Definición de sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número a es el **primer término** y r es la **razón común** de la sucesión. El **n-ésimo término** de una sucesión geométrica lo da

$$a_n = ar^{n-1}$$

El número r se llama razón común porque la proporción de dos términos consecutivos cualquiera de la sucesión es r.

Ejemplo 1 Sucesiones geométricas

a) Si $a = 3$ y $r = 2$, entonces tenemos la sucesión geométrica

$$3, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 2^2, \quad 3 \cdot 2^3, \quad 3 \cdot 2^4, \quad \ldots$$

o bien $$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Observe que la razón de dos términos consecutivos cualquiera es $r = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 3(2)^{n-1}$.

b) La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1250, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 2$ y $r = -5$. Cuando r es negativa, los términos de la sucesión tienen signos alternados. El n-ésimo término es $a_n = 2(-5)^{n-1}$.

c) La sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$. El n-ésimo término es $a_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

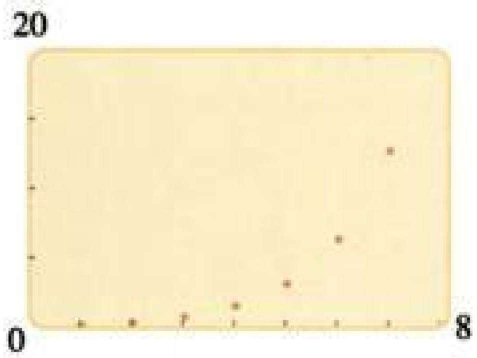


Figura 1

d) La gráfica de la sucesión geométrica $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$ se muestra en la figura 1. Obsérvese que los puntos de la gráfica quedan en la gráfica de la función exponencial $y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-1}$.

Si $0 < r < 1$, entonces los términos de la sucesión geométrica ar^{n-1} disminuye, pero si $r > 1$, entonces los términos se incrementan. (¿Qué sucede si $r = 1$?) ■

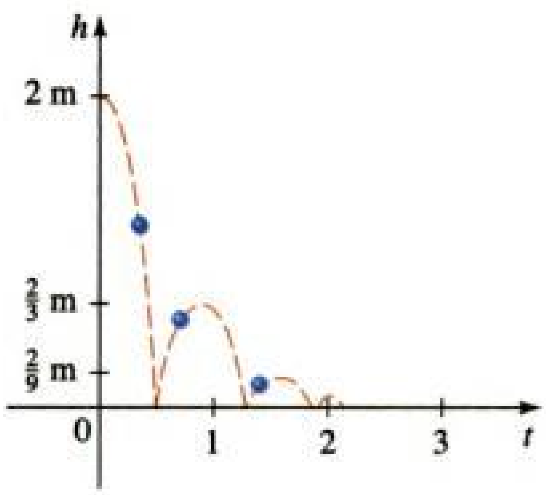


Figura 2

Las sucesiones geométricas se presentan en forma natural. He aquí un ejemplo simple. Suponga que una pelota es tan elástica que cuando se deja caer rebota un tercio de la distancia desde donde cayó. Si esta pelota se deja caer desde una altura de 2 m, entonces rebota a una altura de $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ m. En un segundo rebote, llega a una altura de $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ m, y así sucesivamente (véase la figura 2). Por lo tanto, la altura h_n que la pelota alcanza en su n-ésimo rebote está dada por la sucesión geométrica

$$h_n = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

Se puede determinar el n-ésimo término de una sucesión geométrica si conocemos dos términos cualquiera, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Para encontrar una fórmula para S_n, multiplicamos S_n por r y restamos de S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{aligned}$$

Entonces,
$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Este resultado se resume en el siguiente recuadro.

Sumas parciales de una sucesión geométrica

En el caso de la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$, la **n-ésima suma parcial**

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$

se obtiene mediante

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica

Calcule la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica

$$1, 0.7, 0.49, 0.343, \ldots$$

Solución La suma requerida es la suma de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica en la que $a = 1$ y $r = 0.7$. Si usamos la fórmula de S_n con $n = 5$, obtenemos

$$S_5 = 1 \cdot \frac{1 - (0.7)^5}{1 - 0.7} = 2.7731$$

Por lo tanto, la suma de los primeros cinco términos de esta sucesión es 2.7731 ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica

Calcule la suma $\sum_{k=1}^{5} 7\left(-\frac{2}{3}\right)^k$.

Solución La suma dada es la quinta suma parcial de una sucesión geométrica en donde $a = 7\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3}$ y razón común $r = -\frac{2}{3}$. Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula de S_n, tenemos

$$S_5 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 + \frac{32}{243}}{\frac{5}{3}} = -\frac{770}{243}$$ ■

¿Qué es una serie infinita?

Una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

recibe el nombre de **serie infinita**. Los puntos quieren decir que la suma continúa de manera indefinida. ¿Qué significado podemos dar a la suma de una cantidad infinita de números? Primero, parece que es imposible sumar infinitamente números y llegar a un número finito. Pero consideremos el problema siguiente. Usted tiene un pastel y quiere comer primero la mitad del pastel, luego comerá la mitad de lo que reste, luego comerá otra vez la mitad del resto. Este proceso puede continuar de manera indefinida porque en cada etapa queda algo de pastel.

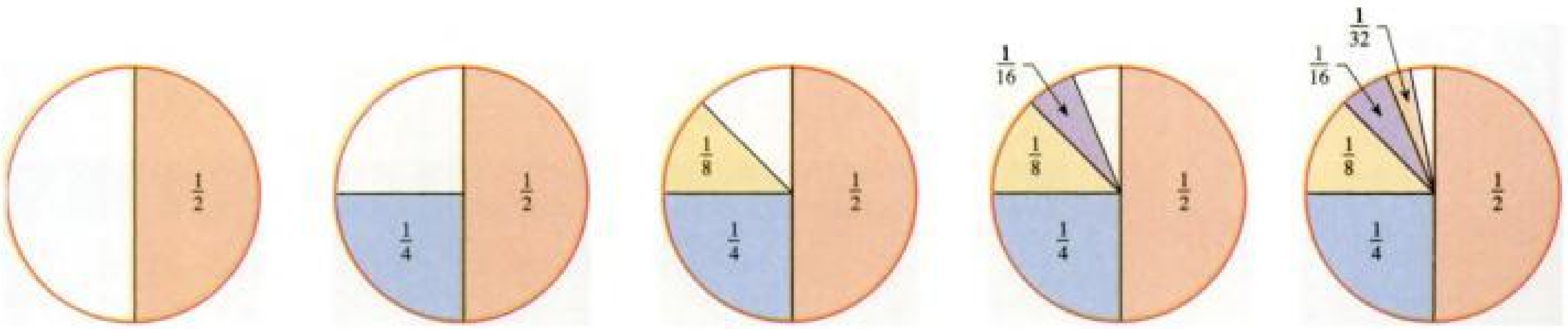


Figura 3

¿Esto significa que es imposible comer todo el pastel? Claro que no. Escribamos lo que usted ha comido de este pastel:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Esta es una serie infinita, y observamos dos cosas acerca de ella. Primero, a partir de la figura 3, es evidente que no importa cuántos términos de esta serie sumemos, el total nunca será mayor que 1. Segundo, entre más términos de esta serie sumemos, la suma será más cercana a 1 (véase la figura 3). Esto lleva a pensar que el número 1 se puede expresar como una suma infinita de números pequeños:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Para precisar más, examinemos las sumas parciales de esta serie:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

y, en general (véase el ejemplo 5 de la sección 11.1),

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Cuando n se vuelve más y más grande, estamos sumando más y más términos de esta serie. Intuitivamente, cuando n se vuelve más grande, S_n está más cerca de la suma de la serie. Ahora observe que cuando n se vuelve grande, $1/2^n$ se acerca más y más a 0. Por lo tanto, S_n se acerca a $1 - 0 = 1$. Con la notación de la sección 3.6, podemos escribir

$$S_n \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty$$

Después del primer término, los términos de esta serie forman una serie geométrica infinita en donde

$$a = \frac{51}{1000} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{100}$$

Por lo tanto, la suma de esta parte de la serie es

$$S = \frac{\frac{51}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{51}{990}$$

De modo que $\quad 2.3\overline{51} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{51}{990} = \dfrac{2328}{990} = \dfrac{388}{165}$ ■

11.3 Ejercicios

1–4 ■ Se proporciona el n-ésimo término de una sucesión.

a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

b) ¿Cuál es la razón común r?

c) Grafique los términos que calculó en el inciso a).

1. $a_n = 5(2)^{n-1}$ **2.** $a_n = 3(-4)^{n-1}$

3. $a_n = \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ **4.** $a_n = 3^{n-1}$

5–8 ■ Calcule el n-ésimo término de la sucesión geométrica dados el primer término a y la razón común r. ¿Cuál es el cuarto término?

5. $a = 3, \quad r = 5$ **6.** $a = -6, \quad r = 3$

7. $a = \frac{5}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}$ **8.** $a = \sqrt{3}, \quad r = \sqrt{3}$

9–16 ■ Determine si la sucesión es geométrica. Si es así, calcule la razón común.

9. $2, 4, 8, 16, \ldots$ **10.** $2, 6, 18, 36, \ldots$

11. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ **12.** $27, -9, 3, -1, \ldots$

13. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **14.** $e^2, e^4, e^6, e^8, \ldots$

15. $1.0, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$ **16.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

17–22 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión, y determine si es geométrica. Si es así, determine la razón común y exprese el n-ésimo término de la sucesión en la forma estándar $a_n = ar^{n-1}$.

17. $a_n = 2(3)^n$ **18.** $a_n = 4 + 3^n$

19. $a_n = \dfrac{1}{4^n}$ **20.** $a_n = (-1)^n 2^n$

21. $a_n = \ln(5^{n-1})$ **22.** $a_n = n^n$

23–32 ■ Determine la razón común, el quinto término y el n-ésimo término de la sucesión geométrica.

23. $2, 6, 18, 54, \ldots$ **24.** $7, \frac{14}{3}, \frac{28}{9}, \frac{56}{27}, \ldots$

25. $0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, \ldots$

26. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

27. $144, -12, 1, -\frac{1}{12}, \ldots$ **28.** $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

29. $3, 3^{5/3}, 3^{7/3}, 27, \ldots$ **30.** $t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{4}, \dfrac{t^4}{8}, \ldots$

31. $1, s^{2/7}, s^{4/7}, s^{6/7}, \ldots$ **32.** $5, 5^{c+1}, 5^{2c+1}, 5^{3c+1}, \ldots$

33. El primer término de una sucesión geométrica es 8 y el segundo término es 4. Determine el quinto término.

34. El primer término de una sucesión geométrica es 3 y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Determine el quinto término.

35. La razón común de una sucesión geométrica es $\frac{2}{5}$ y el quinto término es $\frac{5}{2}$. Determine el tercer término.

36. La razón común de una sucesión geométrica es $\frac{3}{2}$ y el quinto término es 1. Determine los primeros tres términos.

37. ¿Qué término de la sucesión geométrica 2, 6, 18, . . . es 118 098?

38. El segundo y el quinto términos de una sucesión geométrica son 10 y 1250, respectivamente. ¿Es 31 250 un término de esta sucesión? Si es así, ¿qué término es?

39–42 ■ Calcule la suma parcial S_n de la sucesión geométrica que cumple con las condiciones dadas.

39. $a = 5, \quad r = 2, \quad n = 6$ **40.** $a = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}, \quad n = 4$

41. $a_3 = 28, \quad a_6 = 224, \quad n = 6$

42. $a_2 = 0.12, \quad a_5 = 0.00096, \quad n = 4$

43–46 ■ Calcule la suma.

43. $1 + 3 + 9 + \cdots + 2187$

44. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512}$

45. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 3(\tfrac{1}{2})^k$ **46.** $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 7(\tfrac{3}{2})^j$

47–54 ■ Calcule la suma de la serie geométrica infinita.

47. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots$ **48.** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

49. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$

50. $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots$

51. $\frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{3^{12}} + \cdots$

52. $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \cdots$

53. $-\frac{100}{9} + \frac{10}{3} - 1 + \frac{3}{10} - \cdots$

54. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \cdots$

55–60 ■ Exprese el número decimal periódico en la forma de una fracción.

55. $0.777\ldots$

56. $0.2\overline{53}$

57. $0.030303\ldots$

58. $2.1\overline{125}$

59. $0.\overline{112}$

60. $0.123123123\ldots$

61. Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una sucesión geométrica, entonces $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ son **medias geométricas** entre a_1 y a_n. Inserte tres medias geométricas entre 5 y 80.

62. Determine la suma de los primeros 10 términos de la sucesión

$$a + b, a^2 + 2b, a^3 + 3b, a^4 + 4b, \ldots$$

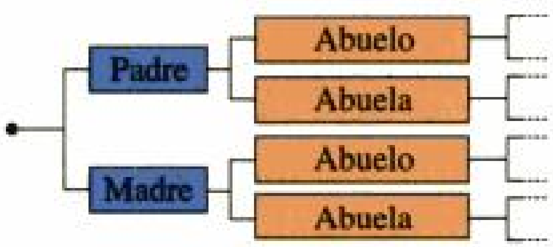
Aplicaciones

63. Depreciación Una constructora compra una pala mecánica por 160 000 dólares. El valor de la pala se deprecia cada año 20% de su valor del año anterior. Sea V_n el valor de la pala mecánica en el n-ésimo año. (Sea $n = 1$ el año en que se compró la pala.)

a) Determine una fórmula para V_n.

b) ¿En qué año el valor de la pala mecánica será menor de 100 000 dólares?

64. Árbol genealógico Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos y así sucesivamente. ¿Cuántos ancestros tiene una persona que pertenece a la 15a. generación?

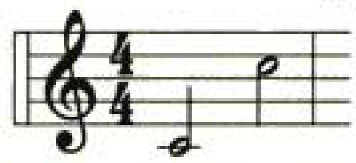


65. Rebote de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 80 pies. La elasticidad de esta pelota es tal que rebota tres cuartas partes de la distancia desde donde cayó. ¿Qué tan alto rebota la pelota en el quinto rebote? Determine una fórmula para la altura que alcanza la pelota en el n-ésimo rebote.

66. Cultivo de bacterias Una cultivo tiene al principio 5000 bacterias, su tamaño aumenta 8% cada hora. ¿Cuántas bacterias hay al final de 5 h? Determine una fórmula que dé la cantidad de bacterias después de n horas.

67. Mezcla de refrigerantes Un radiador de un camión tiene una capacidad de 5 galones y se llena con agua. Se extrae un galón de agua del radiador y se reemplaza con un galón de anticongelante; luego se extrae un galón de la mezcla y se reemplaza con un galón de anticongelante. Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta agua queda en el radiador después de que este proceso se repite tres veces? ¿Cinco veces? ¿n veces?

68. Frecuencias musicales Las frecuencias de las notas musicales, medidas en ciclos por segundo, forman una sucesión geométrica. Do mayor tiene una frecuencia de 256, y Do, que es una octava más alta, tiene una frecuencia de 512. Encuentre la frecuencia de Do dos octavas abajo de Do mayor.



69. Rebote de pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 9 pies. La elasticidad de la pelota es tal que siempre rebota un tercio de la distancia desde donde cayó.

a) Determine la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que golpea el suelo por quinta vez.

b) Determine una fórmula para la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que golpea el suelo por n-ésima vez.

70. Plan de ahorro geométrico Una mujer muy paciente desea volverse millonaria. Decide seguir un simple esquema: aparta un centavo el primer día, 2 centavos el segundo, 4 centavos el tercero y así sucesivamente, duplicando la cantidad de centavos cada día. ¿Cuánto dinero tendrá a los 30 días? ¿Cuántos días necesitará esta mujer para volver su deseo realidad?

71. St. Ives La siguiente es una canción infantil muy bien conocida:

Voy hacia St. Ives
Me encontré a un hombre y sus siete esposas;
Cada esposa llevaba siete sacos;
Cada saco contenía siete gatos;
Cada gato tenía siete gatitos:
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban hacia St. Ives?

Si suponemos que el grupo completo en realidad iban para St. Ives, demuestre que la respuesta a la pregunta de la cancioncilla es una suma parcial de una sucesión geométrica, y determine la suma.

72. Concentración de medicamentos Un cierto medicamento se administra una vez al día. La concentración del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente se incrementa primero con rapidez, pero cada dosis sucesiva tiene menos efecto que la anterior. La cantidad total del medicamento, en mg, en el torrente sanguíneo después de la n-ésima dosis se obtiene con

$$\sum_{k=1}^{n} 50\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

a) Determine la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo después de $n = 10$ días.

b) Si el paciente tomara el medicamento durante un largo periodo, la cantidad en el torrente sanguíneo es aproximadamente el valor de la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 50\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Determine la suma de esta serie.

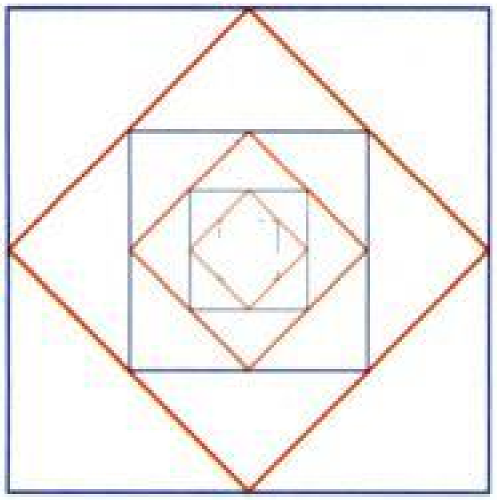
73. **Rebote de una pelota** Una cierta pelota rebota a la mitad de la altura desde donde cayó. Utilice una serie geométrica infinita para obtener un valor aproximado de la distancia total que recorre la pelota después de ser dejada caer desde 1 m por arriba del suelo, hasta que llega al reposo.

74. **Rebote de una pelota** Si la pelota del ejercicio 73 se deja caer de una altura de 8 pies, entonces se requiere 1 s para su primer rebote completo —desde el instante que toca por primera vez el suelo hasta que lo vuelve a tocar—. Cada rebote completo posterior requiere $1/\sqrt{2}$ tanto como el rebote precedente completo. Utilice una serie geométrica infinita para estimar el tiempo desde el instante en que la pelota toca por primera vez el suelo hasta que deja de rebotar.

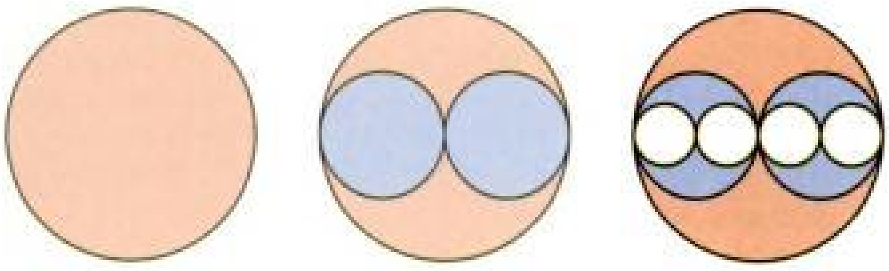
75. **Geometría** Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. (Véase la figura.)

a) Determine la suma de las áreas de todos los cuadrados.

b) Calcule la suma de los perímetros de todos los cuadrados.

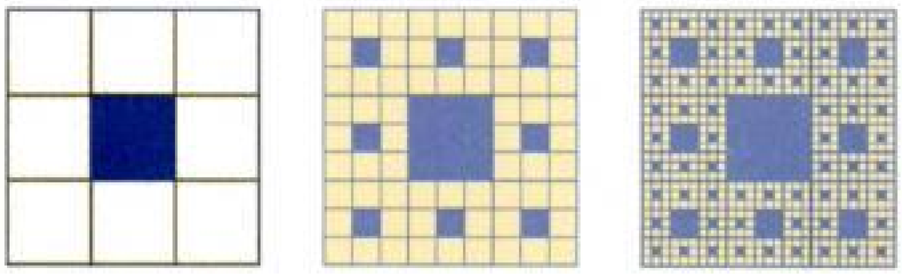


76. **Geometría** Se recorta un disco circular de radio R de un papel, como se muestra en la figura a). Se recortan otros dos discos de radio $\frac{1}{2}R$ de otro papel, y se colocan sobre el primer disco, según la figura b), y luego se colocan otros cuatro discos de radio igual a $\frac{1}{4}R$ se colocan sobre los dos discos anteriores (figura c). Si suponemos que este proceso se puede repetir de manera indefinida, calcule el área total de todos los discos.



a) b) c)

77. **Geometría** Un cuadrado amarillo de lado 1 se divide en nueve cuadritos, y el cuadro del centro se colorea de azul como se ilustra en la figura. Cada uno de los cuadritos amarillos se divide a su vez en otros nueve cuadritos, y cada cuadrito del centro se colorea de azul. Si este proceso continúa indefinidamente, ¿cuál es el total del área coloreada de azul?



Descubrimiento • Debate

78. **¿Aritmética o geométrica?** Se proporcionan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si estos términos pueden ser términos de una sucesión aritmética, de una sucesión geométrica o de ninguna de las dos. Determine el siguiente término si la sucesión es aritmética o geométrica.

a) $5, -3, 5, -3, \ldots$
b) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$
c) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$
d) $1, -1, 1, -1, \ldots$
e) $2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$
f) $x-1, x, x+1, x+2, \ldots$
g) $-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \ldots$
h) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, 1, \ldots$

79. **Recíprocos de una sucesión geométrica** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, demuestre que la sucesión

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$$

es también una sucesión geométrica y calcule la razón común.

80. **Logaritmos de una sucesión geométrica** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r > 0$ y $a_1 > 0$, demuestre que la sucesión

$$\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$$

es una sucesión aritmética y determine la diferencia común.

81. **Exponenciales de una sucesión aritmética** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia común d, demuestre que la sucesión

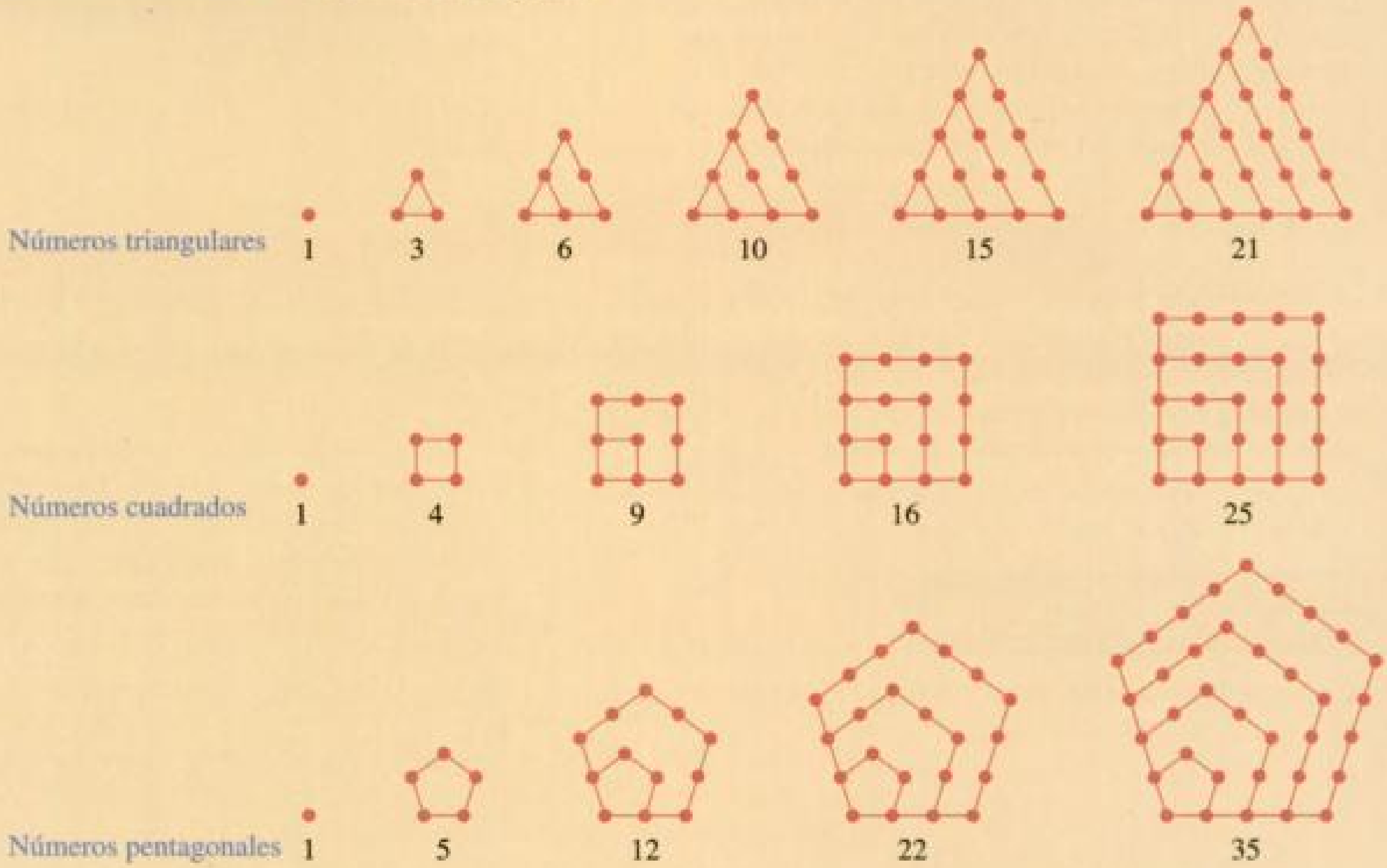
$$10^{a_1}, 10^{a_2}, 10^{a_3}, \ldots$$

es una sucesión geométrica y determine la razón común.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Determinación de patrones

Los antiguos griegos estudiaron los números triangulares, los números cuadrados, los números pentagonales y otros **números poligonales**, como los que se ilustran en las figuras.



Con el fin de encontrar tales números, se construye una **sucesión de primeras diferencias** obteniendo las diferencias de términos sucesivos; se repite el proceso para obtener una **sucesión de segundas diferencias**, una **sucesión de terceras diferencias** y así sucesivamente. Por lo que se refiere a la sucesión de los números triangulares T_n se obtiene la siguiente **tabla de diferencias**:

Números triangulares	1		3		6		10		15		21
Primeras diferencias		2		3		4		5		6	
Segundas diferencias			1		1		1		1		

Nos detenemos en la sucesión de segundas diferencias porque es una sucesión constante. Si suponemos que esta sucesión continuará hasta tener un valor constante 1, podemos trabajar hacia atrás desde el renglón inferior para encontrar más términos de la sucesión de primeras diferencias, y, a partir de éstos, más números triangulares.

Si una sucesión está dada por una función polinomial y si calculamos las primeras diferencias, las segundas diferencias, las terceras diferencias y así sucesivamente, entonces obtenemos con el tiempo una sucesión constante. Por ejemplo, los números triangulares se obtienen por medio del polinomio $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (véase la nota al margen de la página siguiente); la sucesión de las segundas diferencias es la sucesión constante 1, 1, 1, . . .

La fórmula para el número triangular n-ésimo se puede determinar aplicando la fórmula de la suma de los primeros n números enteros (ejemplo 2, sección 11.5). A partir de la definición de T_n tenemos

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

1. Construya una tabla de diferencias para los números cuadrados y los números pentagonales. Utilice la tabla para determinar el décimo número pentagonal.
2. De acuerdo con los patrones que ha observado antes, ¿cuál según usted sería la segunda diferencia para los *números hexagonales*? Aplique esto junto con el hecho de que los primeros dos números hexagonales son 1 y 6 para determinar los primeros ocho números hexagonales.
3. Construya tablas de diferencias para $C_n = n^3$. ¿Qué sucesión de diferencias es constante? Haga lo mismo para $F_n = n^4$.
4. Forme un polinomio de grado 5 y construya una tabla de diferencias. ¿Cuál sucesión de diferencias es constante?
5. Unos de los primeros términos de una sucesión polinomial son 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, ... Construya una tabla de diferencias y utilícela para determinar cuatro términos más de esta sucesión.

11.4 Matemáticas financieras

Muchas transacciones financieras se relacionan con pagos que se efectúan a intervalos regulares. Por ejemplo, si usted deposita 100 dólares cada mes en una cuenta que genera intereses, ¿cuál será el valor de su cuenta a los cinco años? Si pide prestados 100 000 dólares para comprar una casa, ¿cuánto debe pagar al mes con el fin de liquidar el préstamo en 30 años? Cada una de estas cuestiones se relaciona con la suma de una sucesión de números. Usamos los resultados de la sección anterior para responder aquí a dichas cuestiones.

La cantidad de una anualidad o pago parcial

Una **anualidad** es una cantidad de dinero que se entrega en pagos regulares iguales. Aunque la palabra anualidad sugiera pagos anuales, los pagos pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales o seguir algún otro intervalo regular. Los pagos se efectúan por lo regular al final del intervalo de pago. La **cantidad de una anualidad o parcialidad** es la suma de todos los pagos individuales desde el momento del primer pago hasta que se efectúa el último pago, junto con todos los intereses. Denotamos esta suma con A_f (el subíndice f que se usa es para denotar la cantidad *final*).

Ejemplo 1 Cálculo de la cantidad de un pago

Un inversionista deposita 400 dólares cada 15 de diciembre y 15 de junio durante 10 años en una cuenta que gana intereses de 8% al año, compuesto semestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta inmediatamente después del último pago?

Cuando use tasa de interés en una calculadora, recuerde convertir los porcentajes en decimales. Por ejemplo, 8% es 0.08.

Solución Es necesario determinar la cantidad que consiste en 20 pagos semestrales de 400 dólares cada uno. Puesto que la tasa de interés es de 8% al año, compuesto semestralmente, la tasa de interés por periodo es $i = 0.08/2 = 0.04$. El primer pago está en la cuenta durante 19 periodos, el segundo durante 18 periodos, etcétera.

El último pago no recibe interés. La situación se ilustra mediante una línea de tiempo en la figura 1.

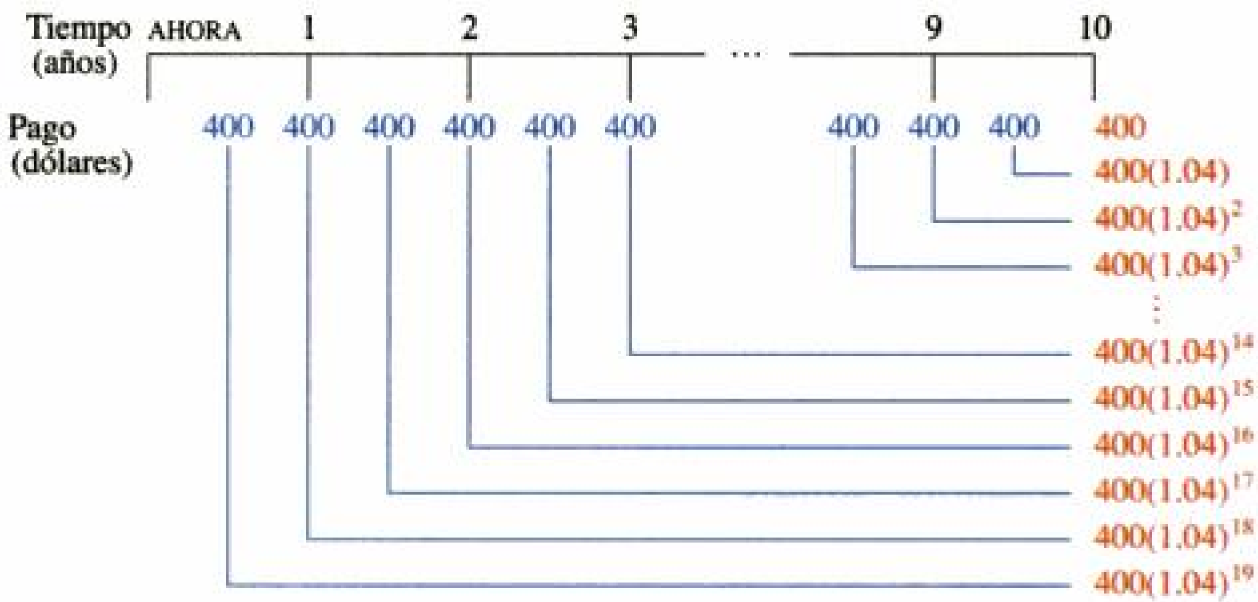


Figura 1

La cantidad A_f es la suma de estas 20 cantidades. Por lo tanto,

$$A_f = 400 + 400(1.04) + 400(1.04)^2 + \cdots + 400(1.04)^{19}$$

Pero esta es una serie geométrica donde $a = 400$, $r = 1.04$ y $n = 20$, de modo que

$$A_f = 400\frac{1 - (1.04)^{20}}{1 - 1.04} \approx 11\,911.23$$

Por lo tanto, la cantidad que hay en la cuenta después del último pago es de 11 911.23 dólares. ■

En general, el pago regular se llama **renta periódica**, y se denota con R. Asimismo, con i denotamos la tasa de interés por periodo y n el número de pagos. *Siempre suponemos que el periodo en el cual el interés está compuesto es igual al tiempo entre pagos.* De acuerdo con el mismo razonamiento del ejemplo 1, vemos que la cantidad A_f de una anualidad es

$$A_f = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

Puesto que ésta es la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica donde $a = R$ y $r = 1 + i$, la fórmula de la suma parcial da

$$A_f = R\,\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = R\,\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Cantidad de una anualidad

La cantidad A_f de una anualidad que consiste de n pagos regulares iguales de magnitud R con tasa de interés i por periodo está dada por

$$A_f = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Matemáticas en el mundo moderno

Economía matemática

Factores interrelacionados, como abasto, demanda, producción, consumo, precios, distribución y miles de otros factores determinan la salud de la economía global. A su vez, decisiones económicas (como por ejemplo, si usted compra o no una marca de pasta dental), que toman todos los días miles de millones de personas determinan dichos factores. ¿Cómo afectan la producción y distribución de bienes de hoy la economía de mañana? A estas preguntas dan respuesta los matemáticos que trabajan en modelos matemáticos relacionados con la economía. En la década de 1940, Wassily Leontiev, uno de los pioneros en este campo, ideó un modelo que consta de miles de ecuaciones, que describen la manera cómo interactúan distintos sectores de la economía, como la industria del petróleo, el transporte y las comunicaciones. Un enfoque diferente a los modelos económicos, uno que trata con sectores individuales en la economía en contraposición con los grandes sectores, fue abordado por primera vez por John Nash en la década de 1950. De acuerdo con su modelo, en el cual aplica la *Teoría de juegos*, la economía es un juego en el cual jugadores individuales toman decisiones que con frecuencia llevan a una ganancia mutua. Leontiev y Nash recibieron el Premio Nobel de Economía en 1973 y 1994, respectivamente. La teoría económica será un campo primordial de la investigación matemática.

Ejemplo 2 Cálculo de la cantidad de un pago

¿Cuánto dinero debe ser invertido cada mes al 12% anual, compuesto mensualmente, para tener 4000 dólares en 18 meses?

Solución En este problema $i = 0.12/12 = 0.01$, $A_f = 4000$ y $n = 18$. Es necesario determinar la cantidad R de cada mensualidad. Mediante la fórmula de la cantidad de una anualidad,

$$4000 = R\frac{(1 + 0.01)^{18} - 1}{0.01}$$

Si despejamos R, tenemos

$$R = \frac{4000(0.01)}{(1 + 0.01)^{18} - 1} \approx 203.928$$

Por lo tanto, la inversión mensual debe ser de 203.93 dólares. ■

Valor actual de una anualidad

Si usted fuera a recibir 10 000 dólares dentro de cinco años, valdrían menos que 10 000 dólares de hoy. Esto se debe al interés que usted podría acumular durante los siguientes cinco años si invierte el dinero ahora. ¿Qué cantidad menor estaría dispuesto a aceptar *ahora* en lugar de recibir 10 000 dentro de cinco años? Esta es la cantidad de dinero que, junto con los intereses, valdría 10 000 dólares dentro de cinco años. La cantidad que estamos buscando es *el valor descontado* o *valor actual.* Si la tasa de interés es 8% anual, compuesto trimestralmente, entonces el interés por periodo es $i = 0.08/4 = 0.02$, y son $4 \times 5 = 20$ periodos. Si PV es el valor actual, entonces de acuerdo con la fórmula de interés compuesto (sección 4.1) tenemos

$$10\,000 = PV(1 + i)^n = PV(1 + 0.02)^{20}$$

de modo que
$$PV = 10\,000(1 + 0.02)^{-20} \approx 6729.713$$

Por lo tanto, en esta situación, el valor actual de 10 000 dólares es 6729.71 dólares. Este razonamiento origina la fórmula general para el valor actual:

$$PV = A(1 + i)^{-n}$$

De igual manera, el **valor actual** de una anualidad es la cantidad A_p que se debe invertir ahora a una tasa de interés i por periodo con objeto de proporcionar n pagos, cada uno de una cantidad R. Evidentemente, A_p es la suma de los valores actuales o presentes de cada pago individual (véase el ejercicio 22). Otra manera de determinar A_p es observar que A_p es el valor actual de A_f:

$$A_p = A_f(1 + i)^{-n} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}(1 + i)^{-n} = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Valor actual de una anualidad

El **valor actual** de A_p de una anualidad que consiste en n pagos regulares de magnitud R y tasa de interés i por periodo está dado por

$$A_p = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Ejemplo 5 Cálculo de los pagos mensuales de una hipoteca

Una pareja pide prestados 100 000 dólares al 9% de interés como hipoteca sobre una casa. Espera hacer pagos mensuales durante 30 años para liquidar el préstamo. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

Solución Los pagos de la hipoteca forman una parcialidad cuyo valor presente es $A_p = 100\,000$ dólares. Además, $i = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 12 \times 30 = 360$. Estamos buscando la cantidad R de cada pago. De acuerdo con la fórmula para comprar a plazos tenemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}} \\ &= \frac{(0.0075)(100\,000)}{1 - (1 + 0.0075)^{-360}} \approx 804.623 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los pagos mensuales son de 804.62 dólares. ■

Ahora se ilustra el uso de las calculadoras que grafican para la resolución de problemas relacionados con las compras a plazos.

Ejemplo 6 Cálculo de la tasa de interés a partir de la magnitud de los pagos mensuales

Un comerciante de automóviles vende un vehículo nuevo por 18 000 dólares. Ofrece al comprador pagos de 405 dólares por mes durante 5 años. ¿Qué tasa de interés está cargando el comerciante?

Solución Los pagos forman una cantidad con valor actual $A_p = \$18\,000$, $R = 405$ y $n = 12 \times 5 = 60$. Para calcular la tasa de interés, debemos determinar i en la ecuación

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Un poco de experimentación lo convencerá de que es imposible resolver esta ecuación algebraicamente para determinar i. Entonces, para determinar i recurrimos a una calculadora que grafique R en función de la tasa de interés x, y luego usamos la gráfica para encontrar la tasa de interés que corresponde al valor de R que queremos (405 dólares en este caso). Puesto que $i = x/12$, graficamos la función

$$R(x) = \frac{\frac{x}{12}(18\,000)}{1 - \left(1 + \frac{x}{12}\right)^{-60}}$$

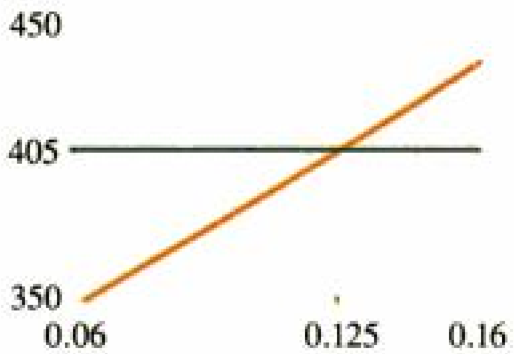


Figura 2

en el rectángulo de visión $[0.06, 0.16] \times [350, 450]$, como se muestra en la figura 2. Asimismo, graficamos la recta horizontal $R(x) = 405$ en el mismo rectángulo de visión. Luego desplazamos el cursor hasta el punto de intersección de las dos gráficas, y encontramos que el valor de x correspondiente es de casi 0.125. Por lo tanto, la tasa de interés es casi $12\frac{1}{2}\%$. ■

11.4 Ejercicios

1. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 10 pagos anuales de 1000 dólares cada uno en una cuenta que ofrece 6% de interés al año.
2. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 24 pagos mensuales de 500 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, compuesto mensualmente.
3. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 20 pagos anuales de 5000 dólares cada uno en una cuenta que da 12% de interés al año.
4. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 20 pagos semestrales de 500 dólares cada uno en una cuenta que ofrece 6% de interés al año, compuesto semestralmente.
5. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 16 pagos trimestrales de 300 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, compuesto trimestralmente.
6. **Ahorros** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada trimestre al 10% anual, compuesto trimestralmente, con objeto de reunir 5000 dólares en dos años?
7. **Ahorros** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada mes al 6% anual, compuesto mensualmente, con objeto de reunir 2000 dólares en ocho meses?
8. **Anualidad** ¿Cual es el valor actual de una anualidad que consiste en 20 pagos semestrales de 1000 dólares a una tasa de interés de 9% al año, compuesto semestralmente?
9. **Garantía de una anualidad** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir ahora a 9% anual, compuesto semestralmente, para garantizar una anualidad de 20 pagos de 200 dólares cada uno, entregados cada seis meses, en donde el primer pago se dará dentro de 6 meses a partir de ahora?
10. **Garantía de una anualidad** Un hombre de 55 años deposita 50 000 dólares para garantizar una anualidad con una compañía de seguros. El dinero se invertirá a 8% anual, compuesto semestralmente. El hombre retirará pagos semestrales hasta que llegue a la edad de 65 años. ¿Cuál es la magnitud de cada retiro?
11. **Financiamiento de un automóvil** Una mujer quiere pedir prestados 12 000 dólares con el fin de comprar un automóvil. Quiere liquidar el préstamo con pagos parciales mensuales durante 4 años. Si la tasa de interés sobre este préstamo es de $10\frac{1}{2}$% al año, compuesto mensualmente, ¿cuál es la cantidad que tendrá que pagar cada vez?
12. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 30 años de 80 000 dólares al 9% de interés? ¿Cuál es el pago mensual para la misma hipoteca si se tiene que liquidar en un periodo de 15 años?
13. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 30 años de 100 000 dólares al 8% de interés anual, compuesto mensualmente? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en el periodo de 30 años?
14. **Hipoteca** Una pareja puede pagar mensualmente 650 dólares por una hipoteca. Si la tasa de interés de la hipoteca es de 9% y la pareja pretende garantizar una hipoteca de 30 años, ¿cuánto dinero pueden pedir prestado?
15. **Hipoteca** Una pareja obtiene un préstamo a 30 años de 100 000 dólares a $9\frac{3}{4}$% anual, compuesto mensualmente, para comprar una casa.
    a) ¿Cuánto tiene que pagar cada mes?
    b) ¿Cuál será la cantidad total pagada en el periodo de 30 años?
    c) Si en lugar de pedir prestado la pareja deposita cada mes en una cuenta que ofrece el $9\frac{3}{4}$% de interés al año, compuesto mensualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta al final del periodo de 30 años?
16. **Financiamiento de un automóvil** Jane está de acuerdo en comprar un vehículo mediante un pago inmediato de 2000 dólares y pagos mensuales de 220 dólares durante 3 años. Si la tasa de interés es de 8% al año, compuesto mensualmente, ¿cuál es el precio de compra real del automóvil?
17. **Financiamiento de un anillo** Mike compra un anillo para su prometida mediante pagos de 30 dólares mensuales durante un año. Si la tasa de interés es de 10% anual, compuesto mensualmente, ¿cuál es el precio del anillo?
18. **Tasa de interés** Los pagos de Jane sobre su automóvil de 12 500 dólares son de 420 dólares al mes durante tres años. Suponga que el interés está compuesto mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando en el préstamo de su vehículo?
19. **Tasa de interés** John compra un equipo estereofónico de 640 dólares. Está de acuerdo en pagar 32 dólares cada mes durante dos años. Si suponemos que el interés está compuesto mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando?
20. **Tasa de interés** Un hombre compra un anillo de diamantes de 2000 dólares mediante un pago al contado de 200 dólares y parcialidades mensuales de 88 dólares durante 2 años. Suponga que el interés está compuesto mensualmente, entonces ¿qué tasa de interés está pagando?
21. **Tasa de interés** Un artículo en una tienda tiene el precio de 189.99 dólares y se puede comprar efectuando 20 pagos de 10.50 dólares. Determine la tasa de interés, suponiendo que el interés está compuesto mensualmente.

Descubrimiento • Debate

22. **Valor actual de una anualidad** a) Dibuje una línea de tiempo como en el ejemplo 1 para ilustrar que el valor presente de una anualidad es la suma de los valores presentes de cada pago, es decir,

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

    b) Mediante el inciso a) deduzca la fórmula para A_p que se proporciona en el texto..
23. **Una anualidad que dura por siempre** Una anualidad a perpetuidad es aquella que continúa por siempre. Estas anualidades son útiles para establecer fondos para becas con el fin de asegurar que el beneficio continúa.

Ejemplo 1 Demostración aplicando la inducción matemática

Demuestre que para todo número natural n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Solución Sea $P(n)$ la proposición $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Paso 1 Se necesita demostrar que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ es simplemente la proposición $1 = 1^2$, lo cual es naturalmente cierto.

Paso 2 Se supone que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Queremos utilizar esta proposición para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

[Observe que se obtiene $P(k + 1)$ al sustituir $k + 1$ por cada n en la proposición $P(n)$.] Se empieza con el primer miembro y se usa la hipótesis de inducción para obtener el segundo miembro de la ecuación:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1]$$ Agrupación de los primeros k términos

Esto es igual a k^2 de acuerdo con la hipótesis de inducción.

$$= k^2 + [2(k + 1) - 1]$$ Hipótesis de inducción

$$= k^2 + [2k + 2 - 1]$$ Propiedad distributiva

$$= k^2 + 2k + 1$$ Simplificación

$$= (k + 1)^2$$ Factorización

Por lo tanto, $P(k + 1)$ se infiere a partir de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción..

Luego de haber demostrado los pasos 1 y 2, se puede concluir por el principio de inducción matemática que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n. ■

Ejemplo 2 Una demostración por inducción matemática

Demuestre que para todo número natural n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Solución Sea $P(n)$ la proposición $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. Se quiere demostrar que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n.

Paso 1 Es necesario demostrar que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ establece que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

y este enunciado es evidentemente verdadero.

Blaise Pascal (1623-1662) es considerado como una de las mentes más versátiles de la historia moderna. Fue escritor y filósofo, así como matemático y físico dotado. Entre las contribuciones que aparecen en este libro se encuentran el triángulo de Pascal y el principio de la inducción matemática.

El padre de Pascal, también matemático, pensaba que su hijo estudiaría matemáticas, hasta cuando tuviera 15 o 16 años, pero a los 12 años, Blaise insistió en estudiar geometría, y demostró él mismo la mayor parte de los teoremas elementales. Cuando tenía 19 años inventó la primera sumadora mecánica. En 1647, después de escribir un tratado sobre las secciones cónicas, abandonó en forma repentina sus estudios de matemáticas porque sintió que su intensa dedicación contribuía a su mala salud. Se dedicó entonces a actividades frívolas, como el juego, pero esto sólo sirvió para que se despertara su interés en la probabilidad. En 1654 sobrevivió milagrosamente al accidente de un carruaje en el cual los caballos cayeron de un puente. Tomó esto como una señal divina, así que ingresó a un monasterio, donde se entregó con afán a la teología y la filosofía, y escribió sus famosos *Pensées*. También prosiguió con la investigación matemática. Para él, la fe y la intuición eran más valiosas que la razón como fuente de la verdad, por lo que afirmó que "el corazón tiene sus propias razones, qué razones, no lo podemos saber".

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Queremos usarla para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Entonces, se empieza con el primer miembro y se aplica la hipótesis de inducción para obtener el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\
&= [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k+1) && \text{Agrupación de los primeros } k \text{ términos} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && \text{Se toma como factor } k+1 \\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) && \text{Denominador común} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} && \text{Escriba } k+2 \text{ como } k+1+1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$ y con esto termina el paso de inducción.

Después de demostrar los pasos 1 y 2, concluimos que de acuerdo con el principio de la inducción matemática $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n. ■

Las fórmulas para las sumas de las potencias de los primeros n números naturales son importantes en el cálculo infinitesimal. La fórmula 1 del recuadro siguiente se demostró en el ejemplo 2. Las otras fórmulas también se demuestran aplicando la inducción matemática (véanse los ejercicios 4 y 7).

Sumas de potencias

0. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Podría suceder que una proposición $P(n)$ sea falsa para los primeros números naturales, pero verdadera a partir de algún número en adelante. Por ejemplo, se podría querer demostrar que $P(n)$ es verdadera para $n \geq 5$. Obsérvese que si se demuestra que $P(5)$ es verdadera, entonces de este hecho, junto con el paso de inducción, se puede inferir que son verdaderas $P(5), P(6), P(7), \ldots$. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto.

Ejemplo 3 Demostración de una desigualdad por inducción matemática

Demuestre que $4n < 2^n$ para toda $n \geq 5$.

Solución Denotemos con $P(n)$ la proposición $4n < 2^n$.

Paso 1 $P(5)$ es la proposición $4 \cdot 5 < 2^5$, o bien, $20 < 32$, lo cual es cierto.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$4k < 2^k$$

Queremos usarla para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir,

$$4(k+1) < 2^{k+1}$$

Obtenemos $P(k+1)$ al reemplazar k por $k+1$ en la proposición $P(k)$.

Entonces, se empieza con el primer miembro de la desigualdad y se utiliza la hipótesis de inducción para demostrar que es menor que el segundo miembro. Para $k \geq 5$, tenemos

$$\begin{aligned} 4(k+1) &= 4k + 4 \\ &< 2^k + 4 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &< 2^k + 4k && \text{Porque } 4 < 4k \\ &< 2^k + 2^k && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} && \text{Propiedad de los exponentes} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$, y con esto termina el paso de inducción.

Luego de haber demostrado los pasos 1 y 2, se puede concluir que de acuerdo con el principio de la inducción matemática $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales $n \geq 5$. ■

11.5 Ejercicios

1–12 ■ Aplique la inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

3. $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n+2) = \dfrac{n(3n+7)}{2}$

4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

6. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

7. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

8. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

9. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

10. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

11. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = 2[1 + (n-1)2^n]$

12. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

13. Demuestre que $n^2 + n$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

14. Demuestre que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para todos los números naturales n.

15. Demuestre que $n^2 - n + 41$ es impar para todos los números naturales n.

16. Demuestre que $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

17. Demuestre que $8^n - 3^n$ es divisible entre 5 para todos los números naturales n.

18. Demuestre que $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para todos los números naturales n.

19. Demuestre que $n < 2^n$ para todos los números naturales n.

20. Demuestre que $(n+1)^2 < 2n^2$ para todos los números naturales $n \geq 3$.

21. Demuestre que si $x > -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todos los números naturales n.

22. Demuestre que $100n \leq n^2$ para todo $n \geq 100$.

23. Sean $a_{n+1} = 3a_n$ y $a_1 = 5$. Demuestre que $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ para todos los números naturales n.

24. Una sucesión está definida recursivamente por medio de $a_{n+1} = 3a_n - 8$ y $a_1 = 4$. Plantee una fórmula explícita para a_n y, luego, aplique la inducción matemática para demostrar que la fórmula que plantea es cierta.

25. Demuestre que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los números naturales n.

[*Sugerencia*: $x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + (x^k - y^k)y$]

26. Demuestre que $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ para todos los números naturales n.

27–31 ■ El símbolo F_n denota el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci tratada en el sección 11.1. Aplique la inducción matemática para demostrar el enunciado.

27. F_{3n} es par para todos los números naturales n.

28. $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

29. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

30. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

31. Para todo $n \geq 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

32. Sea a_n el n-ésimo término de la sucesión definida en forma recursiva por

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

y $a_1 = 1$. Determine una fórmula para a_n en términos de los números de Fibonacci. Demuestre que la fórmula que determinó es válida para todos los números naturales.

33. Sea F_n el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Determine y demuestre una desigualdad que relaciona n y F_n para los números naturales n.

34. Determine y demuestre una desigualdad que relacione $100n$ y n^3.

Descubrimiento • Debate

35. ¿Verdadero o falso? Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas. Si piensa que la proposición es verdadera, demuéstrelo. Si piensa que es falsa, proporcione un ejemplo de dónde falla.

a) $p(n) = n^2 - n + 11$ es primo para todo n.

b) $n^2 > n$ para todo $n \geq 2$.

c) $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 1$.

d) $n^3 \geq (n + 1)^2$ para todo $n \geq 2$.

e) $n^3 - n$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 2$.

f) $n^3 - 6n^2 + 11n$ es divisible entre 6 para todo $n \geq 1$.

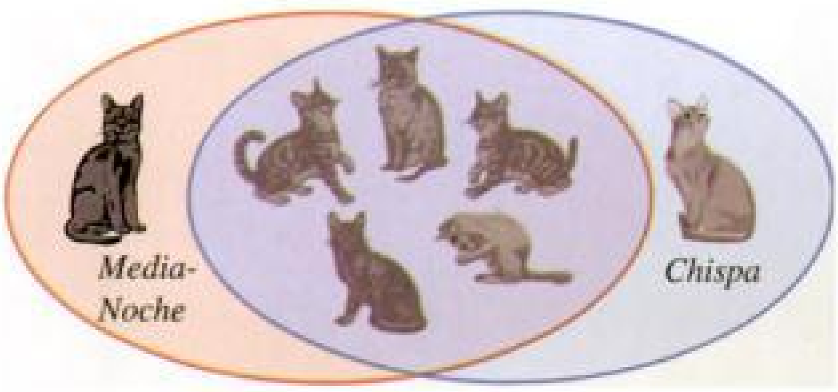
36. ¿Todos los gatos son negros? ¿Qué es lo que está mal en la siguiente "demostración" mediante inducción matemática de que todos los gatos son negros? Sea $P(n)$ el enunciado: en cualquier grupo de n gatos, si uno es negro, entonces todos ellos son negros.

Paso 1 La proposición es evidentemente cierta para $n = 1$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Demostremos que $P(k + 1)$ es verdadera.

Suponga que tenemos un grupo de $k + 1$ gatos, uno de los cuales es negro; llamémosle *Medianoche*. Quitemos a un gato del grupo, a *Chispa*. Nos quedamos con k gatos, uno de los cuales (*Medianoche*) es negro, entonces, según la hipótesis de inducción, todos los k gatos del grupo son negros. Ahora regresemos a *Chispa* al grupo y saquemos a *Medianoche*. De nuevo tenemos un grupo de k gatos, todos los cuales, excepto posiblemente *Chispa*, son negros. Luego, de acuerdo con la hipótesis de inducción, *Chispa* debe ser también negro. Entonces, todos los $k + 1$ gatos del grupo original son negros.

Por lo tanto, por inducción $P(n)$ es verdadera para todo n. Puesto que todos han visto por lo menos un gato negro, se infiere que todos los gatos son negros.



11.6 Teorema del binomio

Una expresión de la forma $a + b$ se llama binomio. Aunque en principio es fácil elevar a $a + b$ a cualquier potencia, elevarla a una potencia muy alta sería tedioso. En esta sección se determina una fórmula que indica el desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n y luego se demuestra mediante inducción matemática.

Desarrollo de $(a + b)^n$

Para encontrar un patrón en el desarrollo de $(a + b)^n$, primero examinamos unos casos especiales:

$$\begin{aligned}
(a + b)^1 &= a + b \\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Los siguientes patrones simples surgen del desarrollo de $(a + b)^n$:

1. Hay $n + 1$ términos, el primero es a^n y el último es b^n.
2. Los exponentes de a disminuyen una unidad de término a término, en tanto los exponentes de b aumentan una unidad.
3. La suma de los exponentes de a y b en cada término es n.

Por ejemplo, observe cómo se comportan los exponentes a y b es en el desarrollo de $(a + b)^5$.

Los exponentes de a disminuyen:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$$

Los exponentes de b incrementan:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$$

A partir de estas observaciones podemos escribir la forma del desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n. Por ejemplo, si escribimos un signo de interrogación en donde falte un coeficiente, tenemos

$$(a + b)^8 = a^8 + \text{?}\,a^7b + \text{?}\,a^6b^2 + \text{?}\,a^5b^3 + \text{?}\,a^4b^4 + \text{?}\,a^3b^5 + \text{?}\,a^2b^6 + \text{?}\,ab^7 + b^8$$

Para terminar el desarrollo, es necesario determinar estos coeficientes. Para encontrar un patrón, se escriben los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$ para los primeros valores de n en un acomodo triangular como el mostrado en la siguiente figura, que se llama **triángulo de Pascal.**

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Al sustituir $a = 2$ y $b = -3x$ tenemos

$$(2 - 3x)^5 = (2)^5 + 5(2)^4(-3x) + 10(2)^3(-3x)^2 + 10(2)^2(-3x)^3 + 5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5$$
$$= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5$$ ∎

Los coeficientes del binomio

El triángulo de Pascal es útil para determinar el desarrollo de un binomio para valores razonablemente pequeños de n, pero no es práctico para determinar $(a + b)^n$ en el caso de valores grandes de n. La razón es que el método que usamos para encontrar los renglones sucesivos del triángulo de Pascal es recursivo. Por lo tanto, para encontrar el renglón centésimo, necesitamos determinar los 99 renglones precedentes.

Es necesario examinar con más cuidado el patrón de los coeficientes para desarrollar una fórmula que permita calcular en forma directa cualquier coeficiente en el desarrollo binomial. Tal fórmula existe, y el resto de esta sección se dedica a encontrarla y a demostrarla. Pero antes de establecer la fórmula necesitamos una notación.

El producto de los primeros n números naturales se denota mediante $\boldsymbol{n!}$ y se llama ***n* factorial**:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$
$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$$

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n - 1) \cdot n}$$

También definimos a 0! como sigue:

$$\boxed{0! = 1}$$

Esta definición de 0! permite que muchas fórmulas que contienen factoriales sean más cortas y más fáciles de escribir.

El coeficiente del binomio

Sean n y r enteros no negativos en donde $r \le n$. El **coeficiente del binomio** se denota con $\binom{n}{r}$ y se define como sigue

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Ejemplo 3 Cálculo de los coeficientes del binomio

a) $$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9 - 4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)(\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5})}$$
$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

b) $$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100 - 3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97} \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97})}$$
$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700$$

Propiedad clave de los coeficientes binomiales

Para enteros no negativos cualquiera r y k , donde $r \leq k$,

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Observe que los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación son elementos adyacentes en el k-ésimo renglón del triángulo de Pascal y el término del segundo miembro es el elemento ubicado en diagonal abajo de ellos, en el $(k + 1)$ renglón. Por lo tanto, esta ecuación es un replanteamiento de la propiedad clave del triángulo de Pascal en términos de los coeficientes del binomio. Una demostración de esta fórmula se esboza en el ejercicio 49.

Teorema del binomio

Ya estamos listos para establecer el teorema del binomio.

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Demostramos el teorema al final de esta sección. Primero examinemos algunas de sus aplicaciones.

Ejemplo 4 Desarrollo de un binomio aplicando el teorema del binomio

Aplique el teorema del binomio para desarrollar $(x + y)^4$.

Solución De acuerdo con el teorema del binomio,

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Verifique que

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Se infiere que

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

■

Ejemplo 5 Desarrollo de un binomio aplicando el teorema del binomio

Por medio del teorema del binomio desarrolle $(\sqrt{x} - 1)^8$.

Solución Primero desarrollemos $(a + b)^8$ y luego escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de a y -1 en lugar de b. Según el teorema del binomio, tenemos

$$(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$$

Verifique que

$$\binom{8}{0} = 1 \quad \binom{8}{1} = 8 \quad \binom{8}{2} = 28 \quad \binom{8}{3} = 56 \quad \binom{8}{4} = 70$$

$$\binom{8}{5} = 56 \quad \binom{8}{6} = 28 \quad \binom{8}{7} = 8 \quad \binom{8}{8} = 1$$

Entonces

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Al efectuar las sustituciones $a = x^{1/2}$ y $b = -1$ obtenemos

$$(\sqrt{x} - 1)^8 = (x^{1/2})^8 + 8(x^{1/2})^7(-1) + 28(x^{1/2})^6(-1)^2 + 56(x^{1/2})^5(-1)^3 + 70(x^{1/2})^4(-1)^4 + 56(x^{1/2})^3(-1)^5 + 28(x^{1/2})^2(-1)^6 + 8(x^{1/2})(-1)^7 + (-1)^8$$

Lo cual al simplificarlo da

$$(\sqrt{x} - 1)^8 = x^4 - 8x^{7/2} + 28x^3 - 56x^{5/2} + 70x^2 - 56x^{3/2} + 28x - 8x^{1/2} + 1 \quad \blacksquare$$

El teorema del binomio se puede aplicar para encontrar un determinado término de un desarrollo binomial sin tener que efectuar todo el desarrollo.

Término general del desarrollo binomial

El término que contiene a^r en el desarrollo de $(a + b)^n$ es

$$\binom{n}{n-r}a^rb^{n-r}$$

Ejemplo 6 Determinación de un término particular en un desarrollo binomial

Determine el término que contiene x^5 en el desarrollo de $(2x + y)^{20}$.

Solución El término que contiene x^5 lo da la fórmula para el término general donde $a = 2x$, $b = y$, $n = 20$ y $r = 5$. Entonces, este término es

$$\binom{20}{15}a^5b^{15} = \frac{20!}{15!(20-15)!}(2x)^5y^{15} = \frac{20!}{15!5!}32x^5y^{15} = 496\,128x^5y^{15}$$ ■

Ejemplo 7 Determinación de un término particular en un desarrollo binomial

Encuentre el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

Solución Tanto x^2 como $1/x$ son potencias de x, de modo que ambos términos del binomio determinan la potencia de x en cada término del desarrollo. Para encontrar el coeficiente deseado, primero se determina el término general en el desarrollo. Según la fórmula tenemos $a = x^2$, $b = 1/x$ y $n = 10$, por lo que el término general es

$$\binom{10}{10-r}(x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{2r}(x^{-1})^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{3r-10}$$

Por lo tanto, el término que contiene x^8 es el término en el cual

$$\begin{aligned} 3r - 10 &= 8 \\ r &= 6 \end{aligned}$$

De modo que el coeficiente buscado es

$$\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = 210$$ ■

Demostración del teorema del binomio

En seguida se muestra una demostración del teorema del binomio mediante inducción matemática.

■ **Demostración** Sea $P(n)$ la proposición

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Paso 1 Demostramos que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ es justo la proposición

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = 1a + 1b = a + b$$

la cual es ciertamente verdadera.

Paso 2 Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

Podemos usar esta hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)[(a+b)^k]$$

$$= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$ Hipótesis de inducción

$$= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$

$$+ b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$ Propiedad distributiva

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$ Propiedad distributiva

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2$$

$$+ \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$ Agrupación por términos semejantes

Al utilizar la propiedad clave de los coeficientes binomiales podemos escribir cada una de las expresiones en paréntesis cuadrados como un simple coeficiente de un binomio. Asimismo, al escribir el primero y el último coeficientes como $\binom{k+1}{0}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ (son iguales a 1 según el ejercicio 46) tenemos

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Pero esta última expresión es precisamente $P(k+1)$, y esto completa el paso de inducción.

Después de demostrar los pasos 1 y 2, concluimos de acuerdo con el principio de inducción matemática que el teorema se cumple para todos los números naturales n. ■

11.6 Ejercicios

1–12 ■ Aplique el triángulo de Pascal para el desarrollo de la expresión.

1. $(x+y)^6$ **2.** $(2x+1)^4$ **3.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

4. $(x-y)^5$ **5.** $(x-1)^5$ **6.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$

7. $(x^2y-1)^5$ **8.** $(1+\sqrt{2})^6$ **9.** $(2x-3y)^3$

10. $(1+x^3)^3$ **11.** $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^5$ **12.** $\left(2+\frac{x}{2}\right)^5$

13–20 ■ Evalúe la expresión.

13. $\binom{6}{4}$ **14.** $\binom{8}{3}$ **15.** $\binom{100}{98}$

16. $\binom{10}{5}$ **17.** $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$ **18.** $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$

19. $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

20. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$

21–24 ■ Por medio del teorema de binomio desarrolle la expresión

21. $(x + 2y)^4$ **22.** $(1 - x)^5$

23. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$ **24.** $(2A + B^2)^4$

25. Calcule los primeros tres términos del desarrollo de $(x + 2y)^{20}$

26. Determine los primeros cuatro términos del desarrollo de $(x^{1/2} + 1)^{30}$.

27. Encuentre los últimos dos términos del desarrollo de $(a^{2/3} + a^{1/3})^{25}$.

28. Encuentre los primeros tres términos del desarrollo de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$$

29. Calcule el término medio del desarrollo de $(x^2 + 1)^{18}$.

30. Determine el quinto término del desarrollo de $(ab - 1)^{20}$.

31. Calcule el vigésimocuarto término del desarrollo de $(a + b)^{25}$.

32. Encuentre el vigésimooctavo del desarrollo de $(A - B)^{30}$.

33. Encuentre el centésimo término del desarrollo de $(1 + y)^{100}$.

34. Calcule el segundo término del desarrollo de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{25}$$

35. Encuentre el término que contiene x^4 en el desarrollo de $(x + 2y)^{10}$.

36. Encuentre el término que contiene y^3 en el desarrollo de $(\sqrt{2} + y)^{12}$.

37. Determine el término que contiene b^8 en el desarrollo de $(a + b^2)^{12}$.

38. Calcule el término que no contiene x en el desarrollo de

$$\left(8x + \frac{1}{2x}\right)^8$$

39–42 ■ Factorice aplicando el teorema del binomio.

39. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

40. $(x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$

41. $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

42. $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

43–44 ■ Simplifique usando el teorema del binomio.

43. $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ **44.** $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

45. Demuestre que $(1.01)^{100} > 2$.

[*Sugerencia*: Observe que $(1.01)^{100} = (1 + 0.01)^{100}$ y aplique el teorema del binomio para demostrar que la suma de los primeros dos términos del desarrollo es mayor que 2.]

46. Demuestre que $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$.

47. Demuestre que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

48. Demuestre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para $0 \le r \le n$.

49. En este ejercicio demostramos la identidad

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

a) Escriba el primer miembro de esta ecuación como la suma de dos fracciones.

b) Demuestre que un común denominador de la expresión que encontró en el inciso a) es $r!(n - r + 1)!$

c) Sume las dos fracciones usando el común denominador del inciso b), simplifique el numerador y observe que la expresión que resulta es igual al segundo miembro de la ecuación.

50. Demuestre que $\binom{n}{r}$ es un entero para toda n y para $0 \le r \le n$. [*Sugerencia*: aplique la inducción para demostrar que la proposición es verdadera para toda n, y use el ejercicio 49 para el paso de inducción.]

Descubrimiento • Debate

51. Potencias de factoriales ¿Qué es más grande $(100!)^{101}$ o $(101!)^{100}$? [*Sugerencia*: trate de factorizar las expresiones. ¿Tienen algunos factores comunes?]

52. Sumas de coeficientes binomiales Sume cada uno de los cinco primeros renglones del triángulo de Pascal, como se indica. ¿Observa usted algún patrón?

$$1 + 1 = ?$$
$$1 + 2 + 1 = ?$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = ?$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = ?$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = ?$$

Con base en el patrón que ha encontrado, determine la suma del n-ésimo renglón:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Demuestre que su resultado al desarrollar $(1 + 1)^n$ usando el teorema del binomio.

53. Sumas alternas de coeficientes binomiales Determine la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

determinando un patrón como en el ejercicio 52. Demuestre su resultado desarrollando $(1 + 1)^n$ mediante el teorema del binomio.

11 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) ¿Qué es una sucesión?
   b) ¿Qué es una sucesión aritmética? Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión aritmética.
   c) ¿Qué es una sucesión geométrica? Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión geométrica.
2. a) ¿Qué es una sucesión definida recursivamente?
   b) ¿Cuál es la sucesión de Fibonacci?
3. a) ¿Cuál es el significado de las sumas parciales de una sucesión?
   b) Si una sucesión aritmética tiene como primer término a y diferencia común d, escriba una expresión para la suma de los primeros n términos.
   c) Si una sucesión geométrica tiene como primer término a y razón común r, escriba una expresión para la suma de sus primeros n términos.
   d) Escriba una expresión para la suma de una serie geométrica infinita cuyo primer término es a y su razón común r. ¿Para qué valores de r la fórmula es válida?
4. a) Escriba la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sin usar la notación Σ.
   b) Escriba $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ usando la notación Σ.
5. Escriba una expresión para la cantidad A_f de una anualidad que consta de n pagos regulares iguales de magnitud R con tasa de interés i por periodo..
6. Explique el principio de la inducción matemática.
7. Escriba los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal. ¿De qué manera están interrelacionados los elementos?
8. a) ¿Qué significa el símbolo $n!$?
   b) Escriba una expresión para el coeficiente binomial $\binom{n}{r}$.
   c) Enuncie el teorema del binomio.
   d) Escriba el término que contiene a^r en el desarrollo de $(a + b)^n$.

Ejercicios

1–6 ■ Determine los primeros cuatro términos así como el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término se da.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$
2. $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n}$
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^3}$
4. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
5. $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$
6. $a_n = \binom{n+1}{2}$

7–10 ■ Una sucesión está definida recursivamente. Encuentre los primeros siete términos de la sucesión.

7. $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \quad a_1 = 1$
8. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \quad a_1 = 1$
9. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 3$
10. $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{3}$

11–14 ■ Se proporciona el n-ésimo término de una sucesión.

a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión.
b) Grafique los términos que encontró en el inciso a).
c) Determine si la serie es aritmética o geométrica. Calcule la diferencia común o la razón común.

11. $a_n = 2n + 5$
12. $a_n = \dfrac{5}{2^n}$
13. $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$
14. $a_n = 4 - \dfrac{n}{2}$

15–22 ■ Se proporcionan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si son términos de una sucesión aritmética, de una sucesión geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética o geométrica, determine el quinto término.

15. $5, 5.5, 6, 6.5, \ldots$ **16.** $1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, \ldots$

17. $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$ **18.** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

19. $t-3, t-2, t-1, t, \ldots$ **20.** $t^3, t^2, t, 1, \ldots$

21. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ **22.** $a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots$

23. Demuestre que $3, 6i, -12, -24i, \ldots$ es una sucesión geométrica y encuentre la razón común. (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

24. Calcule en n-ésimo término de la sucesión geométrica $2, 2+2i, 4i, -4+4i, -8, \ldots$ (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

25. El sexto término de una sucesión aritmética es 17, y el cuarto término es 11. Calcule el segundo término.

26. El vigésimo término de una sucesión aritmética es 96, y la diferencia común es 5. Calcule el n-ésimo término.

27. El tercer término de una sucesión geométrica es 9 y la razón común es $\frac{3}{2}$. Determine el quinto término.

28. El segundo término de una sucesión geométrica es 10, y el quinto término es $\frac{1250}{27}$. Determine el n-ésimo término.

29. Un maestro gana 32 000 dólares en su primer año en la escuela Lakeside, y obtiene un aumento de 5% anual.

a) Plantee una fórmula para su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela.

b) Proporcione una lista de sus salarios de los primeros 8 años en esta escuela.

30. Una colega del maestro del ejercicio 29, contratada al mismo tiempo, ganó 35 000 dólares en el primer año, y obtuvo un aumento de 1200 dólares cada año.

a) ¿Cuál es su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela?

b) Calcule su salario en el octavo año en esta escuela, y compárelo con el salario del maestro del ejercicio 29 en el octavo año.

31. Un cierto tipo de bacteria se divide cada 5 s. Si tres de estas bacterias se colocan en una caja de Petri, ¿cuántas bacterias hay en el recipiente al final de un minuto?

32. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones aritméticas, demuestre que $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ también es una sucesión aritmética.

33. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones geométricas, demuestre que $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ también es una sucesión geométrica.

34. a) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética, ¿la sucesión $a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \ldots$ es aritmética?

b) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una secuencia geométrica, ¿la secuencia $5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots$ es geométrica?

35. Calcule los valores de x para los que la sucesión $6, x, 12, \ldots$ es

a) aritmética **b)** geométrica

36. Calcule los valores de x y de y para los cuales la sucesión $2, x, y, 17, \ldots$ es

a) aritmética **b)** geométrica

37–40 ■ Calcule la suma.

37. $\sum_{k=3}^{6} (k+1)^2$ **38.** $\sum_{i=1}^{4} \frac{2i}{2i-1}$

39. $\sum_{k=1}^{6} (k+1)2^{k-1}$ **40.** $\sum_{m=1}^{5} 3^{m-2}$

41–44 ■ Escriba la suma sin usar la notación sigma. No dé el valor.

41. $\sum_{k=1}^{10} (k-1)^2$ **42.** $\sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j-1}$

43. $\sum_{k=1}^{50} \frac{3^k}{2^{k+1}}$ **44.** $\sum_{n=1}^{10} n^2 2^n$

45–48 ■ Escriba la suma por medio de la notación sigma. No dé el valor.

45. $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 99$

46. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$

47. $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^6 + \cdots + 100 \cdot 2^{102}$

48. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$

49–54 ■ Determine si la expresión es una suma parcial de una sucesión aritmética o geométrica. Luego calcule la suma.

49. $1 + 0.9 + (0.9)^2 + \cdots + (0.9)^5$

50. $3 + 3.7 + 4.4 + \cdots + 10$

51. $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \cdots + 100\sqrt{5}$

52. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 33$

53. $\sum_{n=0}^{6} 3(-4)^n$ **54.** $\sum_{k=0}^{8} 7(5)^{k/2}$

55. El primer término de una sucesión aritmética es $a = 7$ y la diferencia común es $d = 3$. ¿Cuántos términos de esta sucesión se tienen que sumar para obtener 325?

56. La suma de los primeros tres términos de una serie geométrica es 52, y la razón común es $r = 3$. Calcule el primer término.

57. Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, etcétera. ¿Cuántos ancestros tiene en 15 generaciones?

58. Calcule la cantidad de una anualidad que consta de 16 pagos anuales de 1000 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés anual, compuesto anualmente.

59. ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada trimestre al 12% anual, compuesto trimestralmente, con el fin de tener 10 000 en un año?

60. ¿De cuánto son los pagos mensuales de una hipoteca de 60 000 dólares al 9% de interés si el préstamo se tiene que liquidar en

a) 30 años? **b)** 15 años?

61–64 ■ Calcule la suma de la serie geométrica infinita.

61. $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$

62. $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$

63. $1 + \dfrac{1}{3^{1/2}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^{3/2}} + \cdots$

64. $a + ab^2 + ab^4 + ab^6 + \cdots$

65–67 ■ Mediante inducción matemática demuestre que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

65. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

66. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

67. $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

68. Demuestre que $7^n - 1$ es divisible entre 6 para todos los números naturales n.

69. Sean $a_{n+1} = 3a_n + 4$ y $a_1 = 4$. Demuestre que $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$ para todos los números naturales.

70. Demuestre que el número de Fibonacci F_{4n} es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

71. Determine y demuestre una desigualdad que relaciona 2^n y $n!$

72–75 ■ Evalúe las expresiones.

72. $\dbinom{5}{2}\dbinom{5}{3}$

73. $\dbinom{10}{2} + \dbinom{10}{6}$

74. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}$

75. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\binom{8}{8-k}$

76–77 ■ Desarrolle la expresión.

76. $(1 - x^2)^6$

77. $(2x + y)^4$

78. Encuentre el vigésimo término del desarrollo de $(a + b)^{22}$.

79. Calcule los primeros tres términos del desarrollo de $(b^{-2/3} + b^{1/3})^{20}$.

80. Calcule el término que contiene A^6 en el desarrollo de $(A + 3B)^{10}$.

11 Evaluación

1. Determine los primeros cuatro términos y el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = n^2 - 1$.

2. Una sucesión está definida recursivamente por $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. Calcule a_5.

3. Una sucesión aritmética inicia con 2, 5, 8, 11, 14, ...

a) Encuentre la diferencia común d para esta sucesión.

b) Determine una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Halle el trigésimoquinto término de la sucesión.

4. Una sucesión geométrica inicia con 12, 3, 3/4, 3/16, 3/64, ...

a) Determine la razón común r de esta sucesión.

b) Encuentre una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Calcule el décimo término de la sucesión.

5. El primer término de una sucesión geométrica es 25, y el cuarto término es $\frac{1}{5}$.

a) Determine la razón común r y el quinto término.

b) Calcule la suma parcial de los primeros ocho términos.

6. El primer término de una sucesión aritmética es 10 y el décimo término es 2.

a) Encuentre la diferencia común y el centésimo término de la sucesión.

b) Calcule la suma parcial de los primeros diez términos.

7. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión geométrica con término inicial a y razón común r. Demuestre que $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ es también una sucesión geométrica encontrando su razón común.

8. Escriba la expresión sin usar la notación sigma y, luego, calcule la suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(1 - n^2)$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{6}(-1)^n 2^{n-2}$

9. Calcule la suma.

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{2^9}{3^{10}}$

b) $1 + \dfrac{1}{2^{1/2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{3/2}} + \cdots$

10. Mediante inducción matemática demuestre que, para todos los números naturales n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11. Desarrolle $(2x + y^2)^5$.

12. Encuentre el término que contiene x^3 en el desarrollo del binomio $(3x - 2)^{10}$.

13. Un cachorro pesa 0.85 lb al nacer, y cada semana gana 24% de peso. Sea a_n su peso en libras al final de la n-ésima semana de vida.

a) Encuentre una fórmula para a_n.

b) ¿Cuánto pesa el cachorro cuando tiene seis semanas de vida?

c) ¿Es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos?

Con el fin de encontrar una fórmula para A_n, calculemos los primeros términos de la sucesión y busquemos un patrón.

$$A_1 = 1.005A_0$$
$$A_2 = 1.005A_1 = (1.005)^2A_0$$
$$A_3 = 1.005A_2 = (1.005)^3A_0$$
$$A_4 = 1.005A_3 = (1.005)^4A_0$$

Vemos que, en general, $A_n = (1.005)^n A_0$.

Ejemplo 1 Crecimiento de la población

Una cierta población de animales crece 2% cada año. La población inicial es de 5000 individuos.

a) Determine una sucesión recursiva que modele la población P_n al final del n-ésimo año.

b) Calcule los primeros cinco términos de la sucesión P_n.

c) Plantee una fórmula para P_n.

Solución

a) Podemos modelar la población usando la regla siguiente:

población al final de este año = 1.02 × población al final del último año

Si aplicamos el álgebra podemos escribir esto como una relación recursiva

$$P_n = 1.02P_{n-1}$$

b) Puesto que la población inicial es de 5000 individuos, tenemos

$$P_0 = 5000$$
$$P_1 = 1.02P_0 = (1.02)5000$$
$$P_2 = 1.02P_1 = (1.02)^25000$$
$$P_3 = 1.02P_2 = (1.02)^35000$$
$$P_4 = 1.02P_3 = (1.02)^45000$$

c) Vemos a partir del patrón mostrado en el inciso b) que $P_n = (1.02)^n5000$. (Observe que P_n es una sucesión geométrica con razón común $r = 1.02$.) ■

Ejemplo 2 Dosis diaria de un medicamento

Un paciente tiene que tomar todas las mañanas una píldora de 50 mg de un cierto medicamento. Se sabe que el organismo elimina el 40% del medicamento cada 24 horas.

a) Determine una sucesión recursiva que modele la cantidad A_n del medicamento en el organismo del paciente después de que toma cada píldora.

12 Límites: presentación preliminar de cálculo

12.1 Determinación de límites de forma numérica y gráfica

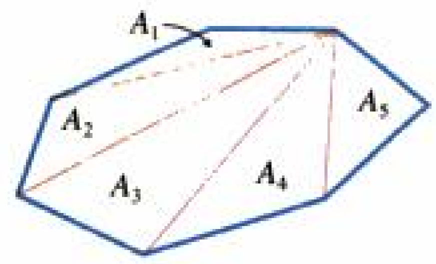
12.2 Determinación algebraica de límites

12.3 Rectas tangentes y derivadas

12.4 Límites en el infinito; límites de sucesiones

12.5 Áreas

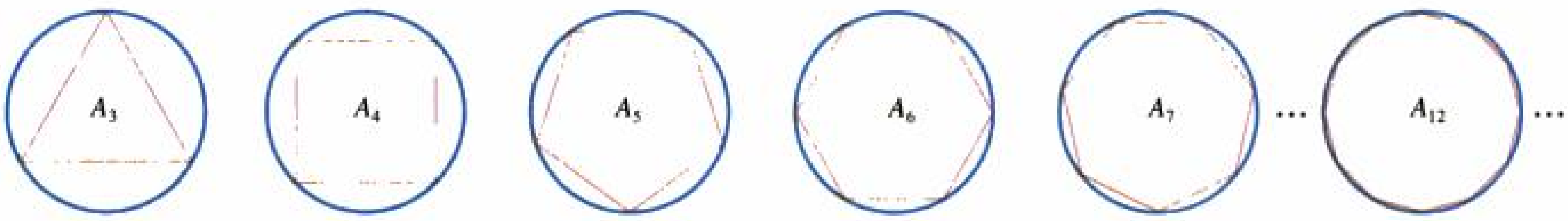
Esquema del capítulo



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

En este capítulo se estudia la idea central subyacente al cálculo, el concepto de *límite*. El cálculo se emplea para modelar numerosos fenómenos de la vida real, en particular situaciones relacionadas con cambio o movimiento. Para entender la idea básica de límites considérense dos ejemplos fundamentales.

Para hallar el área de una figura poligonal simplemente se divide en triángulos y se suman sus áreas, como se muestra en la figura que se encuentra a la izquierda. Sin embargo, es mucho más difícil hallar el área de una región con lados curvos. Una manera es aproximar el área inscribiendo polígonos en la región. En la figura se ilustra cómo se hace esto para un círculo.



Si A_n es el área del polígono regular inscrito con n lados, entonces se puede observar que cuando n aumenta, A_n se aproxima cada vez más al área del círculo. Se dice que el área A del círculo es el *límite* de las áreas A_n y se escribe

$$\text{área} = \lim_{n \to \infty} A_n$$

En caso de hallar un patrón para las áreas A_n, entonces se podría determinar el límite A de manera exacta. En este capítulo se usa una idea similar para hallar las áreas de regiones acotadas por gráficas de funciones.

En el capítulo 2 se aprendió cómo hallar la tasa de cambio promedio* de una función. Por ejemplo, para hallar la velocidad promedio se divide la distancia total recorrida entre el tiempo total. Pero, ¿cómo se puede encontrar la velocidad *instantánea*; es decir, la velocidad en un determinado instante? No se puede dividir la distancia total recorrida entre el tiempo total, ¡porque en un instante la distancia total recorrida es cero y el tiempo total empleado en el recorrido es cero! Pero se puede hallar la tasa de cambio *promedio* en intervalos cada vez más pequeños mediante una ampliación en el instante deseado. Por ejemplo, suponga que $f(t)$ proporciona la distancia que un automóvil ha recorrido en el tiempo t. Para determinar la velocidad del automóvil exactamente a las 2:00 P.M., se halla primero la velocidad promedio en un intervalo de 2 y un poco después de 2, es decir, en el intervalo $[2, 2 + h]$. Se sabe que la velocidad promedio en este intervalo es $[f(2 + h) - f(2)]/h$. Al determinar esta velocidad promedio para valores cada vez más pequeños de h (permitiendo

* A la tasa de cambio también se le llama razón de cambio, y puede ser promedio o instantánea.

que h se acerque a cero), se realiza una amplificación del instante deseado. Se puede escribir

$$\text{velocidad instantánea} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Si se encuentra un patrón para la velocidad promedio, se puede evaluar este límite de manera exacta.

Las ideas en este capítulo tienen aplicaciones de amplio alcance. El concepto de "tasa de cambio instantánea" se aplica a cualquier cantidad variante, no sólo la velocidad. El concepto de "área bajo la gráfica de una función" es muy versátil. De hecho, numerosos fenómenos, en apariencia no relacionados con el área, se pueden interpretar como el área bajo la gráfica de una función. Algunos de éstos se exploran en *Enfoque en el modelado*, página 929.

12.1 Determinación de límites en forma numérica y gráfica

En esta sección se emplean tablas de valores y gráficas de funciones para responder la pregunta, ¿qué sucede con los valores $f(x)$ de una función f cuando la variable x se aproxima a un número a?

Definición de límite

Se comienza por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de x cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.152500
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001

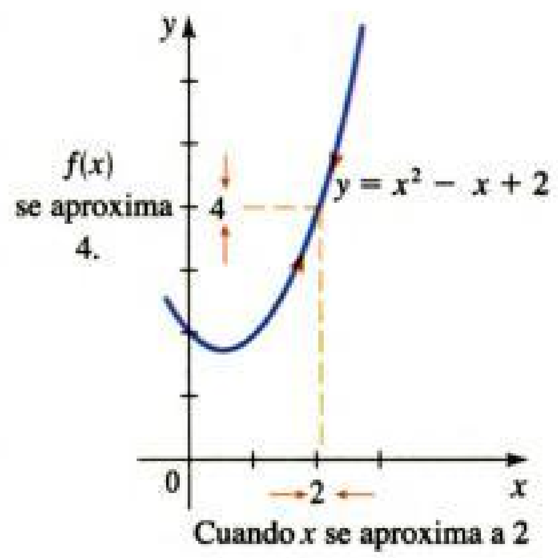


Figura 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) mostrada en la figura 1, se puede observar que cuando x está cerca de 2 (en cualquier lado de 2), $f(x)$ está cerca de 4. De hecho, parece que se puede lograr que los valores de $f(x)$ se aproximen a 4 tanto como se desee al tomar x suficientemente cercana a 2. Esto se expresa diciendo "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación.

Definición del límite de una función

Se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si es posible hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen de manera arbitraria a L (tan cerca de L como se quiera) al tomar x suficientemente próxima a a, pero no igual a a.

En términos generales, esto dice que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más al número L cuando x se acerca cada vez más al número a (desde cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

lo que normalmente se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a". Esta es la notación que se usó en la sección 3.6 en la explicación de asíntotas de funciones racionales.

Observe la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca se considera $x = a$. De hecho, incluso $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo f está definida *cerca de a*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Hay que observar que en el inciso c), $f(a)$ no está definida, y en el inciso b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que sucede en a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

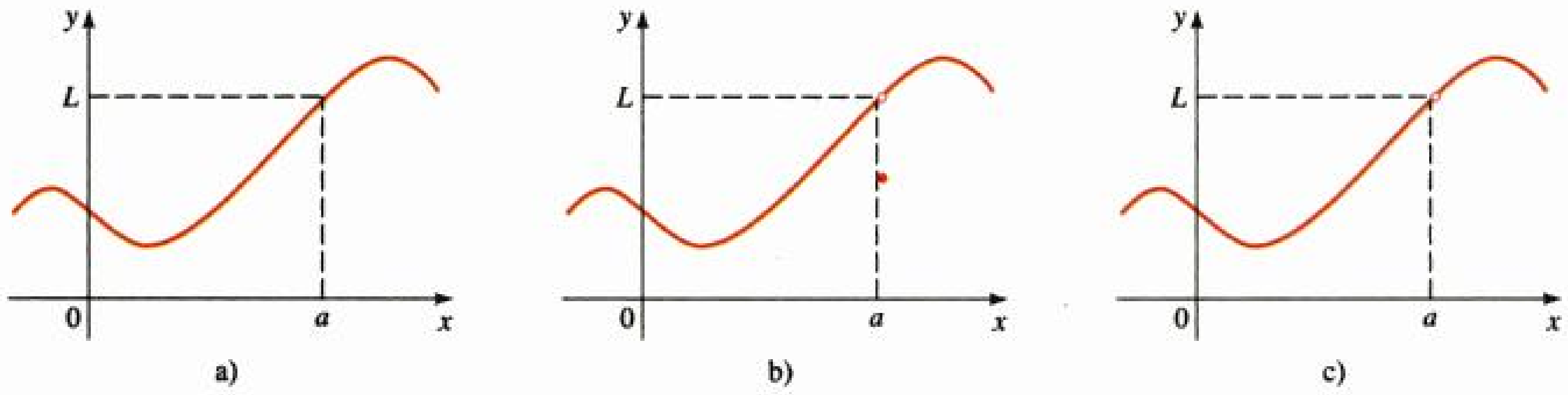


Figura 2
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

Estimación de límites en forma numérica y gráfica

En la sección 12.2 se desarrollarán técnicas para hallar valores exactos de límites. Por ahora, se usan tablas y gráficas para estimar límites de funciones.

Ejemplo 1 Estimar un límite en forma numérica y gráfica

Deduzca el valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Compruebe con una gráfica.

Solución Observe que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran valores de x próximos a a pero diferentes de a. Las siguientes tablas proporcionan valores de $f(x)$ (correctos hasta seis decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (pero que son distintos de 1).

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.4000000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

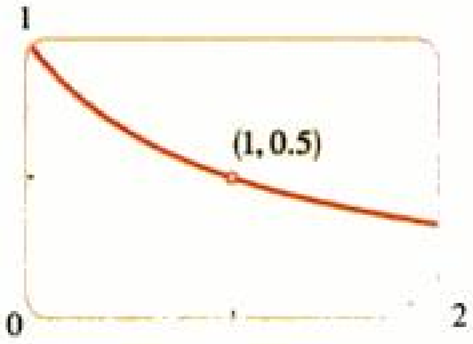


Figura 3

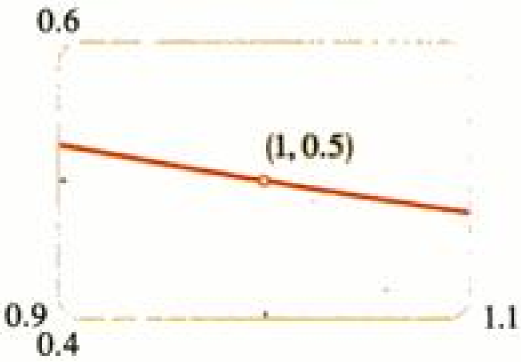


Figura 4

Sobre la base de valores en las dos tablas, se infiere que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

Como comprobación gráfica se usa un dispositivo de graficación para producir la figura 3. Se puede observar que cuando x se aproxima a 1, y se acerca a 0.5. Si se usan las características ZOOM y TRACE para tener una vista más amplia, como en la figura 4, se puede observar que cuando x se acerca cada vez más a 1, y se aproxima más y más a 0.5. Esto refuerza la conclusión. ■

Ejemplo 2 Hallar un límite a partir de una tabla

Encuentre $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Solución En la tabla del margen se listan valores de la función para varios valores de t cerca de 0. Cuando t se aproxima a 0, los valores de la función al parecer tienden a 0.1666666 . . . , y por lo tanto, se infiere que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ ■

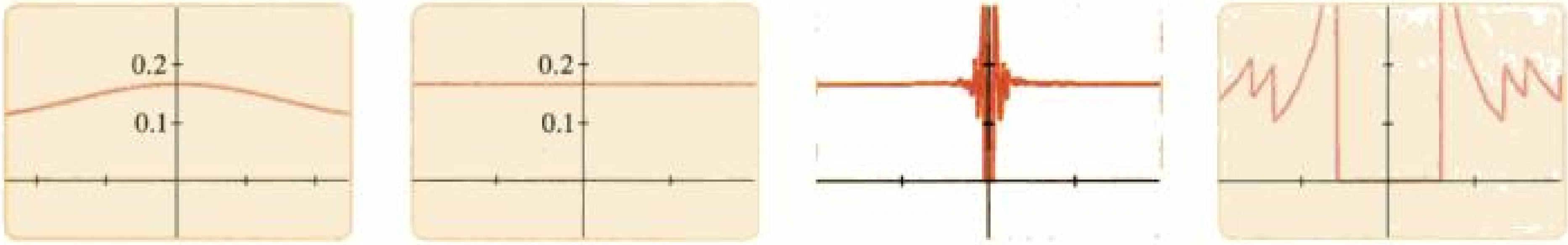
t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

¿Qué sucedería en el ejemplo 2 si se hubieran tomado incluso valores cada vez más pequeños de t? En la tabla del margen se muestran los resultados que proporciona una calculadora; se puede observar que al parecer algo extraño está sucediendo.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

Si prueba estos cálculos en su calculadora, podría obtener valores distintos, pero en algún momento se obtendría el valor 0 si se hace a t suficientemente pequeña. ¿Esto significa que en realidad la respuesta es 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se mostrará en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ es muy cercano a 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, un valor de calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ es 3.000 . . . hasta los dígitos que la calculadora pueda llevar.)

Algo similar sucede cuando se intenta graficar la función del ejemplo 2 en un dispositivo de graficación. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante exactas de esta función, y cuando se usa la característica TRACE, se puede estimar con facilidad que el límite está cercano a $\frac{1}{6}$. Pero al amplificar demasiado, como en los incisos c) y d), se obtienen entonces gráficas inexactas, de nuevo como resultado de problemas con la resta.



a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

Figura 5

Límites que no existen

Las funciones no necesariamente se aproximan a un valor infinito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. En los tres ejemplos siguientes se ilustran formas en las que esto puede suceder.

Ejemplo 3 Un límite que no existe (una función con un salto)

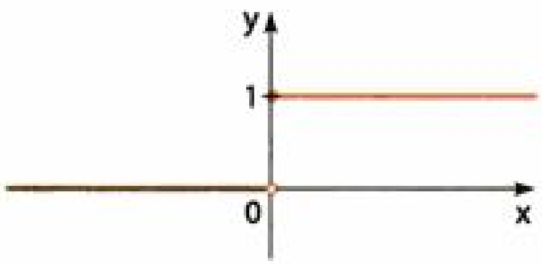


Figura 6

La función de Heaviside H se define como

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

[Esta función es llamada así en honor al ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se activa en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 6. Observe el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando t tiende a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No hay un solo número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim_{t \to a} H(x)$ no existe. ■

Ejemplo 4 Límite que no existe (una función que oscila)

Encuentre $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

Solución La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. La evaluación de la función para algunos valores pequeños de x da

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$
$$f(\tfrac{1}{3}) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{4}) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$
$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

De manera similar, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información se podría inferir que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \stackrel{?}{=} 0$$

pero esta vez la inferencia es errónea. Observe que aunque $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para una infinidad de valores de x que se aproximan a 0. (Véase la gráfica de la figura 7.)

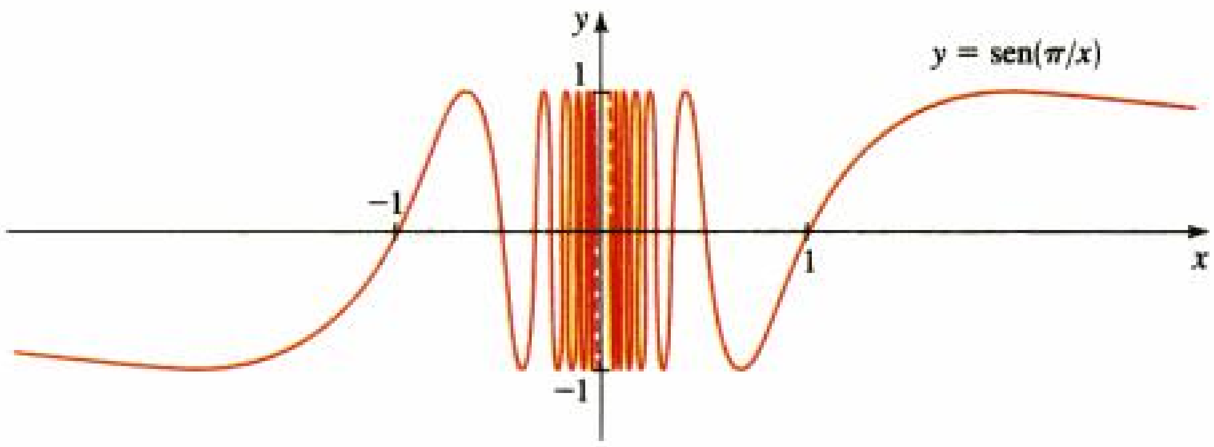


Figura 7

Las líneas discontinuas indican que los valores de sen (π/x) oscilan entre 1 y -1 infinitamente cuando x se aproxima a 0. Puesto que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

■

En el ejemplo 4 se ilustran algunas de las dificultades para inferir el valor de un límite. Es fácil inferir el valor erróneo si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la explicación después del ejemplo 2, algunas veces las calculadoras y computadoras dan valores incorrectos. Sin embargo, en las dos secciones siguientes, se desarrollarán métodos infalibles para calcular límites.

Ejemplo 5 Un límite que no existe (una función con una asíntota vertical)

Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

Solución Cuando x se aproxima a 0, x^2 también se acerca a 0 y $1/x^2$ se vuelve muy grande. (Véase la tabla al margen.) De hecho, resulta evidente de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ mostrada en la figura 8 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x lo bastante cerca a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe.

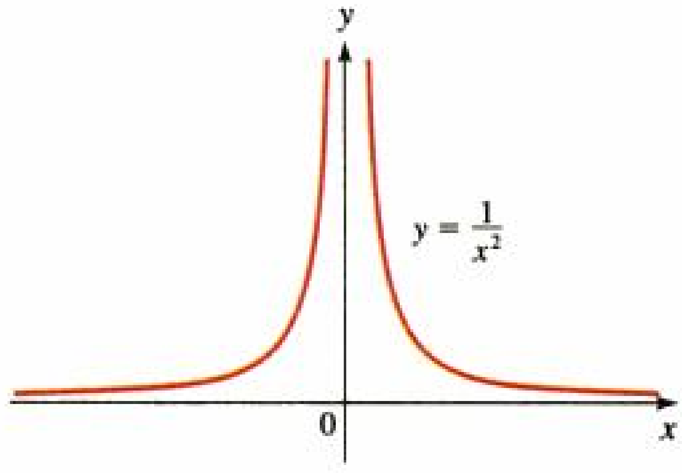


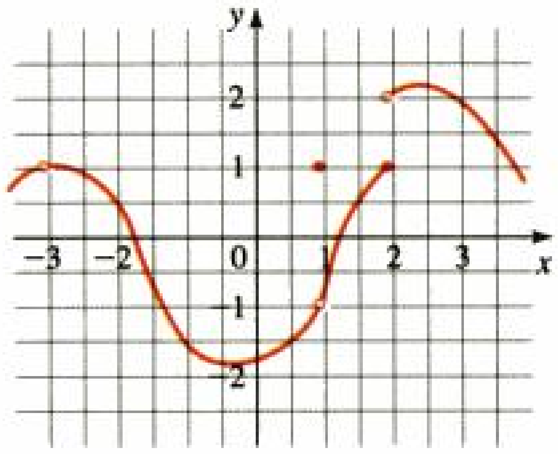
Figura 8

■

16. Exprese el valor del límite, si existe, de la gráfica dada de f. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 3} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 1} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to -3} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to 2} f(x)$



17–22 ■ Use un dispositivo de graficación para determinar si existe el límite. Si existe, estime su valor hasta dos decimales.

17. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$

18. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

19. $\lim_{x \to 0} \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\cos 5x - \cos 4x}$

21. $\lim_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

23–26 ■ Grafique la función definida por partes y emplee su gráfica para hallar los valores de los límites, si existen.

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 2} f(x)$

24. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 0} f(x)$

25. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to -1} f(x)$

26. $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \le -2 \\ -x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to -2} f(x)$

Descubrimiento • Debate

27. Una función con límites especificados Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisface las siguientes condiciones.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \qquad f(0) = 2 \qquad f(2) = 3$$

¿Cuántas funciones hay?

28. Dificultades con las calculadoras para gráficas

a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

b) Infiera el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que por último llegue a valores 0 para $h(x)$. ¿Tiene la seguridad de que su inferencia del inciso b) es correcta? Explique por qué en algún momento obtuvo valores 0.

d) Grafique la función h en el rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Luego amplíe el punto donde la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ cuando x se aproxima a 0. Continúe con la amplificación hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con sus resultados del inciso c).

12.2 Determinación algebraica de límites

En la sección 12.1 se emplearon calculadoras y gráficas para inferir los valores de límites, pero se vio que tales métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección, se usan métodos algebraicos para hallar límites de manera exacta.

Leyes de límites

Se usan las siguientes propiedades de límites, llamadas *leyes de límites*, para calcular los límites.

Los límites especiales 1 y 2 son intuitivamente obvios, un vistazo a las gráficas de $y = c$ y $y = x$ lo convencerán de su validez. Los límites 3 y 4 son casos especiales de las leyes de límites 6 y 7 (límites de una potencia y una raíz).

Ejemplo 2 Uso de las leyes de límites

Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Solución

a) $$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5}4$$
Límites de una diferencia y suma

$$= 2\lim_{x\to 5}x^2 - 3\lim_{x\to 5}x + \lim_{x\to 5}4$$
Límite de un múltiplo constante

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4$$
Límites especiales 3, 2 y 1

$$= 39$$

b) Se empieza con la ley 5, pero su uso se justifica por completo sólo en la etapa final cuando se ve que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)}$$
Límite de un cociente

$$= \frac{\lim_{x\to -2}x^3 + 2\lim_{x\to -2}x^2 - \lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}5 - 3\lim_{x\to -2}x}$$
Límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$
Límites especiales 3, 2 y 1

$$= -\frac{1}{11}$$ ■

Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En el ejemplo 2a), se encuentra que $\lim_{x\to 5}f(x) = 39$. En otras palabras, se habría obtenido la respuesta correcta al sustituir x por 5. De manera similar, la sustitución directa proporciona la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones del ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el uso similar de leyes de límites prueba que la sustitución directa funciona siempre para tales funciones. Este hecho se expresa como sigue:

Límites por sustitución directa

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a}f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman **continuas en a**. Aprenderá más acerca de las funciones continuas cuando estudie cálculo.

Newton fue bastante más modesto respecto a sus logros. Él dijo, "me parece haber sido sólo como un niño jugando en la playa . . . mientras el gran océano de la verdad . . . yace sin descubrir ante mí". Newton fue nombrado caballero por la reina Ana en 1705 y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster.

Ejemplo 5 Hallar un límite mediante simplificación

Evalúe $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

Solución No se puede usar sustitución directa para evaluar este límite porque el límite del denominador es 0. Así que primero se simplifica algebraicamente el límite.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(9+6h+h^2) - 9}{h} && \text{Desarrolle} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h\to 0} (6+h) && \text{Cancele } h \\
&= 6 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 6 Hallar el límite mediante racionalización

Encuentre $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

Solución No se puede aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de manera inmediata, puesto que el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} && \text{Racionalice el numerador} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+9)} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Este cálculo confirma la inferencia que se hizo en el ejemplo 2 en la sección 12.1. ■

Uso de límites izquierdo y derecho

Algunos límites se calculan mejor si se determinan primero los límites izquierdo y derecho. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 12.1. Establece que *un límite bilateral existe si y sólo si ambos límites unilaterales existen y son iguales.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Al calcular los límites unilaterales se emplea el hecho de que las leyes de los límites se cumplen también para límites unilaterales.

Ejemplo 7 Comparar los límites derecho e izquierdo

Muestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Solución Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del ejemplo 7 parece plausible a partir de la figura 2.

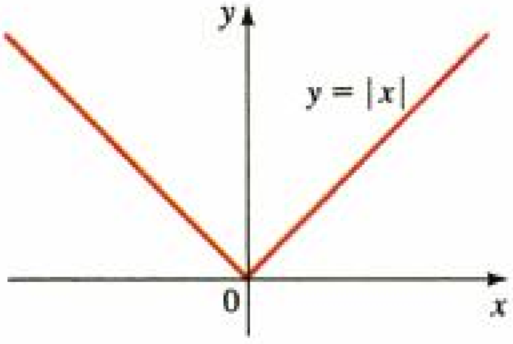


Figura 2

Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, se tiene $|x| = -x$, así que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por consiguiente

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

■

Ejemplo 8 Comparación de los límites derecho e izquierdo

Pruebe que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Solución Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

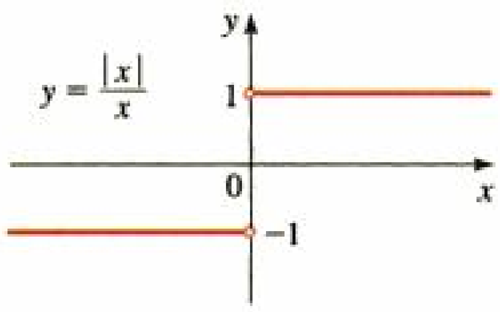


Figura 3

Puesto que los límites derecho e izquierdo existen y son diferentes, se deduce que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 3 y corrobora los límites que se determinaron. ■

Ejemplo 9 Límite de una función definida por partes

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Determine si $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

Solución Puesto que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro decimales.

c) Use las leyes de los límites para hallar el valor exacto del límite.

27–32 ■ Encuentre el límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.

27. $\lim_{x\to -4} |x+4|$

28. $\lim_{x\to -4^-} \dfrac{|x+4|}{x+4}$

29. $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

30. $\lim_{x\to 1.5} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

31. $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

32. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

33. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

b) ¿Existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$?

c) Bosqueje la gráfica de f.

34. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si existe.

i) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

ii) $\lim_{x\to 0} h(x)$

iii) $\lim_{x\to 1} h(x)$

iv) $\lim_{x\to 2^-} h(x)$

v) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$

vi) $\lim_{x\to 2} h(x)$

b) Bosqueje la gráfica de h.

Descubrimiento • Debate

35. Cancelación y límites

a) ¿Qué está mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$$

b) Dado el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+3)$$

es correcta.

36. Contracción de Lorentz En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como una función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre el $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

37. Límites de sumas y productos

a) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ podría existir aun cuando no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

b) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ podría existir aun cuando no existen $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

12.3 Rectas tangentes y derivadas

En esta sección se puede observar cómo surgen los límites cuando se intenta hallar la recta tangente a una curva o la tasa de cambio instantánea de una función.

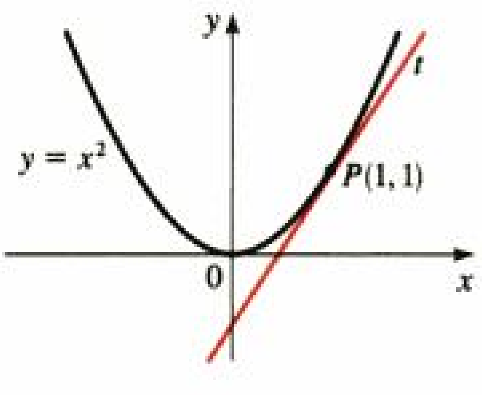


Figura 1

Problema de la tangente

Una *recta tangente* es una recta que *sólo* toca a una curva. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la parábola $y = x^2$ y la recta tangente t que toca a la parábola en el punto $P(1, 1)$. Se podrá hallar una ecuación de la recta tangente t tan pronto como se conozca su pendiente m. La dificultad es que sólo se conoce el punto P, en t, mientras que para calcular la pendiente se requieren dos puntos. Pero observe que se puede calcular

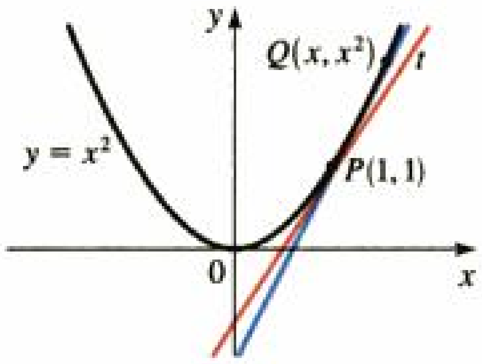


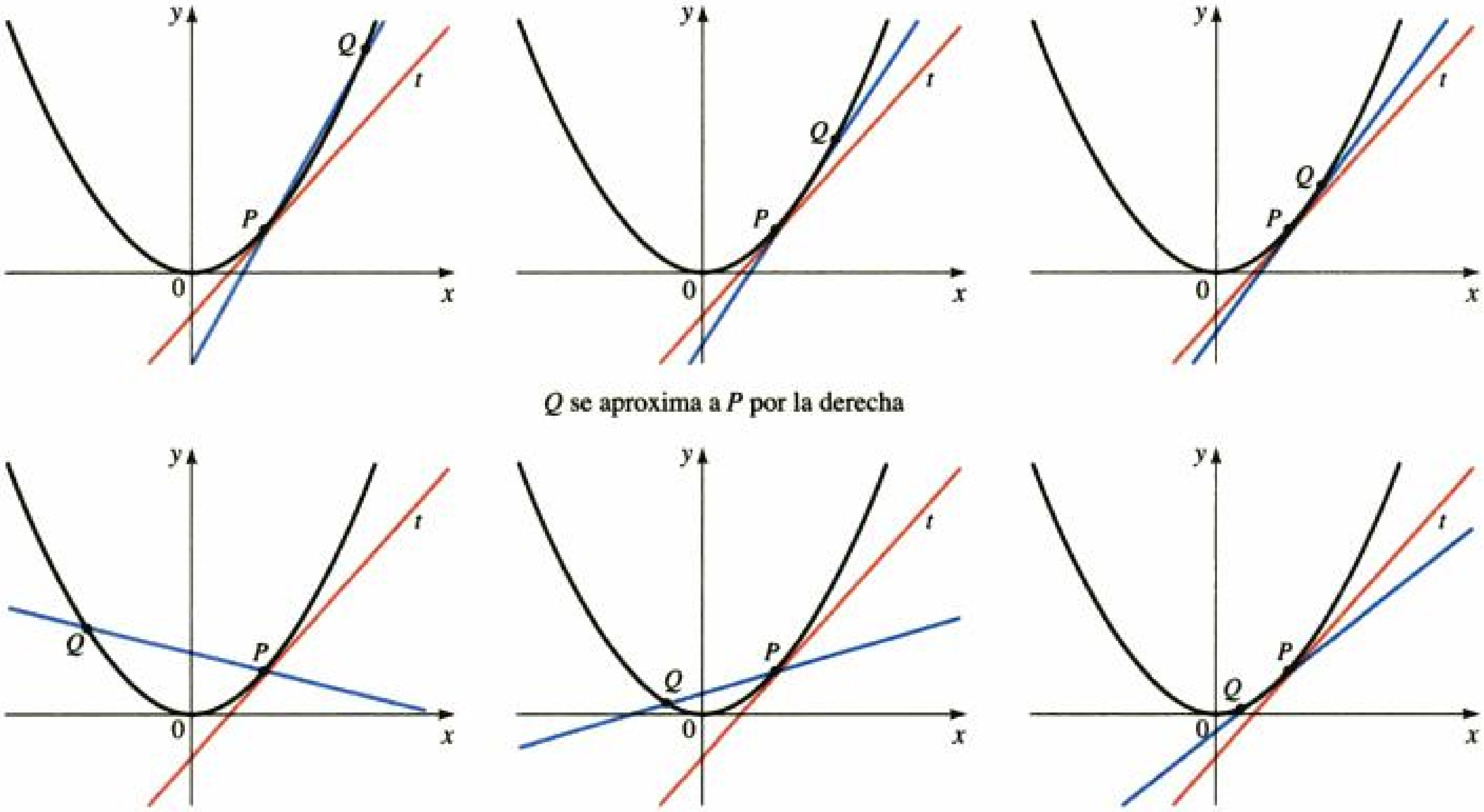
Figura 2

una aproximación a m si se elige un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la figura 2) y se calcula la pendiente m_{PQ} de la secante PQ.

Se elige $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ahora se permite que x se aproxime a 1, de modo que Q se aproxima a P a lo largo de la parábola. En la figura se muestra cómo las secantes correspondientes rotan respecto a P y se aproximan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P por la derecha

Q se aproxima a P por la izquierda

Figura 3

La pendiente de la tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Por lo tanto, usando el método de la sección 12.2, se tiene

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma punto-pendiente para la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Véase la sección 1.10.)

Ahora que se sabe que la pendiente de la recta tangente es $m = 2$, se puede usar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta para encontrar su ecuación:

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se amplía lo suficiente la zona del punto, la curva se asemeja a una recta. En la figura 4 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$. Mientras más se amplía la zona, más se parece a una recta la parábola. En otras palabras, la curva se vuelve casi indistinguible de su recta tangente.

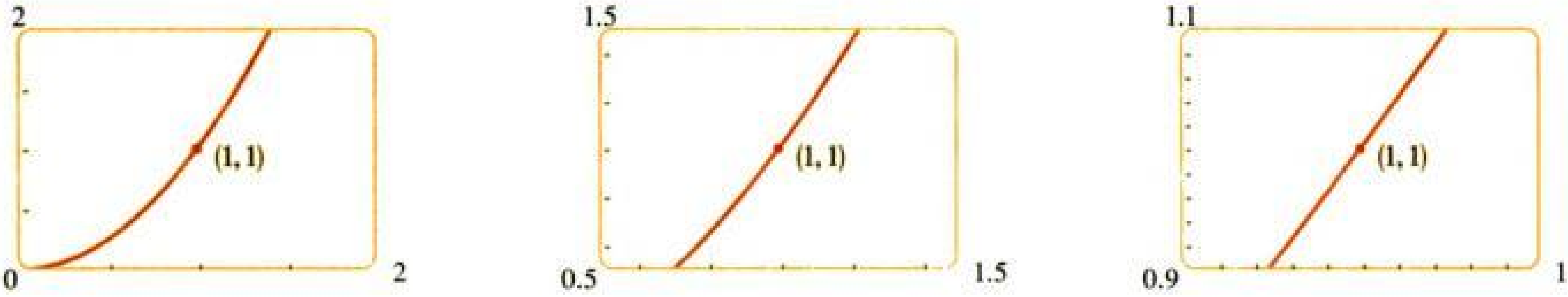


Figura 4

Ampliación de la zona del punto $(1, 1)$ en la parábola $y = x^2$

Si se tiene una curva general C con ecuación $y = f(x)$ y se quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces se considera un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y se calcula la pendiente de la secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces se permite que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C permitiendo que x se aproxime a a. Si m_{PQ} se aproxima a un número m, entonces se define la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la tangente es la posición limitante de la secante PQ cuando Q se aproxima a P. Véase la figura 5.)

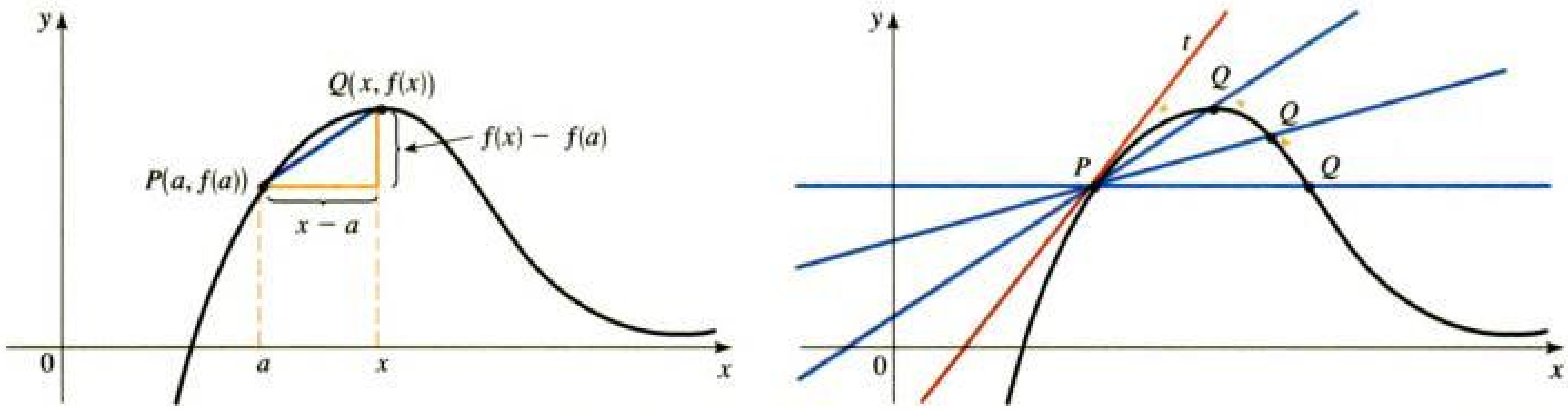


Figura 5

Definición de una recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

Ejemplo 1 Hallar una recta tangente a una hipérbola

Encuentre una ecuación de la tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto $(3, 1)$.

Solución Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la recta tangente en $(3, 1)$ es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} && \text{Definición de } m \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{3}{x} - 1}{x - 3} && f(x) = \frac{3}{x} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} && \text{Multiplique numerador y denominador por } x \\ &= \lim_{x\to 3}\left(-\frac{1}{x}\right) && \text{Cancele } x - 3 \\ &= -\frac{1}{3} && \text{Permita que } x \to 3 \end{aligned}$$

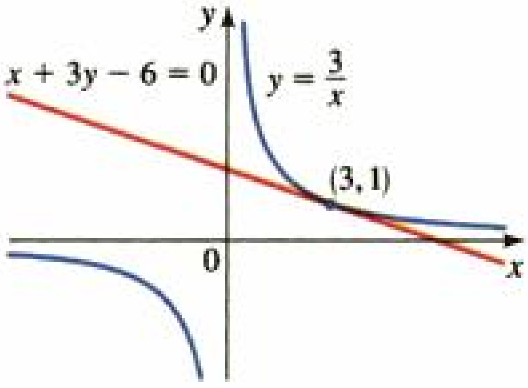


Figura 6

Por lo tanto, una ecuación de la tangente en el punto $(3, 1)$ es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y la tangente se muestran en la figura 6. ■

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que algunas veces es más fácil usar. Sea $h = x - a$. Entonces $x = a + h$, de modo que la pendiente de la secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Véase la figura 7 donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si sucede que $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.

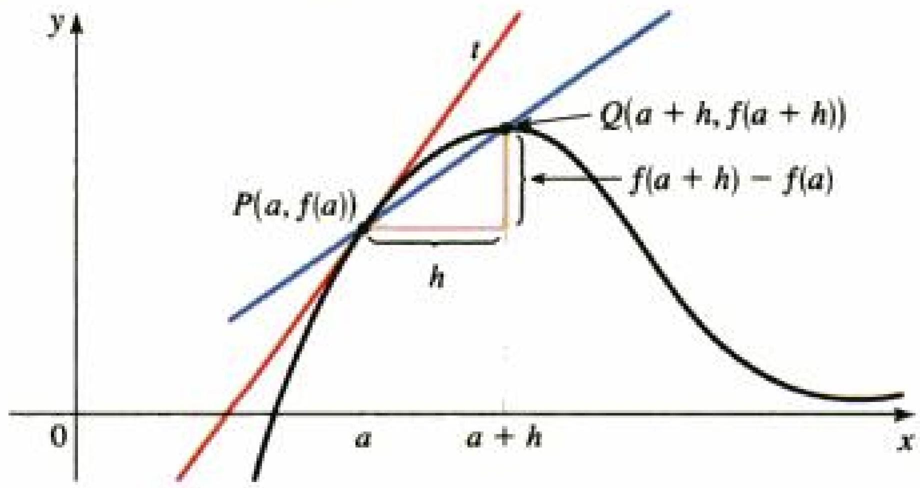


Figura 7

Observe que cuando x se aproxima a a, h tiende a 0 (porque $h = x - a$) y, por lo tanto, la expresión para la pendiente de la tangente es

$$\boxed{m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Newton y los límites

En 1687, Isaac Newton (véase la página 894) publicó su obra maestra *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton explicó su versión del cálculo y la empleó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, y explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes de los eruditos griegos como Eudoxus y Arquímedes. Aunque los aspectos de la idea de límite están implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxus y Arquímedes nunca formularon de manera explícita el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Ferinat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no emplearon en realidad límites. Fue Isaac Newton quien habló primero en forma explícita acerca de los límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se aproximan lo más posible por alguna diferencia dada". Newton estableció que el límite era el concepto básico en cálculo, pero quedó en manos de matemáticos posteriores como Cauchy aclarar estas ideas.

Ejemplo 2 Hallar una tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la cuerva $y = x^3 - 2x + 3$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, entonces la pendiente de la recta tangente donde $a = 1$ es

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h) + 3] - [1^3 - 2(1) + 3]}{h} && f(x) = x^3 - 2x + 3 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 3 - 2}{h} && \text{Desarrolle el numerador} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h + 3h^2 + h^3}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h\to 0} (1 + 3h + h^2) && \text{Cancele } h \\
&= 1 && \text{Permita que } h \to 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, una ecuación de la recta tangente en $(1, 2)$ es

$$y - 2 = 1(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = x + 1$$

■

Derivadas

Se ha visto que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se puede escribir como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Resulta que esta expresión surge también en muchos otros contextos, como hallar velocidades y otras tasas de cambio. Debido a que este tipo de límite ocurre de manera extensa, recibe un nombre y notación especiales.

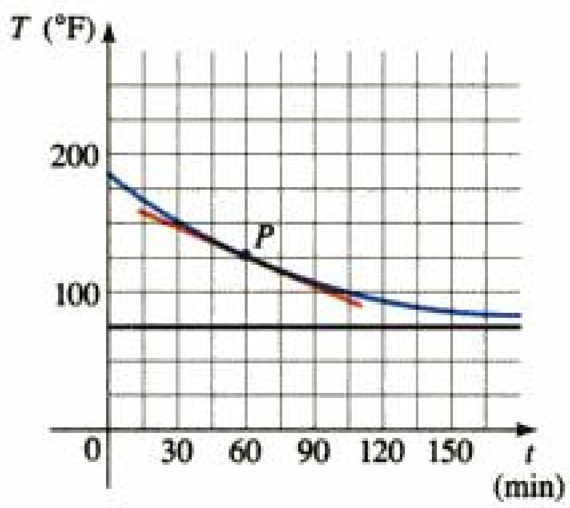
Definición de una derivada

La **derivada de una función f en un número a**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

ratura del pavo y finalmente alcanza la temperatura ambiente. Midiendo la pendiente de la tangente, estime la tasa de cambio de la temperatura después de una hora.



30. Frecuencia cardiaca Un monitor cardiaco se emplea para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El monitor compila el número de latidos después de t minutos. Cuando se grafican los datos de la tabla, la pendiente de la tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos	2530	2661	2806	2948	3080

a) Encuentre las frecuencias cardiacas promedio (pendientes de las secantes) en los intervalos de tiempo $[40, 42]$ y $[42, 44]$.

b) Estime la frecuencia cardiaca del paciente después de 42 minutos promediando las pendientes de estas dos secantes.

31. Flujo de agua Un depósito contiene 1000 galones de agua, que salen por el fondo del depósito en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que permanece en el depósito (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

a) Encuentre las tasas promedio a las que el agua fluye del depósito (pendientes de las secantes) para los intervalos de tiempo $[10, 15]$ y $[15, 20]$.

b) La pendiente de la tangente en el punto $(15, 250)$ representa la tasa a la cual el agua fluye del depósito después de 15 minutos. Estime esta tasa promediando las pendientes de las secantes del inciso a).

32. Crecimiento de la población mundial En la tabla se muestran datos de la población mundial en el siglo XX.

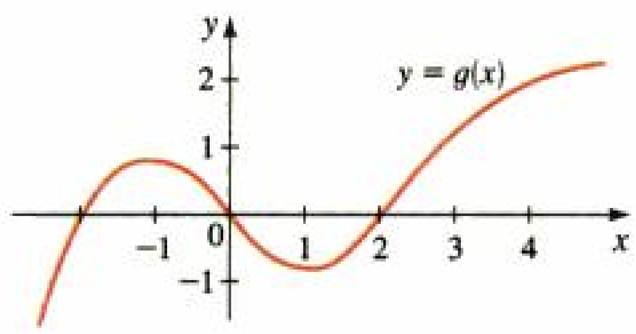
Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

Estime la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 promediando las pendientes de dos secantes.

Descubrimiento • Debate

33. Estimación de las derivadas de una gráfica Para la función g cuya gráfica se da, disponga los siguientes números en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



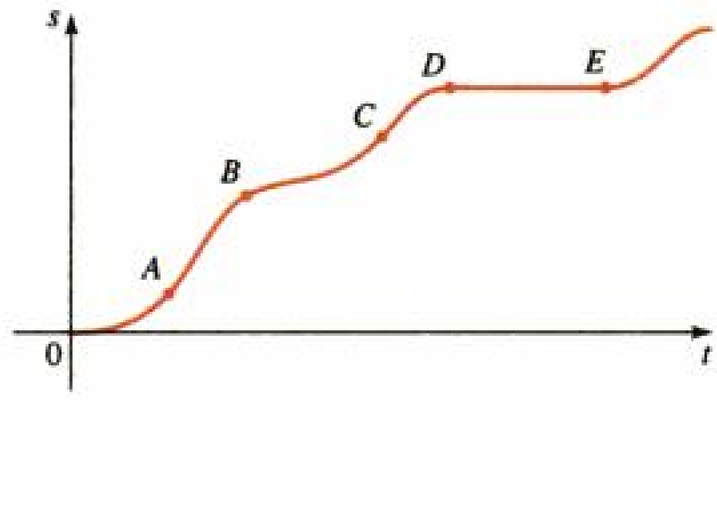
34. Estimación de las velocidades de una gráfica La gráfica muestra la función de posición de un automóvil. Use la forma de la gráfica para explicar sus respuestas a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del automóvil?

b) ¿El automóvil iba más rápido en B o en C?

c) ¿El automóvil desaceleró o aceleró en A, B y C?

d) ¿Qué sucedió entre D y E?



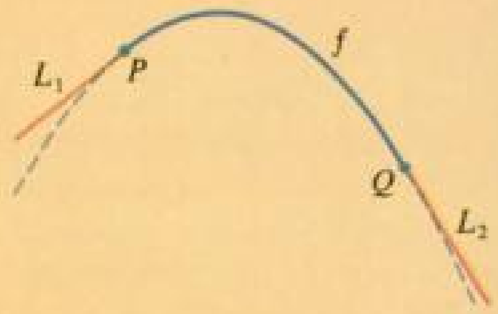
PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Diseño de una montaña rusa

Suponga que se le pide diseñar el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Al estudiar las fotografías de sus montañas rusas favoritas, decide que la pendiente de ascenso sea 0.8 y la de descenso -1.6. Después, conecta estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ con parte de una parábola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que la pista sea uniforme no puede haber cambios abruptos de dirección, por lo que desea que los segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q, como se muestra en la figura.



1. Para simplificar las ecuaciones, usted decide colocar el origen en P. Como consecuencia, ¿cuál es el valor de c?
2. Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Para asegurar que la pista sea uniforme en los puntos de transición, ¿cuáles deben ser los valores de $f'(0)$ y $f'(100)$?
3. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, muestre que $f'(x) = 2ax + b$.
4. Use los resultados de los problemas 2 y 3 para determinar los valores de a y b. Es decir, encuentre una fórmula para $f(x)$.
5. Grafique L_1, f y L_2 para comprobar en forma gráfica que las transiciones son uniformes.
6. Encuentre la diferencia de altura entre P y Q.

12.4 Límites en el infinito; límites de sucesiones

En esta sección se estudia una clase especial de límite conocida como *límite en el infinito*. Se examina el límite de una función $f(x)$ cuando aumenta el valor de x. Se examina también el límite de una sucesión a_n cuando n aumenta. Los límites de sucesiones se emplearán en la sección 12.5 como ayuda para determinar el área bajo la gráfica de una función.

Límites en el infinito

x	$f(x)$
0	−1.000000
±1	0.000000
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

Se investigará el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x toma valores grandes. En la tabla del margen se dan los valores de esta función correctos hasta seis decimales, y la gráfica de f ha sido trazada mediante una computadora en la figura 1.

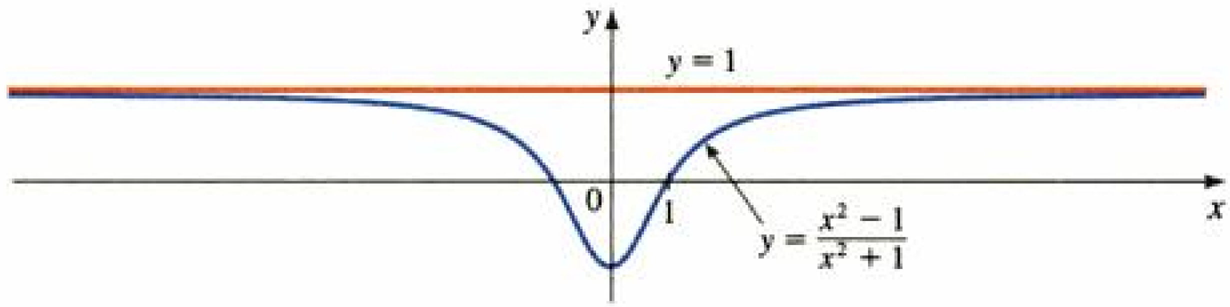


Figura 1

Cuando x toma valores cada vez más grandes, se ve que los valores de $f(x)$ se aproximan a 1. De hecho, al parecer se puede hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen a 1 tanto como se quiera al tomar x suficientemente grande. Esta situación se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más a L cuando x toma valores cada vez más grandes.

Límite en el infinito

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

indica que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores suficientemente grandes.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty$$

Los límites en el infinito se estudian en la sección 3.6.

El símbolo ∞ no representa un número. Sin embargo, con frecuencia la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x se vuelve infinita, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L"

Las ilustraciones geométricas se muestran en la figura 2. Observe que hay muchas maneras para que la gráfica de f se aproxime a la recta $y = L$ (que se llama *asíntota horizontal*) como se ve a la derecha.

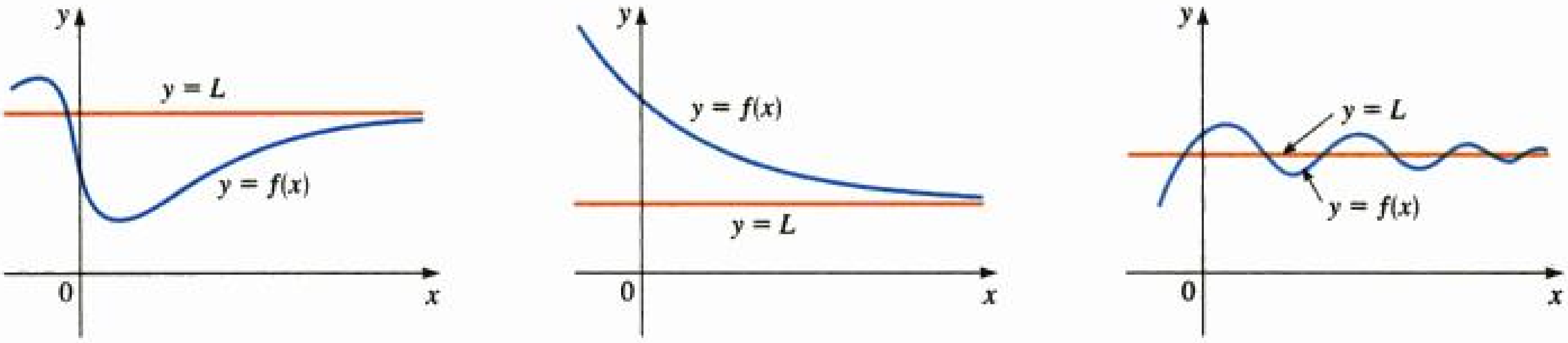


Figura 2
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Refiriéndose de nuevo a la figura 1, se ve que para valores numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ se aproximan a 1. Si se permite que x disminuya por valores negativos sin cota, se puede hacer que $f(x)$ se aproxime a 1 tanto como se desee. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

Límite en el infinito negativo

Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores negativos suficientemente grandes.

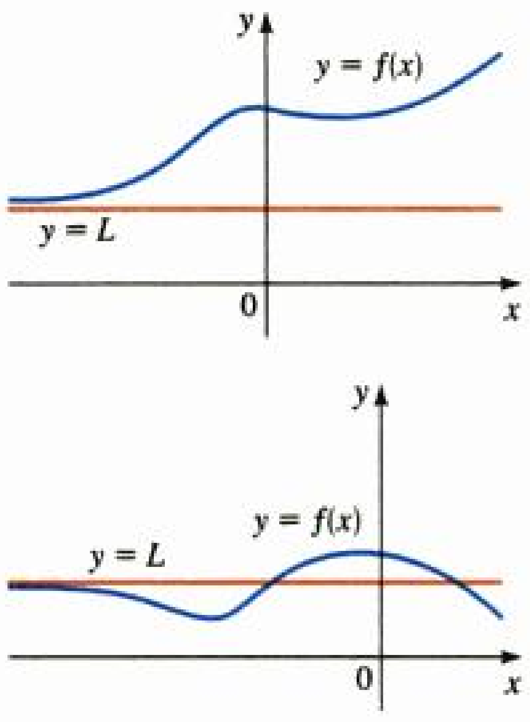


Figura 3
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ suele leerse como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito negativo, es L"

La definición se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ como se ve a la izquierda.

Asintota horizontal

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

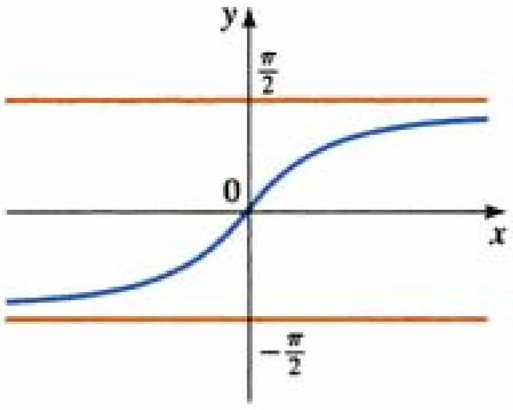


Figura 4
$y = \tan^{-1} x$

Por ejemplo, la curva ilustrada en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como una asíntota horizontal porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Como se asegura en la sección 7.4, un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1} x$ (véase la figura 4). De hecho,

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que ambas rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se deduce del hecho de que las líneas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

Ejemplo 1 Límites en el infinito

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

Primero se investigan las asíntotas horizontales y los límites en el infinito para funciones racionales en la sección 3.6.

Solución Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si se toma un valor de x bastante grande, se puede hacer que $1/x$ se aproxime a 0 tanto como se desee. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Con un razonamiento similar se ve que cuando x es grande y negativa, $1/x$ es pequeña y negativa, por lo tanto se tiene también

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Ésta es una hipérbola; véase la figura 5.) ■

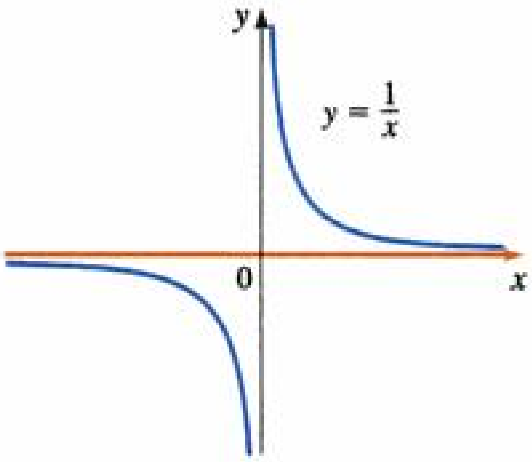


Figura 5
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Las leyes de límites analizadas en la sección 12.2 se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si se combina la ley 6 (límite de una potencia) con los resultados del ejemplo 1, se obtiene la siguiente importante regla para calcular límites.

> Si k es un entero positivo, entonces
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Ejemplo 2 Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Solución Para evaluar el límite de una función racional en el infinito, se divide primero numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador. (Se podría suponer que $x \neq 0$ puesto que sólo se tiene interés en valores grandes de x.) En este caso, la potencia más alta de x en el denominador es x^2, así que se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } x^2$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{Límite de un cociente}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} \qquad \text{Límites de sumas y diferencias}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5} \qquad \text{Permita que } x \to \infty$$

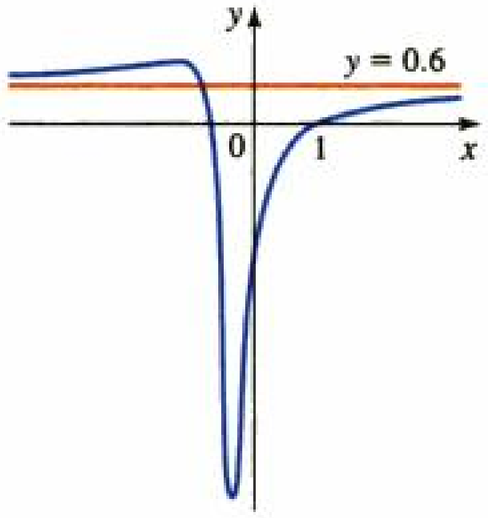


Figura 6

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ es también $\frac{3}{5}$. En la figura 6 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. ■

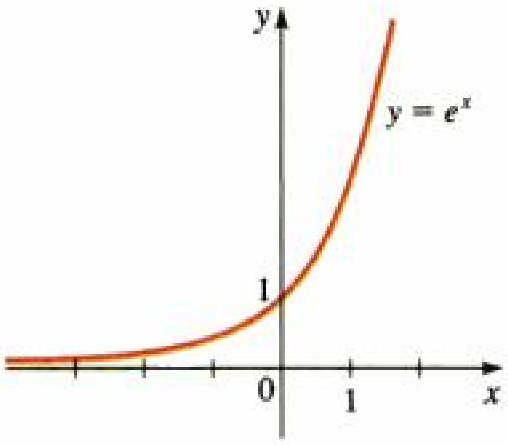
Ejemplo 3 Límite en el infinito negativo

Use métodos numéricos y gráficos para determinar $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

Solución De la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ en la figura 7 y la tabla de valores correspondiente, se puede observar que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

Figura 7

■

En particular, puesto que se sabe que $\lim_{x\to\infty}(1/x^k) = 0$ cuando k es un entero positivo, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{si } k \text{ es un entero positivo}$$

Observa que las leyes de los límites dadas en la sección 12.2 se cumplen también para límites de sucesiones.

Ejemplo 5 Hallar el límite de una sucesión

Encuentre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

Solución El método es similar al que se empleó en el ejemplo 2: divida numerador y denominador entre la potencia más alta de n y después use las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } n$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} \qquad \text{Límites de un cociente y una suma}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \text{Permita que } n \to \infty$$

Este resultado muestra que la inferencia realizada antes a partir de las figuras 9 y 10 fue correcta.

Por lo tanto, la sucesión $a_n = n/(n+1)$ es convergente. ■

Ejemplo 6 Una sucesión que diverge

Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

Solución Si se escriben los términos de la sucesión, se obtiene

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

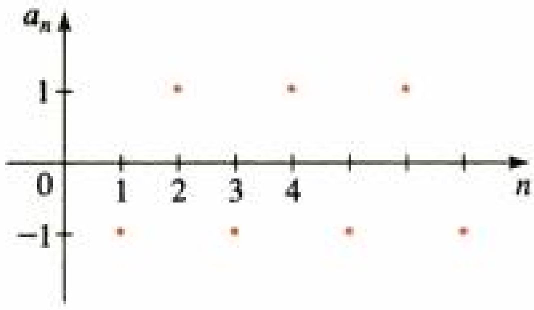


Figura 12

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 12. Puesto que los términos oscilan entre 1 y -1 de manera infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Así, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente. ■

Ejemplo 7 Hallar el límite de una sucesión

Encuentre el límite de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Solución Antes de calcular el límite, se simplificará primero la expresión para a_n. Debido a que $n^3 = n \cdot n \cdot n$, se coloca un factor de n debajo de cada factor en el numerador que contiene una n:

$$a_n = \frac{15}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$