^2. La solución está en la figura 2a) mediante los puntos sombreados por arriba de la parábola.

De manera similar, la gráfica de $y \leq x^2$ de la figura 2b) consta de todos los puntos sobre y *por abajo* de la parábola. No obstante, las gráficas de $y > x^2$ y $y < x^2$ no incluyen los puntos en la parábola en sí, como se indica mediante las curvas discontinuas de las figuras 2c) y 2d).



a) $y \geq x^2$ b) $y \leq x^2$ c) $y > x^2$ d) $y < x^2$

Figura 2

En general, la gráfica de una desigualdad consiste en una región en el plano cuya frontera es la gráfica de la ecuación obtenida al reemplazar el signo de desigualdad ($\geq$, $\leq$, $>$ o $<$) con un signo igual. Para determinar cuál lado de la gráfica proporciona el conjunto solución de la desigualdad, sólo es necesario verificar unos **puntos de prueba**.

Graficación de desigualdades

Para graficar una desigualdad se efectúan los pasos siguientes.

1. **Ecuación de la gráfica.** Se grafica la ecuación que corresponde a la desigualdad. Se utiliza una curva discontinua para $>$ o $<$, y una curva continua para $\leq$ o $\geq$.
2. **Puntos de prueba.** Pruebe un punto en cada región formada por la gráfica en el paso 1. Si el punto satisface la desigualdad, entonces todos los puntos de esa región cumplen con la desigualdad. En ese caso, se sombrea la región para indicar que es parte de la gráfica. Si el punto de prueba no cumple con la desigualdad, entonces la región no es parte de la gráfica.

Ejemplo 1 Gráficas de desigualdades

Grafique cada una de las desigualdades

a) $x^2 + y^2 < 25$ b) $x + 2y \geq 5$

Solución

a) La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Los puntos de la circunferencia no cumplen con la desigualdad porque es de la forma $<$, de modo que graficamos la circunferencia con una curva discontinua como se muestra en la figura 3.

Para determinar si el interior o el exterior de la circunferencia cumple con la desigualdad, utilizamos los puntos de prueba (0, 0) en el interior y (6, 0) en el exterior. Para hacerlo, sustituimos las coordenadas de cada punto en la desigualdad y verificamos si el resultado satisface la desigualdad. (Observe que *cualquier* punto fuera o adentro de la circunferencia puede servir como punto de prueba. Hemos escogido estos puntos por facilidad.)

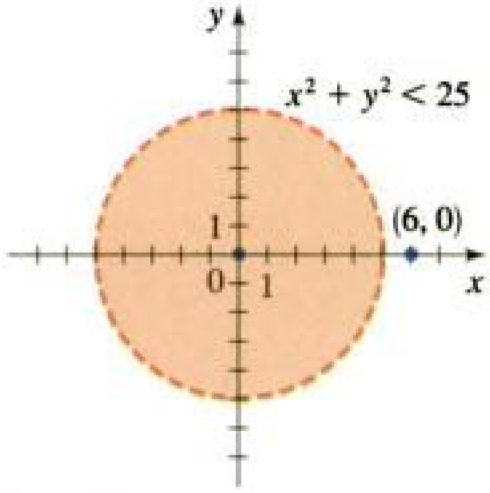


Figura 3

Punto de prueba	$x^2 + y^2 < 25$	Conclusión
(0, 0)	$0^2 + 0^2 = 0 < 25$	Parte de la gráfica
(6, 0)	$6^2 + 0^2 = 36 \not< 25$	No es parte de la gráfica

Por consiguiente, la gráfica de $x^2 + y^2 < 25$ es el conjunto de todos los puntos *dentro* de la circunferencia (véase la figura 3).

b) La gráfica de $x + 2y = 5$ es la recta ilustrada en la figura 4. Usamos los puntos de prueba (0, 0) y (5, 5) en los lados opuestos de la recta.

Punto de prueba	$x + 2y \geq 5$	Conclusión
(0, 0)	$0 + 2(0) = 0 \not\geq 5$	No es parte de la gráfica
(5, 5)	$5 + 2(5) = 15 \geq 5$	Parte de la gráfica

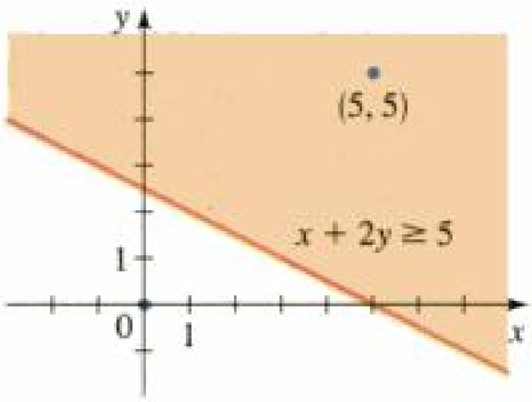


Figura 4

La verificación señala que los puntos *arriba* de la recta satisfacen la desigualdad.

Otra posibilidad es expresar la desigualdad como cuando tenemos pendiente y ordenada en el origen, y graficarla directamente:

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 5 \\ 2y &\geq -x + 5 \\ y &\geq -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

De acuerdo con esta forma vemos que la gráfica incluye todos los puntos cuya coordenada y son *mayores* que los que se encuentran en la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; es decir, la gráfica consiste en los puntos *de esta recta o arriba de ella*, como se ilustra en la figura 4. ■

Sistemas de desigualdades

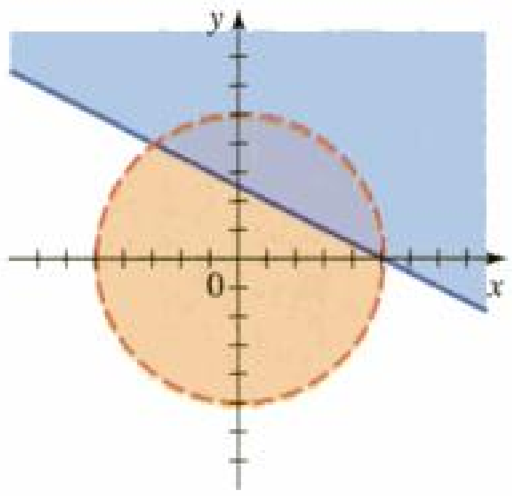
Ahora consideremos los *sistemas* de desigualdades. La solución de tal sistema es el conjunto de todos los puntos en el plano coordenado que cumplen toda desigualdad del sistema.

Ejemplo 2 Un sistema de dos desigualdades

Grafique la solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$$

Solución Son las dos desigualdades del ejemplo 1. En este ejemplo queremos graficar sólo los puntos que satisfacen en forma simultánea ambas desigualdades. La solución consiste en la intersección de las gráficas del ejemplo 1. En la figura 5a) mostramos las dos regiones en el mismo plano coordenado, pero con diferentes colores, y en la figura 5b) mostramos la intersección.



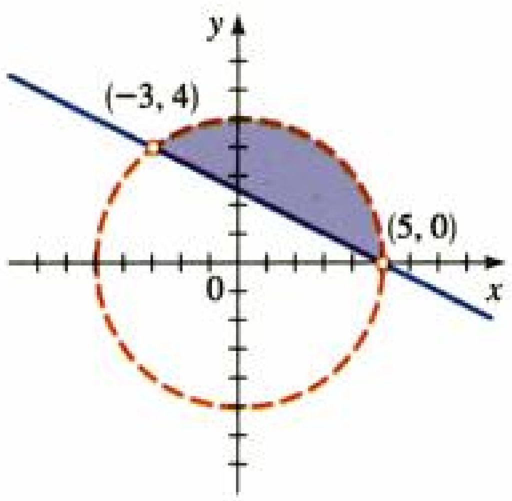
a)

VÉRTICES Los puntos $(-3, 4)$ y $(5, 0)$ de la figura 5b) son los **vértices** del conjunto solución. Se determinan resolviendo el sistema de *ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones mediante sustitución. Al despejar x de la segunda ecuación tenemos $x = 5 - 2y$, y al sustituir lo anterior en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned} (5 - 2y)^2 + y^2 &= 25 && \text{Sustitución de } x = 5 - 2y \\ (25 - 20y + 4y^2) + y^2 &= 25 && \text{Desarrollo} \\ -20y + 5y^2 &= 0 && \text{Simplificación} \\ -5y(4 - y) &= 0 && \text{Factorización} \end{aligned}$$



b)

Figura 5
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$$

Por lo tanto, $y = 0$ o $y = 4$. Cuando $y = 0$, tenemos que $x = 5 - 2(0) = 5$, y cuando $y = 4$, tenemos $x = 5 - 2(4) = -3$. Entonces, los puntos de intersección de estas curvas son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$.

Observe que, en este caso, los vértices no forman parte del conjunto solución, ya que no cumplen con la desigualdad $x^2 + y^2 < 25$, por lo que se grafican como círculos abiertos en la figura. Simplemente muestran dónde quedan las "esquinas" del conjunto solución. ■

Ejemplo 4 Un sistema de desigualdades lineales

Grafique el conjunto solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ -x + 2y \leq 4 \\ 3x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

Solución En necesario graficar las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones adecuadas, como en el ejemplo 3. Usamos una calculadora para graficar, de modo que primero tenemos que aislar a y en el lado izquierdo de cada desigualdad.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$$

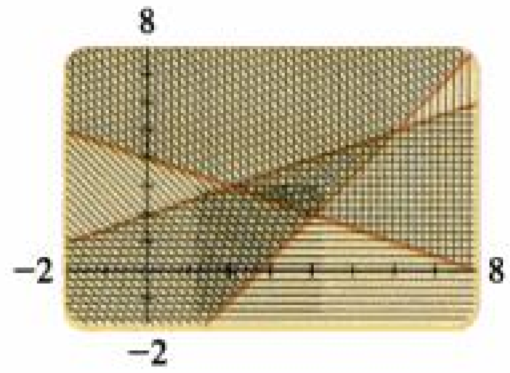


Figura 7

Al aplicar la característica de sombreado de la calculadora obtenemos la gráfica de la figura 7. El conjunto solución es la región triangular que está sombreada con los tres patrones. Luego usamos TRACE o el comando `Intersect` para determinar los vértices de la región. El conjunto solución se grafica en la figura 8. ■

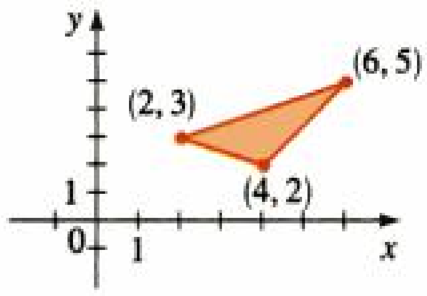


Figura 8

Cuando una región del plano se puede abarcar por un círculo suficientemente grande, se dice que está **acotada**, y si no es así se le llama **no acotada**. Por ejemplo, las regiones graficadas en las figuras 3, 5b), 6b) y 8 son acotadas, en tanto que las de las figuras 2 y 4 son no acotadas. Una región no acotada no puede ser "encerrada", ya que se extiende hasta el infinito por lo menos en una dirección.

Aplicación: regiones factibles

En muchos problemas aplicados hay *restricciones* en las variables. Por ejemplo, el gerente de una fábrica tiene sólo una cantidad de trabajadores que pueden ser asignados a ejecutar tareas en el piso de la fábrica. Un granjero que está pensando qué cultivos sembrar tiene sólo una cierta cantidad de tierra que puede trabajar. Por lo regular, dichas restricciones o limitaciones se pueden expresar como sistemas de desigualdades. Cuando se trabaja con desigualdades aplicadas, por lo general se llama al conjunto solución de un sistema *región factible* porque los puntos del conjunto solución representan valores factibles o posibles de las cantidades que están siendo estudiadas.

Ejemplo 5 Restricción de sustancias contaminantes

Una fábrica produce dos plaguicidas A y B para uso en la agricultura. Por cada barril de A, la fábrica emite 0.25 kg de monóxido de carbono (CO) y 0.60 kg de dióxido de azufre (SO_2). En cuanto a B, por cada barril producido la fábrica emite 0.50 kg de CO y 0.20 kg de SO_2. Las leyes contra la contaminación restringen la emanación de CO de la fábrica a un máximo de 75 kg y SO_2 a un máximo de 90 kg por día.

a) Plantee un sistema de desigualdades que describa la cantidad de barriles de cada plaguicida que la fábrica puede producir y cumplir con las leyes contra la contaminación. Grafique la región factible.

b) ¿Sería legal que la fábrica produjera 100 barriles de A y 80 barriles de B por día?

c) ¿Sería legal que la fábrica produjera 60 barriles de A y 160 barriles de B por día?

Descubrimiento • Debate

49. Regiones sombreadas no deseadas Para graficar la solución de un sistema de desigualdades hemos sombreado la solución de cada desigualdad de un color distinto. La solución del sistema es la región donde todas las partes sombreadas se sobreponen. He aquí un método distinto: por cada desigualdad, sombree la región que *no* satisface a la desigualdad. Explique por qué la parte del plano que se quedó sin sombrear es la solución del sistema. Resuelva el sistema siguiente por ambos métodos. ¿Cuál prefiere?

$$\begin{cases} x + 2y > 4 \\ -x + y < 1 \\ x + 3y < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$

9 Repaso

Revisión de conceptos

1. Suponga que se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones, no necesariamente lineales, con dos variables. Explique cómo resolvería el sistema:
   a) por el método de sustitución
   b) por el método de eliminación
   c) por el método gráfico

2. Suponga que se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones *lineales* con dos variables.
   a) ¿Preferiría aplicar el método de sustitución o el método de eliminación?
   b) ¿Cuántas soluciones son posibles? Dibuje un diagrama para ilustrar las posibilidades.

3. ¿Qué operaciones se pueden efectuar en un sistema lineal que den como resultado un sistema equivalente?

4. Explique cómo funciona la eliminación de Gauss. Su explicación debe incluir un análisis de los pasos que se siguen para obtener un sistema de forma triangular y efectuar la sustitución.

5. ¿Qué queremos dar a entender cuando decimos que A es una matriz de dimensión $m \times n$?

6. ¿Cuál es la matriz aumentada de un sistema? Describa el papel de las operaciones elementales con los renglones, la forma escalonada, la sustitución y las variables principales cuando se resuelve un sistema en forma de matriz.

7. a) ¿Qué significa sistema inconsistente?
   b) ¿Qué significa sistema independiente?

8. Suponga que usó la eliminación de Gauss para transformar en la forma escalonada la matriz aumentada de un sistema lineal. ¿Cómo sabe que un sistema tiene
   a) exactamente una solución?
   b) ninguna solución?
   c) una cantidad infinita de soluciones?

9. ¿Cómo sabe que una matriz está en la forma escalonada reducida?

10. ¿Cuál es la diferencia entre eliminación de Gauss y eliminación de Gauss-Jordan? ¿Qué ventajas ofrece la eliminación de Gauss-Jordan?

11. Si A y B son matrices con la misma dimensión y k es un número real, ¿cómo calcula $A + B$, $A - B$ y kA?

12. a) ¿Qué debe ser cierto de las dimensiones de A y B para que el producto AB esté definido?
    b) Si el producto AB está definido, ¿cómo lo calcula?

13. a) ¿Cuál es la matriz identidad I_n?
    b) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, ¿cuál es la matriz inversa?
    c) Escriba una fórmula para la inversa de una matriz 2×2.
    d) Explique cómo se puede encontrar la inversa de una matriz 3×3.

14. a) Explique cómo se expresa un sistema lineal como una ecuación matricial $AX = B$?
    b) Si A tiene una inversa, ¿cómo resolvería la ecuación matricial $AX = B$?

15. Suponga que A es una matriz $n \times n$.
    a) ¿Cuál es el menor M_{ij} del elemento a_{ij}?
    b) ¿Cuál es el cofactor A_{ij}?
    c) ¿Cómo calcula el determinante de A?
    d) ¿Cómo sabe que A tiene una inversa?

16. Establezca la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales en términos de determinantes. ¿Prefiere aplicar la regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Explique.

17. Explique cómo calcular la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional. Incluya en su explicación un análisis de cada uno de los cuatro casos que surgen.

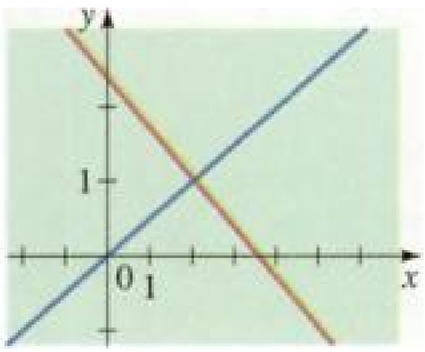
18. ¿Cómo grafica usted una desigualdad con dos variables?

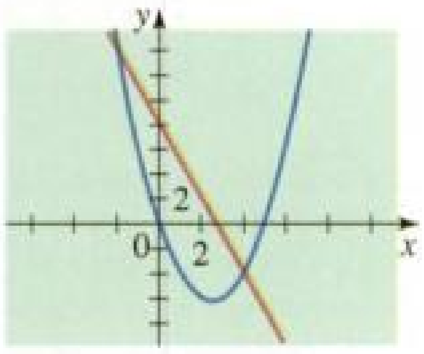
19. ¿Cómo grafica el conjunto solución de un sistema de desigualdades?

Ejercicios

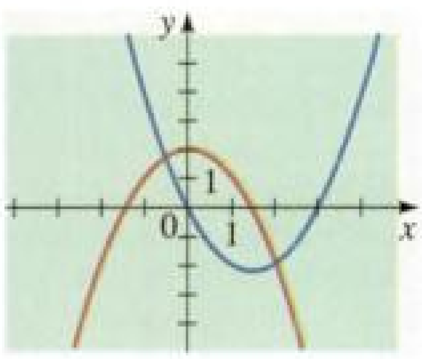
1–4 ■ Se proporcionan dos ecuaciones y sus gráficas. Determine los puntos de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

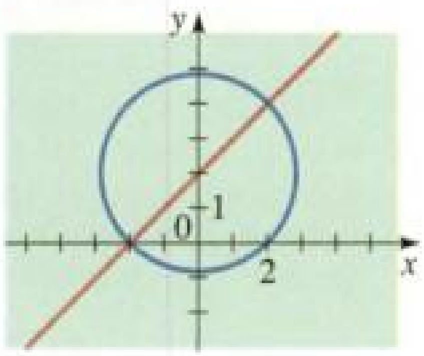
1. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$





3. $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x^2 - 3x - y = 0 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 4 \end{cases}$





5–10 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones y grafique las rectas.

5. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = \frac{2}{7}x - 4 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 10 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 3y = 1 \\ 7x - 2y = 14 \end{cases}$

11–14 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones.

11. $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 6 + x \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x + 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + \dfrac{4}{y} = 6 \\ x - \dfrac{8}{y} = 4 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2y^2 - 7y = 0 \end{cases}$

15–18 ■ Use una calculadora para graficar o una computadora para resolver el sistema con una aproximación a la centésima más cercana.

15. $\begin{cases} 0.32x + 0.43y = 0 \\ 7x - 12y = 341 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sqrt{12}x - 3\sqrt{2}y = 660 \\ 7137x + 3931y = 20\,000 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y^2 = 10 \\ x = \frac{1}{22}y + 12 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} y = 5^x + x \\ y = x^5 + 5 \end{cases}$

19–24 ■ Se proporciona una matriz.

a) Determine la dimensión de la matriz.

b) ¿Está la matriz en la forma escalonada?

c) ¿La matriz está en la forma escalonada reducida?

d) Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25–46 ■ Calcule la solución completa del sistema o demuestre que el sistema no tiene solución.

25. $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x + 5z = 12 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 6z = 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x - 7y + 11z = 2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 2x - 3z = 5 \\ x - 2y + 4w = 9 \\ x + y + 2z + 3w = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x - 7y + 11z = -9 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + 5z = 10 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - 4z - w = -1 \\ x - 2y + 4w = -7 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = -3 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 4w = 5 \\ 2y + z + w = 0 \\ 2x + y + 5z - 4w = 4 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 4x - y + 15z = 5 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 5y + 9z = 13 \\ 2x + 7z = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} -x + 4y + z = 8 \\ 2x - 6y + z = -9 \\ x - 6y - 4z = -15 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - z + w = 2 \\ 2x + y - 2w = 12 \\ 3y + z + w = 4 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 4z = 4 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 3x - y - z - w = 2 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 5z = 1 \\ 4x + 3y + z = 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + 2w = 2 \\ 2x + 4y - 4z - 2w = 6 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x - y - 2z + 3w = 0 \\ y - z + w = 1 \\ 3x - 2y - 7z + 10w = 2 \end{cases}$

47. Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas. Una da un interés de 6% al año y la otra proporciona 7%. Tiene el doble invertido en la cuenta que da el 7% que en la cuenta que proporciona 6%, y el rendimiento anual es 600 dólares. ¿Cuánto tiene invertido en cada cuenta?

48. Una alcancía contiene 50 monedas todas de 5, 10 y 25 centavos. El valor total de las monedas es 5.60 dólares, y el valor de las monedas de 10 centavos es cinco veces el valor de las monedas de 5 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

49. Clarisse invierte 60 000 dólares en cuentas del mercado de valores en tres bancos distintos. El banco A paga 2% de interés anual, el banco B paga 2.5% y el banco C da el 3%. Decide invertir el doble en el banco B de lo que invierte en los otros dos bancos. Después de un año Clarisse gana 1575 dólares de intereses. ¿Cuánto invirtió en cada banco?

50. Un pescador comercial pesca abadejo, robalo y pargo. Le pagan 1.25 dólares por una libra de abadejo, 0.75 dólares por una libra de robalo y 2 dólares por cada libra de pargo. Ayer capturó 560 lb de pescado que valían 575 dólares. El abadejo y el pargo juntos valían 320 dólares. ¿Cuántas libras de cada especie pescó?

51–62 ■ Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Efectúe la operación indicada o explique por qué no se puede efectuar.

51. $A + B$ **52.** $C - D$ **53.** $2C + 3D$

54. $5B - 2C$ **55.** GA **56.** AG

97–100 ■ Grafique la desigualdad.

97. $3x + y \leq 6$

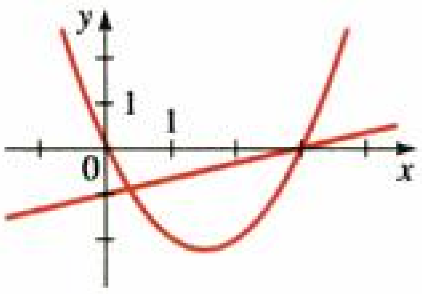
98. $y \geq x^2 - 3$

99. $x^2 + y^2 > 9$

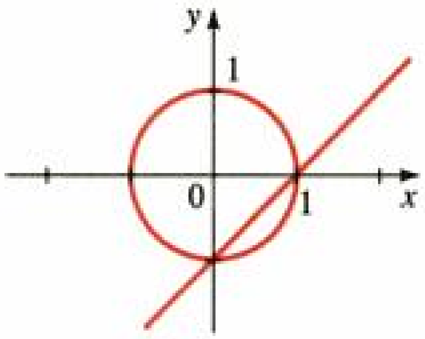
100. $x - y^2 < 4$

101–104 ■ La figura ilustra la gráfica de las ecuaciones que corresponden a las desigualdades dadas. Sombree la región del conjunto solución del sistema de desigualdades.

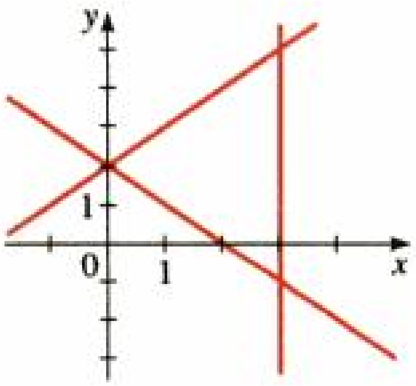
101. $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ y \leq \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$



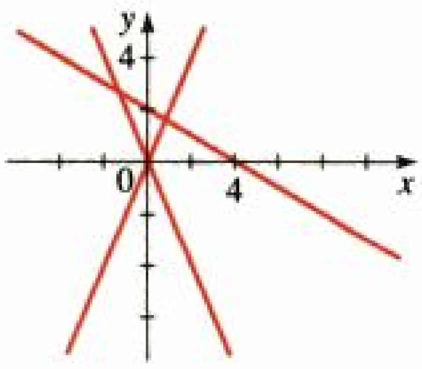
102. $\begin{cases} y \geq x - 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$



103. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ y - x \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$



104. $\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 2x \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$



105–108 ■ Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Calcule las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto solución es acotado o no acotado.

105. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y < 0 \end{cases}$

106. $\begin{cases} y - x^2 \geq 4 \\ y < 20 \end{cases}$

107. $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ y \leq x + 4 \end{cases}$

108. $\begin{cases} x \geq 4 \\ x + y \geq 24 \\ x \leq 2y + 12 \end{cases}$

109–110 ■ Determine x, y y z en función de a, b y c.

109. $\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

110. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b + c \\ bx + by + cz = c \\ cx + cy + cz = c \end{cases} \qquad (a \neq b, b \neq c, c \neq 0)$

111. ¿Para qué valores de k las siguientes tres rectas tienen un punto común de intersección?

$$x + y = 12$$
$$kx - y = 0$$
$$y - x = 2k$$

112. ¿Para qué valores de k el siguiente sistema tiene una cantidad infinita de soluciones?

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$$

11. Sólo una de las matrices siguientes tiene inversa. Calcule el determinante de cada matriz y úselo para identificar la matriz que tiene inversa. Encuentre luego esta inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Resuelva aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}-y} - z = 14 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

13. Determine la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

a) $\dfrac{4x - 1}{(x - 1)^2(x + 2)}$ b) $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 3x}$

14. Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Dé las coordenadas de los vértices y nómbrelos.

a) $\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ x - y \ge -2 \\ x + 2y \ge 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y \le 5 \\ y \le 2x + 5 \end{cases}$

Enfoque en el modelado
Programación lineal

La **programación lineal** es una técnica de modelado usada para determinar la asignación óptima de recursos en los negocios, la milicia y otras áreas de las actividades humanas. Por ejemplo, un fabricante que produce varios productos diversos de la misma materia prima puede aplicar la programación lineal para determinar cuánto de cada producto debe ser producido para maximizar la ganancia. Es probable que esta técnica de modelado sea la aplicación práctica más importante de los sistemas de desigualdades lineales. En 1975, Leonid Kantorovich y T. C. Koopmans recibieron el Premio Nobel en economía por su trabajo en el desarrollo de esta técnica.

Aunque la programación lineal se puede aplicar a problemas muy complejos con cientos o hasta miles de variables, consideramos sólo algunos ejemplos para los cuales se pueden aplicar los métodos gráficos de la sección 9.9. En el caso de grandes cantidades de variables, se usa un método de programación lineal basado en matrices. Examinemos un problema representativo.

Ejemplo 1 Manufactura para obtener una ganancia máxima

Un pequeño fabricante de zapatos produce dos estilos de zapatos: zapatos de agujetas y mocasines. Utiliza dos máquinas en el proceso: una máquina cortadora y una máquina de coser. Cada tipo de zapato requiere 15 min por cada par en la cortadora. Los zapatos de agujetas requieren 10 min de costura por par y los mocasines requieren 20 min de costura por par. Como el fabricante sólo quiere contratar un operador por máquina, cada proceso está disponible sólo por 8 h al día. Si la ganancia es de 15 dólares por cada par de zapatos de agujetas y 20 dólares por cada par de mocasines, ¿cuántos pares de cada tipo debe producir por día para tener una ganancia máxima?

Puesto que los mocasines son los que proporcionan más ganancia por cada par, parecería que lo mejor es producir sólo mocasines. Pero para nuestra sorpresa, esto no resulta ser la solución más rentable.

Solución Primero organizamos los datos en una tabla. Para ser congruentes, convertimos todos los tiempos en horas.

	Zapatos de agujeta	Mocasines	Tiempo disponible
Tiempo en la cortadora (h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	8
Tiempo en la máquina de coser (h)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	8
Ganancia	\$15	\$20	

Describimos el modelo y resolvemos el problema en cuatro pasos.

ELECCIÓN DE LAS VARIABLES Para formular un modelo matemático, primero damos nombres a las cantidades variables. En el caso de este problema hacemos

x = cantidad de pares de zapatos de agujetas fabricados diario

y = cantidad de pares de mocasines fabricados diario

DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO El objetivo es determinar qué valores de x y de y dan la ganancia máxima. Puesto que cada par de zapatos de agujetas genera 15 dólares de ganancia y cada par de mocasines genera 20 dólares, la ganancia total se representa con

$$P = 15x + 20y$$

esta función se denomina *función objetivo*.

GRÁFICA DE LA REGIÓN FACTIBLE Entre más grande sean x y y, más alta es la ganancia. Pero no podemos escoger en forma arbitraria valores grandes para estas variables debido a las *restricciones* del problema. Cada restricción es una desigualdad de las variables.

En este problema, la cantidad total de horas de corte necesarias es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$. Puesto que sólo hay 8 horas disponibles en la cortadora, tenemos

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \le 8$$

De igual manera, al considerar la cantidad de tiempo necesario y disponible en la máquina de coser tenemos

$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \le 8$$

No podemos producir cantidades negativas de zapatos, de modo que

$$x \ge 0 \qquad \text{y} \qquad y \ge 0$$

Por lo tanto, x y y deben cumplir con las restricciones

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \le 8 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera desigualdad por 4 y la segunda por 6 obtenemos el sistema simplificado

$$\begin{cases} x + y \le 32 \\ x + 2y \le 48 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

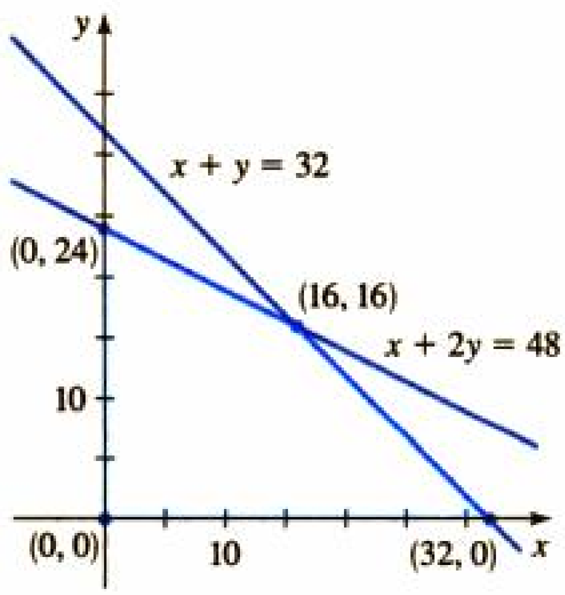


Figura 1

La solución de este sistema se presenta en la figura 1, en donde los vértices ya contienen las coordenadas. Los únicos valores que satisfacen las restricciones del problema son los que corresponden a los puntos de la región sombreada de la figura 1. Se denomina *región factible* del problema.

DETERMINACIÓN DE LA GANANCIA MÁXIMA Cuando x y y se incrementan, también aumenta la ganancia. Por lo tanto, parece razonable que la ganancia máxima ocurra en un punto en una de las orillas externas de la región factible, donde es imposible incrementar x y y sin salir de la región. En efecto, se puede demostrar que el valor máximo ocurre en un vértice. Esto quiere decir que necesitamos comprobar la ganancia sólo en los vértices. El valor más grande de P se presenta en el punto (16, 16), donde $P = 560$ dólares. Por lo tanto, el fabricante debe hacer 16 pares de zapatos de agujeta y 16 pares de mocasines para obtener una ganancia máxima diaria de 560 dólares.

Vértice	$P = 15x + 20y$	
(0, 0)	0	
(0, 24)	15(0) + 20(24) = \$480	
(16, 16)	15(16) + 20(16) = \$560	*Ganancia máxima*
(32, 0)	15(32) + 20(0) = \$480	

■

DETERMINACIÓN DEL COSTO MÍNIMO Comprobamos el valor de la función objetivo en cada vértice de la región factible.

Vértice	$C = 1260 - 10x - 15y$	
(0, 12)	$1260 - 10(0) - 15(12) = \$1080$	
(3, 12)	$1260 - 10(3) - 15(12) = \$1050$	Costo mínimo
(10, 5)	$1260 - 10(10) - 15(5) = \$1085$	
(10, 2)	$1260 - 10(10) - 15(2) = \$1130$	

El costo mínimo se presenta en el punto (3, 12). Por lo tanto, el comerciante debe embarcar

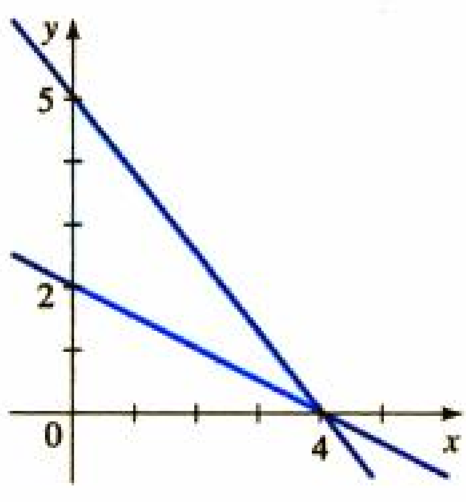
3 automóviles desde Millville a Camden
12 automóviles desde Millville a Atlantic City
7 automóviles desde Trenton a Camden
0 automóviles desde Trenton a Atlantic City ■

Por los años cuarenta del siglo pasado, los matemáticos crearon métodos matriciales para resolver problemas de programación lineal que contienen más de dos variables. Estos métodos fueron aplicados por primera vez entre los Aliados, en la Segunda Guerra Mundial, para resolver problemas de aprovisionamiento similares, pero, naturalmente, mucho más complicados que el ejemplo 2. El mejoramiento de los métodos matriciales es un campo activo y emocionante de la investigación matemática actual.

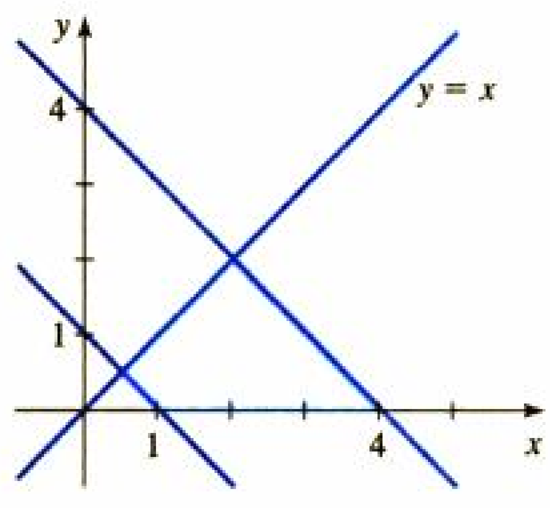
Problemas

1–4 ■ Determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada en la región factible indicada.

1. $M = 200 - x - y$



2. $N = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 40$



3. $P = 140 - x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 28 \end{cases}$$

4. $Q = 70x + 82y$

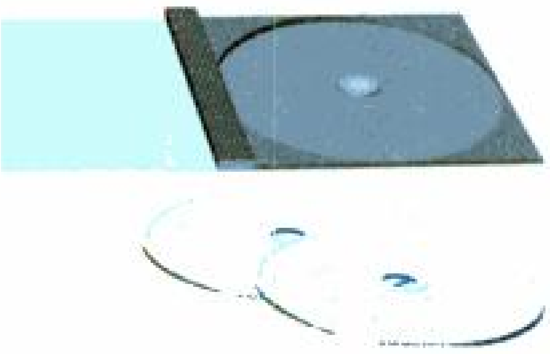
$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 10, \quad y \leq 20 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

5. **Fabricación de muebles** Un fabricante de muebles hace mesas y sillas de madera. El proceso de producción requiere dos tipos básicos de tarea: carpintería y acabado. Una mesa requiere 2 horas de carpintería y 1 h de acabado. Una silla requiere 3 h de carpintería y media hora de acabado. La ganancia es de 35 dólares por mesa y 20 dólares

0.20 dólares la onza y el tipo II cuesta 0.30 dólares la onza. Los conejos reciben un mínimo diario de 24 g de grasa, 36 g de carbohidratos y 4 g de proteína, pero no obtienen más de 5 onzas de alimento por día. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento se deben dar diario a los conejos para satisfacer las necesidades dietéticas a un mínimo costo.

13. **Inversión en bonos** Una mujer desea invertir 12 000 dólares en tres tipos de bonos: bonos municipales que proporcionan un interés anual de 7%, certificados de inversión bancarios que dan 8% y bonos de alto riesgo que dan 12%. Por cuestiones de impuestos, desea que la cantidad invertida en bonos municipales sea por lo menos el triple de la cantidad invertida en los certificados bancarios. Para conservar su nivel de riesgo manejable, invertirá no más de 2000 dólares en los bonos de alto riesgo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de bono para maximizar su rendimiento de interés anual? [*Sugerencia*: sea x = cantidad en bonos municipales y y = cantidad en certificados bancarios. Entonces la cantidad en bonos de alto riesgo será de $12000 - x - y$.]

14. **Rendimiento del interés anual** Refiérase al problema 13. Suponga que el inversionista decide incrementar el máximo invertido en bonos de alto riego a 3000 dólares, pero deja las otras condiciones sin cambio. ¿En cuánto se incrementará su rendimiento máximo posible del interés?



15. **Estrategia para los negocios** Una pequeña compañía de programas para computadoras publica juegos para computadoras y programas educativos y de servicio. Su estrategia de negocio es comercializar un total de 36 nuevos programas cada año, y por lo menos cuatro de ellos serán juegos. La cantidad de programas de servicio publicados nunca es más del doble de la cantidad de programas educativos. En promedio, la compañía tiene una ganancia anual de 5000 dólares por cada juego para computadora, 8000 dólares por cada programa educativo y 6000 dólares por cada programa de servicio. ¿Cuántos programas de cada tipo debe publicar cada año para lograr una ganancia máxima?

16. **Región factible** Todas las partes de este problema se refieren a la siguiente región factible y función objetivo

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$P = x + 4y$$

a) Grafique la región factible.

b) En la gráfica del inciso a) trace las gráficas de las ecuaciones lineales obtenidas al hacer P igual a 40, 36, 32 y 28.

c) Si continuamos reduciendo el valor de P, ¿en cuál vértice de la región factible estas rectas tocarán primero la región factible?

d) Verifique que el valor máximo de P en la región factible está en el vértice que eligió en el inciso c).

que el estudio de las parábolas sea indispensable en la ciencia de los cohetes. Las secciones cónicas también ocurren en muchos lugares inesperados. Por ejemplo, la gráfica del rendimiento de una cosecha como una función de la cantidad de lluvia es una parábola (véase la página 321). Se examinarán algunos usos de las cónicas en medicina, ingeniería, navegación y astronomía.

En la sección 10.7 se estudian ecuaciones paramétricas, las cuales se pueden usar para describir la curva que un cuerpo en movimiento traza con el tiempo. En *Énfasis en el modelado*, página 816, se deducen ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un proyectil.

10.1 Parábolas

En la sección 2.5 se vio que la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una curva en forma de U llamada *parábola* que abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si el signo de a es positivo o negativo.

En esta sección se estudian las parábolas desde un punto de vista geométrico en vez de algebraico. Se empieza con la definición geométrica de una parábola y se muestra cómo esto conduce a la fórmula algebraica con la que ya se está familiarizado.

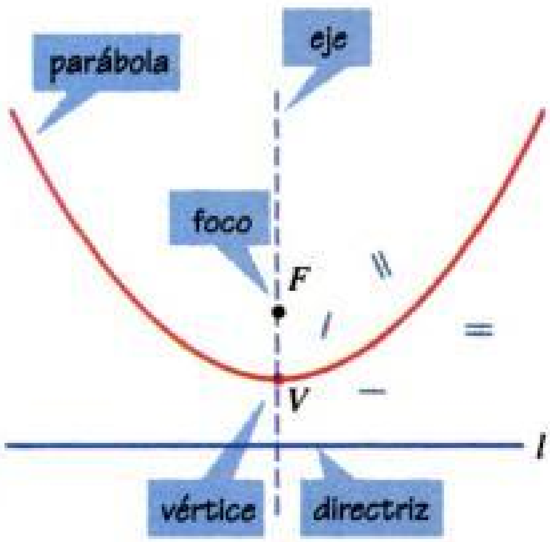


Figura 1

Definición geométrica de una parábola

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano equidistante de un punto fijo F (llamado **foco**) y una línea fija l (llamada **directriz**).

Esta definición se ilustra en al figura 1. El **vértice** V de la parábola se localiza a la mitad entre el foco y la directriz, y el **eje de simetría** es la línea que corre por el foco perpendicular a la directriz.

En esta sección se restringe la atención a parábolas que están situadas con el vértice en el origen y que tienen un eje de simetría vertical u horizontal. (Las parábolas en posiciones más generales serán consideradas en las secciones 10.4 y 10.5.) Si el foco de tal parábola es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical y la directriz tiene la ecuación $y = -p$. En la figura 2 se ilustra el caso $p > 0$.

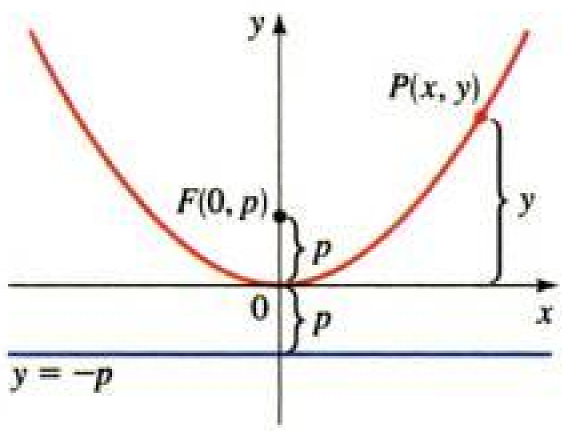


Figura 2

Matemáticas en el mundo moderno

Buscando dentro de tu cabeza

¿Cómo le gustaría ver dentro de su cabeza? La idea no es particularmente atractiva para la mayor parte de nosotros, pero con frecuencia los médicos necesitan hacer eso. Si pueden mirar sin cirugía invasiva, es mejor. Una radiografía no proporciona en realidad una vista interna, simplemente da una "gráfica" de la densidad de tejido que deben pasar los rayos X. Por lo tanto, una radiografía es una vista "aplanada" en una dirección. Suponga que obtiene una vista de rayos X desde muchas direcciones distintas, ¿se pueden usar estas "gráficas" para reconstruir la vista interna tridimensional? Este es un problema puramente matemático y hace mucho tiempo lo resolvieron los matemáticos. Sin embargo, reconstruir la vista interna requiere miles de cálculos tediosos. En la actualidad, los matemáticos y las computadoras de alta velocidad brindan la posibilidad de "ver dentro" mediante un proceso llamado Tomografía Auxiliada por Computadora (o exploración TAC). Los matemáticos continúan investigando muchas formas de usar las matemáticas para reconstruir imágenes. Una de las técnicas más recientes, llamada Imagen de Resonancia Magnética (IRM), combina la biología molecular y las matemáticas para "ver al interior" con claridad.

Ejemplo 1 Hallar la ecuación de una parábola

Encuentre la ecuación de la parábola con vértice $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$ y bosqueje su gráfica.

Solución Puesto que el foco es $F(0, 2)$, se concluye que $p = 2$ (y, por lo tanto, la directriz es $y = -2$). Así, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Puesto que $p = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Véase la figura 3.

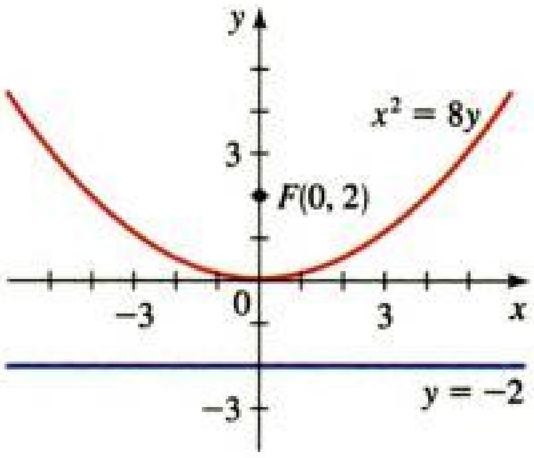


Figura 3

■

Ejemplo 2 Hallar el foco y la directriz de una parábola a partir de su ecuación

Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$ y bosqueje la gráfica.

Solución Para hallar el foco y la directriz, se escribe en forma estándar la ecuación $x^2 = -y$. Comparando esto con la ecuación general $x^2 = 4px$, se puede observar que $4p = -1$, por lo tanto $p = -\frac{1}{4}$. Así, el foco es $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestran en la figura 4a). Se puede trazar también la gráfica por medio de una calculadora como se muestra en la figura 4b).

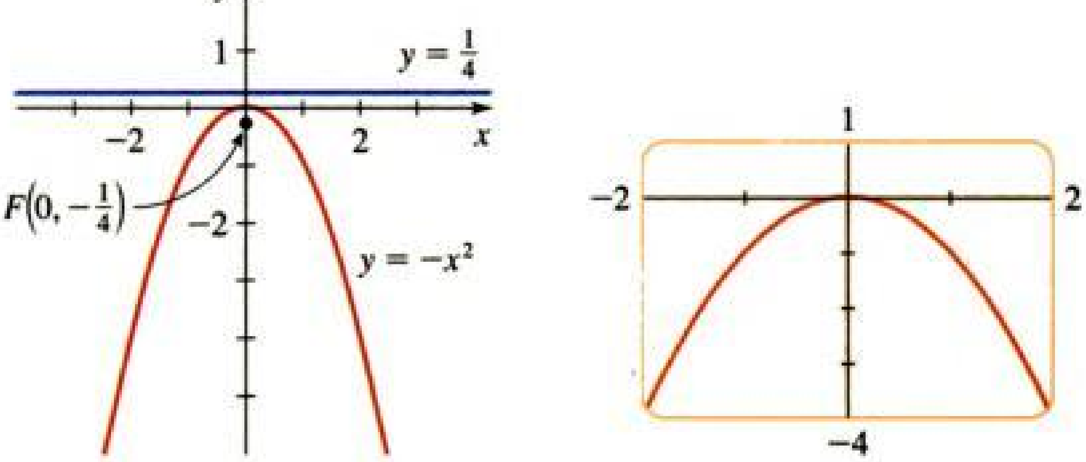


Figura 4 a) b)

■

fórmulas para el volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el área superficial de una esfera, $S = 4\pi r^2$, y un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

Ejemplo 4 Diámetro focal de una parábola

Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y grafíquela.

Solución Primero se escribe la ecuación en la forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique cada lado por 2}$$

De esta ecuación se puede observar que $4p = 2$, así que el diámetro focal es 2. Al despejar p se obtiene $p = \frac{1}{2}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Puesto que el diámetro focal es 2, el lado recto se extiende 1 unidad a la izquierda y 1 unidad a la derecha del foco. La gráfica se bosqueja en la figura 7. ■

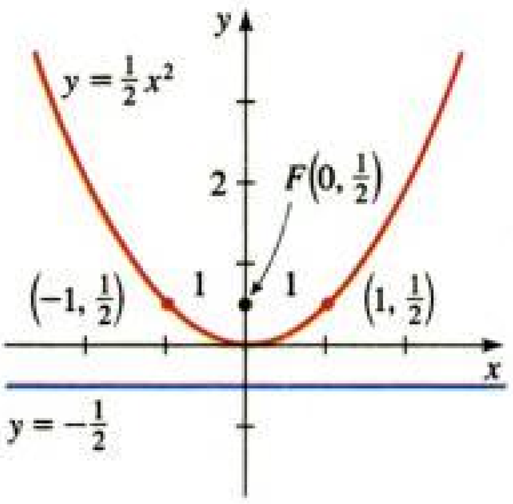


Figura 7

En el ejemplo siguiente se grafica una familia de parábolas, para mostrar cómo al cambiar la distancia entre el foco y el vértice afecta la "amplitud" de una parábola.

Ejemplo 5 Una familia de parábolas

a) Encuentre ecuaciones para parábolas con vértice en el origen y focos $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F_3(0, 1)$ y $F_4(0, 4)$.

b) Dibuje gráficas de las parábolas del inciso a). ¿Qué concluye?

Solución

a) Puesto que los focos están en el eje positivo y, las parábolas abren hacia arriba y tienen ecuaciones de la forma $x^2 = 4py$. Esto conduce a las siguientes ecuaciones.

Foco	p	Ecuación $x^2 = 4py$	Forma de la ecuación para calculadora graficadora
$F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$	$p = \frac{1}{8}$	$x^2 = \frac{1}{2}y$	$y = 2x^2$
$F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$p = \frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$	$y = 0.5x^2$
$F_3(0, 1)$	$p = 1$	$x^2 = 4y$	$y = 0.25x^2$
$F_4(0, 4)$	$p = 4$	$x^2 = 16y$	$y = 0.0625x^2$

b) Las gráficas se trazan en la figura 8. Se puede observar que mientras más cerca del vértice esté el foco, más estrecha es la parábola.

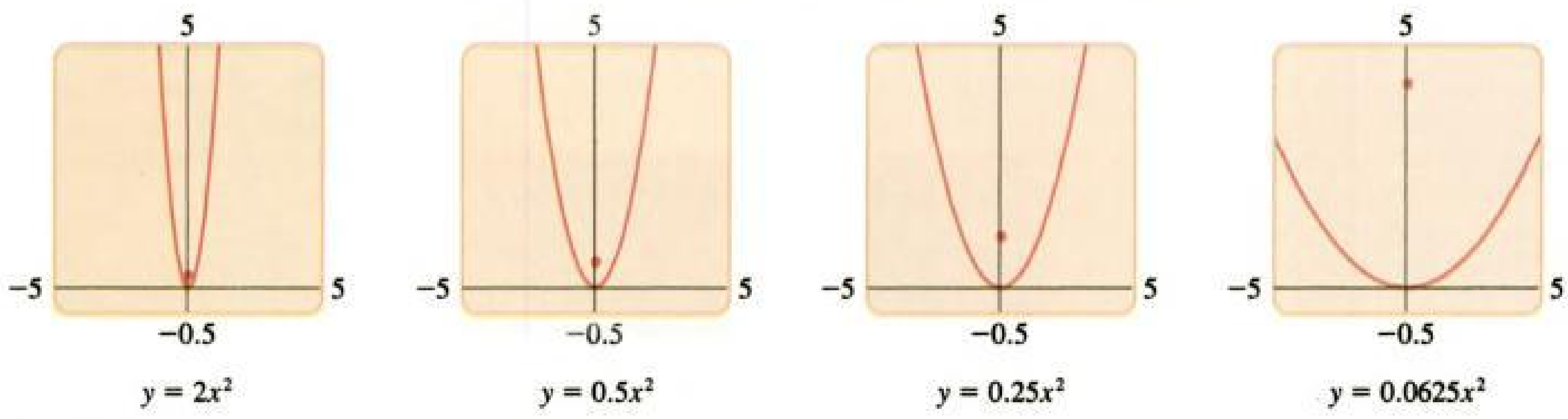


Figura 8
Una familia de parábolas

■

Aplicaciones

Las parábolas tienen una propiedad importante que las hace útiles como reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente colocada en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se reflejará de tal forma que viaja paralela al eje de la parábola (véase la figura 9). Así, un espejo parabólico refleja la luz en un haz de rayos paralelos. Por el contrario, la luz que se aproxima al reflector en rayos paralelos a su eje de simetría es concentrada al foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar por medio de cálculo, se emplea en la construcción de telescopios reflectores.

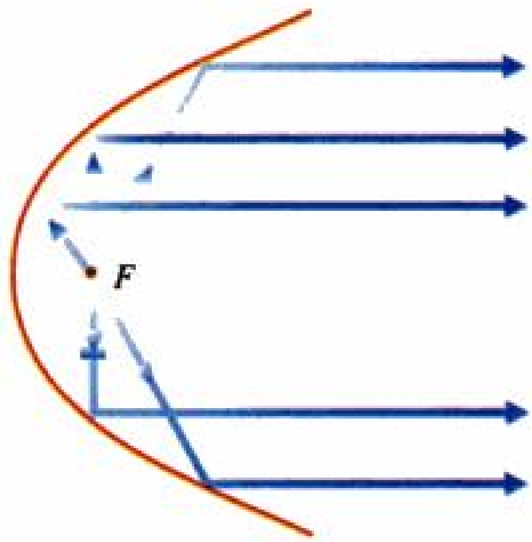


Figura 9
Reflector parabólico

Ejemplo 6 Hallar el punto focal de un reflector proyector

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un "tazón" que mide 12 pulgadas de ancho de borde a borde y 8 pulgadas de profundidad, como se ilustra en la figura 10. Si el filamento del bombillo se localiza en el foco, ¿que tan lejos del vértice del reflector está?

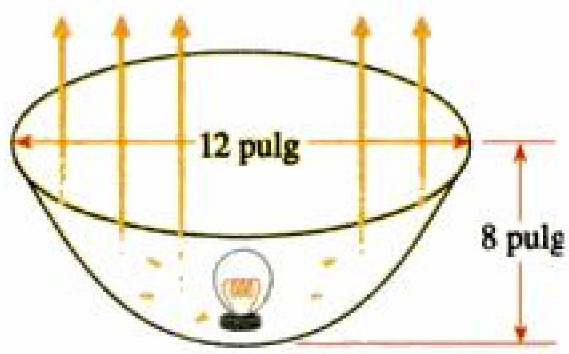


Figura 10
Un reflector parabólico

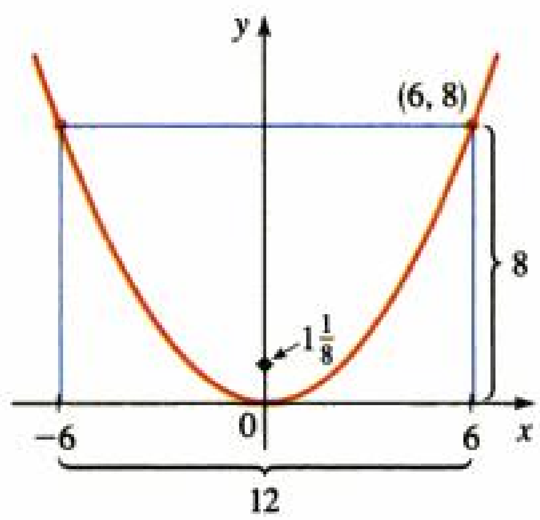


Figura 11

Solución Se introduce un sistema de coordenadas y se coloca una sección transversal parabólica del reflector de modo que su vértice esté en el origen y su eje sea vertical (véase la figura 11). Entonces la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la figura 11 se puede observar que el punto (6, 8) se encuentra sobre la parábola. Se emplea ésta para hallar p.

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto (6, 8) satisface la ecuación } x^2 = 4py$$
$$36 = 32p$$
$$p = \tfrac{9}{8}$$

El foco es $F\left(0, \frac{9}{8}\right)$, de modo que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ pulg. Debido a que el filamento está colocado en el foco, se localiza a $1\frac{1}{8}$ pulgadas del vértice del reflector. ■

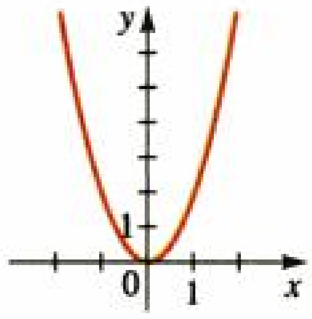
10.1 Ejercicios

1–6 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para sus respuestas.

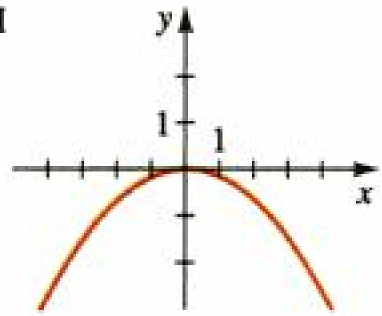
1. $y^2 = 2x$ **2.** $y^2 = -\frac{1}{4}x$ **3.** $x^2 = -6y$

4. $2x^2 = y$ **5.** $y^2 - 8x = 0$ **6.** $12y + x^2 = 0$

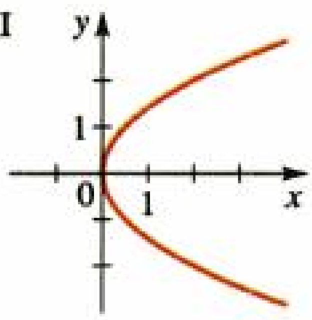
I



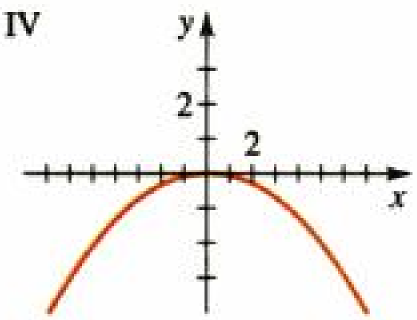
II



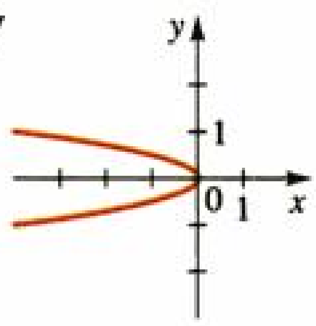
III



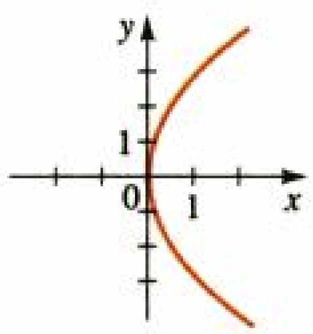
IV



V



VI



7–18 ■ Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola, y bosqueje su gráfica.

7. $y^2 = 4x$ **8.** $x^2 = y$

9. $x^2 = 9y$ **10.** $y^2 = 3x$

11. $y = 5x^2$ **12.** $y = -2x^2$

13. $x = -8y^2$ **14.** $x = \frac{1}{2}y^2$

15. $x^2 + 6y = 0$ **16.** $x - 7y^2 = 0$

17. $5x + 3y^2 = 0$ **18.** $8x^2 + 12y = 0$

19–24 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar la parábola.

19. $x^2 = 16y$ **20.** $x^2 = -8y$

21. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **22.** $8y^2 = x$

23. $4x + y^2 = 0$ **24.** $x - 2y^2 = 0$

25–36 ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la condición dada o condiciones.

25. Foco $F(0, 2)$ **26.** Foco $F(0, -\frac{1}{2})$

27. Foco $F(-8, 0)$ **28.** Foco $F(5, 0)$

29. Directriz $x = 2$ **30.** Directriz $y = 6$

31. Directriz $y = -10$ **32.** Directriz $x = -\frac{1}{8}$

33. El foco está en el eje x positivo a 2 unidades de la directriz

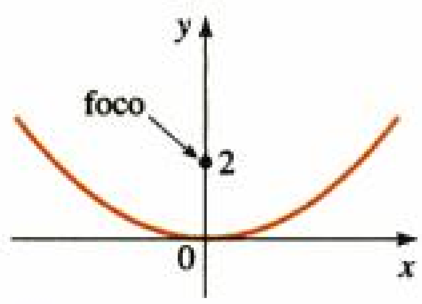
34. La directriz tiene ordenada 6

35. Abre hacia arriba con foco a 5 unidades del vértice

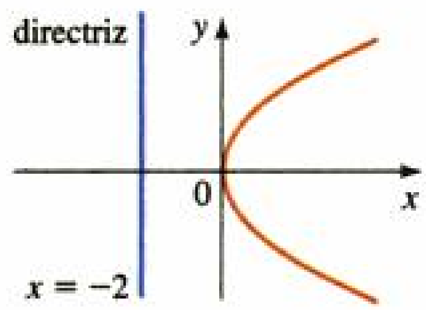
36. El diámetro focal es 8 y el foco está sobre el eje y negativo

37–46 ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

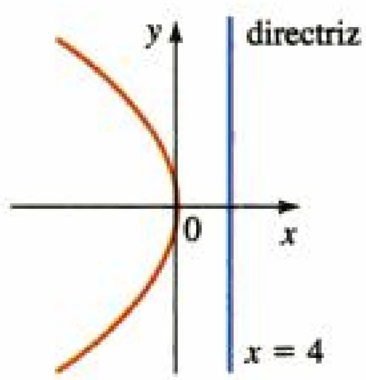
37.



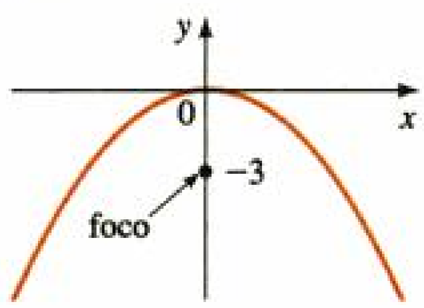
38.



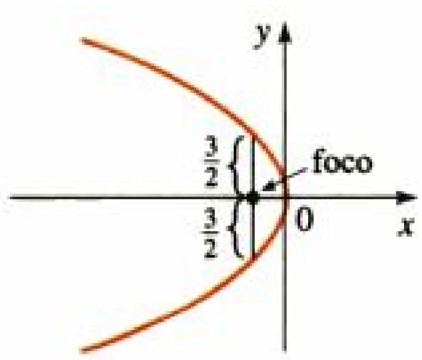
39.



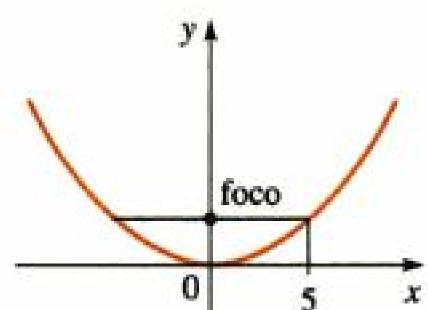
40.



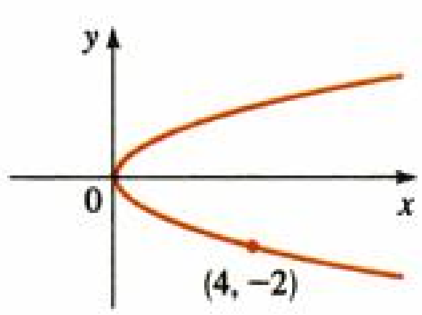
41.



42.



43.



44.