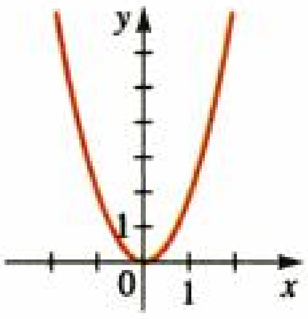
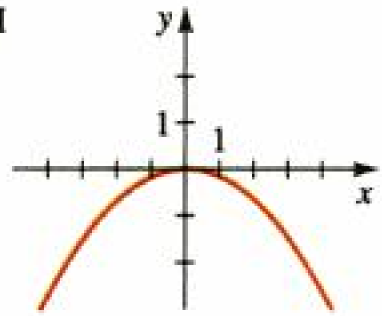
10.1 Ejercicios

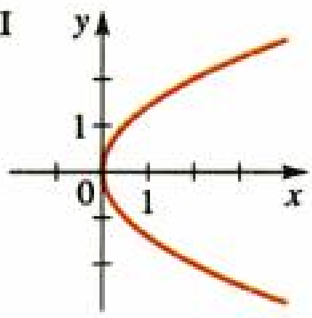
1–6 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para sus respuestas.

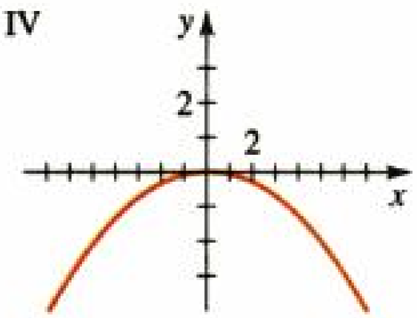
1. $y^2 = 2x$ **2.** $y^2 = -\frac{1}{4}x$ **3.** $x^2 = -6y$

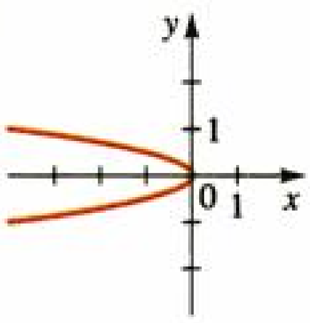
4. $2x^2 = y$ **5.** $y^2 - 8x = 0$ **6.** $12y + x^2 = 0$

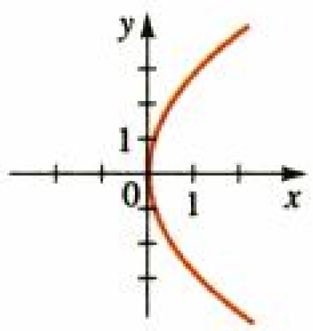
I


II


III


IV


V


VI


7–18 ■ Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola, y bosqueje su gráfica.

7. $y^2 = 4x$ **8.** $x^2 = y$

9. $x^2 = 9y$ **10.** $y^2 = 3x$

11. $y = 5x^2$ **12.** $y = -2x^2$

13. $x = -8y^2$ **14.** $x = \frac{1}{2}y^2$

15. $x^2 + 6y = 0$ **16.** $x - 7y^2 = 0$

17. $5x + 3y^2 = 0$ **18.** $8x^2 + 12y = 0$

19–24 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar la parábola.

19. $x^2 = 16y$ **20.** $x^2 = -8y$

21. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **22.** $8y^2 = x$

23. $4x + y^2 = 0$ **24.** $x - 2y^2 = 0$

25–36 ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la condición dada o condiciones.

25. Foco $F(0, 2)$ **26.** Foco $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

27. Foco $F(-8, 0)$ **28.** Foco $F(5, 0)$

29. Directriz $x = 2$ **30.** Directriz $y = 6$

31. Directriz $y = -10$ **32.** Directriz $x = -\frac{1}{8}$

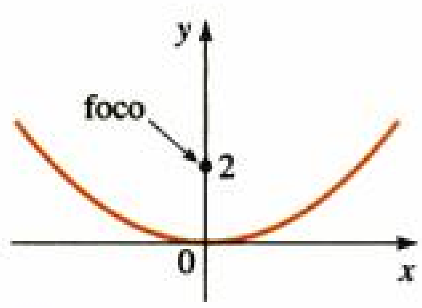
33. El foco está en el eje x positivo a 2 unidades de la directriz

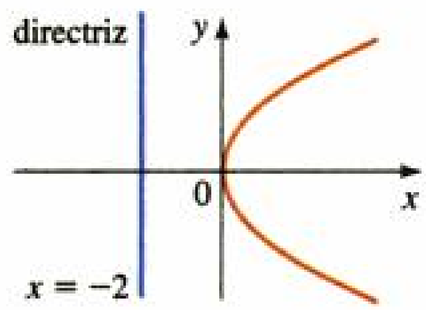
34. La directriz tiene ordenada 6

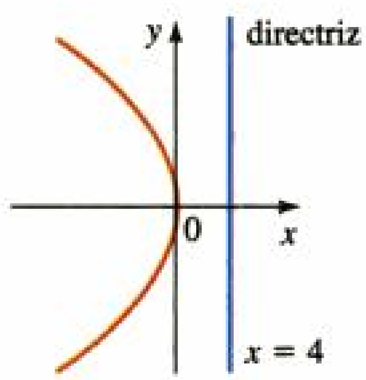
35. Abre hacia arriba con foco a 5 unidades del vértice

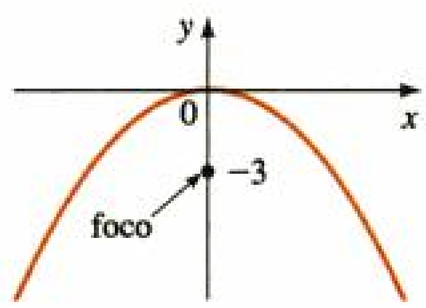
36. El diámetro focal es 8 y el foco está sobre el eje y negativo

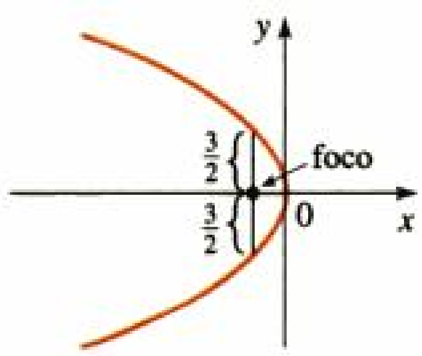
37–46 ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

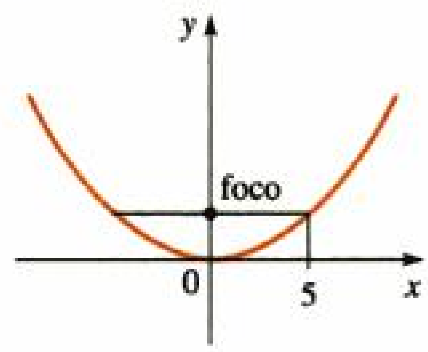
37.


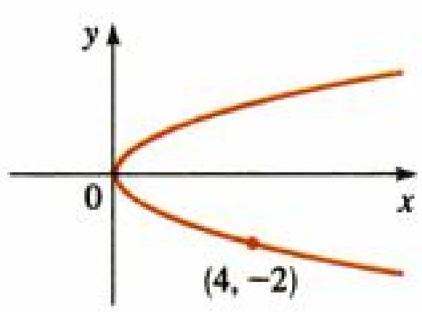
38.


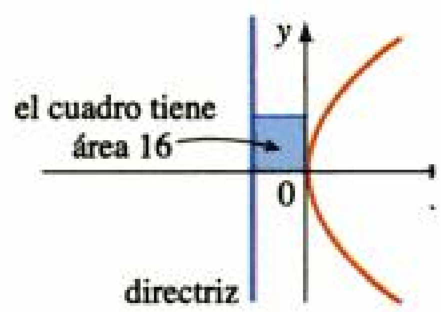
39.


40.


41.


42.


43.


44.


Excentricidades de las órbitas de los planetas

Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco. Para la mayor parte de los planetas estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, de manera que son casi circulares. Sin embargo, Mercurio y Plutón, los planetas interior y exterior, tienen órbitas visiblemente elípticas.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.048
Saturno	0.056
Urano	0.046
Neptuno	0.010
Plutón	0.248

Por consiguiente, si e es cercana a 1, entonces c es casi igual a a, y la elipse es de forma alargada, pero si e es cercana a 0, entonces la elipse casi tiene la forma de un círculo. La excentricidad es una medida de cuán "alargada" es una elipse.

En la figura 8 se muestran varias elipses para demostrar el efecto de variar la excentricidad e.

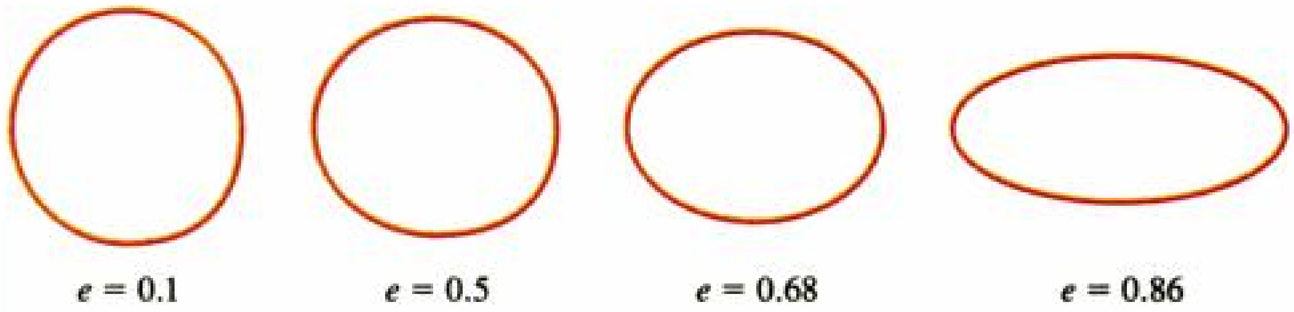


Figura 8
Elipses con varias excentricidades

Ejemplo 4 Hallar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y focos

Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$ y bosqueje su gráfica.

Solución Se dan $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplicación en cruz}$$

$$a = 10$$

Para hallar b, se usa el hecho de que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

En consecuencia, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Debido a que los focos están sobre el eje y, la elipse está orientada verticalmente. Para bosquejar la elipse, se encuentran los intersectos: las abscisas son ± 6 y las ordenadas son ± 10. La gráfica se bosqueja en la figura 9. ■

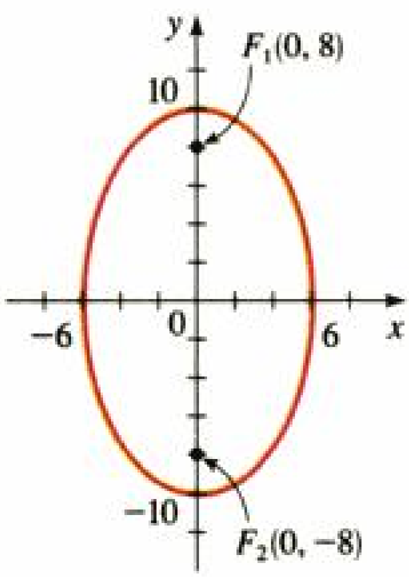


Figura 9
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

La atracción gravitacional causa que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del Sol con el Sol en un foco. Johannes Kepler fue el primero en observar esta propiedad notable e Isaac Newton la dedujo después de su ley de la inversa del cuadrado de la gravedad por medio de cálculo. Las órbitas de los planetas tienen excentricidades distintas, pero la mayor parte son casi circulares (véase la nota al margen arriba).

Las elipses, como las parábolas, tienen una interesante *propiedad de reflexión* que conduce a varias aplicaciones prácticas. Si se coloca una fuente de luz en un foco de una superficie reflectora con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz se reflejará fuera de la superficie al otro foco, como se muestra en la figura 10. Este principio, que funciona para ondas sonoras así como para la luz, se usa en *litotricia*, un tratamiento para los cálculos renales. Se coloca al paciente en una tina de agua con secciones transversales elípticas de tal manera que el cálculo renal se localiza con exactitud en un foco. Las ondas sonoras de alta densidad generadas en el otro foco se reflejan en el cálculo y lo destruyen con daño mínimo del tejido circundante. Al paciente se le libera del traumatismo de la cirugía y se recupera en días en vez de semanas.

La propiedad de reflexión de las elipses se emplea también en la construcción de *cúpulas susurrantes*. El sonido que proviene de un foco rebota en paredes y techo de un cuarto elíptico y pasa por el otro foco. En estas salas incluso susurros silenciosos emitidos en un foco se pueden escuchar con claridad en el otro. Las cúpulas susurrantes famosas son el Natural Statuary Hall del Capitolio de Estados Unidos en Washington, D.C. (véase la página 771) y el Mormon Tabernacle en Salt Lake City, Utah.

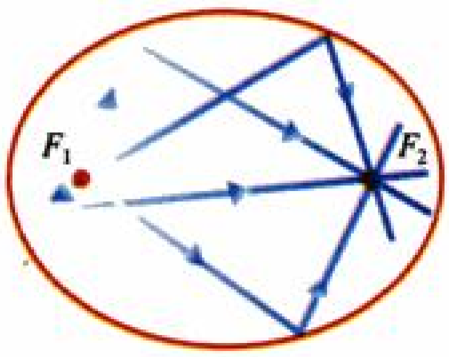


Figura 10

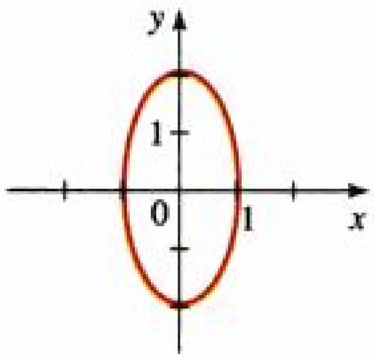
10.2 Ejercicios

1–4 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

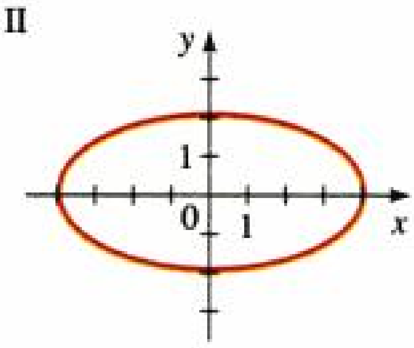
1. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **2.** $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

3. $4x^2 + y^2 = 4$ **4.** $16x^2 + 25y^2 = 400$

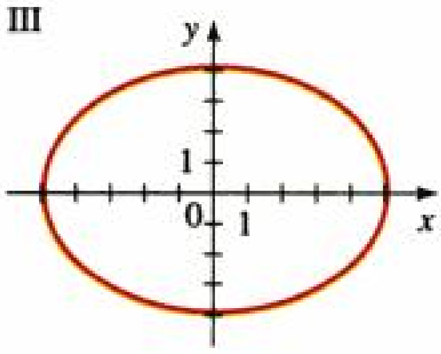
I



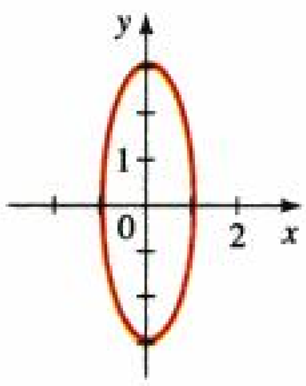
II



III



IV



5–18 ■ Encuentre los vértices, focos y excentricidad de la elipse. Determine las longitudes de los ejes mayor y menor, y bosqueje su gráfica.

5. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **6.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

7. $9x^2 + 4y^2 = 36$ **8.** $4x^2 + 25y^2 = 100$

9. $x^2 + 4y^2 = 16$ **10.** $4x^2 + y^2 = 16$

11. $2x^2 + y^2 = 3$ **12.** $5x^2 + 6y^2 = 30$

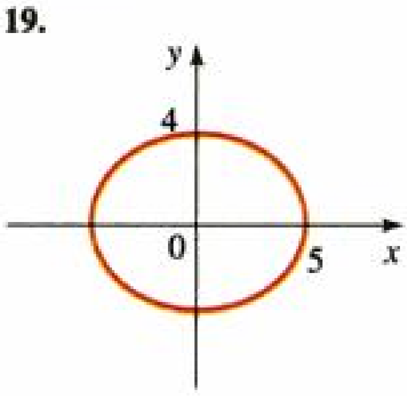
13. $x^2 + 4y^2 = 1$ **14.** $9x^2 + 4y^2 = 1$

15. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$ **16.** $x^2 = 4 - 2y^2$

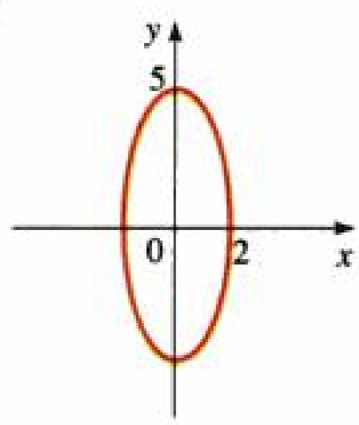
17. $y^2 = 1 - 2x^2$ **18.** $20x^2 + 4y^2 = 5$

19–24 ■ Encuentre una ecuación para la elipse cuya gráfica se muestra.

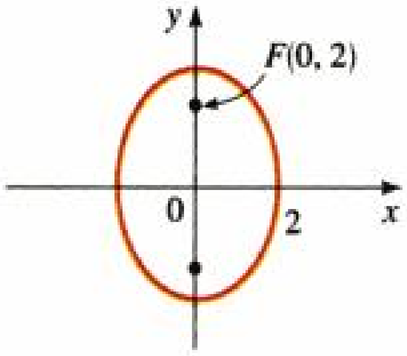
19.



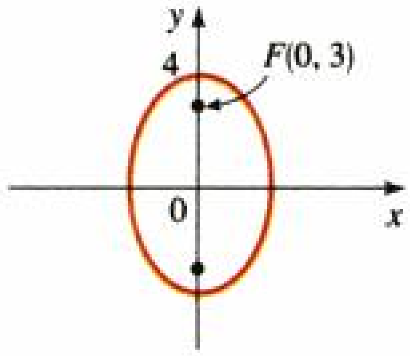
20.



21.



22.



10.3 Hipérbolas

Aunque las elipses y las hipérbolas tienen formas completamente distintas, sus definiciones y ecuaciones son similares. En lugar de usar la *suma* de distancias desde dos focos fijos, como en el caso de una elipse, se usa la *diferencia* para definir una hipérbola.

Definición geométrica de una hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de los puntos en el plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Véase la figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

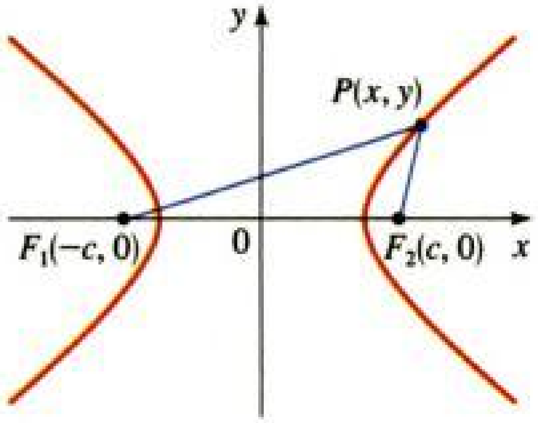


Figura 1

P está en la hipérbola si $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Como en el caso de la elipse, se obtiene la ecuación más simple para la hipérbola al colocar los focos en el eje x en $(\pm c, 0)$, como se muestra en la figura 1. Por definición, si $P(x, y)$ se encuentra sobre la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a alguna constante positiva, que se llama $2a$. Así, se tiene

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o bien

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Si se procede como se hizo en el caso de la elipse (sección 10.2), esto se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Del triángulo PF_1F_2 en la figura 1 se puede observar que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. Se deduce que $2a < 2c$, o bien $a < c$. Así, $c^2 - a^2 > 0$, de modo que se puede establecer $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces se simplifica la última ecuación mostrada para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la *ecuación de la hipérbola*. Si se remplaza x por $-x$ o y por $-y$ en esta ecuación, permanece sin cambio, así que la parábola es simétrica con respecto a los ejes x y y y respecto al origen. Las intersecciones con el eje x son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. No hay intersección con el eje y porque al fijar $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola se obtiene $-y^2 = b^2$, que no tiene solución real. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

de modo que $x^2/a^2 \geq 1$; así, $x^2 \geq a^2$, y por consiguiente $x \geq a$ o $x \leq -a$. Esto significa que la hipérbola consiste en dos partes, llamadas **ramas**. El segmento que une los dos vértices en las ramas separadas es el **eje transversal** de la hipérbola, y el origen se llama **centro**.

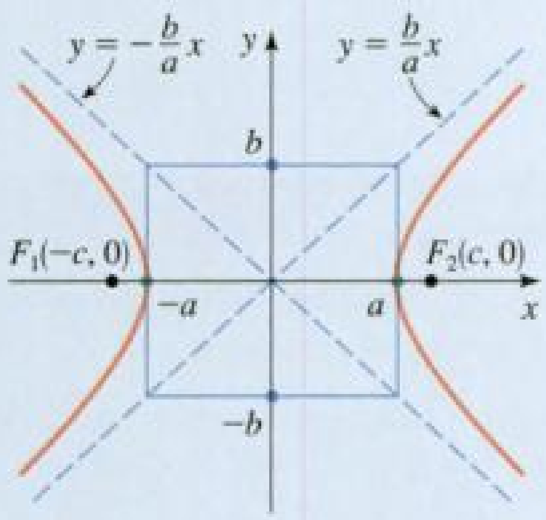
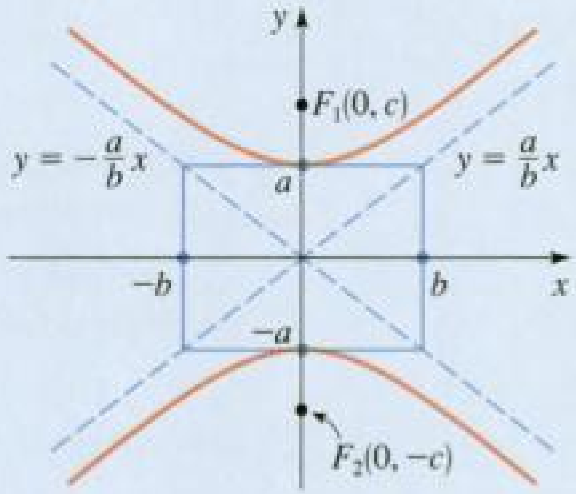
Si se colocan los focos de la hipérbola en el eje y en vez de en el eje x, entonces esto tiene el efecto de invertir los papeles de x y y en la derivación de la ecuación de la hipérbola. Esto origina una hipérbola con un eje transversal horizontal.

Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

Las propiedades principales de las hipérbolas se listan en el cuadro siguiente.

Hipérbola con centro en el origen

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una hipérbola con centro en el origen y que tiene las siguientes propiedades.

ECUACIÓN	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE TRANSVERSAL	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
ASÍNTOTAS	$y = \pm \dfrac{b}{a}x$	$y = \pm \dfrac{a}{b}x$
FOCOS	$(\pm c, 0), \quad c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c), \quad c^2 = a^2 + b^2$
GRÁFICA		

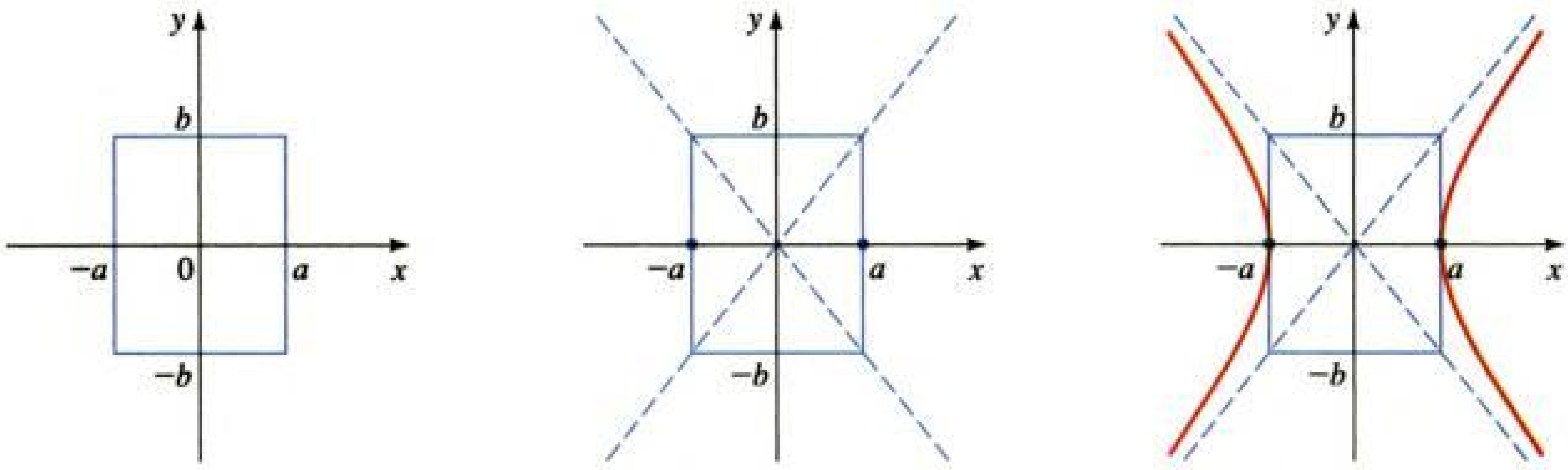
Las asíntotas de funciones racionales se analizan en la sección 3.6.

Las *asíntotas* mencionadas en este cuadro son líneas a las que se aproxima la hipérbola para valores grandes de x y y. Para encontrar las asíntotas en el primer caso del cuadro, de la ecuación se despeja y para obtener

$$\begin{aligned} y &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ &= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \end{aligned}$$

A medida que crece x, a^2/x^2 se aproxima cada vez más a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$ se tiene $a^2/x^2 \to 0$. Por consiguiente, para x grande el valor de y se puede aproximar como $y = \pm(b/a)x$. Esto muestra que estas líneas son asíntotas de la hipérbola.

Las asíntotas son una ayuda esencial para graficar una hipérbola; ayudan a determinar su forma. Una manera conveniente de encontrar las asíntotas, para una hipérbola con eje transversal horizontal, es graficar primero los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Luego, se bosquejan los segmentos verticales y horizontales que pasan por estos puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura 2a) en la página siguiente. A este rectángulo se le llama **caja central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales de la caja central son $\pm b/a$, de modo que al extenderlas se obtienen las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, como se bosqueja en el inciso b) de la figura. Por último, se grafican los vértices y se usan las asíntotas como guía para bosquejar la hipérbola mostrada en el inciso c). (Un procedimiento similar se aplica para graficar una hipérbola que tiene un eje transversal vertical.)



a) Caja central   b) Asíntotas   c) Hipérbola

Figura 2

Pasos para graficar la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Cómo bosquejar una hipérbola

1. **Dibuje el cuadro central.** Este es el rectángulo centrado en el origen, con lados paralelos a los ejes, que cruzan un eje en $\pm a$, el otro en $\pm b$.
2. **Bosqueje las asíntotas.** Estas son las líneas que se obtienen al extender las diagonales del cuadro central.
3. **Grafique los vértices.** Éstos son las dos intersecciones con el eje x y las dos intersecciones con el eje y.
4. **Bosqueje la hipérbola.** Comience en un vértice y bosqueje una rama de la hipérbola, que se aproxima a las asíntotas. Bosqueje la otra rama de la misma manera..

Ejemplo 1 Una hipérbola con eje transversal horizontal

Una hipérbola tiene la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) Encuentre los vértices, focos y asíntotas, y bosqueje la gráfica.

b) Dibuje la gráfica en una calculadora.

Solución

a) Primero divida ambos lados de la ecuación entre 144 para escribirla en forma estándar:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

La gráfica se muestra en la figura 5.

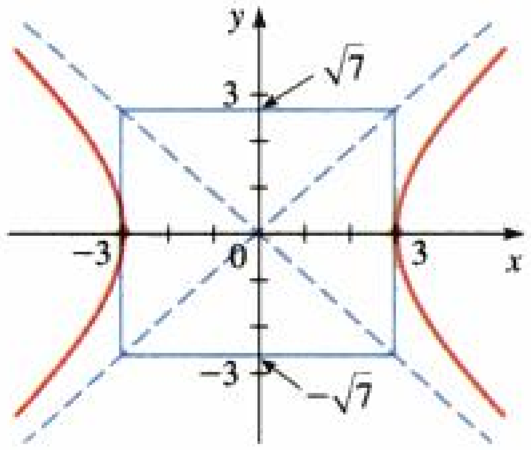


Figura 5
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

Ejemplo 4 Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Encuentre la ecuación y los focos de la hipérbola con vértices $(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm 2x$. Bosqueje la gráfica.

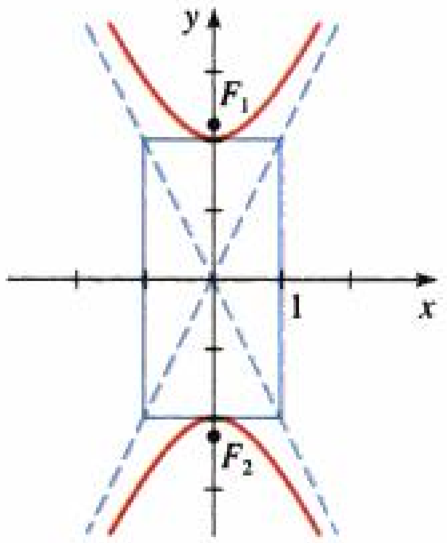


Figura 6
$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

Solución Puesto que los vértices están sobre el eje y, la hipérbola tiene un eje transversal vertical con $a = 2$. De la ecuación de la asíntota se ve que $a/b = 2$. Puesto que $a = 2$, se obtiene $2/b = 2$ y, por lo tanto, $b = 1$. Así, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para hallar los focos, se calcula $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Así, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica se muestra en la figura 6.

Al igual que las parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una *propiedad de reflexión* interesante. La luz dirigida a un foco de un espejo hiperbólico se refleja hacia el otro foco, según se ilustra en la figura 7. Esta propiedad se usa en la construcción de telescopios tipo Cassegrain. Se coloca un espejo hiperbólico en el tubo telescópico de modo que la luz reflejada del reflector parabólico primario se dirija a un foco del espejo hiperbólico. La luz se enfoca de nuevo a un punto más accesible debajo del reflector primario (figura 8).

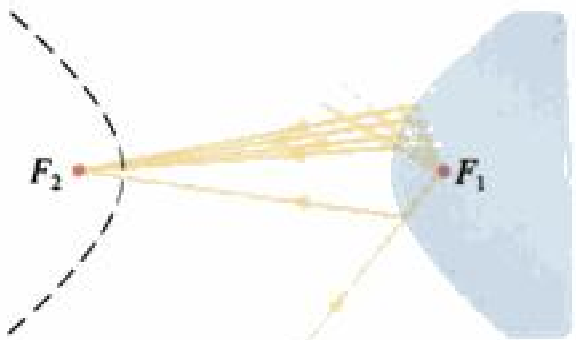


Figura 7
Propiedad de reflexión de las hipérbolas

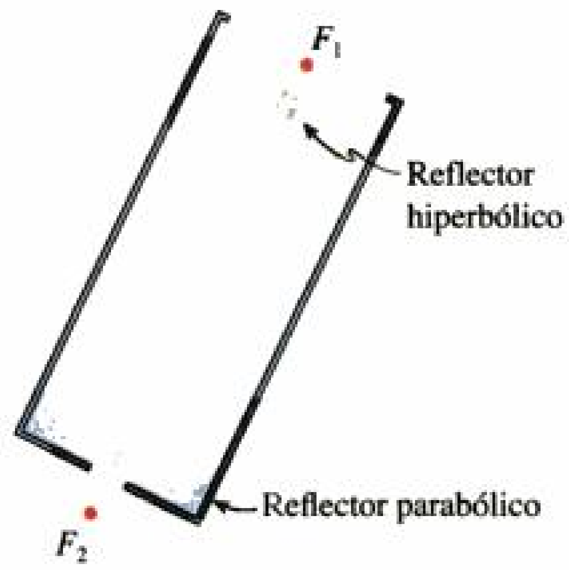


Figura 8
Telescopio tipo Cassegrain

El sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) se usó hasta comienzos de la década de 1990; ahora ha sido superado por el sistema GPS (véase la página 656). En el sistema LORAN, las hipérbolas se emplean a bordo de una nave para determinar su ubicación. En la figura 9 las estaciones de radio en A y B transmiten señales en forma simultánea para que las reciba la nave en P. La computadora de abordo convierte la diferencia de tiempo en recepción de estas señales en una diferencia de distancia $d(P, A) - d(P, B)$. De la definición de una hipérbola ésta localiza la nave en una rama de una hipérbola con focos en A y B (bosquejados en negro en la figura). El mismo procedimiento se lleva a cabo en otras dos estaciones de radio en C y D, y con esto se localiza a la nave en una segunda hipérbola (mostrada en rojo en la figura). (En la práctica, sólo se requieren tres estaciones porque una de ellas se puede usar como foco para ambas hipérbolas.) Las coordenadas del punto de intersección de estas dos hipérbolas, que pueden ser calculadas con precisión por la computadora, dan la ubicación de P.

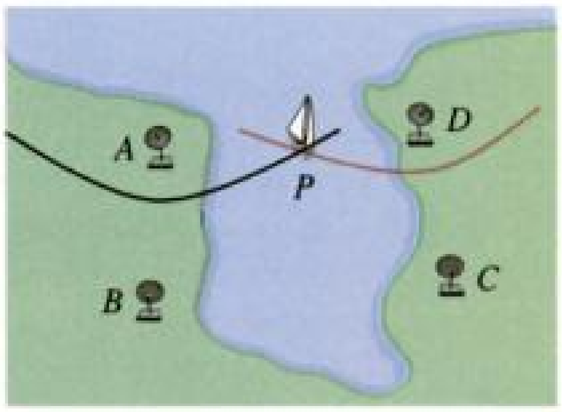


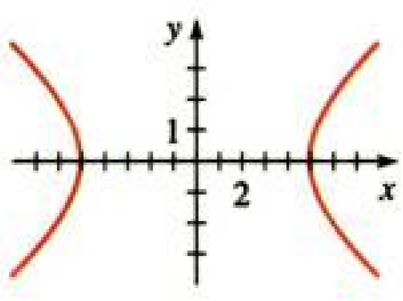
Figura 9
Sistema LORAN para hallar la ubicación de una nave

10.3 Ejercicios

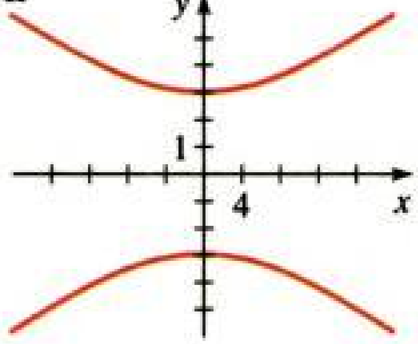
1–4 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

1. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$
2. $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$
3. $16y^2 - x^2 = 144$
4. $9x^2 - 25y^2 = 225$

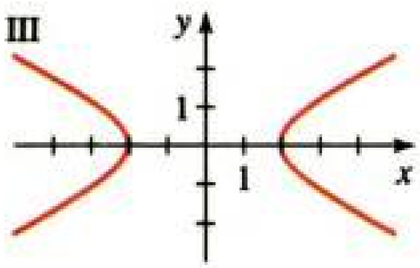
I



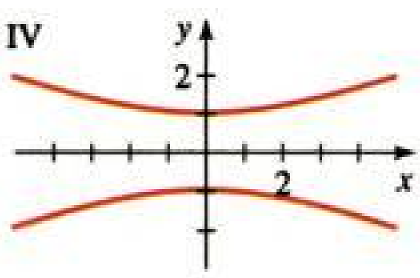
II



III



IV

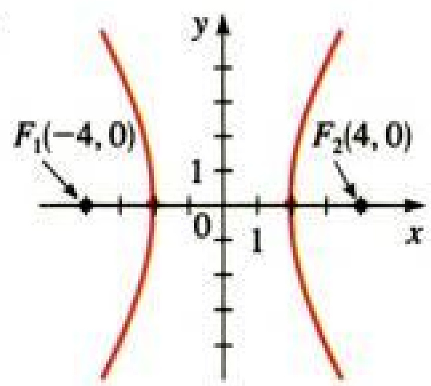


5–16 ■ Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y bosqueje su gráfica.

5. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
6. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$
7. $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$
8. $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$
9. $x^2 - y^2 = 1$
10. $9x^2 - 4y^2 = 36$
11. $25y^2 - 9x^2 = 225$
12. $x^2 - y^2 + 4 = 0$
13. $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$
14. $x^2 - 2y^2 = 3$
15. $4y^2 - x^2 = 1$
16. $9x^2 - 16y^2 = 1$

17–22 ■ Encuentre la ecuación para la hipérbola cuya gráfica se muestra.

17.



b) Use un dispositivo de graficación para dibujar las ramas superiores de la familia de hipérbolas del inciso a) para $k = 1, 4, 8$ y 12. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando se incrementa k?

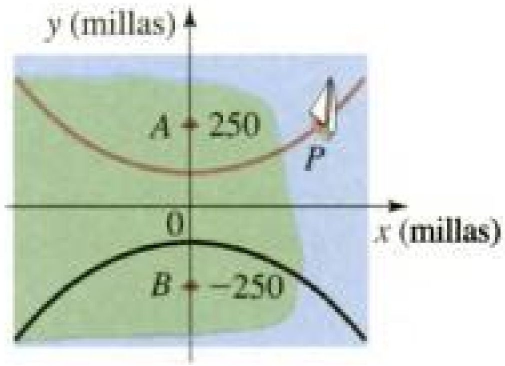
Aplicaciones

44. Navegación En la figura, las estaciones LORAN en A y B están apartadas 500 millas y la nave en P recibe la señal de la estación A 2640 microsegundos (μs) antes de que reciba la señal de B.

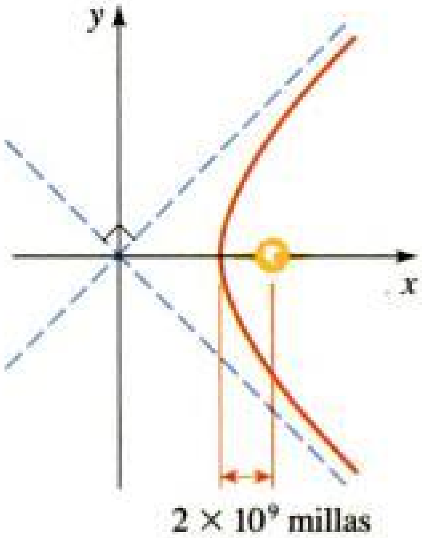
a) Si se supone que las señales de radio viajan a 980 pies/μs, encuentre $d(P, A) - d(P, B)$

b) Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura. (Use millas como unidad de distancia.)

c) Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿qué tan lejos está P de A?



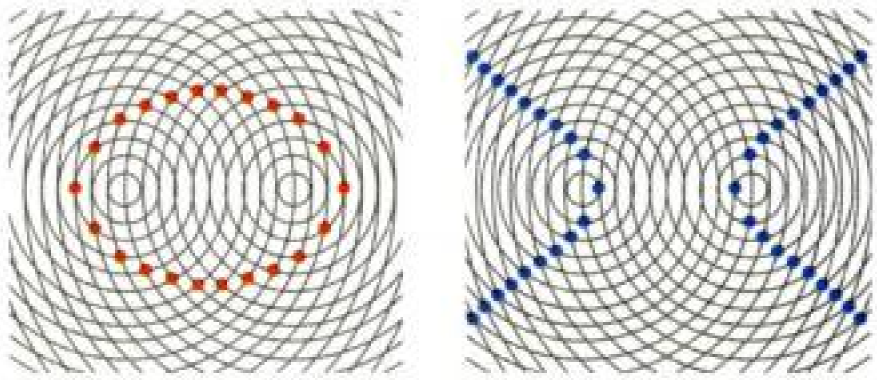
45. Trayectorias de cometas Algunos cometas, como el cometa Halley, son una parte permanente del sistema solar, que viajan en órbitas elípticas alrededor del Sol. Otros pasan por el sistema solar sólo un vez, siguiendo una trayectoria hiperbólica con el Sol en un foco. La figura muestra la trayectoria de esta clase de cometa. Encuentre una ecuación para la trayectoria, suponiendo que lo más que el cometa se aproxima al Sol son 2×10^9 millas y que la trayectoria que estaba tomando el cometa antes de acercase al sistema solar es en un ángulo recto a la trayectoria que continúa después de dejar el sistema solar.



46. Ondas en un estanque Se lanzan dos piedras al mismo tiempo en un estanque de agua en calma. Las crestas de las ondas resultantes forman círculos concéntricos igualmente espaciados, como se muestra en las figuras. Las ondas interactúan entre sí para crear ciertos patrones de interferencia.

a) Explique por qué los puntos rojos yacen sobre una elipse.

b) Explique por qué los puntos azules yacen en una hipérbola.



Descubrimiento • Debate

47. Hipérbolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de los usos de hipérbolas. Encuentre otras situaciones de la vida real donde ocurren hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica en su biblioteca, o busque en Internet.

48. Luz de una lámpara La luz de una lámpara forma un área iluminada en una pared, como se muestra en la figura. ¿Por qué el límite de esta área iluminada es una hipérbola? ¿Cómo se puede sostener una linterna de modo que su haz forme una hipérbola en el suelo?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Cónicas en la arquitectura

En la antigüedad la arquitectura fue parte de las matemáticas, así que los arquitectos tenían que ser matemáticos. Muchas de las estructuras que construían, pirámides, templos, anfiteatros y proyectos de irrigación, aún están en pie. En la actualidad los arquitectos emplean principios matemáticos incluso más complejos. Las fotografías siguientes muestran algunas estructuras que emplean secciones cónicas en su diseño.

Anfiteatro romano en Alejandría, Egipto (círculo)

Nik Wheeler/Corbis

Techo del Statuary Hall en el Capitolio de Estados Unidos (elipse)

Architect of the Capitol

Techo del Skydome en Toronto, Canadá (parábola)

Walter Schmid/Stone/Getty Images

Techo del aeropuerto Dulles en Washington (hipérbola y parábola)

Richard T. Nowitz/Corbis

Planetario McDonnell, St. Louis, MO (hipérbola)

Cortesía de Chamber of Commerce, St. Louis, MO

Ático en La Pedrera, Barcelona, España (parábola)

O. Alamany and Vincens/Corbis

Los arquitectos tienen razones diferentes para usar cónicas en sus diseños. Por ejemplo, el arquitecto español Antoni Gaudi empleó parábolas en el ático de La Pedrera (véase la foto anterior). Su razonamiento fue que una cuerda suspendida entre dos puntos con carga igualmente distribuida (como en un puente suspendido) tiene la forma de una parábola, una parábola invertida proveería el mejor apoyo para un techo plano.

Construcción de cónicas

Las ecuaciones de las cónicas son útiles para fabricar objetos pequeños, porque una herramienta de corte controlada por computadora puede trazar con exactitud una curva dada por una ecuación. Pero en un proyecto de construcción, ¿cómo se puede construir una porción de una parábola, elipse o hipérbola que abarca el

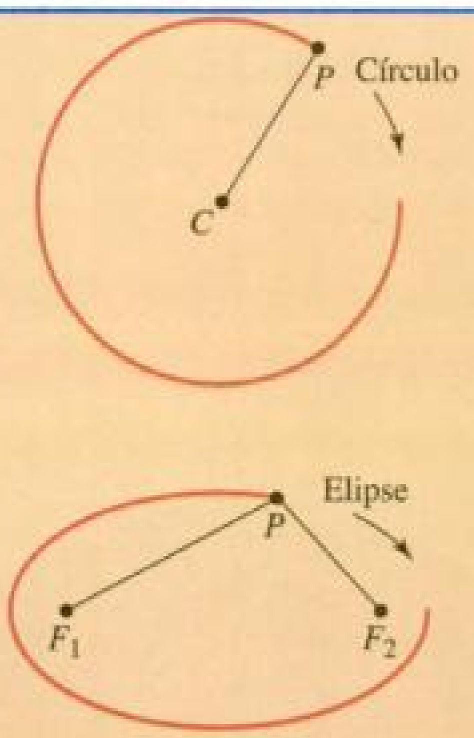


Figura 1
Construcción de un círculo y una elipse

techo o paredes de un edificio? Las propiedades geométricas de las cónicas proveen formas prácticas para construirlas. Por ejemplo, si estuviera construyendo una torre circular, elegiría un punto central, luego se aseguraría de que las paredes de la torre estuvieran a una distancia fija de ese punto. Las paredes elípticas se pueden construir por medio de una cuerda anclada en dos puntos, como se ilustra en la figura 1.

Para construir una parábola, se puede usar el aparato mostrado en la figura 2. Un trozo de cuerda de longitud a se ancla en F y A. La escuadra en T, también de longitud a, se desliza a lo largo de la barra recta L. Un lápiz en P sostiene la cuerda tensa contra la escuadra. Cuando la escuadra en T se desliza a la derecha el lápiz traza una curva.

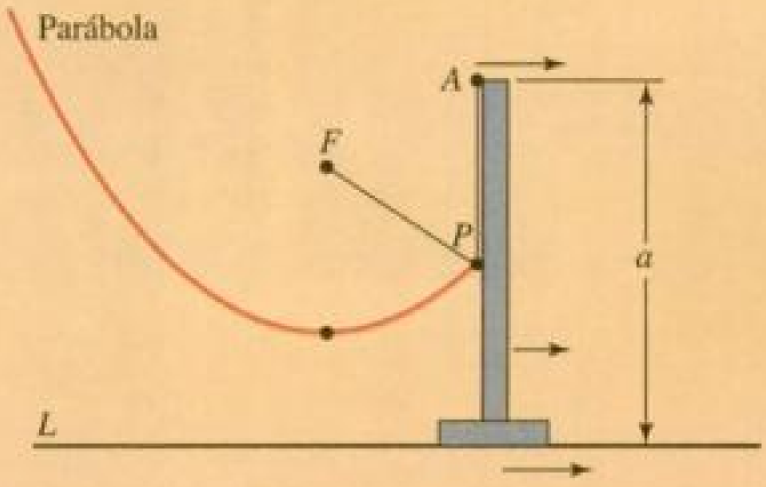


Figura 2
Construcción de una parábola

De la figura se puede observar que

$$d(F, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La cuerda es de longitud } a$$

$$d(L, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La escuadra en T es de longitud } a$$

Se deduce que $d(F, P) + d(P, A) = d(L, P) + d(P, A)$. Al restar $d(P, A)$ de cada lado, se obtiene

$$d(F, P) = d(L, P)$$

La última ecuación dice que la distancia de F a P es igual a la distancia de P a la línea L. Así, la cuerva es una parábola con foco F y directriz L.

En proyectos de construcción es más fácil construir una recta que una curva. Por lo tanto, en algunos edificios, como en la Torre Kobe (véase el problema 4), se produce una superficie curva al usar muchas rectas. Se puede producir una curva usando líneas rectas, como la parábola mostrada en la figura 3.

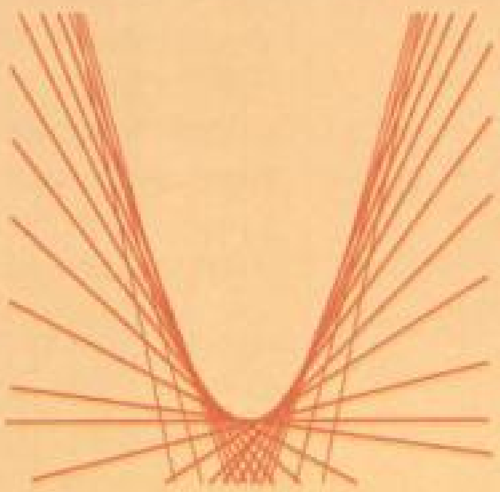


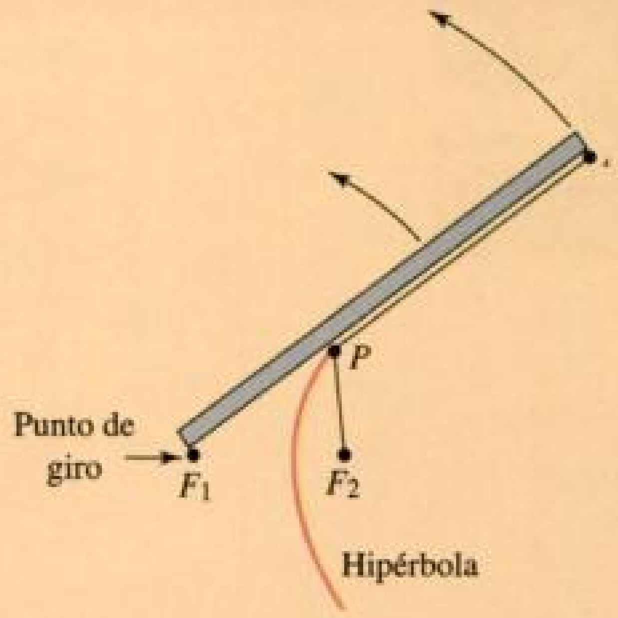
Figura 3
Rectas tangentes a una parábola

Cada recta es **tangente** a la parábola; es decir, la línea que se encuentra con la parábola en exactamente un punto y no la cruza. La recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) es

$$y = 2ax - a^2$$

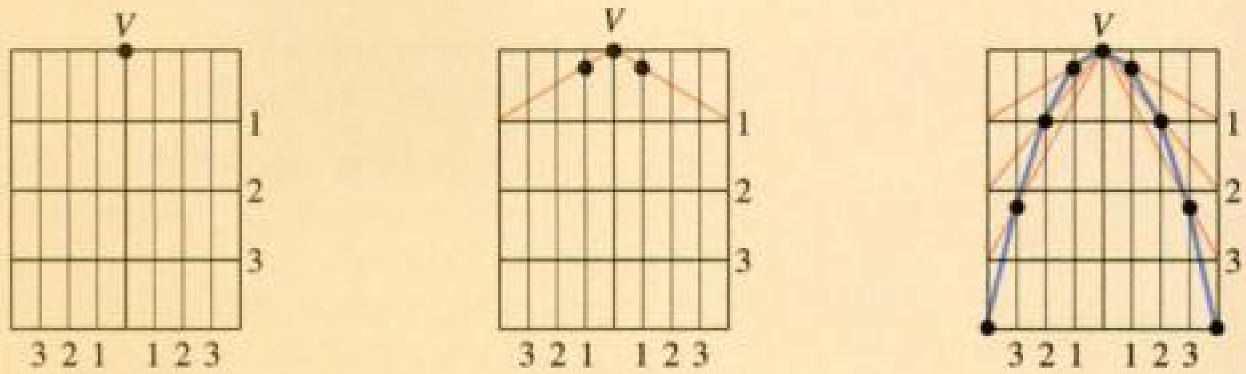
En el problema 6 se pide demostrar esto. La parábola se llama **envolvente** de tales líneas.

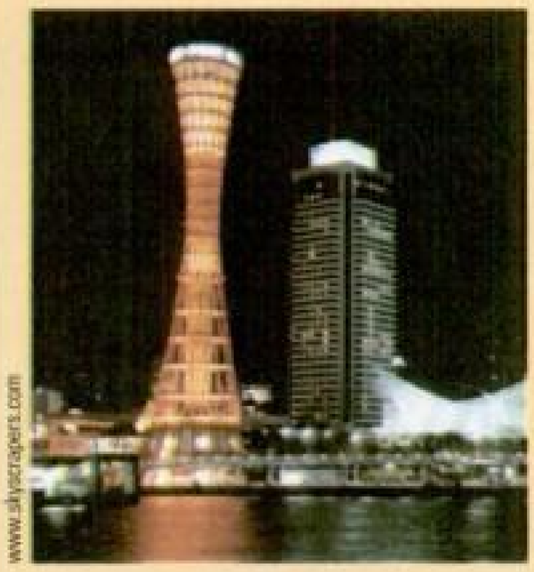
1. Las fotografías de la página 771 muestran seis ejemplos de edificios que contienen secciones cónicas. Busque en Internet otros ejemplos de estructuras que emplean parábolas, elipses o hipérbolas en su diseño. Encuentre por lo menos un ejemplo de cada tipo de cónica.
2. En este problema se construye una parábola. La barra de madera de la figura puede rotar en F_1. Una cuerda más corta que la barra está anclada en F_2 y en A, al otro extremo de la barra. Un lápiz en P sostiene tensa a la cuerda contra la barra cuando se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de F_1.
   a) Muestre que la curva trazada con el lápiz es una rama de un hipérbola con focos en F_1 y F_2.
   b) ¿Cómo se debe configurar el aparato para dibujar la otra rama de la hipérbola?



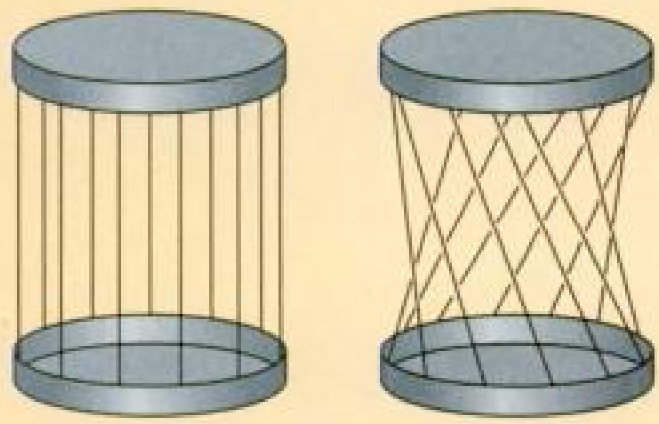
3. El siguiente método se puede usar para construir una parábola que ajusta en un rectángulo dado. La parábola será aproximada mediante muchos segmentos de recta cortos.

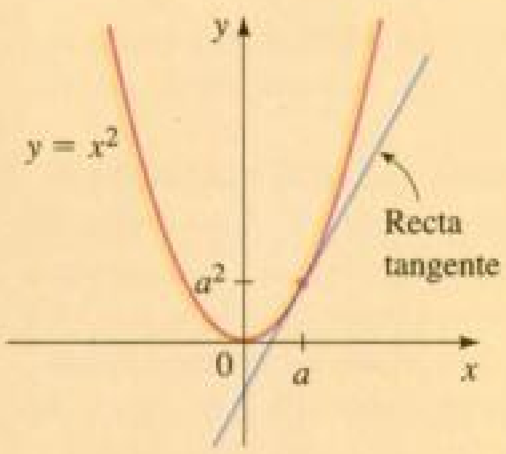
   Primero, dibuje un rectángulo. Divida el rectángulo a la mitad mediante un segmento de recta y marque el punto final superior con V. A continuación, divida la longitud y el ancho de cada mitad de rectángulo en un número igual de partes para formar líneas de cuadrícula, como se muestra en la figura de la página siguiente. Dibuje líneas de V a los puntos finales de la línea de cuadrícula horizontal 1 y marque los puntos donde estas líneas cortan a las líneas de cuadrícula verticales marcadas con 1. A continuación, dibuje líneas de V a los puntos finales de la línea de cuadrícula horizontal 2 y marque los puntos donde estás líneas cortan a las líneas de cuadrícula verticales marcadas con 2. Continúe de esta manera hasta que haya usado todas las líneas de cuadrícula horizontales. Ahora, use segmentos de recta para unir los puntos que marcó para obtener una aproximación a la parábola deseada. Aplique este procedimiento para dibujar una parábola que ajuste en un rectángulo de 6 por 10 pies sobre césped.





4. En este problema se construyen formas hiperbólicas por medio de rectas. Haga orificios igualmente espaciados en los bordes de dos tapas de plástico grandes. Una los orificios correspondientes con cuerdas de igual longitud como se muestra en la figura. Manteniendo tensas las cuerdas, gire una tapa en dirección contraria a la otra. Una superficie imaginaria que pasa por las cuerdas tiene secciones transversales hiperbólicas. (Un ejemplo arquitectónico de esto es la torre Kobe en Japón mostrada en la fotografía.) ¿Qué sucede con los vértices de las secciones transversales hiperbólicas cuando se hacen girar más las tapas?





5. En este problema se muestra que la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) tiene la ecuación $y = 2ax - a^2$.

a) Sea m la pendiente de la recta tangente en (a, a^2). Muestre que la ecuación de la recta tangente es $y - a^2 = m(x - a)$.

b) Use el hecho de que la tangente interseca a la parábola en sólo un punto para mostrar que (a, a^2) es la única solución del sistema.

$$\begin{cases} y - a^2 = m(x - a) \\ y = x^2 \end{cases}$$

c) Elimine a y del sistema del inciso b) para obtener una ecuación cuadrática en x. Muestre que el discriminante de esta ecuación cuadrática es $(m - 2a)^2$. Puesto que el sistema en b) tiene exactamente una solución, el discriminante debe ser igual a 0. Encuentre m.

d) Sustituya el valor para m que encontró en el inciso c) en la ecuación del inciso a) y simplifique para obtener la ecuación de la recta tangente.

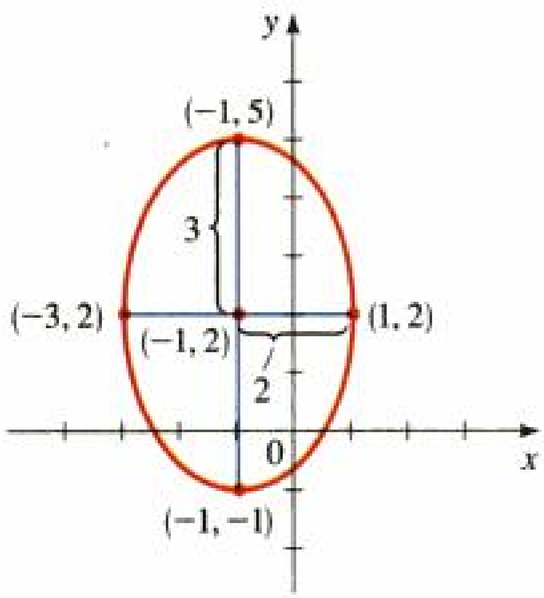


Figura 2
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba dos unidades. Los puntos finales de los ejes menor y mayor de la elipse desplazada son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$. Se aplican los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$(2, 0) \to (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)$$
$$(-2, 0) \to (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)$$
$$(0, 3) \to (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)$$
$$(0, -3) \to (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)$$

Esto ayuda a trazar la gráfica de la figura 2.

Para hallar los focos de la elipse desplazada, primero se encuentran los focos de la elipse con centro en el origen. Puesto que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, se tiene $c^2 = 9 - 4 = 5$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Por lo tanto, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. Al desplazar a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, se obtiene

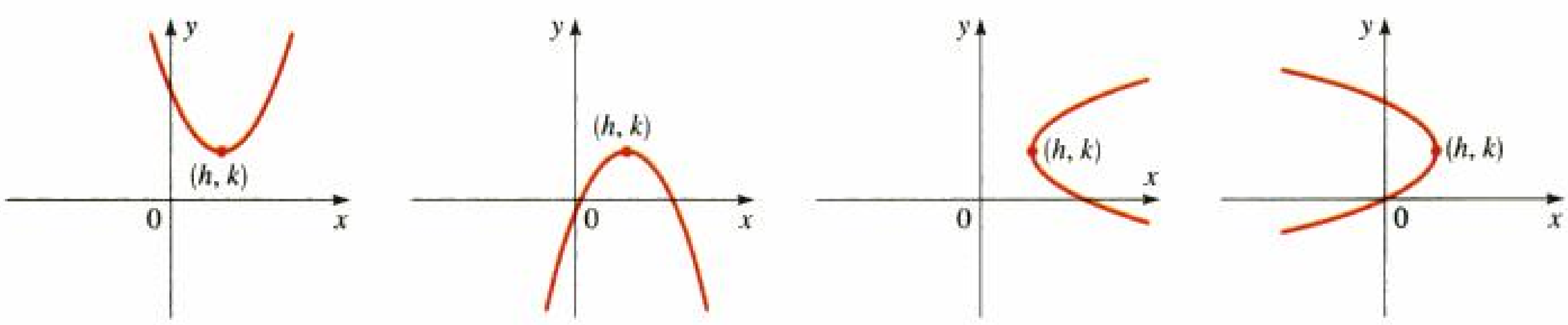
$$(0, \sqrt{5}) \to (0 - 1, \sqrt{5} + 2) = (-1, 2 + \sqrt{5})$$
$$(0, -\sqrt{5}) \to (0 - 1, -\sqrt{5} + 2) = (-1, 2 - \sqrt{5})$$

Así, los focos de la elipse desplazada son

$$(-1, 2 + \sqrt{5}) \quad \text{y} \quad (-1, 2 - \sqrt{5})$$ ■

Parábolas desplazadas

Aplicar desplazamientos a las parábolas conduce a las ecuaciones y gráficas mostradas en la figura 3.



a) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p > 0$
b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p < 0$
c) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p > 0$
d) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p < 0$

Figura 3
Parábolas desplazadas

Ejemplo 2 Graficar una parábola desplazada

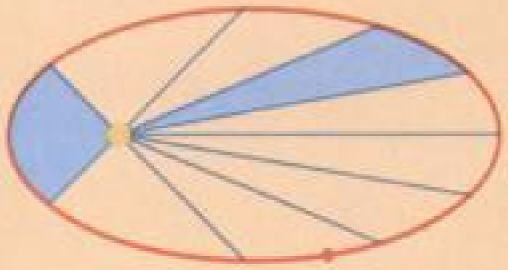
Determine el vértice, foco y directriz y bosqueje la gráfica de la parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

Johannes Kepler (1571-1630) fue el primero en dar una descripción correcta del movimiento de los planetas. La cosmología de su tiempo postuló sistemas complicados de círculos que se mueven en círculos para describir estos movimientos. Kepler buscó una descripción más simple y armoniosa. Como astrónomo oficial en la corte imperial en Praga, estudió las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, cuyos datos eran los más exactos disponibles en ese momento. Después de numerosos intentos por hallar una teoría, Kepler hizo un descubrimiento momentáneo de que las órbitas de los planetas son elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco.
2. El segmento de recta que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en igual tiempo. (Véase la figura).
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje principal de su órbita.

Su formulación de estas leyes es quizá la deducción más impresionante de datos empíricos en la historia de la ciencia.



se obtiene

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(16)(-9x^2 + 72x + 16)}}{2(16)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{576x^2 - 4608x}}{32} \qquad \text{Desarrolle}$$

$$= \frac{-32 \pm 24\sqrt{x^2 - 8x}}{32} \qquad \text{Factorice 576 del radical}$$

$$= -1 \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, se grafican las funciones

$$y = -1 + 0.75\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{y} \qquad y = -1 - 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

como se ilustra en la figura 6b). ■

Ecuación general de una cónica desplazada

Si se desarrollan y simplifican las ecuaciones de cualquiera de las cónicas desplazadas ilustradas en las figuras 1, 3 y 5, entonces siempre se obtendrá una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son ambas cero. Por el contrario, si se comienza con una ecuación de esta forma, entonces se puede completar el cuadrado en x y y para ver qué tipo de sección cónica representa la ecuación. En algunos casos, la gráfica de la ecuación resulta ser sólo un par de líneas, un solo punto, o bien, podría no haber gráfica en absoluto. Estos casos se llaman **cónicas degeneradas**. Si la ecuación no es degenerada, entonces se puede decir si representa una parábola, una elipse o una hipérbola, simplemente examinando los signos de A y C, como se describe en el cuadro siguiente.

Ecuación general de una cónica desplazada

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son cero, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si A o C es 0
2. una elipse si A y C tienen el mismo signo (o un círculo si $A = C$)
3. una hipérbola si A y C tienen signos opuestos

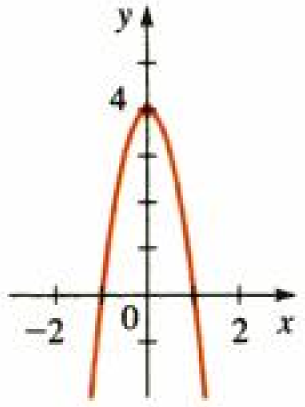
Ejemplo 4 Una ecuación que conduce a una cónica degenerada

Bosqueje la gráfica de la ecuación

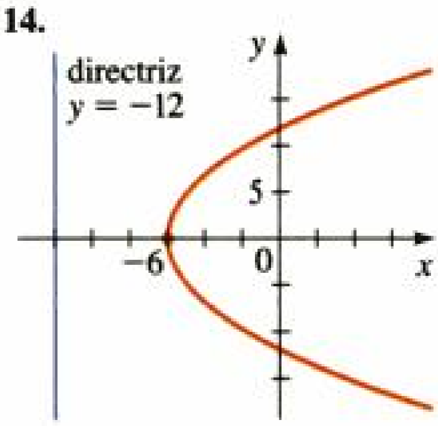
$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

13–18 ■ Halle una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

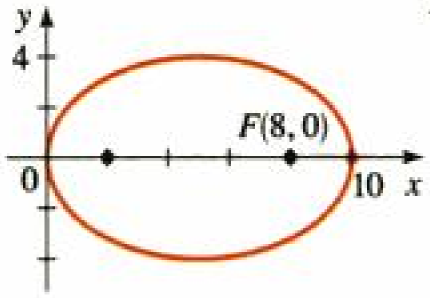
13.



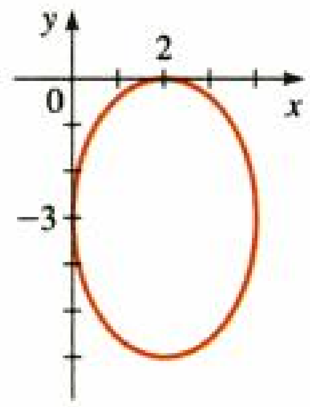
14.



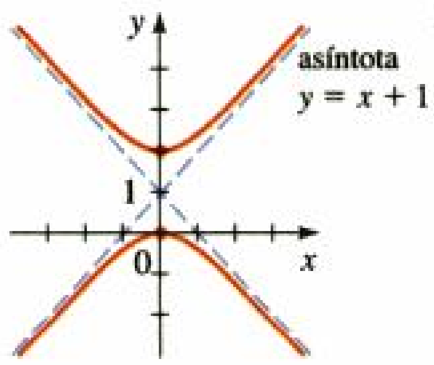
15.



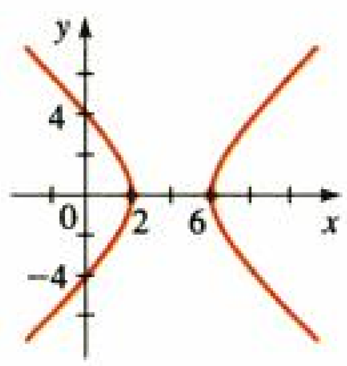
16.



17.



18.



19–30 ■ Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, determine el vértice, foco y directriz. Si es una hipérbola, encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas. Después bosqueje la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica explique por qué.

19. $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$ **20.** $y^2 = 4(x + 2y)$

21. $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

22. $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

23. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

24. $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

25. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

26. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

27. $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$ **28.** $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

29. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

30. $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

31–34 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la cónica.

31. $2x^2 - 4x + y + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

33. $9x^2 + 36 = y^2 + 36x + 6y$

34. $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

35. Determine cuál debe ser el valor de F si la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

es **a)** una elipse, **b)** un solo punto o **c)** el conjunto vacío.

36. Encuentre una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y tiene su otro foco en el origen.

37. Este ejercicio trata con las **parábolas focales**, es decir, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

a) Dibuje las gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

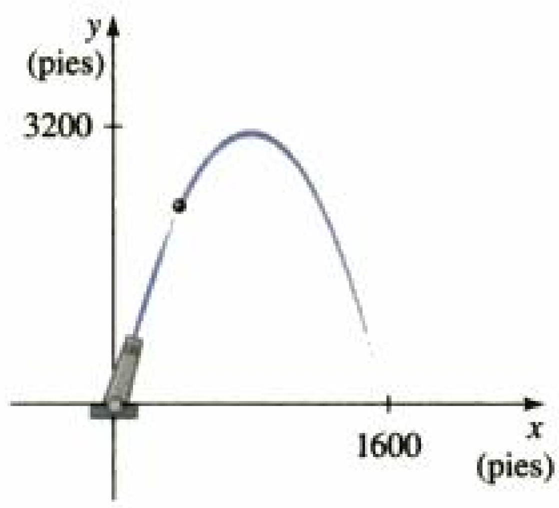
para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

b) Muestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

c) Describa el efecto sobre la gráfica de mover el vértice más cerca del origen.

Aplicaciones

38. Trayectoria de una bala de cañón Un cañón dispara una bala como se ilustra en la figura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala aterriza a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza está a 3200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para la trayectoria de la bala. Coloque el origen en el lugar del cañón.



39. Órbita de un satélite Un satélite está en una órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de la Tierra en un foco. La altura del satélite arriba de la Tierra varía entre 140 y 440 millas. Suponga que la Tierra es una esfera con radio de

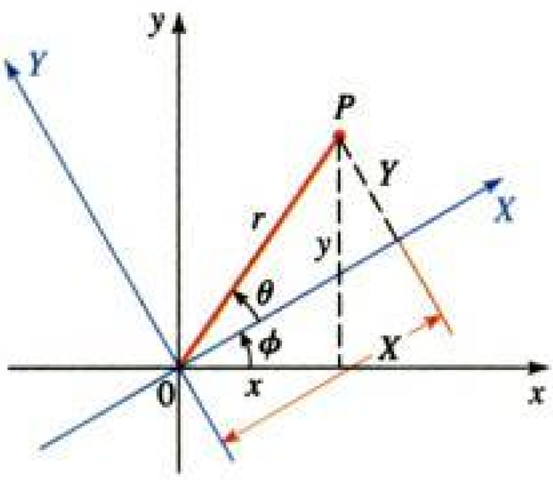


Figura 2

Al usar la fórmula de adición para el coseno, se puede observar que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi \\ &= X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

De manera similar, se puede aplicar la fórmula de adición para el seno a la expresión para y a fin de obtener $y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$. Cuando estas ecuaciones para x y y se tratan como un sistema de ecuaciones lineales en las variables X y Y (véase el ejercicio 33), se obtienen expresiones para X y Y en términos de x y y, según se detalla en el siguiente cuadro.

Rotación de fórmulas de ejes

Suponga que los ejes x y y en un plano coordenado se rotan por un ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y, como se muestra en la figura 1. Entonces las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en los planos xy y XY se relacionan como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \qquad X = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$$

$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi \qquad Y = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$$

Ejemplo 1 Rotación de ejes

Si el sistema coordenado se hace girar por un ángulo de 30°, encuentre las coordenadas XY del punto con coordenadas xy $(2, -4)$.

Solución Usando las fórmulas de rotación de ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$, se obtiene

$$X = 2\cos 30° + (-4)\operatorname{sen} 30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\operatorname{sen} 30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas XY son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$. ■

Ejemplo 2 Rotación de una hipérbola

Gire los ejes coordenados 45° para mostrar que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

Solución Se usan las fórmulas de rotación de ejes con $\phi = 45°$ para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\operatorname{sen} 45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Al desarrollar y reunir términos semejantes, se obtiene

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

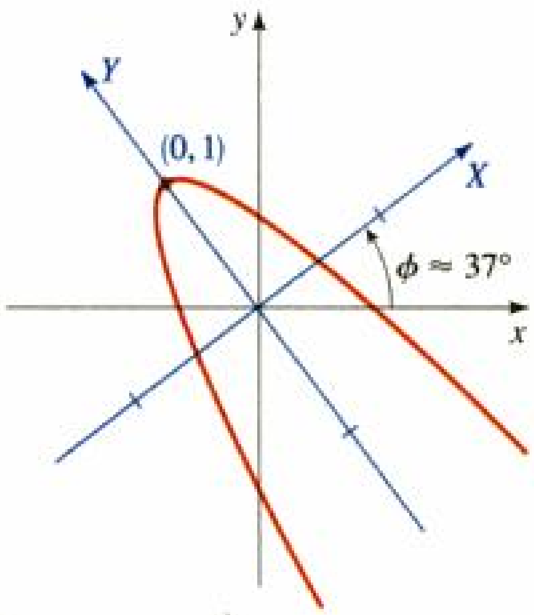
$$-4X^2 = Y - 1 \qquad \text{Simplifique}$$

$$X^2 = -\tfrac{1}{4}(Y - 1) \qquad \text{Divida entre 4}$$

b) Se reconoce a ésta como la ecuación de la parábola que abre a lo largo del eje Y negativo y tiene vértice (0, 1) en las coordenadas XY. Puesto que $4p = -\frac{1}{4}$, se tiene $p = -\frac{1}{16}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{15}{16}\right)$ y la directriz es $Y = \frac{17}{16}$. Con

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

se bosqueja la gráfica de la figura 6a).



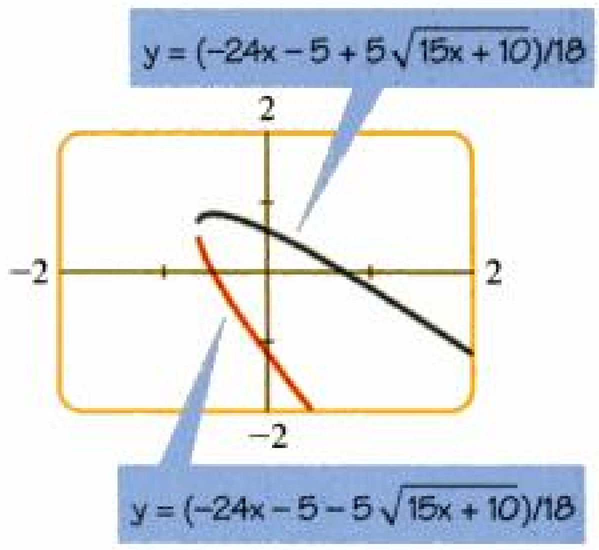


Figura 6

$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$

c) Para dibujar una gráfica por medio de una calculadora, se necesita despejar y. La ecuación dada es cuadrática en y, por lo tanto se puede usar la fórmula cuadrática para despejar y. Al escribir la ecuación en la forma

$$36y^2 + (96x + 20)y + (64x^2 - 15x - 25) = 0$$

se obtiene

$$y = \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{(96x + 20)^2 - 4(36)(64x^2 - 15x - 25)}}{2(36)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{6000x + 4000}}{72} \qquad \text{Desarrolle}$$

$$= \frac{-96x - 20 \pm 20\sqrt{15x + 10}}{72} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-24x - 5 \pm 5\sqrt{15x + 10}}{18} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la parábola, se grafican las funciones

$$y = \left(-24x - 5 + 5\sqrt{15x + 10}\right)/18 \qquad \text{y} \qquad y = \left(-24x - 5 - 5\sqrt{15x + 10}\right)/18$$

como se muestra en la figura 6b). ■

Discriminante

En los ejemplos 3 y 4 se pudo identificar el tipo de cónica al rotar los ejes. El siguiente teorema da las reglas para identificar el tipo de cónica directamente de la ecuación, sin rotar los ejes.

Identificación de cónicas mediante el discriminante

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si $B^2 - 4AC = 0$
2. una elipse si $B^2 - 4AC < 0$
3. una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

■ **Demostración** Si se hacen girar los ejes por un ángulo ϕ, se obtiene una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde $A', B', C', \ldots$ están dadas por las fórmulas de las páginas 785-786. Un cálculo directo muestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Así, la expresión $B^2 - 4AC$ permanece sin cambio para cualquier rotación. En particular, si se elige una rotación que elimina el término xy ($B' = 0$), se obtiene

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$ si A' o C' es cero; $B^2 - 4AC < 0$ si A' y C' tienen el mismo signo; y $B^2 - 4AC > 0$ si A' y C' tienen signos opuestos. De acuerdo con el cuadro de la página 780, estos casos corresponden a la gráfica de la última ecuación mostrada como una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. ■

En la demostración se indica que ninguna rotación cambia el discriminante; por esta razón, se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

Ejemplo 5 Identificar una cónica mediante el discriminante

Una cónica tiene la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

a) Use el discriminante para identificar la cónica.

b) Confirme su respuesta del inciso a) graficando la cónica con una calculadora.

Solución

a) Puesto que $A = 3$, $B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

Por lo tanto la cónica es una hipérbola.

b) Con la fórmula cuadrática el valor de y es

$$y = \frac{5x - 1 \pm \sqrt{49x^2 - 2x + 33}}{4}$$

Se grafican estas funciones en la figura 7. La gráfica confirma que se trata de una hipérbola. ■

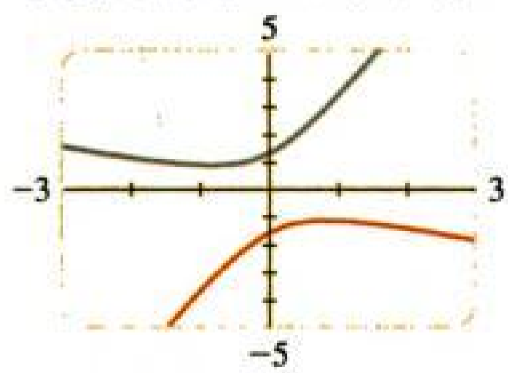


Figura 7

10.5 Ejercicios

1–6 ■ Determine las coordenadas XY del punto dado si los ejes coordenados se hacen girar por el ángulo indicado.

1. $(1, 1)$, $\phi = 45°$

2. $(-2, 1)$, $\phi = 30°$

3. $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$

4. $(2, 0)$, $\phi = 15°$

5. $(0, 2)$, $\phi = 55°$

6. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

7–12 ■ Determine la ecuación de la cónica dada en coordenadas XY cuando los ejes coordenados se hacen girar por el ángulo indicado.

7. $x^2 - 3y^2 = 4$, $\phi = 60°$

8. $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$

9. $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

10. $x^2 + 2y^2 = 16$, $\phi = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$

11. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$

12. $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

13–26 ■ **a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.
b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy.
c) Bosqueje la gráfica.

13. $xy = 8$

14. $xy + 4 = 0$

15. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

16. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$

17. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$

18. $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$

19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$

20. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$

21. $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$

22. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

23. $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

24. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x - y - 1)$

25. $52x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

26. $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

27–30 ■ **a)** Use el discriminante para identificar la cónica.
b) Confirme su respuesta graficando la cónica con un dispositivo de graficación.

27. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

28. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

29. $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

30. $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 0$

31. **a)** Use la rotación de ejes para mostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola:

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del centro, vértices y focos.

c) Halle las ecuaciones de las asíntotas en coordenadas XY y xy.

32. **a)** Use la rotación de ejes para mostrar que la siguiente ecuación representa una parábola:

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del vértice y el foco.

c) Halle la ecuación de la directriz en coordenadas XY y xy.

33. Resuelva las ecuaciones:

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$$

$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$$

para X y Y en términos de x y y. [*Sugerencia*: para empezar, multiplique la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\operatorname{sen}\phi$, y luego sume las dos ecuaciones para poder despejar X.]

34. Muestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola al rotar los ejes por un ángulo de 45°. [*Sugerencia*: primero convierte la ecuación a una que no tenga radicales.]

Descubrimiento • Debate

35. Forma matricial de las fórmulas de rotación de ejes Sean Z, Z' y R las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Muestre que las fórmulas de rotación de ejes se pueden escribir como

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{-1}Z$$

36. Invariantes algebraicas Una cantidad es invariante bajo rotación si no cambia cuando se hacen girar los ejes. Se expresó en el texto que para la ecuación general de una cónica, la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.

a) Use las fórmulas para A', B' y C' de la página 785 para probar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación; es decir, muestre que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

b) Pruebe que $A + C$ es invariante bajo rotación.

c) ¿La cantidad F es invariante bajo rotación?

37. Invariantes geométricas ¿Espera que la distancia entre dos puntos sea invariante bajo rotación? Pruebe su respuesta comparando la distancia $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$ donde P' y Q' son las imágenes de P y Q bajo una rotación de ejes.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Gráficas de computadora II

En el *Proyecto de descubrimiento* de la página 700 se vio cómo se emplea la multiplicación de matrices en las gráficas de computadora. Se encontraron matrices que reflejan, desarrollan o cortan una imagen. Ahora considere matrices que rotan una imagen, como en las gráficas mostradas aquí.

Puntos rotatorios en el plano

Recuerde que un punto (x, y) en el plano se representa mediante la matriz de 2×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. La matriz que hace girar este punto respecto al origen por un ángulo ϕ es

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz de rotación}$$

Compare esta matriz con la matriz de rotación de ejes del ejercicio 35, sección 10.5. Observe que rotar un punto en sentido contrario a las manecillas del reloj corresponde a rotar los ejes en el sentido del reloj.

Cuando se hace girar al punto $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en el sentido de las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo ϕ, se mueve a un nuevo lugar $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ dado por el producto matricial $P' = RP$, como se muestra en la figura 1.

$$P' = RP = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \\ x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}$$

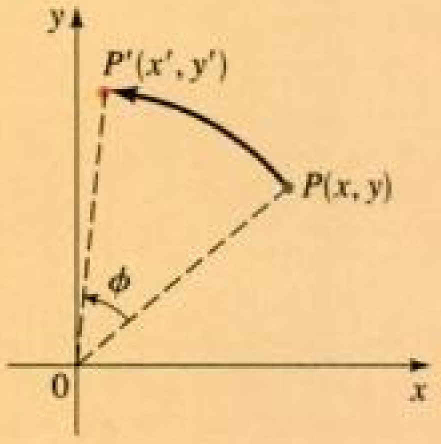


Figura 1

Por ejemplo, si $\phi = 90°$, la matriz de rotación es

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz de rotación } (\phi = 90°)$$

Al aplicar una rotación de 90° al punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se mueve al punto

$$P' = RP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Véase la figura 2.

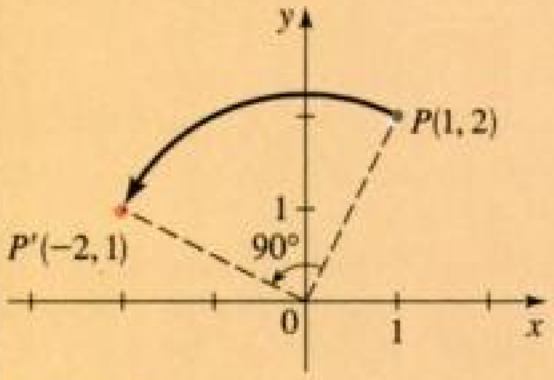


Figura 2

Rotación de imágenes en el plano

Si la matriz de rotación se aplica a todo punto de una imagen, entonces gira toda la imagen. Para rotar la casa de la figura 3a) por un ángulo de 30° respecto al origen, se multiplica su matriz de datos (descrita en la página 701) por la matriz de rotación que tiene $\phi = 30°$.

$$RD = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1.73 & 0 & -1.50 & -0.77 & 1.96 & 3.46 & 2.60 & 1.60 & 0.73 & 1.73 & 2.60 \\ 1 & 0 & 2.60 & 5.33 & 4.60 & 2 & 1.50 & 3.23 & 2.73 & 1 & 1.50 \end{bmatrix}$$

La nueva matriz de datos RD representa la casa girada en la figura 3b).

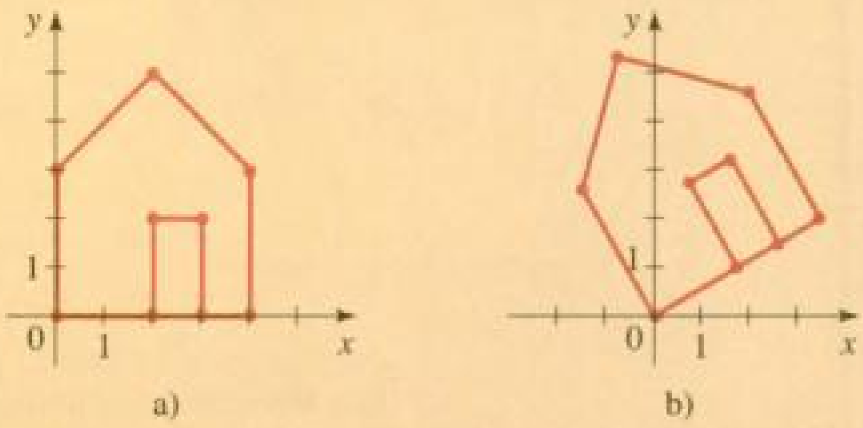


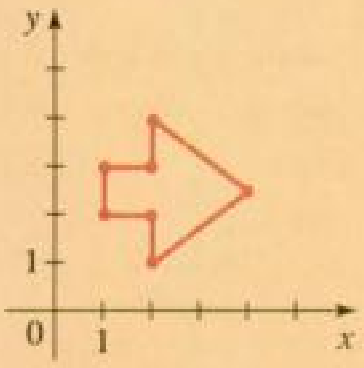
Figura 3

En el *Proyecto de descubrimiento* de la página 702 se describe un programa de la graficadora TI-83 que traza la imagen correspondiente a una determinada matriz de datos. Podría hallar conveniente usar este programa en algunas de las actividades siguientes.

1. Use una matriz de rotación para hallar las nuevas coordenadas del punto dado cuando se hace girar por el ángulo dado.

a) $(1, 4)$, $\phi = 90°$ b) $(-2, 1)$, $\phi = 60°$

c) $(-2, -2)$, $\phi = 135°$ d) $(7, 3)$, $\phi = -60°$



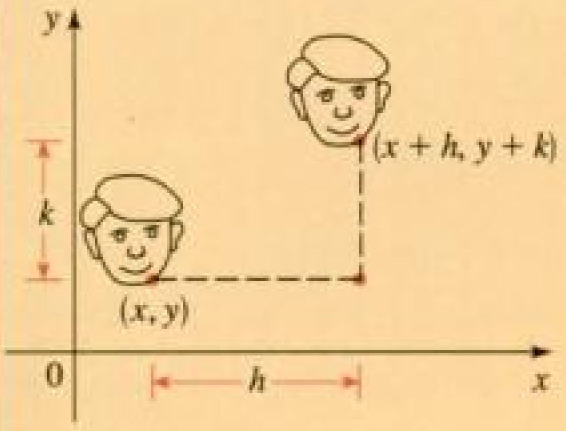
2. Encuentre una matriz de datos para el dibujo de líneas de la figura mostrada en el margen. Multiplique la matriz de datos por una matriz de rotación adecuada para girar la imagen respecto al origen por $\phi = 120°$. Bosqueje la imagen rotada dada mediante la nueva matriz de datos.

3. Bosqueje la imagen representada por la matriz de datos D.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de rotación R que corresponde a una rotación de 45°, y la matriz de transformación T que corresponde a un desarrollo por un factor de 2 en la dirección x (véase la página 701). ¿Cómo al multiplicar la matriz de datos por RT cambia la imagen? ¿Qué pasa si se multiplica por TR? Calcule los productos RTD y TRD y bosqueje las imágenes correspondientes para confirmar sus respuestas.

4. Sea R la matriz de rotación para el ángulo ϕ. Muestre que R^{-1} es la matriz de rotación para el ángulo $-\phi$.



5. Para **trasladar** una imagen por (h, k), se suma h a cada coordenada x y k a cada coordenada y de cada punto en la imagen (véase la figura al margen). Esto se puede hacer sumando una matriz apropiada M a D, pero la dimensión de M cambiaría dependiendo de la dimensión de D. En la práctica, la traslación se lleva a cabo mediante multiplicación de matrices. Para ver cómo se hace esto, se introducen **coordenadas homogéneas**; es decir, se representa el punto (x, y) por una matriz de 3×1:

$$(x, y) \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Sea T la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que T traslada el punto (x, y) al punto $(x + h, y + h)$ comprobando la siguiente multiplicación matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Encuentre T^{-1} y describa cómo T^{-1} traslada puntos.

c) Compruebe que multiplicar las siguientes matrices tiene los efectos indicados en un punto (x, y) representado por sus coordenadas homogéneas $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexión en el eje x — Expansión (o contracción) en la dirección x — Corte en la dirección x — Rotación respecto al origen por el ángulo ϕ

d) Bosqueje la imagen representada (en coordenadas homogéneas) mediante esta matriz de datos:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 7 & 7 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 11 & 11 & 9 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz T que traslada la imagen por $(-6, -8)$ y una matriz R que gira la imagen en 45°. Bosqueje las imágenes representadas por las matrices de datos TD, RTD y $T^{-1}RTD$. Describa cómo se cambia una imagen cuando su matriz de datos se multiplica por T, por RT y por $T^{-1}RT$.

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

Al comienzo de este capítulo se definió una parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definió a la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas en términos de un foco y directriz. Si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple. Además, en forma polar, la rotación de cónicas es un asunto más simple. Las ecuaciones polares de las elipses son cruciales en la derivación de las leyes de Kepler (véase la página 780).

Descripción equivalente de cónicas

Sea F un punto fijo (el **foco**), ℓ una línea fija (la **directriz**) y e un número positivo fijo (la **excentricidad**). El conjunto de los puntos P tales que la relación de la distancia de P a F a la distancia de P a ℓ es la constante e es una cónica. Es decir, el conjunto de los puntos P tales que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e$$

es una cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

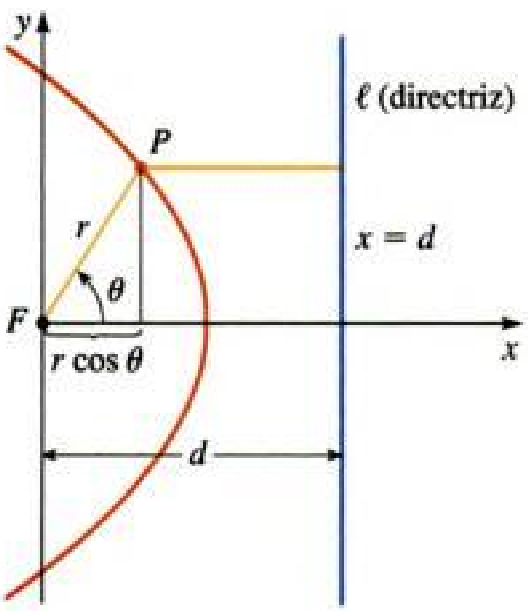


Figura 1

■ **Demostración** Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, \ell)$, y por lo tanto, la condición dada es la definición de una parábola como se da en la sección 10.1.

Ahora, suponga que $e \neq 1$. Colóquese el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. En este caso la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se puede observar de la figura 1 que $d(P, F) = r$ y $d(P, \ell) = d - r\cos\theta$. Así, la condición $d(P, F)/d(P, \ell) = e$, o bien, $d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$, se convierte en

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si ambos lados de esta ecuación polar se elevan al cuadrado y se convierten a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \qquad \text{Desarrolle y simplifique}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{Divida entre } 1 - e^2 \text{ y complete el cuadrado}$$

Si $e < 1$, entonces al dividir ambos lados de esta ecuación entre $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$h = \frac{-e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Para graficar la ecuación polar de una cónica, primero se determina la ubicación de la directriz a partir de la forma de la ecuación. Los cuatro casos que surgen se muestran en la figura 2. (La figura muestra sólo las partes de las gráficas que están cerca del foco en el origen. La forma del resto de la gráfica depende de si la ecuación representa una parábola, una elipse o una hipérbola.) El eje de una cónica es perpendicular a la directriz, en particular se tiene lo siguiente:

1. Para una parábola, el eje de simetría es perpendicular a la directriz.
2. Para una elipse, el eje mayor es perpendicular a la directriz.
3. Para una hipérbola, el eje transversal es perpendicular a la directriz.

Ejemplo 1 Hallar una ecuación polar para una cónica

Determine una ecuación polar para la parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

Solución Con $e = 1$, $d = 6$ y el inciso d) de la figura 2, se puede observar que la ecuación polar de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

■

Para graficar una cónica polar, es útil trazar los puntos para los que $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Con estos puntos y conociendo el tipo de cónica (que se obtiene de la excentricidad), se puede obtener fácilmente una idea de la forma y ubicación de la gráfica.

Ejemplo 2 Identificar y bosquejar una cónica

Una cónica se determina por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

a) Muestre que la cónica es una elipse y bosqueje la gráfica.

b) Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución

a) Al dividir numerador y denominador entre 3, se tiene

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Puesto que $e = \frac{2}{3} < 1$, la ecuación representa una elipse. Para una gráfica aproximada se trazan los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (véase la figura 3 en la siguiente página).

b) Al comparar la ecuación con las de la figura 2, se puede observar que el eje mayor es horizontal. Así, los puntos finales del eje mayor son $V_1(10, 0)$ y $V_2(2, \pi)$.

Aplicaciones

27. **Órbita de la Tierra** La ecuación polar de una elipse se puede expresar en términos de su excentricidad e y la longitud a de su eje mayor.

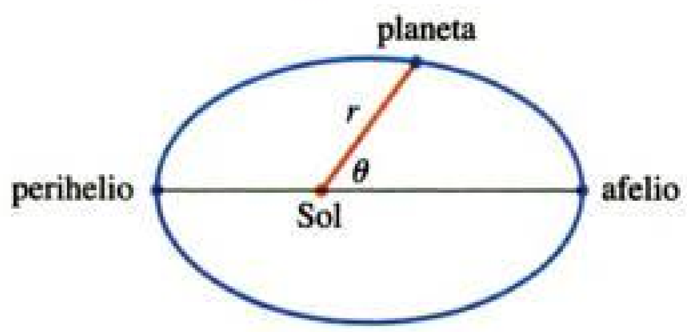
   a) Muestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = -d$ se puede escribir en la forma

   $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

   [*Sugerencia*: use la relación $a^2 = e^2d^2/(1 - e^2)^2$ dada en la demostración de la página 795.]

   b) Halle una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco) dado que la excentricidad es aproximadamente 0.017 y la longitud del eje mayor es casi 2.99×10^8 km.

28. **Perihelio y afelio** Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Las posiciones de un planeta más próxima y más alejada del Sol se llaman **perihelio** y **afelio**, respectivamente.



   a) Use el ejercicio 27a) para mostrar que la distancia del perihelio desde un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia del afelio es $a(1 + e)$.

   b) Use los datos del ejercicio 27b) para hallar las distancias de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

29. **Órbita de Plutón** La distancia del planeta Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Use el ejercicio 28 para hallar la excentricidad de la órbita de Plutón.

Descubrimiento • Debate

30. **Distancia a un foco** Cuando se encuentran las ecuaciones polares para las cónicas, se coloca un foco en el polo. Es fácil hallar la distancia desde ese foco a cualquier punto en la cónica. Explique cómo mediante la ecuación polar se determina esta distancia.

31. **Ecuaciones polares de órbitas** Cuando un satélite orbita la Tierra, su trayectoria es una elipse con un foco en el centro de la Tierra. ¿Por qué los científicos usan coordenadas polares (en vez de rectangulares) para rastrear la posición de satélites? [*Sugerencia*: su respuesta al ejercicio 30 es importante aquí.]

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta el momento se ha descrito una curva dando una ecuación (en coordenadas rectangulares o polares) que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos sobre la curva. Pero no todas las curvas en el plano se pueden describir de esta manera. En esta sección se estudian ecuaciones paramétricas, que son un método general para describir una curva.

Curvas planas

Se puede considerar a una curva como la trayectoria de un punto que se mueve en el plano; las coordenadas x y y del punto son entonces funciones del tiempo. Esta idea conduce a la siguiente definición.

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Si f y g son funciones en un intervalo I, entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$, son **ecuaciones paramétricas** para la curva, con **parámetro** t.

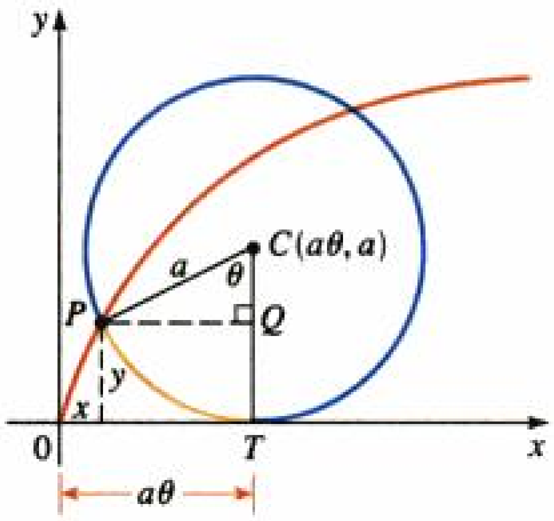


Figura 8

Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces de la figura 8 (que ilustra el caso $0 < \theta < \pi/2$), se ve que

$$x = d(O, T) - d(P, Q) = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = d(T, C) - d(Q, C) = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

por lo tanto las ecuaciones para la cicloide son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = a(1 - \cos \theta)$$ ■

La cicloide tiene varias propiedades físicas interesantes. Es la "curva del descenso más rápido" en el siguiente sentido. Elíjanse dos puntos P y Q que no están directamente arriba entre sí, y únalos con un alambre. Suponga que se permite que una cuenta se deslice por el alambre bajo la influencia de la gravedad (sin considerar la fricción). De todas las formas posibles en las que se puede doblar el alambre, la cuenta se deslizará de P a Q lo más rápido posible cuando la forma sea la mitad de un arco de una cicloide invertida (véase la figura 9). La cicloide es también la "curva de igual descenso" en el sentido de que sin importar dónde se coloque una cuenta B sobre un alambre en forma de cicloide, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase la figura 10). Estas propiedades bastante sorprendentes de la cicloide fueron probadas (por medio de cálculo) en el siglo XVII por varios matemáticos y físicos, inclusive Johann Bernoulli, Blaise Pascal y Christiaan Huygens.

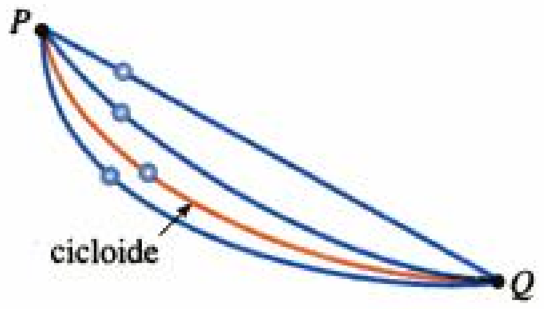


Figura 9

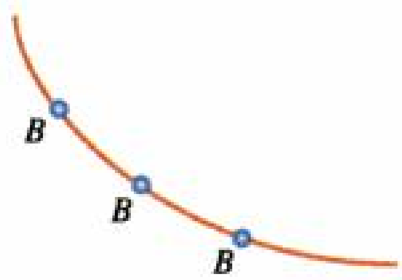


Figura 10

Uso de dispositivos de graficación para trazar curvas paramétricas

La mayor parte de las calculadoras y programas de graficación de computadoras se pueden usar para trazar ecuaciones paramétricas. Esta clase de dispositivos son particularmente útiles cuando se trazan curvas complicadas como la mostrada en la figura 11.

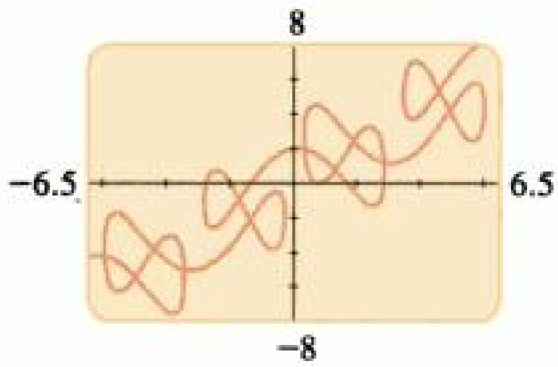


Figura 11
$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$, $y = t + 2 \cos 5t$

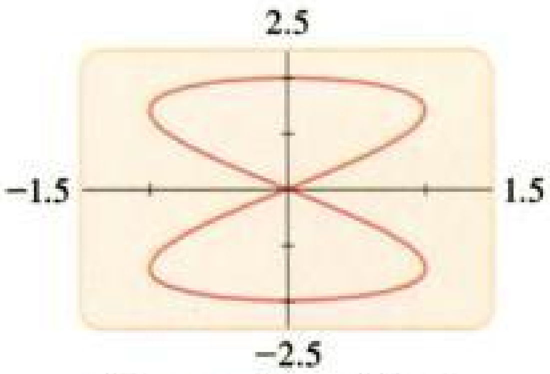
Ejemplo 7 Graficación de curvas paramétricas

Utilice un dispositivo de graficación para dibujar las siguientes curvas paramétricas. Explique las similitudes y diferencias.

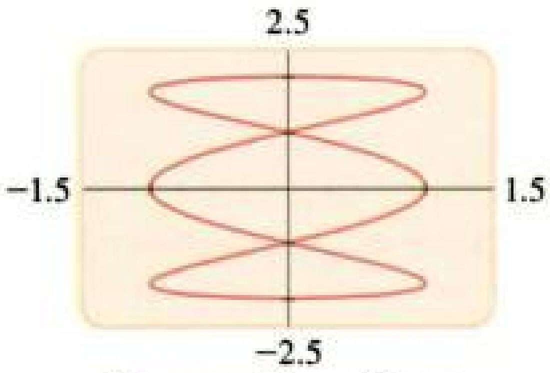
a) $x = \operatorname{sen} 2t$
$y = 2 \cos t$

b) $x = \operatorname{sen} 3t$
$y = 2 \cos t$

Solución En ambos incisos a) y b), la gráfica quedará dentro de un rectángulo dado por $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$, puesto que tanto el seno como el coseno de cualquier número estarán entre -1 y 1. Así, se podría usar el rectángulo de visión $[-1.5, 1.5]$ por $[-2.5, 2.5]$.



a) $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = 2\cos t$



b) $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = 2\cos t$

Figura 12

a) Puesto que $2\cos t$ es periódica con periodo 2π (véase la sección 5.3) y puesto que $\operatorname{sen} 2t$ tiene periodo π, si se permite que t varíe en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ se obtiene la gráfica completa, que se muestra en la figura 12a).

b) De nuevo, si t toma valores entre 0 y 2π se obtiene la gráfica completa mostrada en la figura 12b).

Ambas gráficas son *curvas cerradas*, lo que significa que forman bucles con el mismo inicio y punto final; también, ambas gráficas se cruzan a sí mismas. Sin embargo, la gráfica de la figura 12a) tiene dos bucles, como un ocho, mientras que la gráfica de la figura 12b) tiene tres bucles. ■

Las curvas graficadas en el ejemplo 7 se llaman figuras de Lissajous. Una **figura de Lissajous** es la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = A \operatorname{sen} \omega_1 t \qquad y = B \cos \omega_2 t$$

donde A, B, ω_1 y ω_2 son constantes reales. Puesto que $\operatorname{sen} \omega_1 t$ y $\cos \omega_2 t$ están entre -1 y 1, una figura de Lissajous estará dentro del rectángulo determinado por $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$. Este hecho se puede usar para elegir un rectángulo de visión al graficar una figura de Lissajous, como en el ejemplo 7.

Recuerde de la sección 8.1 que las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) están relacionadas por las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. En consecuencia, se puede graficar la ecuación polar $r = f(\theta)$ cambiándola a la forma paramétrica como sigue:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad \text{Puesto que } r = f(\theta)$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Al reemplazar θ con la variable estándar paramétrica t, se tiene el siguiente resultado.

Ecuaciones polares en forma paramétrica

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es la misma que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t)\cos t \qquad y = f(t)\operatorname{sen} t$$

Ejemplo 8 Forma paramétrica de una ecuación polar

Considere la ecuación polar $r = \theta$, $1 \leq \theta \leq 10\pi$.

a) Exprese la ecuación en forma paramétrica.

b) Dibuje una gráfica de las ecuaciones paramétricas del inciso a).

Solución

a) La ecuación polar dada es equivalente a las ecuaciones paramétricas

$$x = t\cos t \qquad y = t\operatorname{sen} t$$

b) Puesto que $10\pi \approx 31.42$, se usa el rectángulo de visión $[-32, 32]$ por $[-32, 32]$ y se permite que t varíe de 1 a 10π. La gráfica resultante mostrada en la figura 13 es una *espiral*. ■

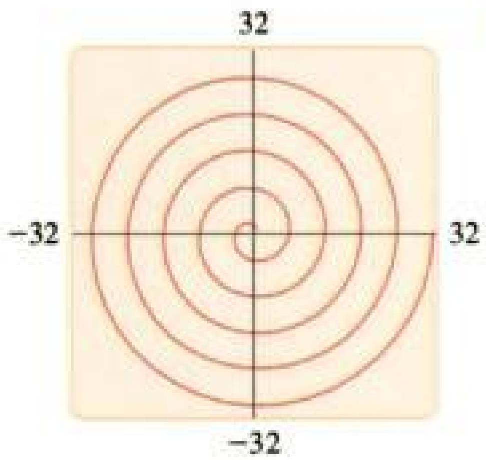


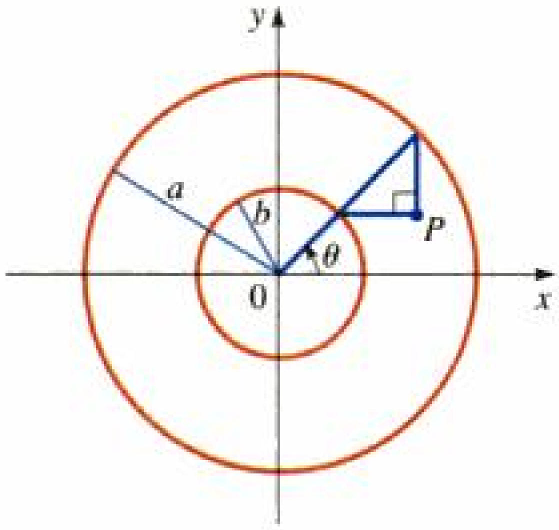
Figura 13
$x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$

56. Dos círculos de radio a y b están centrados en el origen, como se muestra en la figura. Cuando el ángulo θ crece, el punto P traza una curva que se ubica entre los círculos.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva, usando a θ como parámetro.

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$ y $b = 2$.

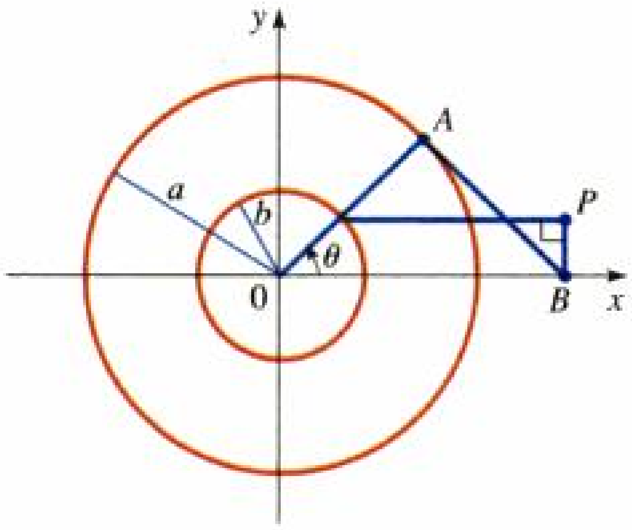
c) Elimine el parámetro e identifique la curva.



57. Dos círculos de radio a y b están centrados en el origen, como se muestra en la figura.

a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la curva trazada por el punto P, usando el ángulo θ como parámetro. (Nota: hay que observar que el segmento de recta AB siempre es tangente al círculo más grande.)

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$ y $b = 2$.

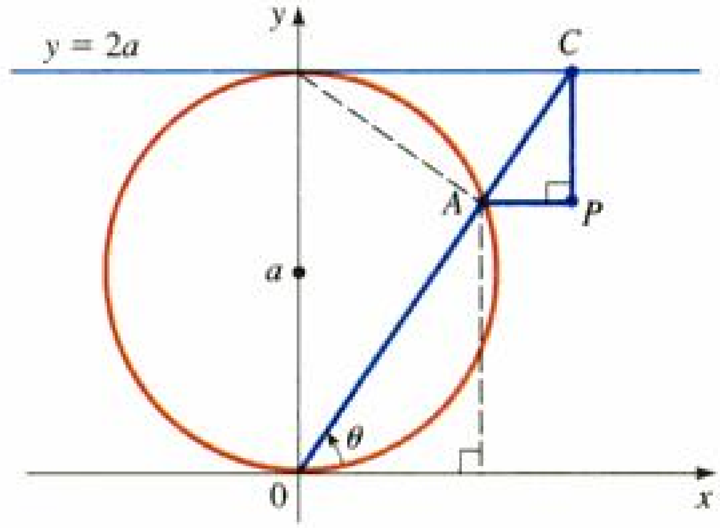


58. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste en los puntos P determinados como se muestra en la figura.

a) Muestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$$

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$.



59. Elimine el parámetro θ en las ecuaciones paramétricas para la cicloide (ejemplo 6) para obtener una ecuación en coordenadas rectangulares para la sección de la curva dada por $0 \leq \theta \leq \pi$.

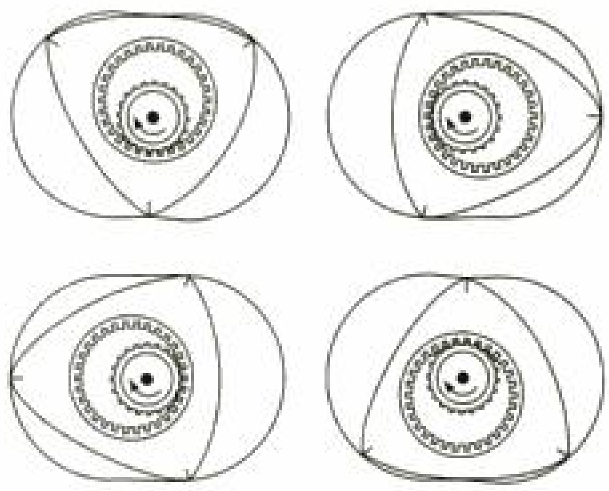
Aplicaciones

60. La máquina rotatoria El Mazda RX-8 utiliza un motor poco común (inventado por Felix Wankel en 1954) en el que los pistones se reemplazan por un rotor triangular que gira en una carcasa especial como se muestra en la figura. Los vértices del rotor mantienen contacto con la carcasa todo el tiempo, mientras que el centro del triángulo traza un círculo de radio r, que hace girar al árbol motor. La forma de la carcasa está dada por las ecuaciones paramétricas siguientes (donde R es la distancia entre los vértices y el centro del rotor).

$$x = r \cos 3\theta + R \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} 3\theta + R \operatorname{sen} \theta$$

a) Suponga que el árbol rotor tiene radio $r = 1$. Grafique la curva dada por las ecuaciones paramétricas para los siguientes valores de R: 0.5, 1, 3, 5.

b) ¿Cuál de los cuatro valores de R dados en el inciso a) al parecer modela mejor a la carcasa del motor ilustrada en la figura?



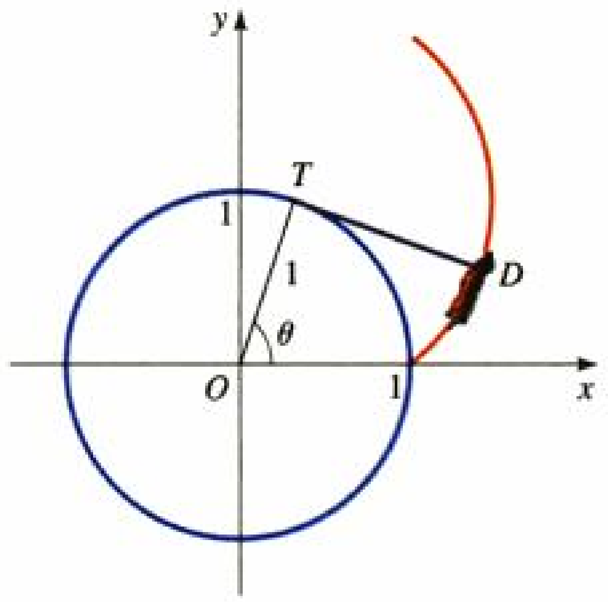
61. Trayectoria en espiral de un perro Un perro está amarrado a un tronco de árbol circular de radio 1 pie mediante una correa larga. El perro logra enredar toda la correa alrededor del árbol mientras jugaba en el patio, y se encuentra en el punto (1, 0) en la figura. Al ver una ardilla corre alrededor del árbol en sentido contrario a las manecillas del reloj, manteniendo tensa la cuerda mientras persigue al intruso.

a) Muestre que las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del perro (conocida como **envolvente de un círculo**) son

$$x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$$

[*Sugerencia:* observe que la correa siempre es tangente al árbol, por lo tanto OT es perpendicular a TD.]

b) Grafique la trayectoria del perro para $0 \le \theta \le 4\pi$.



Descubrimiento • Debate

62. Más información de ecuaciones paramétricas En esta sección se expresa que las ecuaciones paramétricas contienen más información que sólo la forma de una curva. Escriba un párrafo corto que explique este enunciado. Use el siguiente ejemplo y sus respuestas a los incisos a) y b) en su explicación.

La posición de una partícula está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = \cos t$$

donde t representa el tiempo. Se sabe que la forma de la trayectoria de una partícula es un círculo.

a) ¿Cuánto tarda la partícula en ir una vez alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve el doble de rápido alrededor del círculo.

b) ¿La partícula viaja en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve en la dirección opuesta alrededor del círculo.

63. Formas diferentes de trazar una curva Las curvas C, D, E y F se definen de forma paramétrica como sigue, donde el parámetro t toma todos los valores reales a menos que se indique lo contrario:

$$C:\quad x = t, \quad y = t^2$$
$$D:\quad x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$$
$$E:\quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$
$$F:\quad x = 3^t, \quad y = 3^{2t}$$

a) Muestre que los puntos en las cuatro curvas satisfacen la misma ecuación en coordenadas rectangulares.

b) Dibuje la gráfica de cada curva y explique cómo difieren entre sí las curvas.

10 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) Dé la definición geométrica de una parábola. ¿Cuáles son el foco y la directriz de la parábola?

b) Bosqueje la parábola $x^2 = 4py$ para el caso $p > 0$. Identifique en su diagrama el vértice, foco y directriz. ¿Qué sucede si $p < 0$?

c) Bosqueje la parábola $y^2 = 4px$, junto con su vértice, foco y directriz, para el caso $p > 0$. ¿Qué sucede si $p < 0$?

2. a) Dé la definición geométrica de una elipse. ¿Cuáles son los focos de la elipse?

b) Para la elipse con ecuación

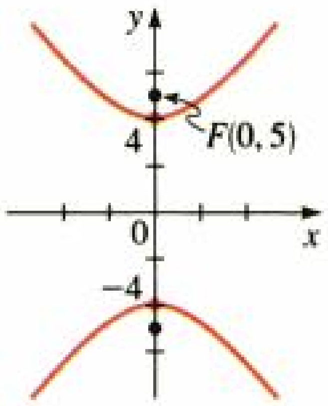
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son los ejes mayor y menor? Ilustre con una gráfica.

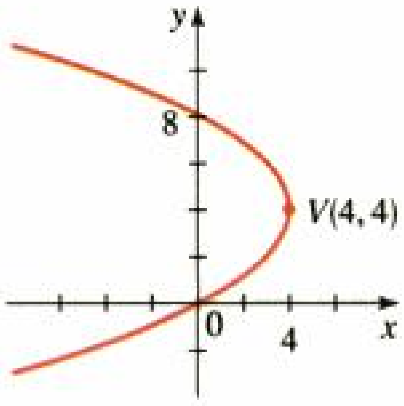
c) Dé una expresión para excentricidad de la elipse en el inciso b).

d) Exprese la ecuación de una elipse con focos en el eje y.

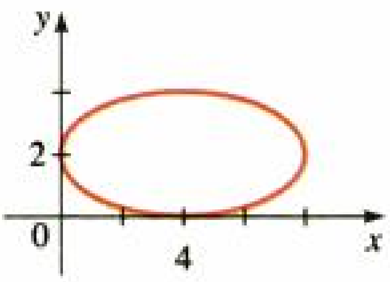
27.



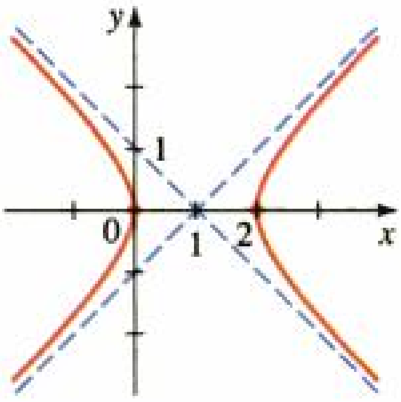
28.



29.



30.



31–42 ■ Determine el tipo de curva representada por la ecuación. Encuentre los focos y vértices (si existen) y bosqueje la gráfica.

31. $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$

32. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$

33. $x^2 - y^2 + 144 = 0$

34. $x^2 + 6x = 9y^2$

35. $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

36. $3x^2 - 6(x + y) = 10$

37. $x = y^2 - 16y$

38. $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

39. $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

40. $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

41. $9x^2 + 8y^2 - 15x + 8y + 27 = 0$

42. $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

43–50 ■ Encuentre una ecuación para la sección cónica con las propiedades dadas.

43. La parábola con foco $F(0, 1)$ y directriz $y = -1$

44. La elipse con centro $C(0, 4)$, focos $F_1(0, 0)$ y $F_2(0, 8)$ y eje mayor de longitud 10

45. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$

46. La hipérbola con centro $C(2, 4)$, focos $F_1(2, 1)$ y $F_2(2, 7)$ y vértices $V_1(2, 6)$ y $V_2(2, 2)$

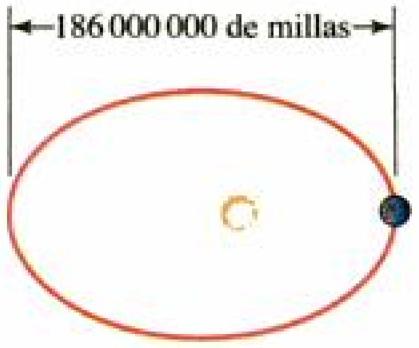
47. La elipse con focos $F_1(1, 1)$ y $F_2(1, 3)$ y con un vértice en el eje x

48. La parábola con vértice $V(5, 5)$ y el eje y como directriz

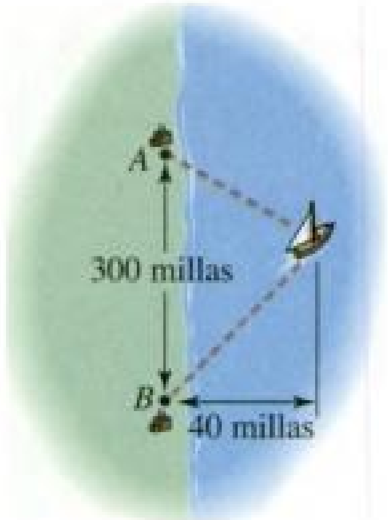
49. La elipse con vértices $V_1(7, 12)$ y $V_2(7, -8)$ y que pasa por el punto $P(1, 8)$

50. La parábola con vértice $V(-1, 0)$ y eje horizontal de simetría, y que cruza el eje y en $y = 2$.

51. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco. La elipse tiene eje mayor 186 000 000 de millas y excentricidad 0.017. Encuentre la distancia entre la Tierra y el Sol cuando la Tierra está **a)** más cerca del Sol y **b)** más lejos del Sol.



52. Una nave se localiza a 40 millas de una orilla recta. Las estaciones LORAN A y B se localizan en la orilla, separadas 300 millas. A partir de las señales LORAN, el capitán determina que su nave está 80 millas más cerca a A que a B. Encuentre la ubicación de la nave. (Coloque a A y B sobre el eje y con el eje x en medio. Encuentre las coordenadas x y y de la nave.)



53. **a)** Dibuje las gráficas de la siguiente familia de elipses para $k = 1, 2, 4$ y 8.

$$\frac{x^2}{16 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

b) Pruebe que las elipses del inciso a) tienen los mismos focos.

54. **a)** Dibuje gráficas de la siguiente familia de parábolas para $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4.

$$y = kx^2$$

b) Encuentre los focos de las parábolas del inciso a).

c) ¿Cómo cambia la ubicación del foco cuando aumenta k?

55–58 ■ Se da la ecuación de una cónica.

a) Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.

b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy.

c) Bosqueje la gráfica.

55. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

56. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$

57. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0$

58. $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

59–62 ■ Por medio de un dispositivo de graficación trace la cónica. Identifique el tipo de cónica a partir de la gráfica.

59. $5x^2 + 3y^2 = 60$

60. $9x^2 - 12y^2 + 36 = 0$

61. $6x + y^2 - 12y = 30$

62. $52x^2 - 72xy + 73y^2 = 100$

63–66 ■ Se da la ecuación polar de una cónica.

a) Encuentre la excentricidad e identifique la cónica.

b) Bosqueje la cónica y marque los vértices.

63. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

64. $r = \dfrac{2}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

65. $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

66. $r = \dfrac{12}{1 - 4\cos\theta}$

67–70 ■ Se da un par de ecuaciones paramétricas.

a) Bosqueje la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

b) Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares para la curva al eliminar el parámetro.

67. $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$

68. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1$

69. $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 - \text{sen}\,t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

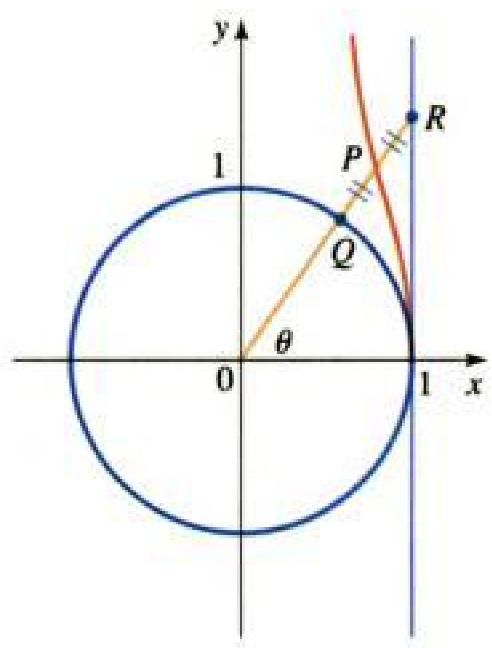
70. $x = \dfrac{1}{t} + 2, \quad y = \dfrac{2}{t^2}, \quad 0 < t \le 2$

71–72 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la curva paramétrica.

71. $x = \cos 2t, \quad y = \text{sen}\,3t$

72. $x = \text{sen}(t + \cos 2t), \quad y = \cos(t + \text{sen}\,3t)$

73. En la figura el punto P es el punto medio del segmento QR y $0 \le \theta < \pi/2$. Con θ como parámetro, encuentre una representación paramétrica para la curva trazada por P.



10 Evaluación

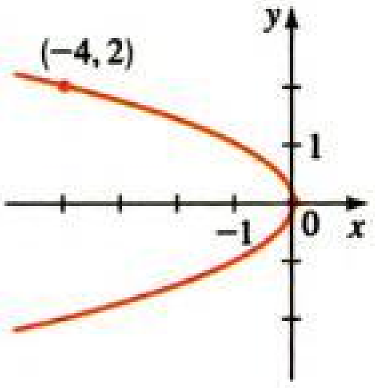
1. Encuentre el foco y la directriz de la parábola $x^2 = -12y$, y bosqueje su gráfica.

2. Halle los vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor para la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Luego bosqueje su gráfica.

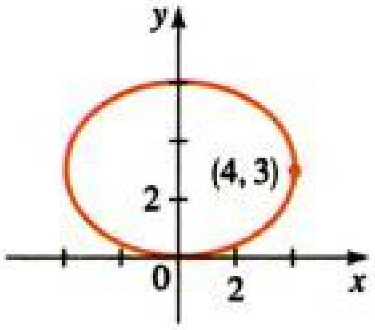
3. Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$. A continuación bosqueje su gráfica.

4–6 ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

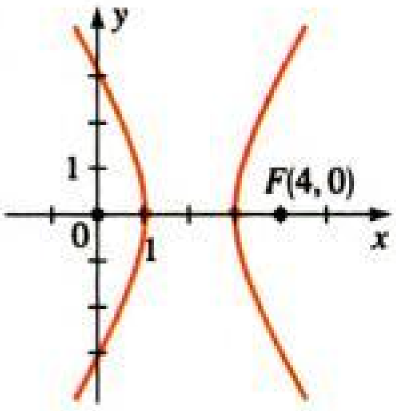
4.



5.



6.



7–9 ■ Bosqueje la gráfica de la ecuación.

7. $16x^2 + 36y^2 - 96x + 36y + 9 = 0$

8. $9x^2 - 8y^2 + 36x + 64y = 164$

9. $2x + y^2 + 8y + 8 = 0$

10. Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos $(0, \pm 5)$ y con asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.

11. Encuentre una ecuación para la parábola con foco $(2, 4)$ y el eje x como directriz.

12. Un reflector parabólico para un faro de un automóvil forma un tazón de 6 pulg de ancho en su abertura y 3 pulg de profundidad, como se muestra en la figura a la izquierda. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar el filamento de la bombilla si se tiene que ubicar en el foco?

13. **a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de esta ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación.

c) Bosqueje la gráfica de la ecuación.

d) Encuentre las coordenadas de los vértices de esta cónica (en el sistema de coordenadas xy).

14. **a)** Encuentre la ecuación polar de la cónica que tiene foco en el origen, excentricidad $e = \frac{1}{2}$, y directriz $x = 2$. Bosqueje la gráfica.

b) ¿Qué tipo de cónica representa la siguiente ecuación? Bosqueje su gráfica.

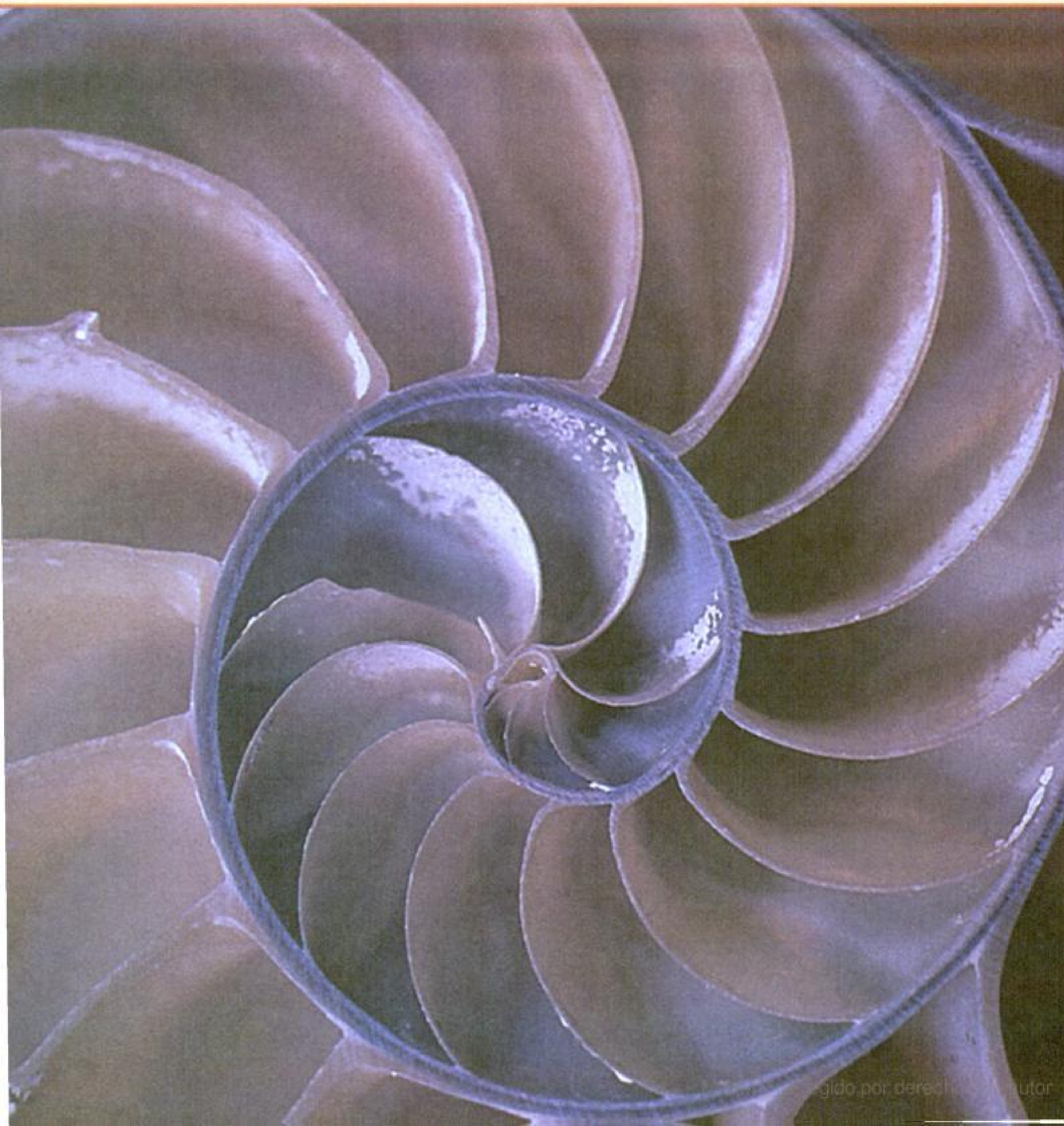
$$r = \frac{3}{2 - \operatorname{sen}\theta}$$

15. **a)** Bosqueje la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 3\operatorname{sen}\theta + 3 \qquad y = 2\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

b) Elimine el parámetro θ en el inciso a) para obtener una ecuación para esta curva en coordenadas rectangulares.

11 Sucesiones y series

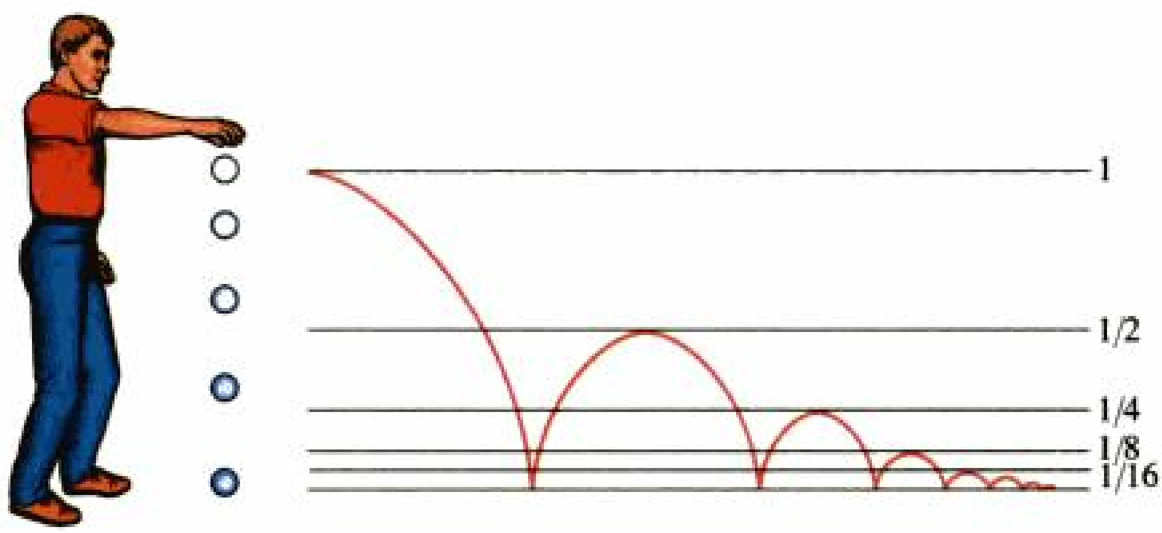


Esquema del capítulo

En este capítulo estudiamos las sucesiones y series de números. En pocas palabras, una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Los números de la sucesión se escriben con frecuencia como $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Los puntos significan que la lista continúa por siempre. Un ejemplo sencillo es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Las sucesiones se presentan en muchas situaciones del mundo cotidiano. Por ejemplo, si usted deposita una cantidad de dinero en una cuenta que genera intereses, el interés ganado cada mes genera una sucesión. Si usted lanza una pelota y la deja rebotar, la altura que alcanza la pelota en cada rebote sucesivo es una sucesión. Una sucesión interesante está oculta en la estructura interna de la concha de un nautilo.



Podemos describir el patrón de la sucesión mostrada mediante la *fórmula*:

$$a_n = 5n$$

Usted podría haber pensado una manera distinta de describir el patrón, como, "pasa de un número al otro sumando 5". Esta manera natural de describir la sucesión se expresa mediante la *fórmula recursiva*:

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Trate de sustituir $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para poder observar la manera en que se generan los números en la sucesión.

Susan Van Etten/PhotoEdit

Con frecuencia, usamos sucesiones para modelar fenómenos del mundo real, por ejemplo, los pagos mensuales sobre la hipoteca es una sucesión. Exploramos muchas otras aplicaciones de las sucesiones en este capítulo y en el *Enfoque en el modelado* de la página 874.

11.1 Sucesiones y notación de suma

Muchos procesos del mundo cotidiano generan listas de números. Por ejemplo, el balance en una cuenta bancaria al final de cada mes forma una lista de números cuando se rastrea en el tiempo. Los matemáticos llaman a estas listas *sucesiones*. En esta sección estudiamos las sucesiones y sus aplicaciones.

Sucesiones

Una *sucesión* es un conjunto de números escritos en un orden específico:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 se llama *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Puesto que para cada número natural n hay un número correspondiente a_n, podemos definir a una sucesión como una función.

Definición de una sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión.

Por lo regular se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

He aquí un ejemplo sencillo de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Los puntos indican que la sucesión continúa indefinidamente. Se puede escribir una sucesión en esta manera cuando es evidente cuáles son los términos siguientes. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más exactos, es necesario especificar un procedimiento para hallar *todos* los términos de la sucesión. Esto se puede efectuar dando una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión. En este caso,

$$a_n = 2n$$

y la sucesión se puede expresar como

$$\underbrace{2,}_{\text{1er. término}} \quad \underbrace{4,}_{\text{2o. término}} \quad \underbrace{6,}_{\text{3er. término}} \quad \underbrace{8,}_{\text{4o. término}} \quad \ldots, \quad \underbrace{2n,}_{n\text{-ésimo término}} \quad \ldots$$

Otra manera de expresar esta sucesión es usar la notación de función:

$$a(n) = 2n$$

de modo que $a(1) = 2$, $a(2) = 4$, $a(3) = 6, \ldots$

Observe cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, al sustituir 1, 2, 3 y 4 en n tenemos los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para encontrar el 103o. término de esta sucesión, usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

Ejemplo 1 Cálculo de los términos de una sucesión

Calcular los primeros cinco términos y el centésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

a) $a_n = 2n - 1$ b) $c_n = n^2 - 1$

c) $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ d) $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

Solución Para determinar los primeros cinco términos se sustituye $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula en el lugar del n-ésimo término. Para determinar el centésimo término, se sustituye $n = 100$. Así se obtiene lo siguiente:

n-ésimo término	Primeros cinco términos	Centésimo término
a) $2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9	199
b) $n^2 - 1$	0, 3, 8, 15, 24	9999
c) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$	$\dfrac{100}{101}$
d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{1}{2^{100}}$

■

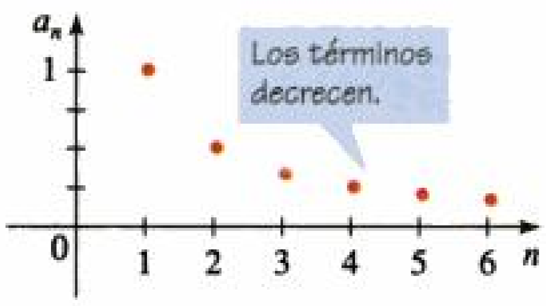


Figura 1

En el ejemplo 1d) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer que los términos sucesivos sean alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil esbozar una sucesión dibujando una gráfica. Puesto que una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, podemos dibujar la gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

se muestra en la figura 1. Compárela con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

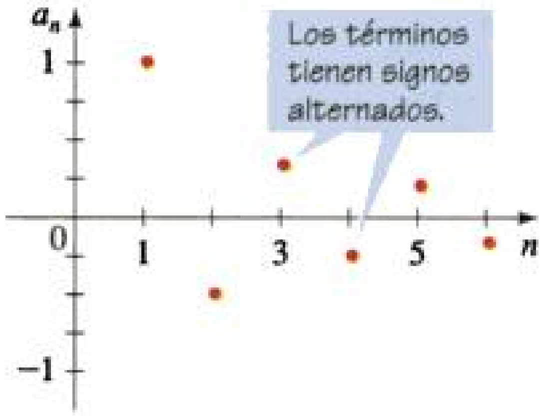


Figura 2

mostrada en la figura 2. La gráfica de cada una de las sucesiones consiste en puntos aislados que *no* están unidos.

Las calculadoras que grafican son útiles para analizar las sucesiones. Para trabajar con sucesiones en la TI-83, es necesario poner la calculadora en modo `Seq` como en la figura 3a). Si se ingresa la sucesión $u(n) = n/(n + 1)$ del ejemplo 1c), podemos ver los términos usando el comando TABLE como se muestra en la figura 3b). También se pueden graficar las sucesiones como se ilustra en la figura 3c).

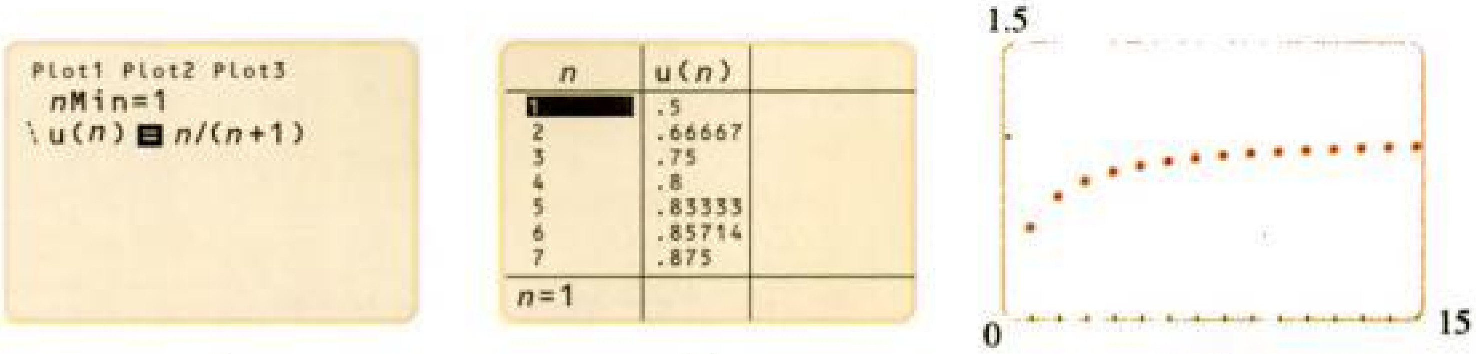


Figura 3
$u(n) = n/(n + 1)$

a) b) c)

Encontrar patrones es una parte importante de las matemáticas. Considere una sucesión que empieza

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

¿Puede detectar un patrón en estos números? En otras palabras, ¿puede definir una sucesión cuyos primeros cuatro términos sean estos números? La respuesta a esta pregunta parece fácil; estos números son los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4. Por consiguiente, la sucesión que estamos buscando se define mediante $a_n = n^2$. No obstante, esta no es la *única* sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a nuestro problema no es única (véase el ejercicio 78). En el ejemplo siguiente interesa encontrar una sucesión *obvia* cuyos primeros términos concuerden con los términos dados.

No todas las sucesiones se pueden definir mediante una fórmula. Por ejemplo, no hay fórmula conocida para la sucesión de números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Números primos grandes

La búsqueda de números primos grandes fascina a muchas personas. En el momento en que esto se escribió, el número primo más grande conocido era

$$2^{25\,964\,951} - 1$$

Fue descubierto en 2005 por Martin Nowak, un cirujano oftalmólogo y aficionado a las matemáticas, de Michelfeld, Alemania. Utilizó para ello una computadora Pentium 4 de 2.4 GHz. En la notación decimal este número contiene 7 816 230 dígitos. Si se escribiera completo ocuparía casi el doble de páginas de este libro. Nowak estuvo trabajando con un grupo de Internet grande conocido como GIMPS (la Great Internet Mersenne Prime Search, la Gran Búsqueda por Internet de los primos Mersenne). Los números de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llaman números Mersenne, y en ellos se comprueba con más facilidad su calidad de primos que en otros. Ésta es la razón por la cual los primos conocidos más grandes son de esta forma.

Ejemplo 2 Determinación del n-ésimo término de una sucesión

Determine el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ b) $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

Solución

a) Se puede observar que los numeradores de estas fracciones son los números impares y los denominadores son los números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los números impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere de un número par en 1). Entonces, la sucesión que tienen estos números en sus primeros cuatro términos está representada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

b) Estos números son potencias de 2 y se alternan de signo, por lo que una sucesión que concuerda con estos términos es

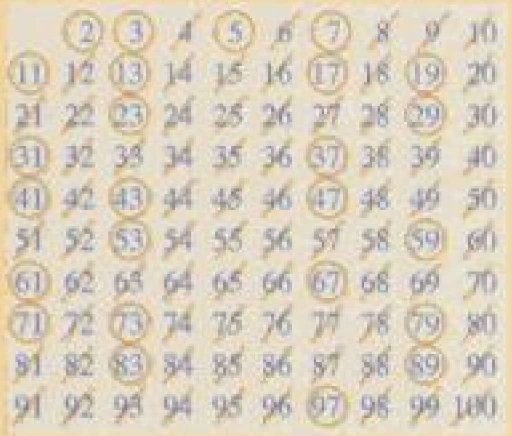
$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Debe comprobar que estas fórmulas generan en verdad los términos dados. ■

Sucesiones definidas recursivamente

Algunas sucesiones carecen de fórmulas que se definen tan fácilmente como las del ejemplo anterior. El n-ésimo término de una sucesión podría depender de algunos o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida de esta manera se llama **recursiva**. He aquí dos ejemplos.

Eratóstenes (alrededor de 276 a 195 a.C.) fue un geógrafo, matemático y astrónomo griego muy reconocido. Calculó exactamente la circunferencia de la Tierra mediante un método muy ingenioso (véase el ejercicio 72, página 476). Sin embargo, es más famoso por su método para encontrar números primos, conocido en la actualidad como la *criba de Eratóstenes*. El método consiste en hacer una lista de enteros, empezando por el 2, el primer número primo, y luego tachar todos los múltiplos de 2, los cuales no son primos. El siguiente número que queda en la lista es el 3, el segundo primo, de modo que de nuevo se tachan todos los múltiplos de éste. El siguiente número es el 5, el tercer número primo, y se tachan todos sus múltiplos, y así sucesivamente. De esta manera, todos los números que no son primos están tachados, y los números que quedan son los primos.



Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión definida recursivamente

Determine los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

Solución La fórmula que define esta sucesión es recursiva. Permite encontrar el n-ésimo término a_n si se conoce el término precedente a_{n-1}. Por lo tanto, se puede calcular el segundo término a partir del primero, el tercero a partir del segundo, el cuarto término a partir del tercero y así sucesivamente. Puesto que ya tenemos el primer término $a_1 = 1$, se puede continuar como sigue

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$

$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$

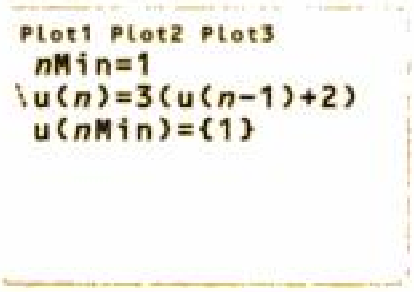
$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

Por lo tanto, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

■

Hay que observar que con objeto de determinar el vigésimo término de la sucesión del ejemplo 3, es necesario primero encontrar los 19 anteriores. Esto se efectúa con más facilidad mediante una calculadora para graficar. En la figura 4a) se ilustra cómo introducir los datos de esta sucesión en la calculadora TI-83. A partir de la figura 4b) se puede observar que el vigésimo término de la sucesión es $a_{20} = 4\,649\,045\,865$.



a)

b)

Figura 4

$u(n) = 3(u(n-1) + 2), u(1) = 1$

Ejemplo 4 La sucesión de Fibonacci

Calcule los primeros 11 términos de la sucesión definida recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Solución Para calcular F_n necesitamos encontrar los dos términos precedentes F_{n-1} y F_{n-2}. Puesto que ya conocemos F_1 y F_2, continuamos como sigue.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Fibonacci (1175-1250) nació en Pisa, Italia, y se educó en el norte de África. Viajó por toda la zona del Mediterráneo y aprendió varios métodos que se usaban entonces para escribir números. Cuando regresó a Pisa en 1202, Fibonacci se declaró en favor del uso del sistema decimal hindú-arábigo, el que usamos en la actualidad, en lugar del sistema numérico romano que se usaba en Europa en esa época. Su obra más famosa, *Liber Abaci*, explica en detalle las ventajas de los números hindú-arábigos. En efecto, la multiplicación y la división eran tan complicadas usando los números romanos que se requería un grado universitario para alcanzar esas habilidades. Es interesante hacer notar que en 1299 la ciudad de Florencia declaró fuera de la ley el uso del sistema decimal para comerciantes y negocios, y pedía que los números se escribieran en caracteres romanos o en palabras. Uno sólo puede especular acerca de la razón de esta ley.

Es evidente lo que sucede aquí. Cada término es simplemente la suma de los dos términos que lo preceden, por lo que con toda facilidad se pueden escribir tantos términos como queramos. He aquí los primeros 11 términos.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$ ■

La sucesión del ejemplo 4 se denomina **sucesión de Fibonacci**, nombrada así en honor del matemático italiano del siglo XIII que la utilizó para resolver un problema relacionado con la reproducción de los conejos (véase el ejercicio 77). La sucesión también se presenta en numerosas situaciones en la naturaleza (véanse las figuras 5 y 6). En efecto, tantos fenómenos se comportan según la sucesión de Fibonacci que una revista sobre matemáticas, el *Fibonacci Quarterly* sólo se dedica a las propiedades de esta sucesión.

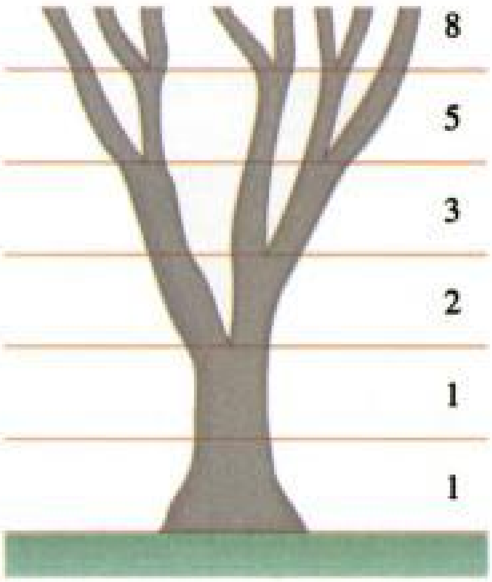
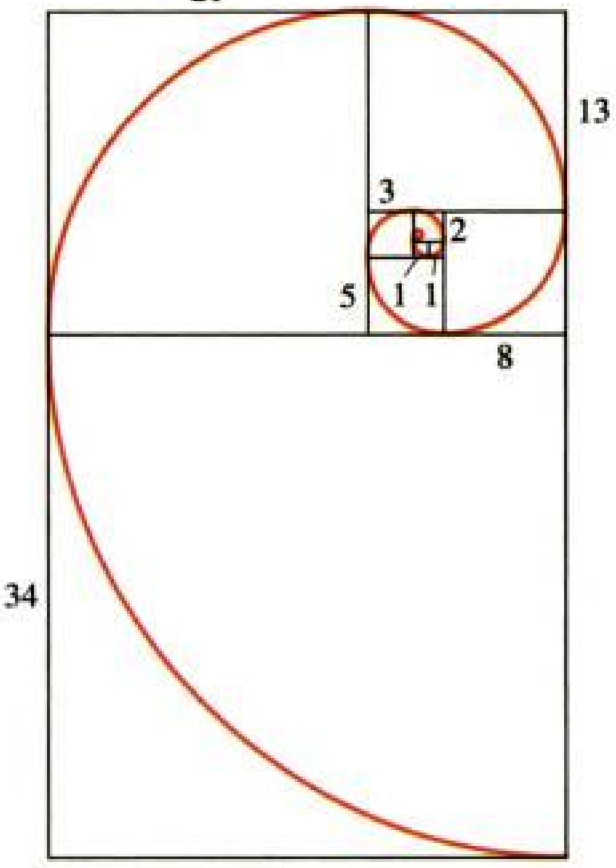


Figura 5
La sucesión de Fibonacci en el crecimiento de las ramas de un árbol



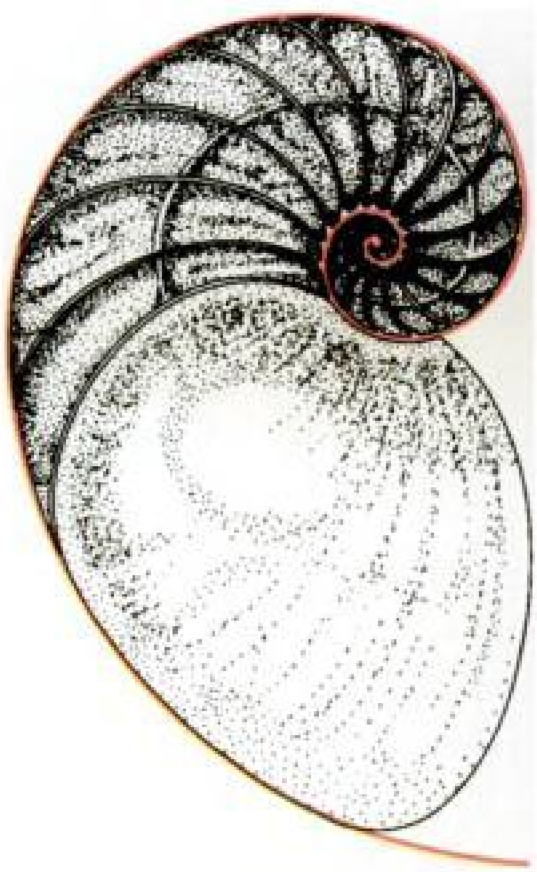


Figura 6

Espiral de Fibonacci

Concha de nautilo

Sumas parciales de una sucesión

En el cálculo infinitesimal, con frecuencia nos interesamos en la suma de los términos de una sucesión. Esto da origen a la definición siguiente.

Sumas parciales de una sucesión

En el caso de la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

las **sumas parciales** son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

S_1 se llama **primera suma parcial**, S_2 es la **segunda suma parcial** y así sucesivamente. S_n se denomina ***n*-ésima suma parcial**. La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ se denomina **sucesión de sumas parciales**.

Ejemplo 5 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión

Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = 1/2^n$.

Solución Los términos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} && = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} && = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} && = \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} && = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

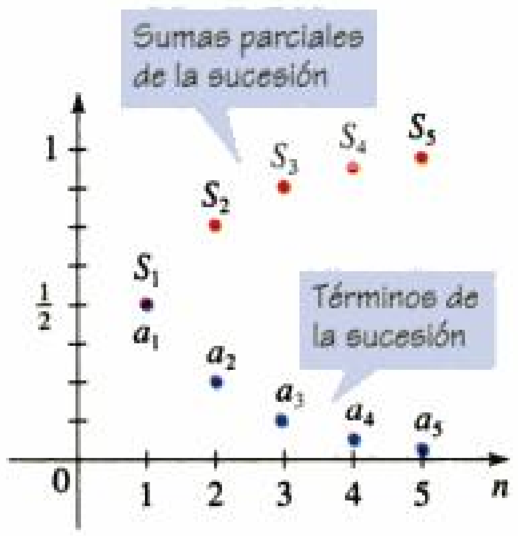


Figura 7
Gráfica de la sucesión a_n y la sucesión de las sumas parciales S_n

Hay que observar que en el valor de cada suma parcial el denominador es una potencia de 2 y el numerador una unidad menor que el denominador. En general, la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Los primeros cinco términos de a_n y S_n se grafican en la figura 7. ■

Ejemplo 6 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión

Determine las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Solución Las primeras cuatro sumas parciales son

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

¿Detecta un patrón aquí? Claro. La n-ésima suma parcial es

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$ ■

Notación sigma

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

se puede escribir la suma de los primeros n términos usando la **notación de suma** o **notación sigma**. Esta notación toma su nombre de la letra griega mayúscula Σ, que equivale a la S de "suma". La notación sigma se usa como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

El lado izquierdo de la expresión quiere decir "La suma de a_k desde que $k = 1$ hasta $k = n$". La letra k se llama **índice de suma** o **variable de la suma**, y la idea es reemplazar k de la expresión después de sigma por los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$, y sumar las expresiones resultantes, para llegar a obtener el lado derecho de la ecuación.

Las siguientes propiedades de las sumas son consecuencias naturales de las propiedades de los números reales.

Propiedades de las sumas

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sucesiones. Entonces para todo entero positivo n y cualquier número real c, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

■ **Demostración** Para demostrar la propiedad 1, escribimos el primer miembro de la ecuación como

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Puesto que la adición es conmutativa y asociativa, podemos reacomodar los términos en el segundo miembro para tener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Al volver a escribir el segundo miembro aplicando la notación sigma obtenemos la propiedad 1. La propiedad 2 se demuestra de manera similar. Para demostrar la propiedad 3, usamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\end{aligned}$$ ■

11.1 Ejercicios

1–10 ■ Determine los primeros cuatro términos y el centésimo término de la sucesión.

1. $a_n = n + 1$

2. $a_n = 2n + 3$

3. $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

4. $a_n = n^2 + 1$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

6. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

7. $a_n = 1 + (-1)^n$

8. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$

9. $a_n = n^n$

10. $a_n = 3$

11–16 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente.

11. $a_n = 2(a_{n-1} - 2)$ y $a_1 = 3$

12. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$ y $a_1 = -8$

13. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ y $a_1 = 1$

14. $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ y $a_1 = 1$

15. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 2$

16. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ y $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

17–22 ■ Por medio de una calculadora para graficar ejecute lo siguiente.

a) Determine el décimo término de la sucesión.

b) Grafique los primeros 10 términos de la sucesión.

17. $a_n = 4n + 3$

18. $a_n = n^2 + n$

19. $a_n = \dfrac{12}{n}$

20. $a_n = 4 - 2(-1)^n$

21. $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 2$

22. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 3$

23–30 ■ Determine el n-ésimo término de la sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

23. $2, 4, 8, 16, \ldots$

24. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

25. $1, 4, 7, 10, \ldots$

26. $5, -25, 125, -625, \ldots$

27. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$

28. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

29. $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

30. $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$

31–34 ■ Calcule las primeras seis sumas parciales $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ de la sucesión.

31. $1, 3, 5, 7, \ldots$

32. $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

33. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \dfrac{1}{3^4}, \ldots$

34. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

35–38 ■ Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión a_n.

35. $a_n = \dfrac{2}{3^n}$

36. $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

37. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

38. $a_n = \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ [*Sugerencia*: aplique una propiedad de los logaritmos para expresar el n-ésimo término como una diferencia.]

39–46 ■ Calcule la suma.

39. $\sum_{k=1}^{4} k$

40. $\sum_{k=1}^{4} k^2$

41. $\sum_{k=1}^{3} \dfrac{1}{k}$

42. $\sum_{j=1}^{100} (-1)^j$

43. $\sum_{i=1}^{8} [1 + (-1)^i]$

44. $\sum_{i=4}^{12} 10$

45. $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$

46. $\sum_{i=1}^{3} i2^i$

47–52 ■ Mediante una calculadora para graficar evalúe las sumas.

47. $\sum_{k=1}^{10} k^2$

48. $\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

49. $\sum_{j=7}^{20} j^2(1 + j)$

50. $\sum_{j=5}^{15} \dfrac{1}{j^2 + 1}$

51. $\sum_{n=0}^{22} (-1)^n 2n$

52. $\sum_{n=1}^{100} \dfrac{(-1)^n}{n}$

53–58 ■ Escriba la suma sin usar la notación sigma.

53. $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

54. $\sum_{i=0}^{4} \dfrac{2i - 1}{2i + 1}$

55. $\sum_{k=0}^{6} \sqrt{k + 4}$

56. $\sum_{k=6}^{9} k(k + 3)$

57. $\sum_{k=3}^{100} x^k$

58. $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j$

59–66 ■ Escriba la suma mediante la notación sigma.

59. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

60. $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$

61. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

62. $\dfrac{1}{2 \ln 2} - \dfrac{1}{3 \ln 3} + \dfrac{1}{4 \ln 4} - \dfrac{1}{5 \ln 5} + \cdots + \dfrac{1}{100 \ln 100}$

63. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

64. $\dfrac{\sqrt{1}}{1^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

65. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$

66. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots - 100x^{99}$

67. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$$

[*Sugerencia*: escriba cada uno de los términos como una potencia de 2.]

68. Defina la sucesión

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

Utilice el comando TABLE de una calculadora para graficar con el fin de determinar los primeros 10 términos de esta sucesión. Compare con la sucesión de Fibonacci F_n.

Aplicaciones

69. Interés compuesto Julio deposita 2000 dólares en una cuenta de ahorros que paga un interés de 2.4% al año, com-

11.2 Sucesiones aritméticas

En esta sección se trata un tipo especial de sucesión, llamada sucesión aritmética.

Sucesiones aritméticas

Quizá la manera más sencilla de generar una sucesión es empezar con un número a y añadirle una constante fija d, una y otra vez.

Definición de una sucesión aritmética

Una sucesión aritmética es una sucesión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número a es el **primer término**, y d es la **diferencia común** de la sucesión. El ***n*-ésimo término** de una sucesión aritmética está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

El número d se llama diferencia común porque cualquier par de términos consecutivos de una sucesión aritmética tiene una diferencia de d.

Ejemplo 1 Sucesiones aritméticas

a) Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces tenemos la sucesión aritmética

$$2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \ldots$$

o bien, $$2, 5, 8, 11, \ldots$$

La diferencia de dos términos consecutivos cualquiera de esta sucesión es $d = 3$. El n-ésimo término es $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

b) Considere la sucesión aritmética

$$9, 4, -1, -6, -11, \ldots$$

En este caso, la diferencia común es $d = -5$. Los términos de una sucesión aritmética disminuyen si la diferencia común es negativa. El n-ésimo término es $a_n = 9 - 5(n - 1)$.

c) La gráfica de la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2(n - 1)$ se muestra en la figura 1. Observe que los puntos de la gráfica quedan en la recta de pendiente $d = 2$.

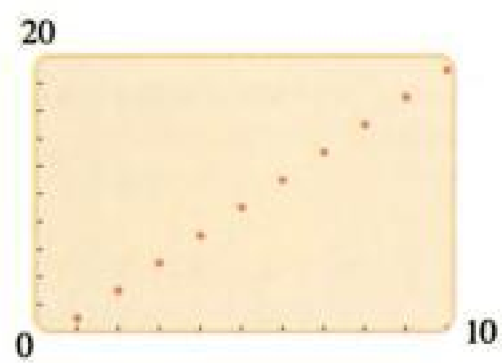


Figura 1

■

Matemáticas en el mundo moderno

División justa de bienes

Dividir un bien en forma justa entre una cierta cantidad de personas es de gran interés para los matemáticos. Entre los problemas de esta naturaleza se encuentran dividir el presupuesto nacional, tierras en disputa o los bienes en los casos de divorcio. En 1994, Brams y Taylor encontraron un camino matemático para dividir en forma justa las cosas. Su solución se ha aplicado a los problemas de división en la ciencia política, procedimientos legales y otras áreas. Para entender el problema, considere el ejemplo siguiente. Suponga que las personas A y B quieren dividir justamente una propiedad entre ellos. Dividir *justamente* significa que tanto A como B deben quedar satisfechos con el resultado de la división. Solución: A tiene que llegar a dividir la propiedad en dos partes, y luego B tiene que llegar a elegir la parte que quiere. Puesto que A y B tomaron parte en el proceso de división, cada uno debe estar satisfecho. La situación se vuelve más complicada cuando son tres o más personas, y es aquí donde entran los matemáticos. Dividir las cosas en forma justa requiere mucho más que sólo cortar las cosas a la mitad; se tiene que tomar en cuenta el *valor relativo* que cada persona da a la cosa que va a ser dividida. Una de las historias que aparecen en la Biblia ilustra con claridad estas situaciones: dos mujeres se presentan ante el rey Salomón. Cada una afirmaba ser la madre de un niño recién nacido. La solución del rey Salomón fue ¡dividir el niño a la mitad! La madre real, quien valoraba al niño más que nadie, inmediatamente desistió de sus afirmaciones con el fin de salvar la vida del niño.

Las soluciones matemáticas para los problemas de la división justa se han aplicado recientemente en un tratado internacional, la Convention on the Law of the Sea. Si un país quiere sacar provecho de una parte del fondo del mar,

(*continúa*)

Una sucesión aritmética está definida por completo con el primer término a y la diferencia común d. Por lo tanto, si conocemos los dos primeros términos de una sucesión aritmética, entonces podemos encontrar una fórmula para el n-ésimo término, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Determinación de términos de una sucesión aritmética

Determine los primeros seis términos y el término número 300 de la sucesión aritmética.

$$13, 7, \dots$$

Solución Puesto que el primer término es 13, tenemos que $a = 13$. La diferencia común es $d = 7 - 13 = -6$. Por lo tanto, el n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = 13 - 6(n - 1)$$

A partir de lo anterior encontramos los primeros seis términos:

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \dots$$

El tricentésimo término es $a_{300} = 13 - 6(299) = -1781$. ■

En el ejemplo siguiente se muestra que una sucesión aritmética queda definida del todo por *dos* términos *cualesquiera.*

Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión aritmética

El término décimoprimero de una sucesión aritmética es 52, y el término décimonoveno es 92. Calcule el término milésimo.

Solución Para determinar el n-ésimo término de esta sucesión es necesario encontrar a y d de la fórmula

$$a_n = a + (n - 1)d$$

A partir de esta fórmula tenemos

$$a_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$
$$a_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$$

Puesto que $a_{11} = 52$ y $a_{19} = 92$, planteamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases}$$

Al resolver el sistema y determinar a y d, obtenemos $a = 2$ y $d = 5$. (Compruébelo.) Por lo tanto, el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 2 + 5(n - 1)$$

El milésimo término es $a_{1000} = 2 + 5(999) = 4997$. ■

Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Suponga que queremos hallar la suma de los números $1, 2, 3, 4, \dots, 100$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Cuando el famoso matemático C. F. Gauss era un escolar, su maestro planteó este problema a la clase, con lo cual esperaba que los mantendría ocupados un buen tiempo. Pero Gauss respondió casi de inmediato. Su idea fue la siguiente: puesto que

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Calcule la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Solución Por lo que se refiere a esta sucesión aritmética, $a = 3$ y $d = 4$. Si aplicamos la fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{40} = \tfrac{40}{2}[2(3) + (40 - 1)4] = 20(6 + 156) = 3240$$ ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 50 números impares.

Solución Los números impares forman una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, de modo que el quincuagésimo número impar es $a_{50} = 2(50) - 1 = 99$. Al sustituir en la fórmula 2 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{50} = 50\left(\frac{a + a_{50}}{2}\right) = 50\left(\frac{1 + 99}{2}\right) = 50 \cdot 50 = 2500$$ ■

Ejemplo 6 Determinación de la capacidad de asientos en un auditorio

Un auditorio tiene 50 filas de asientos con 30 lugares en la primera fila, 32 en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente. Calcule la cantidad total de asientos.

Solución La cantidad de asientos en las filas forman una sucesión aritmética con $a = 30$ y $d = 2$. Puesto que hay 50 filas, la cantidad total de asientos es la suma

$$\begin{aligned} S_{50} &= \tfrac{50}{2}[2(30) + 49(2)] && S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \\ &= 3950 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el auditorio tiene 3950 asientos. ■

Ejemplo 7 Determinación del número de términos en una suma parcial

¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 5, 7, 9, . . . se tienen que sumar para tener 572?

Solución Se nos pide encontrar n cuando $S_n = 572$. Al sustituir $a = 5$, $d = 2$ y $S_n = 572$ en la fórmula 1 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$\begin{aligned} 572 &= \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n - 1)2] && S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \\ 572 &= 5n + n(n - 1) \\ 0 &= n^2 + 4n - 572 \\ 0 &= (n - 22)(n + 26) \end{aligned}$$

Esto da $n = 22$ o $n = -26$. Pero como n es el *número* de términos en la suma parcial, debemos tener entonces $n = 22$. ■

Aplicaciones

57. **Depreciación** El valor de compra de una computadora de oficina es 12 500 dólares. Su depreciación anual es 1875 dólares. Encuentre el valor de la computadora después de 6 años.

58. **Postes apilados** Los postes para teléfono se almacenan apilados con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda y así sucesivamente. Si hay doce capas, ¿cuantos postes para teléfono hay apilados?

59. **Incrementos al salario** Un hombre obtiene un empleo con un salario de 30 000 dólares al año. Le prometieron 2300 dólares de aumento anual en los años siguientes. Calcule el total de lo ganado en un periodo de 10 años.

60. **Autocinema** Un autocinema tiene espacio para 20 automóviles en la primera fila de estacionamiento, para 22 en la segunda, para 24 en la tercera y así sucesivamente. Si hay 21 filas en el autocinema, calcule la cantidad de automóviles que pueden estacionarse.

61. **Lugares en el teatro** Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera y así sucesivamente. Si el teatro va a tener una capacidad de 870, ¿cuántas filas debe considerar el arquitecto en su diseño?

62. **Caída de una pelota** Cuando se deja caer libremente un objeto cerca de la superficie terrestre, la fuerza de la gravedad es tal que el objeto cae a 16 pies en el primer segundo, a 48 pies en el siguiente segundo, a 80 pies en el siguiente segundo y así sucesivamente.
   a) Encuentre la distancia total que la pelota recorre en 6 s.
   b) Determine una fórmula de la distancia total que la pelota recorre en n segundos.

63. **Los doce días de la época de Navidad** En la tan bien conocida canción "The Twelve Days of Christmas", una persona le da a su amada k regalos en el k-ésimo día durante cada uno de los doce días de la época de Navidad. Asimismo, la persona da otra vez regalos idénticos a los ya entregados en cada día posterior. Por lo tanto, en el día 12, la amada recibe un regalo por el primer día, dos regalos por el segundo día, tres regalos por el tercer día y así sucesivamente. Demuestre que la cantidad de regalos recibida en el decimosegundo día es una suma parcial de una sucesión aritmética. Calcule la suma.

Descubrimiento • Debate

64. **Media aritmética** La **media aritmética** o promedio de dos números a y b es

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Observe que m es la misma distancia desde a como desde b, de modo que a, m, b es una sucesión aritmética. En general, si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ están igualmente separadas entre a y b de modo que

$$a, m_1, m_2, \ldots, m_k, b$$

es una sucesión aritmética, entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman k medias aritméticas entre a y b.
   a) Inserte dos medias aritméticas entre 10 y 18.
   b) Inserte tres medias aritméticas entre 10 y 18
   c) Suponga que un médico necesita incrementar la dosis de un cierto medicamento para un paciente. Necesita pasar de 100 mg a 300 mg por día, repartidos en cinco pasos iguales. ¿Cuántas medias aritméticas tiene que insertar entre 100 y 300 para obtener la progresión de dosis diaria, y cuáles son esas medias?

11.3 Sucesiones geométricas

En esta sección estudiamos las sucesiones geométricas. Este tipo de sucesiones se presenta a menudo en aplicaciones de finanzas, crecimiento de la población y otros campos.

Sucesiones geométricas

Recuerde que una sucesión aritmética se genera cuando añadimos repetidamente un número d a un término inicial a. Una sucesión *geométrica* se genera cuando empezamos con un número a y *multiplicamos* en forma repetida por una constante r, no cero y fija.